# Содержание



# Цель

Рассказать про комплексный числа, преобразование Мёбиуса, кватернионы, вращения, роторы, октонионы, гиперболическую и проективную геометрию.

- ччч

# 1. Комплексные числа. Определение

**Определение 1.** Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонатльной осью — аргумента комплексного числа, $\arg z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\operatorname{Re} z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, действительное число, $\operatorname{Im} z$.

**1.1** Поехали.

1. Для комплексных чисел $1+i$ и $3+4i$ найди $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
2. Нарисуй числа $1+i$, $3+4i$, $3-i$, $-3i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение $z^*$ комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

**1.2** Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1+i)^2$? $(1+i)^{43}$?
2. Почему $i^2=-1$?
3. Чему равняется произведение $z=6+3i$ на $i$?

Наивное умножение комплексных чисел. Раскрываем скобки и упрощаем по принципу $i^2=-1$.

**1.3** Нарисуй процесс умножение произвольного $z$ на $3+4i$. А именно, нарисуй $3z$, $4iz$, $(3+4i)z$ и по рисунку объясни, почему $(3+4i)z=3z+4iz$.

**1.4**
1. У комплексного числа $w=\sqrt{11}+5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, $w^*$, $ww^*$.
2. Найди $(3+5i)\cdot(3+3i)$, $(1+i)/(1-i)$,
3. Найди $(\sqrt{3}+i)^{43}$, $(1-i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))\cdot(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;

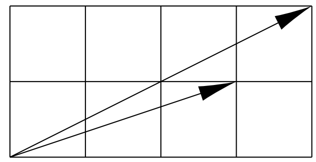
**1.5** Реши уравнения $z^2=-1$, $z^2+6z+10=0$, $z^6=64$, $(z-1)/(z+1)=1+3i$.

**1.6** Найди суммы $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{2019}$, $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\ldots+(1+i)^{2020}$.

**1.7** Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на $90^\circ$ налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на $60^\circ$?

**1.8** Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



**1.9** На плоскости нарисована кошечка. Что прозойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

# 2. Комплексные числа. Геометрия и картинки

**2.1** Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Снаружи каждой стороны четырёхугольника построим квадрат. Назовём отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, $MN$ и $KL$.

1. Найди угол между $MN$ и $KL$.
2. Найди отношение длин $MN$ и $KL$.

**2.2** Нарисуй на комплексной плоскости множества

1. $|z| = 4$;
2. $|z - 2 + 3i| > 5$;
3. $\operatorname{Re} z = 3$;
4. $\operatorname{Im} z < 6$;
5. $1 < |2z - 6| < 2$;
6. $|z-1|^2 + |z+1|^2 < 8$;
7. $|z-1| + |z+1| \leq 2$;
8. $|\operatorname{Re} z| < |z|$;
9. $|z - i| = |z - (3 + 2i)|$;
10. $\operatorname{Re}((1+i)z) > 2$;
11. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;
12. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;

**2.3** Нарисуй на комплексной плоскости траектории, $t \to z(t)$, для $t \in \mathbb{R}$, отметив стрелкой направление:

1. $t \to 6 + it$;
2. $t \to t + 2 + 7i$;
3. $t \to t + 2 + it$;
4. $t \to t + it^2$;
5. $t \to \cos t + i \sin t$;
6. $t \to t \cdot (\cos t + i \sin t)$;
7. $t \to t \cdot (\cos t - i \sin t)$;

**2.4** Нарисуй комплексные числа $z_1$ и $z_2$ с единичной длиной и аргументами $\pi/4$ и $\pi/2$.

1. Запиши $z_1$, $z_2$ и $z_1 + z_2$ в виде $a + bi$.
2. Найди $\tan 3\pi/8$;

# 3. Поле направления и экспонента

**Определение 2.** Если $z(t)$ — положение точки в момент $t$, то $\dot{z}(t)$ или $z'(t)$ — мгновенная скорость точки (вектор).

