Очень короткие записки по мотивам курса про Кубик Рубика

Иван Адо

29 августа 2016 г.

Аннотация

Цель написания сего документа – сформулировать один из алгоритмов сборки Кубика Рубика понятным и полезным для школьников образом. Поскольку представления о понятности и полезности у всех разные, вместе с алгоритмом читатель найдёт ниже несколько комментариев о том, как устроены преобразования Кубика Рубика, и парочку философских и не очень отступлений от темы.

Содержание

Вводная часть

Написать этот короткий документ меня побудили три причины. Во-первых, мне хотелось в каком-то более понятном (чем тот, что родился в 41 сезоне КЛШ) виде сформулировать один из алгоритмов сборки Кубика Рубика (далее – просто Кубика). Во-вторых, в сезоне не получилось поговорить про некоторые важные идеи, связанные с его сборкой, – так пусть они хотя бы попадут на летнешкольный диск. Ну и третья причина – я решил написать лично для себя небольшую шпаргалку про кое-что из того, что я познал, готовя курс "Кубик Рубика" для Летней школы. :)

1 Обозначения

Каждую из шести граней Кубика обозначим первой буквой английского слова, описывающего её положение в пространстве: right, left, front, back, up, down. Повороты этих граней на 90° по часовой стрелке обозначим буквами R, L, F, B, U, D соответственно. Преобразование, обратное к некоторому преобразованию Кубика, будем обозначать как возведение исходного преобразования в степень -1. Например, поворот правой грани на 90° против часовой стрелки в этих обозначениях выглядит так: R^{-1}. Будем считать очевидным, что для любого преобразования X верно $(\mathrm{X}^{-1})^{-1} = \mathrm{X}$.

Кубики (или места, в которые можно поставить кубики), принадлежащие сразу трём граням[1], обозначим тремя буквами, соответствующими этим трём граням. Аналогично кубики (или места, в которые можно поставить кубики), принадлежащие только двум граням[2], обозначим двумя буквами, соответствующими этим двум граням. Так ufr – это кубик в верхнем переднем правом углу Кубика, а uf – это кубик на верхнем правом ребре Кубика.

Сделаем одно важное замечание. При выбранных обозначениях граней и кубиков роль, например, грани u (u-слоя) может играть грань Кубика любого цвета. Если в некоторый момент необходимо выполнить какое-то преобразование синей грани Кубика, которая в этот момент является его правой гранью (т.е. буквально видится вам как его правая грань), а соответствующее движение вы знаете только для грани верхней, надо, разумеется, повернуть весь Кубик так, чтобы синяя грань оказалась верхней. После этого можно применить известное вам преобразование.

[1] Или короче: угловые кубики.

[2] Или короче: рёберные кубики.

2 Немного теории

Кубик состоит из 26 маленьких кубиков. Из них 6 – центры граней, и ни одно преобразование Кубика не затрагивает их. Кроме них есть ещё 8 угловых кубиков и 12 кубиков на рёбрах. Любое состояние Кубика определяется, во-первых, положением каждого из 20 (8 + 12) кубиков, а во-вторых – их [цветовой] ориентацией. Наивному начинающему кубисту может показаться, что любой кубик можно поместить в какое угодно положение и как угодно ориентировать, но это, конечно же, не так. Для начала можно догадаться, что при любом преобразовании угловые кубики переходят в угловые, а рёберные – в рёберные, но на самом деле есть ещё три ограничения, уменьшающие число допустимых[3] состояний Кубика. О них и поговорим в этом разделе.

