Понятие группы занимает очень большое место в современной математике и физике. В то же время элементы теории группы просты и вполне доступны школьникам. Читателям, знакомым с понятиями «отображение множества на множество» и «композиция отображений» (которые входят по новой программе в курс геометрии VI—VIII классов), проще всего начать знакомство с теорией групп на примерах групп преобразований, в частности, групп перемещений на плоскости. Небольшая статья А. Колмогорова о группах преобразований может служить введением к изучению групп симметрии. Общей, «абстрактной», теории групп посвящена статья Л. Садовского и М. Аршинова. В ней, впрочем, также содержится много материала, относящегося специально к группам преобразований. Наконец, в статье Э. Белаги, помещенной в разделе «Математический кружок», вы найдете множество задач, решая которые, вы освоитесь с операцией «композиция» (не только отображений) и увидите, как применяется теория групп при решении задач.

А. Колмогоров

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Задача моей короткой заметки состоит в том, чтобы сделать более доступным и связать с новыми школьными учебниками содержание публикуемой далее статьи Л. Садовского и М. Аршинова «Группы».

По новым школьным программам школьники в пятом классе знакомятся с понятием «отображение множества на множество». В шестом классе они знакомятся с понятием «обратимое отображение» (в другой терминологии, привычной многим читателям «Кванта», — «взаимно однозначное отображение»).

Каждое обратимое отображение имеет *обратное* отображение. Например, поворот $R_O^{70°}$ вокруг точки O на 70° против часовой стрелки (рис. 1) имеет своим обратным отображением поворот вокруг той же точки O на 70°, но уже по часовой стрелке. В новом учебнике геометрии этот поворот обозначается $R_O^{-70°}$ (поворот вокруг точки O на *минус* 70°).

В седьмом и восьмом классах школьники знакомятся с понятием «композиция отображений». Рассмотрим для примера два перемещения плоскости, то есть два отображения плоскости на себя, сохраняющих расстояния. В качестве первого перемещения возьмем осевую симметрию S_x с осью x, в качестве второго — осевую симметрию S_y с осью y, перпендикулярной оси x (рис. 2). Что получится, если произвести эти два отображения последовательно: сначала S_x, а потом S_y?

Точка P при осевой симметрии S_x перейдет в симметричную ей относительно оси x точку P_1, а при симметрии S_y точка P_1 перейдет в точку P_2. Сказанное можно записать в виде равенства

$$P_2 = S_y(S_x(P)).$$

С другой стороны, точку P_2 можно получить непосредственно из точки P при помощи центральной симметрии Z_O с центром O — точкой пересечения прямых x и y:

$$P_2 = Z_O(P).$$

Докажите самостоятельно, что для **любой** точки P плоскости

$$S_y(S_x(P)) = Z_O(P)$$

(предполагается, как было сказано, что прямые x и y перпендикулярны и пересекаются в точке O).

Говорят, что *отображение* Z_O *есть «композиция» отображений* S_x и S_y; записывают этот факт в виде равенства

$$Z_O = S_y \circ S_x.$$

Здесь кружочек $\circ$ есть знак *операции над отображениями*. Подобно тому, как операции сложения (знак «$+$») или умножения (знак «$\times$»), примененные к паре чисел $\langle a, b\rangle$, дают новые числа:

$$c = a + b,\ d = a \times b,$$

операция композиции, примененная к двум отображениям, порождает новое отображение.

Нас будут занимать обратимые отображения некоторого множества M на себя. Такие отображения называют «преобразованиями множества M». В качестве примеров приведем перемещение плоскости, гомотетию, преобразование подобия.

Пусть множество M есть плоскость. Рассмотрим *множество* G *всех перемещений этой плоскости*, то есть множество всех отображений F плоскости M на себя, сохраняющих расстояния: для любых двух точек P и Q плоскости M

$$|F(P)F(Q)| = |PQ|.$$

Все перемещения обратимы, и потому по указанной выше терминологии они являются *преобразованиями плоскости*.

Наше множество G обладает двумя интересными свойствами:

(1) *композиция двух преобразований из* G *принадлежит* G, т. е. композиция двух перемещений есть перемещение;

(2) *вместе с преобразованием* F *множеству* G *всегда принадлежит и обратное преобразование*, то есть преобразование, обратное к перемещению, также есть перемещение.

Определение. Совокупность преобразований множества A, обладающую свойствами (1) и (2), называют *группой преобразований множества* A.