**Определение 3.** Поле направления — в каждой точки плоскости нарисован вектор скорости движения точки.

**3.1** Нарисуй поле направления для каждого случая:

1. $\dot{z}(t) = 1$;
2. $\dot{z}(t) = i$;
3. $\dot{z}(t) = z(t)$;
4. $\dot{z}(t) = -z(t)$;
5. $\dot{z}(t) = iz(t)$;
6. $\dot{z}(t) = -iz(t)$;
7. $\dot{z}(t) = 2 - z(t)$;
8. $\dot{z}(t) = 2 - iz(t)$;

**Определение 4.** Экспонента $\exp(t)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = z(t)$.
Экспонента $\exp(it)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = iz(t)$.

**3.2** Докажи, что

1. $\exp(1) \approx 1.01^{100}$;
2. $\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1)$;
3. $\exp(3) = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \exp(1)$;

**3.3** Найди

1. $\exp(i\pi/3)$;
2. $\exp(i\pi/2)$;
3. Формула Эйлера! $\exp(i\pi)$;
4. $\exp(it)$;
5. $\exp(i\pi/3) \cdot \exp(i\pi/2)$;

**3.4** Запиши комплексные числа с помощью экспоненты

1. $1 + i$;
2. $\sqrt{3} + i$;
3. $\sqrt{3} - i$;
4. $6i$;

**3.5** Реши уравнения

1. $z^2 = 6$;
2. $z^2 = -9$;
3. $z^2 = 4i$;
4. $z^3 = -27$;
5. $z^2 = -4i$;
6. $z^2 + 4z + 13 = 0$;
7. $\frac{z+i+2}{z-i-3} = 4i$;
8. $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$;
9. $z^5 = 32$;
10. $z^6 = i$;
11. $z^7 = 1 - i$;

# 4. Кубические уравнения

**4.1** Найди все значения многозначной функции

1. $8^{1/3}$;
2. $i^{1/3}$;
3. $(1+i)^{1/3}$;
4. $(\sqrt{3}+i)^{1/3}$;

**4.2** Реши системы

1. $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=79 \\ xy+y+x=23 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x^3+y^3=10 \\ y\cdot x=2 \end{cases}$;

**4.3** Реши кубическое уравнение

1. $z^3-15z-4=0$;
2. $z^3-15z-10=0$;
3. $z^3-6z-6=0$;

**4.4** Подбери число $t$ так, чтобы при замене $z=w+t$ в записи исчезло слагаемое $w^2$:

1. $z^3+21z^2$;
2. $z^3-9z^2$;
3. $z^3+6z^2$;

**Определение 5**. Экспонента $\exp(a+bi)=\exp(a)\cdot\exp(b)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0)=1$, $\dot{z}(t)=(a+bi)\cdot z(t)$.

# 5. Преобразования плоскости

Нарисуй исходное множество $A$ и его образ $f(A)$ для случаев

**5.1**
1. $A = \{|z-1| = 1\}$, $f(z) = z^2$;
2. $A = \{\operatorname{Re} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
3. $A = \{\operatorname{Im} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
4. $A = \{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$, $f(z) = z^2$;
5. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = (1+i)z$;
6. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
7. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
8. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
9. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
10. $A = \{\operatorname{Im} z = 0\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
11. $A = \{|z| = 2\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;

**Определение 6.** Комплексная инверсия $f : z \to 1/z$;
Геометрическая инверсия (просто инверсия): $f : z \to 1/\bar{z}$ и обобщение.

**5.2** Нарисуй окружность с центром $Q$ и радиусом $r$. Нарисуй точки $A$ и $B$ внутри окружности и их образы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ после инверсии.

1. Найди подобные треугольники.
2. Найди длину $\tilde{A}\tilde{B}$, если $QA = 4$, $QB = 6$, $r = 10$, $AB = 5$.

**5.3** Свойства инверсии:

1. Что получится, если инверсию применить два раза?
2. Во что переходит сама окружность при инверсии?