2.1 Общая чётность перестановок кубиков

Сперва подумаем про положения кубиков. Занумеруем каким-нибудь образом все угловые и рёберные кубики, а также все места в углах и на рёбрах Кубика. Далее заметим, что любое преобразование Кубика – это всегда комбинация шести базовых преобразований (и обратных к ним)[4]: R, L, F, B, U, D. Каждое из них представляется в виде произведения двух 4-циклов[5]. Например[6]:

$$\mathrm{R} = (\mathrm{ufr}, \mathrm{ubr}, \mathrm{dbr}, \mathrm{dfr})\,(\mathrm{ur}, \mathrm{br}, \mathrm{dr}, \mathrm{fr}) \tag{1}$$

Известно, что цикл длины 4 – это, вне зависимости от способа нумерации элементов и их мест, нечётная перестановка. У нас таких циклов две штуки, так что каждое базовое преобразование задаёт чётную перестановку (минус на минус даёт плюс, все дела). Отсюда делаем такой вывод:

$$\boxed{\text{в любом допустимом состоянии номера 20 угловых и рёберных кубиков обязательно образуют чётную перестановку.}} \tag{2}$$

При этом только угловые кубики или только рёберные вполне могут образовывать и нечётную.

Пример. Предположим, что мы уже почти собрали Кубик и осталось только правильно выставить и ориентировать угловые кубики на последнем слое. В таком случае невозможна ситуация, в которой не на своих местах стоят только два угловых

[3]Т.е. тех, в которые Кубик можно перевести без использования слишком грубой мужской силы.

[4]Применённых какое-то количество раз: хоть ноль, хоть 174.

[5]Здесь и почти везде далее в формульных описаниях преобразований указывается только смена мест кубиков; изменение ориентации опускается для упрощения обозначений.

[6]Запись $(\mathrm{ufr}, \mathrm{ubr}, \mathrm{dbr}, \mathrm{dfr})$ означает, что кубик с места ufr переходит на место ubr, кубик с места ubr переходит на место dbr и так далее. То же самое можно ещё написать так: $(\mathrm{ufr}, \mathrm{ubr}, \mathrm{dbr}, \mathrm{dfr}) = \mathrm{ufr} \to \mathrm{ubr} \to \mathrm{dbr} \to \mathrm{dfr} \to \mathrm{ufr}$.

кубика. Невозможна она потому, что соответствующая перестановка этих кубиков в правильное положение была бы одной транспозицией или 2-циклом, т.е. нечётной перестановкой. По тем же причинам на данном этапе не может возникнуть, например, положения, в котором требуется переставить по кругу все 4 угловых кубика.

Вопрос любознательному читателю: а сколько всего может быть на этом этапе разных расположений угловых кубиков?

2.2 Цветовая ориентация угловых кубиков

Каждый угловой кубик имеет три цветные грани. Мы хотим каким-нибудь образом математически описать их ориентацию. Для этого будем считать, что положение Кубика в пространстве зафиксировано. Тогда его u- и d- грани тоже зафиксированы. Выльем на них немножечко женского (или мужского) лака для ногтей и дадим ему высохнуть – отныне у нас есть метка на одной из граней каждого углового кубика[7]. Пусть теперь была произведена какая-то серия преобразований. Выберем произвольный угловой кубик и посмотрим на него "снаружи". Для помещения его покрытой лаком стороны на покрытую лаком грань Кубика необходим поворот по часовой стрелке вокруг общей диагонали его и всего Кубика либо на $0°$, либо на $120°$, либо на $240°$. Будем говорить, что его цветовая ориентация[8] в этом случае равна соответственно либо 0, либо 1, либо 2. Аналогичным образом определим цветовую ориентацию всех остальных угловых кубиков.

Подметим теперь две обстоятельства. Первое: в собранном состоянии цветовая ориентация каждого углового кубика равна 0. Второе: после применения преобразования R цветовая ориентация кубиков на местах ufr и dbr равна 1, у кубиков на местах ubr и dfr она равна 2, а у остальных четырёх – по-прежнему 0. При этом

$$1 + 1 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 6 \tag{3}$$

т.е. остаток от деления этой суммы на 3 такой же, как и у собранного Кубика – нулевой.

Назовём остаток от деления на 3 суммы цветовых ориентаций всех угловых кубиков суммарной цветовой ориентацией угловых кубиков[9]. Ясно, что применение остальных базовых преобразований (и обратных к ним) её тоже не меняет. Это позволяет нам сформулировать следующее утверждение:

в любом допустимом состоянии суммарная цветовая ориентация угловых кубиков равна нулю.	(4)

[7]Считаем, что исходный цвет граней просматривается через слой лака.
[8]Да, я сам придумал этот смешной термин.
[9]Боже, я уже жалею, что взялся это писать.