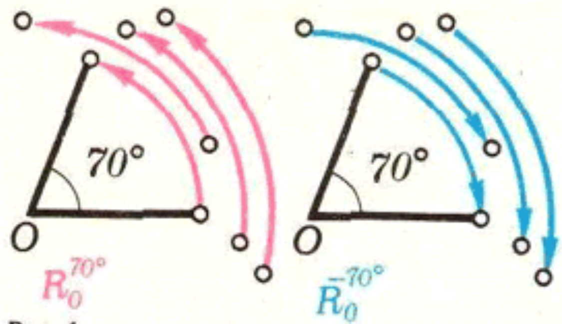


Рис. 1.

В силу сказанного множество всех перемещений плоскости может служить примером группы преобразований плоскости. Другим примером может служить множество всех преобразований подобия.

Существуют, однако, и гораздо более простые примеры. Рассмотрим, например, *множество* G_1 *всех перемещений, которые равносторонний треугольник* ABC (рис. 3) *отображают на самого себя*. Легко указать шесть таких перемещений:

1) тождественное отображение E, отображающее любую точку P плоскости на себя;

2) поворот $R_O^{120°}$ вокруг центра треугольника O на 120° против часовой стрелки;

3) поворот $R_O^{-120°}$ вокруг центра O на 120° по часовой стрелке;

4), 5), 6) осевые симметрии $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$.

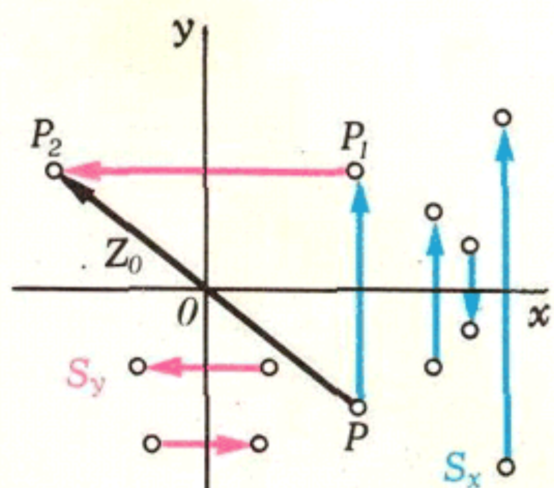


Рис. 2.

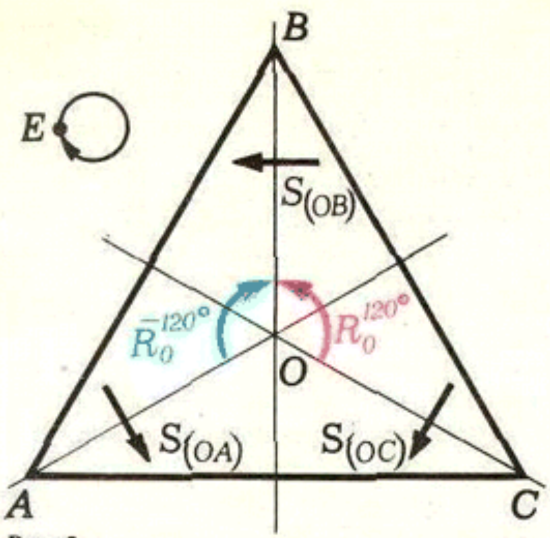


Рис. 3.

Задача 1. Докажите, что множество G_1 состоит только из перечисленных шести перемещений.

Задача 2. Проверьте, что каждое из перемещений E, $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$ обратно самому себе, а перемещения $R_O^{120°}$ и $R_O^{-120°}$ обратны друг другу.

Задача 3. Проверьте и дополните таблицу 1 «композиций» для множества G_1.

Решив задачи 2 и 3, вы установите, что множество G_1 обладает свойствами (1) и (2) из определения группы преобразований, то есть что G_1 — группа преобразований плоскости. Можно доказать более общий факт: *множество G_Φ всех перемещений плоскости, которые отображают какую-либо заданную фигуру Φ на себя, есть группа преобразований плоскости.* Доказательство не сложно (проведите его!). Группа G_Φ называется *группой симметрии* фигуры Φ.

Из таблицы композиций множества G_1 мы видим, что *композиция перемещений не всегда переместительна*:

$$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°} \neq R_O^{120°} = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}.$$

Можно, однако, доказать, что *операция композиции преобразований множества M всегда обладает свойством ассоциативности*:

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

(попробуйте сделать это).