**5.4** Нарисуй окружность с центром $Q$ и радиусом $r$. Во что перейдёт при инверсии:

1. Прямая $\ell$, проходящая через центр окружности $Q$.
2. Прямая $\ell$, не проходящая через центр окружности $Q$.

**5.5** Миша С. выполняет инверсию точки $A$ относительно окружности радиуса $m$ с центром в точке $Q$ и получает точку $\tilde{A}_1$. Серёжа Л. выполняет инверсию той же точки $A$ относительно окружности радиуса $s$ с центром в точке $Q$ и получает точку $\tilde{A}_2$.

1. Как будут соотносится длины отрезков $Q\tilde{A}_1$ и $Q\tilde{A}_2$? Как зависит это отношение от выбора точки $A$?
2. Объясни содержательную разницу между инверсией Миши С. и Серёжи Л.

**5.6** Нарисуй окружность с центром $Q$ и радиусом $r$. Во что перейдёт при инверсии:

1. Окружность $w$, проходящая через центр исходной окружности $Q$.
2. Окружность $w$, не проходящая через центр иходной окружности $Q$.

# 6. Вращаем Землю

**Определение 7**. Действие $Ref_a(v)$ — это отражение (reflection) вектора $v$ относительно прямой (в 2D) или плоскости (в 3D), перпендикулярной вектору $a$.

**6.1** Вектор $a$ имеет единичную длину, а вектор $v$ — произвольную. Какой смысл имеют объекты $a \cdot v$, $a \cdot va$?

**6.2** Вектор $a$ имеет единичную длину, а вектор $v$ — произвольную.

1. Запиши отражение $Ref_a(v)$ используя проекцию $a \cdot va$;
2. Чему равно $aa$?
3. Запиши отражение $Ref_a(v)$ используя геометрическое умножение.

**6.3** Какой геометрический смысл имеет пара отражений подряд $Ref_b(Ref_a(v))$ на плоскости?

**6.4** Какой геометрический смысл имеет пара отражений подряд $Ref_b(Ref_a(v))$ в пространстве?

**6.5** Рассмотрим два вектора $a = (1, 0, 1)$ и $b = (1, 1, 1)$. Рассмотрим поворот $Rot_{ab}()$, поворачивающий все вектора на удвоенный угол $\angle(a, b)$ с осью вращения ортогональной плоскости $(a, b)$. Во что перейдёт вектор $v = (1, 2, 3)$ после поворота $Rot_{ab}(v)$?

## 7. Геометрия Фано

Количество точек и прямых на проективной плоскости порядка такого-то?

## 8. Загоночная контрольная

1. Подели и умножь комплексные числа и кватернионы:

   а) $(1+3i)(2-5i)$

   б) $(3+5i)/(3+4i)$

   в) $(1+2i+3j+4k)(4+3i+2j+k)$

   г) $(2+5i+4k)/(-3+4j)$.

2. Черепаха стартует в точке $0$. В первую минуту она движется со скоростью один километр в минуту. Каждую последующую минуту она поворачивает на 60 градусов по часовой стрелке и увеличивает свою скорость в два раза. Где черепаха окажется через час?

3. Реши в комплексных числах уравнение $z^6 = -64$.

4. Нарисуй множество $A = \{\operatorname{Re} z = 3\}$ и его образ $f(A)$ для функции $f(z) = 1/\bar{z}$.

5. Рассмотри произвольный четырёхугольник $ABCD$. С помощью комплексных чисел (или иначе) найди отношение суммы квадратов диагоналей к сумме квадратов средних линий.

## 9. Лог. КЛШ-2019

1. Было 29 школьников, от 8-го до 10-го класса и одна храбрая семиклассница. Комплексное число — вектор на плоскости. Сложение и вычитание. Изобразите $3+4i$, $5i$, $-6+i$, $-8$. Длина и аргумент. Многозначная функция. Геометрическое умножение. Находим $(1+i)^{44}$. Геометрически считаем $i \cdot i$, $(5+6i)\cdot i$. Наивное умножение. Геометрически интерпретируем наивное умножение $z\cdot(3+4i)$. Рисуем число $\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$. Делим через домножение на сопряжённое. Делим геометрически. Находим сумму конечной геометрической прогрессии комплексных чисел.