Пример. Невозможна ситуация, при которой Кубик полностью собран и лишь один угловой кубик неправильно ориентирован по цвету. Действительно, в этом случае суммарная цветовая ориентация угловых кубиков была бы равна 1 или 2, а не 0.

2.3 Цветовая ориентация рёберных кубиков

Каждый ребёрный кубик имеет две цветные грани. Их ориентация описывается следующим образом. Мысленно нарисуем на каждом ребре Кубика стрелку в произвольном направлении. Всего получим 12 стрелок. На ребре (внешнем) каждого рёберного кубика тоже нарисуем по стрелке так, чтобы в начальном состоянии её направление совпадало с направлением соответствующей стрелки на ребре Кубика. Таких стрелок тоже будет 12. Будем говорить, что цветовая ориентация рёберного кубика равна 0, если стрелки на общем ребре его и Кубика смотрят в одном направлении, и 1 в противном случае.

Суммарной цветовой ориентацией рёберных кубиков назовём остаток от деления на 2 суммы цветовых ориентаций всех рёберных кубиков. У собранного Кубика эта величина равна, очевидно, нулю, и аналогично ситуации с угловыми кубиками базовые преобразования её не меняют (убедитесь в этом сами), поэтому можем заключить следующее:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{в любом допустимом состоянии суммарная цветовая ориентация}\\ \text{рёберных кубиков равна нулю.}\end{array}} \tag{5}$$

Пример. Невозможна ситуация, при которой Кубик полностью собран и лишь один рёберный кубик неправильно ориентирован по цвету. Действительно, в этом случае суммарная цветовая ориентация рёберных кубиков была бы равна 1, а не 0.

3 Ещё немного теории

3.1 Коммутаторы

Пусть имеются два преобразования Кубика: X и Y. Их коммутатором называют следующее преобразование[10]:

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{X}\mathrm{Y}\mathrm{X}^{-1}\mathrm{Y}^{-1}. \tag{6}$$

Если бы X и Y коммутировали, т.е. если бы было $\mathrm{XY} = \mathrm{YX}$, их коммутатор был бы тождественным преобразованием. Действительно:

$$\mathrm{XY} = \mathrm{YX} \quad \xrightarrow{\times \mathrm{X}^{-1}} \quad \mathrm{XYX}^{-1} = \mathrm{Y} \quad \xrightarrow{\times \mathrm{Y}^{-1}} \quad \mathrm{XYX}^{-1}\mathrm{Y}^{-1} = \mathrm{e}. \tag{7}$$

[10]Запись $\mathrm{XYX}^{-1}\mathrm{Y}^{-1}$ читается слева направо. Т.е. сначала применяется преобразование X, потом Y и так далее.

Разумеется, не все преобразования коммутируют. Коммутатор в каком-то смысле является мерой некоммутативности для X и Y: чем больше кубиков преобразуются и X, и Y, тем больше $[X, Y]$ преобразует Кубик.

3.2 Сопряжения

Ещё одна полезная для сборки Кубика конструкция – это сопряжение. Сопряжением X с помощью Y называют комбинацию YXY^{-1}. Обратимся сразу к примеру.

Если, скажем, $X = (\mathrm{ufr}, \mathrm{dfr})\,(\mathrm{dbr}, \mathrm{dbl})$, то преобразование $(\mathrm{ufr}, \mathrm{dfr})\,(\mathrm{ubr}, \mathrm{dbr})$ можно организовать следующим образом: $B^{-1}XB$. Т.е. сначала B^{-1} выставляет два задних кубика правой грани на нижнюю грань, потом X меняет их местами, а в конце B поворачивает их обратно на правую грань. Получается, что сопряжение даёт возможность применять уже известные преобразования к другим наборам кубиков. Это позволяет изобретать новые, полезные для сборки Кубика, преобразования.

