

Цель этой заметки — доказать теорему Иссерлиса о подсчёте ожиданий для многомерного нормального распределения. По дороге выведем функцию производящую моменты для одномерного нормального  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  и многомерного нормального  $\mathcal{N}(\mu, C)$ .

## Ожидание экспоненты

Первая задача. Найдите  $\mathbb{E}(\exp(Y))$  для нормальной  $Y \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ .

Сначала стандартизируем  $Y$ ,  $Y = \mu + \sigma X$ , где  $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ :

$$\mathbb{E}(\exp(Y)) = \mathbb{E}(\exp(\mu) \exp(\sigma X)) = \exp(\mu) \mathbb{E}(\exp(\sigma X)).$$

Перейдём к интегралам!

$$\mathbb{E}(\exp(\sigma X)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\sigma x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(\sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx.$$

Для взятия интеграла выделим полный квадрат внутри экспоненты:

$$\sigma x - x^2/2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2\sigma x + \sigma^2 - \sigma^2) = -\frac{1}{2}(x - \sigma)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Возвращаемся к интегралу:

$$\mathbb{E}(\exp(\sigma X)) = \dots = \int_{\mathbb{R}} \exp(\sigma^2/2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(x - \sigma)^2/2) dx = \exp(\sigma^2/2) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(x - \sigma)^2/2) dx.$$

Замечаем, что последний интеграл — это площадь под нормальной функцией плотности, смещённой на  $\sigma$  вправо. И эта площадь равна единице.

Задача раз решена,

$$\mathbb{E}(\exp(Y)) = \exp(\mu) \exp(\sigma^2/2) = \exp(\mu + \sigma^2/2).$$

## Одномерная функция производящая моменты

Вторая задача. Найдите функцию производящую моменты для  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

По-определению,  $\text{mgf}_Y(u) = \mathbb{E}(\exp(uY))$ .

Заметим, что  $uY \sim \mathcal{N}(\mu \cdot u, \sigma^2 \cdot u^2)$ .

Поэтому сразу получаем, что  $\text{mgf}_Y(u) = \exp(\mu u + \sigma^2 u^2/2)$ .

## Многомерная функция производящая моменты

Третья задача. Найдите функцию производящую моменты для случайного вектора  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ .

По-определению,  $\text{mgf}_Y(u) = \mathbb{E}(\exp(u^T Y))$ .

Заметим, что  $u^T Y$  это скалярная случайная величина с нормальным распределением  $\mathcal{N}(u^T \mu, u^T C u)$ .

Снова быстро получаем функцию производящую моменты,

$$\text{mgf}_Y(u) = \exp(u^T \mu + u^T C u/2).$$

Производящая функция выглядит как экспоненты от квадратичной функции,

$$\text{mgf}_Y(u) = \exp(q(u)), \quad q(u) = u^T \mu + u^T C u/2.$$

---

## Теорема Иссерлиса

Четвёртая задача. Для случайного вектора  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, C)$  последовательно найдите  $\mathbb{E}(Y_1)$ ,  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2)$ ,  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3)$  и  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$ .

Вспомним, что  $\mathbb{E}(Y_1) = \text{mgf}'_1(0)$ ,  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \text{mgf}''_{12}(0)$  и так далее.

Немного заранее подготовимся! Во-первых, в нуле  $q(0) = 0$ ,  $\exp(q(0)) = 1$ .

Найдём первую производную  $q'_1(u) = \mu_1 + c_1^T u$ , где  $c_1$  — первый столбец матрицы  $C$ . Для наглядности перепишем её в скалярном виде

$$q'_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mu_1 + c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1n}u_n.$$

В нуле первая производная равна  $q'_1(0) = \mu_1$  соответствующему ожиданию.

Вторая производная  $q''_{12}(u) = c_{12}$  тождественно равна соответствующей ковариации.

Третья производная  $q'''_{123} = 0$  тождественно равна нулю, ведь  $q(u)$  — квадратичная функция.

А теперь считаем ожидания по очереди,

$$\mathbb{E}(Y_1) = \text{mgf}'_1 = \exp(q)q'_1 = 1 \cdot \mu_1 = \mu_1.$$

Пока что ничего неожиданного, мы же сами обозначили  $\mathbb{E}(Y_1)$  как  $\mu_1$ .

Пойдём дальше!

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \text{mgf}''_{12} = \exp(q)(q'_1 q'_2 + q''_{12}) = \mu_1 \mu_2 + c_{12}.$$

Это тождество, верное для любых случайных величин, не только для нормальных,  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(Y_2) + \text{Cov}(Y_1, Y_2)$ .

Продолжаем,

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3) = \text{mgf}'''_{123} = \exp(q)(q'_1 q'_2 q'_3 + q'_3 q''_{12} + q'_1 q''_{23} + q'_2 q''_{13}) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 c_{23} + \mu_2 c_{13} + \mu_3 c_{12}.$$

Каждое слагаемое идёт с единичным весом. Каждое слагаемое содержит все индексы от единицы до максимального ровно по одному разу. Все варианты перемножения  $\mu_i$  и  $c_{jk}$  присутствуют. Множитель  $\mu_i$  «съедает» один индекс, а  $c_{jk}$  «съедает» два индекса.

Если какой-то индекс повторяется, то его надо повторить :)

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_2) = \text{mgf}'''_{122} = \exp(q)(q'_1 q'_2 q'_2 + q'_2 q''_{12} + q'_1 q''_{22} + q'_2 q''_{12}) = \mu_1 \mu_2 \mu_2 + \mu_1 c_{22} + \mu_2 c_{12} + \mu_2 c_{12}.$$

Фанаты могут убедиться, что

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_1 \mu_4 c_{23} + \mu_2 \mu_4 c_{13} + \mu_3 \mu_4 c_{12} + \mu_1 \mu_3 c_{24} + \mu_1 \mu_2 c_{34} + \mu_2 \mu_3 c_{14} + c_{12} c_{34} + c_{13} c_{24} + c_{14} c_{23}.$$

Пример.

Вектор  $Y$  имеет совместное нормальное распределение,

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \right).$$

Найдите  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3)$ .

Решение:

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 Y_3) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 c_{23} + \mu_2 c_{13} + \mu_3 c_{12} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -2.$$