2. Повторили основные мысли. Два варианта записи чисел. Явно $z = a + bi$, через длину и угол с косинусом и синусом. Решили задачу про сумму углов. Разобрал окружность с центром не в нуле. Далее школьники решали и сдавали номера.

3. Решили задачу про сумму квадратов через явное представление $z = a + bi$. Дальше пообсуждали, что разумно сделать после решения задачи. Придумать более простой метод. Придумать более универсальный метод. Проверить, работает ли старый метод, если пошевилить задачу. Пошевелили нашу задачу и пришли к выводу, что геометрическо множество точек $Z$ таких, что $AZ^2+BZ^2 = const$ — это окружность. Влад, решивший дома задачу по геометрии с произвольным четырёхугольником, начал излагать её. Чтобы ускорить процесс, я изложил за него. Затем кратко рассказал про кривые. И школьники рисовали кривые.

4. Рисовали поле направлений. Хороший образ: нарисовать стрелочки ветра и куда несёт парашутиста. Определили две экспоненты: $\exp(t)$ и $\exp(it)$. Посчитали вместе примерно $\exp(1)$, $\exp(2)$. Перевели запись $\exp(it)$ для хороших $t$ в координатную форму. Подытожили три формы записи комплексных чисел.

5. Повторили три формы записи комплексных чисел. Эффективнее всего решать уравнения табличкой. Хотя до этого процесса мы дошли только в конце. Берём исходное число записываем его в виде $27\exp(120^\circ + 360^\circ k)$. Пишем длину, угол. Далее табличкой пишем то же самое для нескольких $k$. Затем в общей записи и в примерах делим угол на три, а из длины извлекаем кубический корень. Изображаем четыре кандидата, замечаем, что три кандидата совпадают. Записываем каждого кандидата в координатной форме записи. После этого школьники решали сами задачи на нахождение корней. Из-за не оптимального рассказа после перерыва ещё раз изложил алгоритм решения.

6. Вспомнили экспоненту для действительных чисел, $\exp(t)$, экспоненту от чисто мнимых, $\exp(it)$. И определили экспоненту от комплексных чисел $\exp(a + bi)$. Доказали через выделение полного квадрата, что дискриминант работает для квадратного уравнения. Многие школьники немного удивлённо узнали, что дискриминант — это то, что остаётся в правой части после умножения уравнения на 4 и выделения полного квадрата. Далее я рассказал про симметричную замену. И пример, где симметричная замена в системе не работает, но создаёт мостик до кубического уравнения. Начали решать кубическое уравнение. Схематично обозначил окончание. Надо было взять хорошие коэффициенты. Плохие коэффициенты от фонаря — резкое препятствие!

7. Реакция на критику: парты — появились. Немного темно — увы. Мотивационное: квантовые вычисления и преобразование Лоренца. Решали 5.1. Разобрали вместе 1 пункт, задал 2, 3, 5, 6. Шло тяжело. Разобрал 2. Напомнил про то, что такое $\exp(a + bi)$.

8. Преобразования кошки для $w = 2z$, $\exp(2 + \pi i z)$, $iz$, $\operatorname{Re} z$, $(1 + i)z$. Начали преобразовывать координатную сетку при преобразовании $w = z^2$.

9. Возвели комплексную кошку в квадрат. Получили глаз. Дома её никто в квадрат не возводил, но после моего начала решения и просьбы продолжить, нашлись те, кто смог продолжить. Проговорили формулу и геометрический смысл сопряжения. Школьники сами решили, как записать формулами симметрию относительно вертикальной оси и биссектрисы первой четверти. Определили геометрическую инверсию относительно окружности. Инвертировали 5 данных точек относительно данной окружности.