3.3 Коммутатор вращений двух соседних граней

Давайте теперь на примере преобразования $[R^{-1}, D^{-1}] = R^{-1}D^{-1}RD$ узнаем пару истин про все подобные [простейшие] коммутаторы. Если у вас нет под рукой Кубика, то проведите мысленный эксперимент[11] и убедитесь в следующем[12]:

$$[R^{-1}, D^{-1}] = (\mathrm{ufr}, \mathrm{dfr})\,(\mathrm{dbr}, \mathrm{dbl})\,(\mathrm{fr}, \mathrm{dr}, \mathrm{db}). \tag{8}$$

Что мы можем познать из этой формулы?

Во-первых, что порядок этого преобразования, вероятно, равен шести. Действительно, 3-цикл и пара 2-циклов не могут быть повторены меньшее число раз для возвращения Кубика в исходное состояние. Порядок $[R^{-1}, D^{-1}]$ и правда равен шести, можете в этом убедиться самостоятельно. :)

Из этой же формулы мы можем заключить, что у нас в руках отныне есть средство для перестановок пар угловых кубиков одного слоя. К примеру, принимая во внимание написанное в п.3.2, обнаруживаем следующее:

$$(\mathrm{ufr}, \mathrm{dfr})\,(\mathrm{ubr}, \mathrm{dbr}) = B^{-1}[R^{-1}, D^{-1}]^3B. \tag{9}$$

Необходимо заметить, что $[R^{-1}, D^{-1}]$ всё же не только меняет кубики местами, но ещё и меняет их цветовые ориентации. Наивно рассуждая, можно было бы ожидать, что $[R^{-1}, D^{-1}]^2$ не делает с кубиком ufr совсем ничего, но это не так. На самом деле

$$\mathrm{ufr} \xrightarrow{[R^{-1}, D^{-1}]^2} \mathrm{ufr}_+, \tag{10}$$

[11] Ха-ха.

[12] Напоминаю, что я сознательно опускаю в подобных формулах любые упоминания смены цветовых ориентаций.

где “ + ” означает, что цветовая ориентация кубика ufr сменилась с 0 на 1. Это обстоятельство будет полезно нам при сборке верхнего слоя Кубика.

3.4 Коммутаторы и 3-циклы

Один важный тип преобразований даётся коммутатором X и Y в том случае, если есть только один кубик, преобразуемый и X, и Y. А именно, справедлива следующая

Лемма. *Пусть* X *и* Y *– преобразования Кубика, и пусть существует единственный кубик (обозначим его место* a*), преобразуемый и* X*, и* Y*. В таком случае* $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ *– 3-цикл, а именно:* $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = (\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$*, где* $\mathrm{b} = \mathrm{Y}^{-1}(\mathrm{a})$*,* $\mathrm{c} = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{a})$*.*

Доказательство. Поскольку под действием $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ преобразовываться могут лишь кубики, которые в какой-то момент оказываются на месте a, и это только кубики, исходно находившиеся на местах a, b, c, для доказательства леммы нам достаточно в явном виде выписать следующие цепочки:

$$\mathrm{a} \xrightarrow{\mathrm{X}} \mathrm{X}(\mathrm{a}) \xrightarrow{\mathrm{Y}} \mathrm{X}(\mathrm{a}) \xrightarrow{\mathrm{X}^{-1}} \mathrm{a} \xrightarrow{\mathrm{Y}^{-1}} \mathrm{b}, \tag{11}$$

$$\mathrm{b} \xrightarrow{\mathrm{X}} \mathrm{b} \xrightarrow{\mathrm{Y}} \mathrm{a} \xrightarrow{\mathrm{X}^{-1}} \mathrm{c} \xrightarrow{\mathrm{Y}^{-1}} \mathrm{c}, \tag{12}$$

$$\mathrm{c} \xrightarrow{\mathrm{X}} \mathrm{a} \xrightarrow{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}(\mathrm{a}) \xrightarrow{\mathrm{X}^{-1}} \mathrm{Y}(\mathrm{a}) \xrightarrow{\mathrm{Y}^{-1}} \mathrm{a}. \tag{13}$$

□

Пример. Применение $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]$ затрагивает единственный кубик на u-слое: кубик ufr. Поэтому пара преобразований U и $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]$ удовлетворяет условиям леммы и справедливо следующее:

$$[\mathrm{U},[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]] = \mathrm{UR}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{RDU}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{DR} = (\mathrm{ubr},\mathrm{ufr},\mathrm{dfr}). \tag{14}$$

