

Олимпиада математика У1. Контрольная работа

1) В 15-этажном доме имеется лифт с двумя кнопками: "+7" и "−9".

Можно ли проехать с 3-го этажа на 12-й?

Указание: попробуйте решить задачу и с начала, и с конца.

2) Докажите, что в компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомые, либо трое попарно незнакомые.

Указание: рассмотрите одного из людей (X), тогда по принципу Дирихле из оставшихся 5 найдутся либо трое знакомых с X , либо трое незнакомых с X , рассмотрите оба случая и решите задачу. Что будет, если с X знакомы (или незнакомы) четыре и более людей?

3) Придя на встречу, некоторые из её участников пожали друг другу руки. Доказать, что число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Указание: задачу можно решить с помощью индукции. Последовательно совершайте рукопожатия и смотрите, как изменяется чётность. Есть второй способ, основанный на теории графов. Можно подсчитать сумму степеней чётных и нечётных вершин, когда все рукопожатия уже совершены.

4) Докажите формулу Эйлера плоского графа: $v - e + f = 2$,

где v — число вершин графа (vertex, vertices),

e — число рёбер (edge, edges),

f — число граней (face, faces)

Указание: воспользуйтесь индукцией по рёбрам e , взяв за базу дерево (связный граф без циклов) с исходным числом вершин v .

5) Докажите, что в плоском графе найдётся вершина, из которой выходит не более 5 рёбер.

Указание: найдите соотношение между числом рёбер e и числом граней f . Каждая грань окружена не менее, чем тремя рёбрами, если это не дерево.

6) На трёх крайних справа полях доски $1 \times n$ стоит по фишке. Двое по очереди берут одну из фишек и передвигают её на несколько полей влево. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход. Кто выигрывает при правильной игре?