10. Кристина дома вывела формулу для инверсии с центром в 0 и радиусом $R$. Упростили формулу. Затем я вывел формулу для инверсии относительно произвольной окружности. Это было ошибочным решением: далее мы её не используем, и толку от вывода — слишком мало. Далее школьники решали и сдавали геометрические задачи из 5-го листка.

11. Боря + Михаил Шнитке показывали и обсуждали видео от 3blue1brown. Про пи и комплексные числа, https://www.youtube.com/watch?v=NaL_Cb42WyY. Затем уже без комментариев, но с русскими субтитрами смотрели видео про гипотезу Римана, https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqlYw.

12. Оказалось, что больше половины школьников не знают, что такое скалярное произведение. Начали с того, как умножать число на вектор. Затем рассмотрели скалярное произведение. На конкретном примере, с вектором $b$, лежащим на оси, убедились в формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$. Затем ввёл внешнее произведение как бивектор. Шло тяжело. Посчитали во сколько раз отличается $a \wedge b$ от $x \wedge y$ на плоскости. Упростили выражение для $a \wedge b$ в трёхмерном пространстве.

13. Повторили, что такое бивектор. Ввели геометрическое умножение. Умножая вектора на плоскости получили комплексные числа. Умножая вектора в пространстве получили кватернионы. Переобозначили базисные бивекторы как $i$, $j$ и $k$.

14. Повторили геометрическое умножение. Доказали, что два отражения на плоскости дают поворот. Далее я доказал, что два отражения в пространстве также дают поворот. Для единичного вектора $a$ и произвольного вектора $v$ осознали смысл выражений $a \cdot v$, $a \cdot va$. Записали отражение с помощью скалярного произведения: $v - 2(a \cdot v)v$. И заметив, что $aa = 1$, перешли к формуле $-ava$. Далее выяснили, что поворот задаётся формулой $bavab$. Всё. Я постарался обратить внимание, что $ba$ — это кватернион.

### 9.1. Плакат

## 10. Решения

**1.1.**

**1.2.**

**1.3.**

**1.4.**

**1.5.**

**1.6.**

**1.7.**

**1.8.** $(4 + 2i)(3 + i) = 10 + 10i$, $\pi/4$.

**1.9.** Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

**2.1.**

**2.2.**

**2.3.**

**2.4.**

**3.1.**

**3.2.**

**3.3.**

**3.4.**

**3.5.**

**4.1.**

**4.2.**

**4.3.**

**4.4.**

**5.1.**

**5.2.**

**5.3.**

**5.4.**

**5.5.**

**5.6.**

**6.1.** Число $a \cdot v$ — длина (со знаком) проекции $v$ на $a$, вектор $a \cdot va$ — сама проекция $v$ на $a$.

**6.2.**

**6.3.**

**6.4.**

**6.5.**

# 11. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл


1. Кратко про геометрию Фано, https://www.youtube.com/watch?v=CRqso5-uLfI
2. How to build hyperbolic soccer ball, http://theiff.org/images/IFF_HypSoccerBall.pdf
3. Chaim Goodman-Strauss, Compass and Straightedge in the Poincaré Disk
4. Mann, DIY hyperbolic course, https://math.berkeley.edu/~kpmann/DIY%20hyperbolic%20course.pdf
5. 3blue1brown, Quaternions visualized, https://www.youtube.com/watch?v=d4EgbgTm0Bg
6. Grant Sanderson, Visualizing quaternions, https://eater.net/quaternions
7. https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/, есть pdf-ка с картинками умножения на кватернионов и октонионов.
8. Hanson, Visualizing quaternions, примеры про ремень, мячик, Apollo
9. https://brilliant.org/wiki/complex-numbers-in-geometry/
10. Прасолов, Геометрия Лобачевского
11. Slerp, wiki, https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp
12. Wiki, 3d rotation, https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_formalisms_in_three_dimensions
13. Fano plane, https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-fano-plane/
14. Lam, Search finite Fano plane of order 10, https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf, связка с латинскими квадратами
15. http://kahrstrom.com/mathematics/documents/OnProjectivePlanes.pdf, геометрия как точки и линии