Любознательному читателю предлагается убедиться в том, что пара U и $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{R}$ тоже удовлетворяет условиям леммы и приводит ровно к такому же результату:

$$[\mathrm{U},\mathrm{R}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{R}] = \mathrm{UR}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{RU}^{-1}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{DR} = (\mathrm{ubr},\mathrm{ufr},\mathrm{dfr}). \tag{15}$$

4 Алгоритмчик

Ниже сформулирован алгоритм послойной сборки Кубика. Этого далеко не самый быстрый алгоритм, и даже он формулируется здесь весьма кустарно. Однако у меня не было цели написать что-то, что поможет читателю моментально стать чемпионом мира по спидкубингу. Гораздо более интересным мне виделась задача показать, как и почему работает этот, один из самых простых, алгоритмов. Если кого-то изложенные здесь сведения побудят к самостоятельному дальнейшему изучению Кубика и методов его сборки – что ж, я буду исключительно рад. А ещё больше я буду рад, если читателю после всего этого захочется поизучать теорию групп. :)

Этап 1

Для начала собираем крест на u-слое. Будем считать, что это белый слой. Нам необходимо “отправить наверх” четыре рёберных кубика с белыми гранями и сделать это так, чтобы небелые грани этих кубиков вплотную примыкали к центрам боковых граней, имеющих те же цвета. Для достижения этого результата никаких специальных движений знать не надо. Однако полезным может быть поступать с каждым кубиком следующим образом: сначала поместить его на u-слой (белой гранью наверх, разумеется), потом поворотом всего u-слоя совместить вторую грань кубика с правильным боковым центром, а потом на время переместить этот кубик на d-слой и заняться следующим кубиком. Когда все четыре белых кубика окажутся внизу, останется только “поднять” их наверх.

Этап 2

Помещаем угловые кубики с белыми гранями на u-слой и правильно ориентируем их по цвету, чем заканчиваем сборку первого слоя. Для этого достаточно преобразования $[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]$ (см. формулы (8), (10)):

$$\mathrm{ufr} \xleftrightarrow{[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]} \mathrm{udr}, \tag{16}$$

$$\mathrm{ufr} \xrightarrow{[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]^2} \mathrm{ufr}_+, \tag{17}$$

$$\mathrm{ufr} \xrightarrow{[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]^4} \mathrm{ufr}_-, \tag{18}$$

где “ $-$ ” в последней формуле указывает на смену цветовой ориентации кубика с 0 на 2. (А если точнее, с n на $(n+2) \bmod 3$.)

Этап 3

Держа собранный белый слой наверху, ставим рёберные кубики среднего (он же – второй) слоя куда надо, сразу с правильной цветовой ориентацией. Для этого достаточно преобразований $[\mathrm{D}, \mathrm{L}]$ и $[\mathrm{D}^{-1}, \mathrm{F}^{-1}]$:

$$\mathrm{df} \xrightarrow{[\mathrm{D},\mathrm{L}]\,[\mathrm{D}^{-1},\mathrm{F}^{-1}]} \mathrm{lf}, \tag{19}$$

$$\mathrm{ld} \xrightarrow{[\mathrm{D}^{-1},\mathrm{F}^{-1}]\,[\mathrm{D},\mathrm{L}]} \mathrm{lf}. \tag{20}$$

Любознательному читателю тут явно есть, где развернуться, хоть и понятно, что оба преобразования познаются внимательным наблюдением[13] формул типа (8). На один нюанс здесь стоит, однако, обратить внимание. Когда по формуле (19) кубик df отправляется на место lf, его фронтальная грань остаётся на f-слое. Если вам это и нужно, то хорошо. А вот если вам нужно фронтальную грань кубика df поместить на l-слой (а сам кубик по-прежнему на место lf), то действовать вам, предварительно применив D^{-1}, следует по формуле (20), поскольку соответствующее преобразование оставляет левую грань перемещаемого кубика на l-слое.