Таблица 1

$\circ$	E	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$	$R_O^{120°}$	$R_O^{-120°}$
E	$E \circ E = E$	$E \circ S_{(OA)} = S_{(OA)}$	$E \circ S_{(OB)} = S_{(OB)}$	$E \circ S_{(OC)} = S_{(OC)}$	$E \circ R_O^{120°} = R_O^{120°}$	$E \circ R_O^{-120°} = R_O^{-120°}$
$S_{(OA)}$	$S_{(OA)} \circ E = S_{(OA)}$	$S_{(OA)} \circ S_{(OA)} = E$	$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°}$			
$S_{(OB)}$		$S_{(OB)} \circ S_{(OA)} = R_O^{120°}$				
$S_{(OC)}$						
$R_O^{120°}$						
$R_O^{-120°}$						

Любое перемещение, отображающее треугольник ABC на себя, отображает множество $U=\{A, B, C\}$ вершин треугольника на себя в соответствии с таблицей 2.

В нижней строке даны обозначения отображений множества U на себя, заданных нашей таблицей. Например, функция s_2 (вспомните: отображение и функция — синонимы!) полностью задается равенствами

$$s_2(A) = C,\ s_2(B) = B,\ s_2(C) = A.$$

Область ее определения есть множество U, множество значений — то же множество U. Конечно, ее нельзя путать с отображением $S_{(OB)}$, которое отображает плоскость M на себя!

Преобразования e, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2 образуют *группу G_2 преобразований множества U.*

Задача 4. Запишите таблицу композиций для группы G_2. Укажите для каждого ее элемента обратный элемент.

Таблица 2

x	$E(x)$	$S_{(OA)}(x)$	$S_{(OB)}(x)$	$S_{(OC)}(x)$	$R_O^{120^\circ}(x)$	$R_O^{-120^\circ}(x)$
A B C	A B C	A C B	C B A	B A C	C A B	B C A
	e	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2

Группа перемещений G_1 и определенная сейчас группа G_2 в некотором смысле слова «устроены совершенно одинаково». Они «изоморфны». Что это значит на строгом языке математики, вы можете узнать из статьи Л. Садовского и М. Аршинова.

Задача 5. Исследуйте аналогичным образом:

а) группу симметрии отрезка AB;

б) группу симметрии квадрата $ABCD$.

Новый взгляд на старую задачу

Задача эта такова. *В бассейн проведено две трубы. Через одну бассейн может быть наполнен за 4 часа, а через другую — за 12 часов. За какое время наполнится бассейн, если будут открыты одновременно обе трубы?*

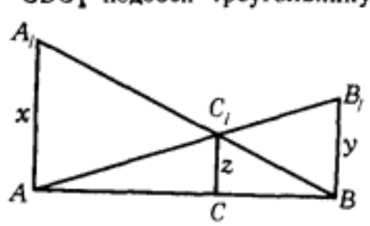
Напомним обычное решение этой задачи. За один час первая труба наполняет $^1/_4$, а вторая — $^1/_{12}$ часть всего бассейна. Обе трубы за один час наполнят $^1/_4+$ $+^1/_{12}$, то есть $^1/_3$ бассейна, поэтому весь бассейн будет наполнен за 3 часа.

А теперь проделаем следующее: из концов произвольного отрезка AB восставим по одну сторону от него два перпендикуляра: $|AA_1|=4$, $|BB_1|=12$ (см. рисунок). Из точки C_1 пересечения отрезков A_1B и AB_1 опустим перпендикуляр C_1C на прямую AB, тогда $|C_1C|=3$, что равно найденному выше значению.

Докажем, что это не случайное совпадение. Рассмотрим общий случай: пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Обе трубы при совместной работе наполнят бассейн за z часов, причем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

При любых допустимых значениях x и y треугольник CBC_1 подобен треугольнику ABA_1, а треугольник ACC_1 подобен треугольнику ABB_1, поэтому



$$\frac{z}{x}=\frac{|BC|}{|AB|},\ \frac{z}{y}=\frac{|AC|}{|AB|},$$

откуда

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1,$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Аналогично можно найти сопротивление z цепи, составленной из двух сопротивлений величины x и y, включенных параллельно, потому что и в этом случае $1/z=$ $=1/x+1/y$. Последний пример дает возможность решать задачу о бассейнах «нажатием кнопки». Составим цепь из двух параллельно включенных сопротивлений величиной 4 ома и 12 ом и измерим ее сопротивление — получим ответ: 3 (ома)

Ю. Метт