Этап 4

Расставляем ребёрные кубики третьего слоя в правильные места, не думая пока что про их цветовую ориентацию. Как и на этапе 1, кубики необходимо сразу ставить к соответствующим боковым центрам.

Ленивому сборщику Кубика в этом месте вполне можно ограничиться использованием только уже упоминавшихся преобразований. Это, правда, страшно неэкономно, но работает. Имея в виду формулу (8) и принцип сопряжения, можно получить такое преобразование:

$$(\mathrm{fr}, \mathrm{dr}, \mathrm{br})(\text{что-то ещё с угловыми кубиками r-слоя}) = \mathrm{B}^{-1}[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]\mathrm{B}. \tag{21}$$

Для его применения придётся либо повернуть собираемый слой в положение r, либо переформулировать это преобразование в терминах, подходящих для использования его на d-слое, что лично мне делать страшно лень, так что я и не буду[14]. Но самая главная проблема, поджидающая здесь ленивого сборщика, кроется в том, что иногда надо поменять местами не три рёберных кубика, а только два. Это совершенно не противоречит принципу (2), потому что на чётность перестановки всех кубиков ещё пока могут влиять угловые кубики последнего слоя. И коль скоро требуемая перестановка только двух рёберных кубиков – это нечётная перестановка на множестве одних лишь рёберных кубиков, а 3-цикл, даваемый формулой (21), есть чётная перестановка на том же множестве, ни при каких обстоятельствах не собрать нам крест на последнем слое одним только этим 3-циклом, ибо рёберные кубики на других слоях тревожить уже нельзя[15].

Тем не менее, в этом случае можно совершить ужасно нерациональное действие и сначала выбить какой-нибудь один из кубиков с уже собранного среднего слоя по одной из формул (19),(20), а потом вернуть его обратно с помощью преобразования D в подходящей степени и второй из указанных формул. Чётность перестановки

[13]Наблюдать желательно в том числе и на Кубике.

[14]Хотя, например, автор формулы (22) уже с блеском выполнил эту адаптацию для u-слоя.

[15]Даже если применять его к разным тройкам кубиков!

рёберных кубиков на последнем слое при этом изменится. Я так делать научился, но не уверен, что желаю вам того же[16]. :)

Ещё более ленивый сборщик Кубика всегда может воспользоваться одним из следующих преобразований, считая, что последний слой – это u-слой (так считать вполне разумно):

$$(\mathrm{uf}, \mathrm{ur}, \mathrm{ub})(\text{что-то ещё с угловыми кубиками u-слоя}) = \mathrm{FRUR^{-1}U^{-1}F^{-1}} \tag{22}$$

$$(\mathrm{ur}, \mathrm{ub})(\mathrm{ulb}, \mathrm{urb}) = \mathrm{F^{-1}UBU^{-1}FU^2B^{-1}UBU^2B^{-1}}. \tag{23}$$

В этом месте любознательному читателю передаётся ещё один привет.

Этап 5

Правильно ориентируем [по цвету] рёберные кубики последнего слоя. Обозначим за E вращение горизонтального сечения Кубика на 90° вправо. Порядок преобразования RE равен 8. Если же его применить четыре раза, то единственный эффект от него на u-слое будет заключаться в смене цветовой ориентации кубика ur. При этом на двух других слоях будет происходит апокалипсис. Однако же если теперь на место ur поставить второй рёберный кубик с u-слоя, требующий правильной цветовой переориентации[17] (а такой обязательно должен быть, привет принципу (5)), и опять применить $(\mathrm{RE})^4$, то на нижних слоях всё вернётся в собранное состояние (порядок-то этого преобразования равен восьми!), а наверху мы получим два рёберных кубика с правильной цветовой ориентацией. Резюмируем:

$$\mathrm{ur}_+,\ \mathrm{ub}_+ = (\mathrm{RE})^4\mathrm{U}(\mathrm{RE})^4\mathrm{U}^{-1} \tag{24}$$

$$\mathrm{ur}_+,\ \mathrm{ul}_+ = (\mathrm{RE})^4\mathrm{U}^2(\mathrm{RE})^4\mathrm{U}^2. \tag{25}$$

Этап 6

Расставляем угловые кубики третьего слоя в правильные места. Поскольку на данной стадии почти все кубики уже стоят где надо, вариантов "неправильных" расположений остаётся совсем немного. Правило (2) диктует нам, что четыре угловых кубика последнего слоя теперь могут образовывать только чётную перестановку, т.е. либо один 3-цикл, либо пару 2-циклов, либо вообще могут стоять правильно.

С 3-циклами можно разобраться, например, одним из следующих преобразова-

[16]Комментарий от 28.06.2017. Конечно, год назад я был чрезвычайно глуп. Сменить чётность перестановки рёберных кубиков на нижнем слое можно, просто повернув нижнюю грань на 90° градусов. Ужас.

[17]Прошу прощения у всего цивилизованного человечества за эти термины.

ний[18] (см. также пример в конце п.3.4):

$$(\mathrm{ubr},\mathrm{ufr},\mathrm{dfr}) = [\mathrm{U},[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]] = \mathrm{UR}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{RDU}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{DR}, \tag{26}$$

$$(\mathrm{ubr},\mathrm{ufr},\mathrm{dfr}) = [\mathrm{U},\mathrm{R}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{R}] = \mathrm{UR}^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{RU}^{-1}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{DR}, \tag{27}$$

$$(\mathrm{ubr},\mathrm{ufr},\mathrm{ufl}) = [\mathrm{R}^{-1},\mathrm{F}^{-1}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{F}] = \mathrm{R}^{-1}\mathrm{F}^{-1}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{FRF}^{-1}\mathrm{LF}. \tag{28}$$

Разных положений с парами 2-циклов на самом деле может быть всего два: когда кубики надо переставлять “крест-накрест” и когда каждый 2-цикл соответствует перестановкам кубиков, находящихся на одном ребре Кубика. Любознательному читателю предлагается убедиться в том, что в обоих случаях для сборки достаточно два раза применить какой-нибудь из 3-циклов[19], даваемых формулами (26)-(28). Кроме того, раньше мы уже получили один способ борьбы с парой 2-циклов (см. п.3.3):

$$(\mathrm{ufr},\mathrm{dfr})\,(\mathrm{ubr},\mathrm{dbr}) = \mathrm{B}^{-1}[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]^3\mathrm{B}. \tag{29}$$

Можно не останавливаться на достигнутом и изобрести способ борьбы с ситуацией “крест-накрест”[20].

Этап 7

Правильно ориентируем [по цвету] угловые кубики третьего слоя. В этом месте работает следующая логика. Считаем, что мы занимаемся u-слоем. Преобразование $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]^2$ меняет на нём только цветовую ориентацию кубика ufr с n на $(n+1) \bmod 3$. На двух слоях ниже происходит апокалипсис. Если мы теперь на место ufr выставим подходящей степенью U другой кубик, которому требуется смена цветовой ориентации с m на $(m+2) \bmod 3$, и применим к Кубику $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]^4$, то два нижних слоя вернутся в правильное положение (порядок $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]$ есть $6 = 4+2$), а на u-слое мы получим два правильно ориентированных кубика (если исходно кубику ufr нужна была смена цветовой ориентации с n на $(n+1) \bmod 3$). Останется только вернуть их в правильные положения нужной степенью U.

Таким же методом можно разобраться и с тремя требующими смены цветовой ориентации кубиками, и с четырьмя. Действительно, рассмотрим те угловые кубики на последнем слое, которые пока ещё что-то “требуют”. Вычтём из числа 3 цветовую ориентацию каждого из них и полученные числа сложим. В соответствии с правилом (4) найденная сумма (обозначим её Σ) может быть равна либо 3, либо 6. Каждая шестая степень преобразования $[\mathrm{R}^{-1},\mathrm{D}^{-1}]$ уменьшает Σ на 3, так что для завершения сборки Кубика достаточно применить это преобразование (по пути иногда перестав-

[18] Упорядочены по возрастанию предполагаемой ленности сборщика Кубика.

[19] Надеюсь, понятно, что применять их можно к разным тройкам кубиков.

[20] Не останавливаться на достигнутом – это вообще часто довольно полезный подход к жизни.

ляя угловые кубики на u-слое) соответственно либо 1, либо 2 раза (см. также таблицу ниже)[21].

кубиков "с проблемами"	сумма их цветовых ориентаций	Σ	сколько раз нужно применить $[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^6$
два	$1+2$	3	один
три	$1+1+1$ или $2+2+2$	6 или 3	два или один
четыре	$1+1+2+2$	6	два

Примеры преобразований:

$$\mathrm{ufr}_+,\ \mathrm{ubr}_- = [\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^2\mathrm{U}[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^4\mathrm{U}^{-1}, \tag{30}$$

$$\mathrm{ufr}_+,\ \mathrm{ubr}_+,\ \mathrm{ubl}_+ = [\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^2\mathrm{U}[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^2\mathrm{U}[\mathrm{R}^{-1}, \mathrm{D}^{-1}]^2\mathrm{U}^2. \tag{31}$$

5 Литература

Про Кубик Рубика написано непознаваемо много всевозможных материалов. Не претендуя на звание большого знатока в этой "литературной" области, хочу всё же порекомендовать несколько источников. Во-первых, есть хорошая книжка, в свою очередь порекомендованная мне Ильдаром Хисамбеевым, "Преобразования и перестановки" за авторством Л. А. Калужного и В. И. Сущанского. Про Кубик в ней написано не очень много, зато довольно понятно. Акцент делается на математику, в частности на группы перестановок. Про инварианты Кубика (чётность, ориентации) там написано очень хорошо. По книжке "Теорема Абеля в задачах и решениях" (В. Б. Алексеев) приятно самостоятельно изучать перестановки, циклы и базовые вещи про конечные группы (теорему Лагранжа, к примеру). В небольшой книжке David Singmaster "Notes on Rubik's Magic Cube" имеется много полезных задач про Кубик и подробно обсуждается алгоритм сборки[22], при котором сначала правильно выставляются все рёберные кубики, а затем все угловые. Во многих других пособиях из числа тех, что я видел, эта книжка присутствует в списках рекомендованной литературы. Я бы советовал её к прочтению в первую очередь. В "The Complete Cube Book" (Roger Schlafly) описан послойный алгоритм сборки, математики в ней почти нет. Однако в конце этой брошюры собраны задачи, некоторые из которых кажутся мне исключительно интересными. Достойна упоминания книга "Adventures in Group

[21] При использовании $[\mathrm{D}^{-1}, \mathrm{R}^{-1}]$ можно было бы обойтись без буквы Σ, но кто ж знал об этом при выборе обозначений.

[22] Один из первых опубликованных алгоритмов, если я всё правильно понимаю.

Theory" (David Joyner). Прочитав её всю, можно, наверное, существенно приблизить себя к полному пониманию устройства Вселенной.

Существует некоторое количество курсов, которые написаны то ли про Кубик Рубика, то ли про теорию групп. Например:

- Group Theory and the Rubik's Cube" (Janet Chen),
- "The Mathematics of the Rubik's Cube. Introduction to Group Theory and Permutation Puzzles" (автор мне не известен),
- "Group Theory via Rubik's Cube" (Tom Davis).

Всё перечисленное выше и многое другое может быть при надлежащем усилии найдено в интернете.

По адресу http://dedfoma.ru/kubikrubika/statji.htm можно найти ссылки на статьи про Кубик Рубика в советских журналах.

Ну и ещё мне понравилась случайно обнаруженная на просторах глобальной сети короткая презентация "The Mathematics of Rubik's Cube" автора Michael Hutchings. Тоже могу её рекомендовать.

Вместо заключения

Не уверен, что эти записки получились слишком понятными. Очевидно, их было бы полезно дополнить картинками, главой про циклы и перестановки и вообще написать более распространённо. Но это вышло бы уже слишком затратно по времени, так что давайте считать, что все недочёты сего документа – это ровно необходимый для провоцирования самостоятельного дальнейшего изучения читателем обсуждаемых вопросов их объём. В конце концов, исходной была попытка написать что-то взамен всего лишь одного рукописного листа А4.
:)