

## Содержание

1	Забери камень	2
2	Посади дерево!	4
3	Состоянье у тебя истерическое	6
4	Определение высоты здания	6
5	Подбрасывание кубики	7
6	ООР и РОО	7
7	ООР и РОО с правом выбора	7
8	Ним-стоимость	7
9	Ним-подобные игры	7
10	Задача о разборчивой невесте	7
11	Труэль	7
12	Задача о делении ставки	8
13	Сходитесь!	8
14	Биномиальная модель цены акции	8
15	Опционы американского типа	8
16	Идеи	8
17	Лог	8
18	Решения	9

## Цель

## 1. Забери камень

- 1.1 Четыреста лет назад, в 1612 г. в Лионе появилась книга поэта и математика Баше де Мезирьяка (Claude Gaspar Bachet de Méziriac <sup>1</sup>) «Занимательные и приятные числовые задачи» (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres). В ней была предложена следующая игра. Двое по очереди называют числа от 1 до 10, выигрывает тот, кто первым доведет сумму до 100. В чью пользу эта игра?

Ссылка на переиздание 1884 года <http://cnum.cnam.fr/DET/8PY45.html>, задача 22.

- 1.2 Цзяньшинцзы «Выбирание камней»

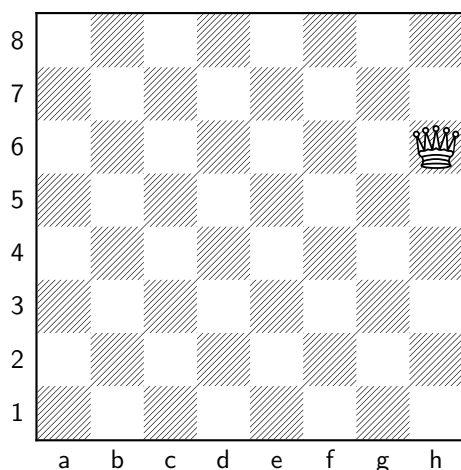
Древний Китай. Две кучки камней. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно забрать либо произвольное число камней из одной кучки, либо одинаковое число камней из обеих. В одной кучке 5, а в другой — 8 камней.

Кто выигрывает при правильной игре?

- 1.3 «Одинокий ферзь»

Шахматная доска, одинокий раненый ферзь стоит на h6. Раненый ферзь как и ферзь может двигаться на любое число клеток, но только влево или вниз, или влево-вниз. Двое игроков ходят по очереди, тот кто переставит ферзя на a1 выиграл.

1. В чью пользу эта игра? Если в пользу первого, то с какого хода следует начать игру?
2. Какие позиции на доске являются проигрышными и выигрышными, если ферзь очень сильно ранен и больше чем на два шага пойти не может?
3. Найди 10 отличий игры «Одинокий ферзь» от игры «Цзяньшинцзы».



- 1.4 «Набери чет»

В кучке 135 камней, двое по очереди забирают себе от 1 до 4 камней. Выигрывает тот, кто к концу игры наберет четное число камней.

Кто выигрывает при правильной игре?

<sup>1</sup>Баше де Мезирьяк перевел с греческого на латынь Арифметику Диофаната, на полях которой Ферма сформулировал свою великую теорему

1.5 В кучке 147 камней, Полина и Василий по очереди берут камни. Полина начинает первой. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Полина может взять 1, 4 или 5 камней, а Василий — 1, 3 или 4 камня.

1. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Как изменится результат, если Василий может брать 1, 3, 4 или 20 камней?
3. Как изменится результат, если Василий может брать 1, 3, 4 или 6 камней?

1.6 Опустошай и разделяй!

Есть две коробочки. В каждой из них лежит некоторое количество камешков. Игроки ходят по очереди. За один ход игрок выбрасывает содержимое одной из коробочек, и затем делит содержимое другой между двумя коробочками. Как минимум один камешек должен оставаться в каждой коробочке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам.

Найди все выигрышные позиции.

1.7 Опустошай и разделяй без равенства!

Есть две коробочки. В каждой из них лежит некоторое количество камешков. Игроки ходят по очереди. За один ход игрок выбрасывает содержимое одной из коробочек, и затем делит содержимое другой между двумя коробочками. **Поровну делить нельзя!** Как минимум один камешек должен оставаться в каждой коробочке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам.

Каковы есть оптимальные ходы в позиции 7 и 9 камешков?

## 2. Посади дерево!

### 2.1 Рулетки

Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй — 1, 6 и 8; на третьей — 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число.

Победитель получает от проигравшего 100 рублей.

В чью пользу эта игра?

### 2.2 Кортес

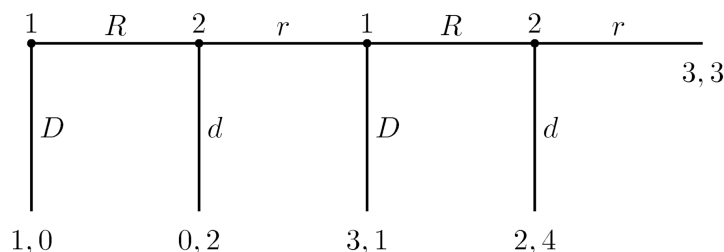
Кортес с бандой головорезов высадился на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет.

Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно.

Ценность деревушки для Кортеса — одна единица, ценность собственных головорезов — 2 единицы. Если Кортес будет драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки — главное остаться в живых, сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

1. Нарисуй дерево игры и найди обратно-индукционный исход.
2. Нарисуй дерево игры и найди обратно-индукционный исход в случае, если Кортес сжёт корабли.

### 2.3 Как будут играть абсолютно рациональные игроки, каждый из которых хочет побольше выиграть?



### 2.4 Количество денег в волшебной шкатулке каждый день увеличивается! В день $t$ в шкатулке находится $1.5 \cdot t$ рублей. Каждый из двух игроков решает, когда ему потребовать деньги. Тот кто потребует деньги первым — получает сумму полностью, тот, кто потребует вторым — не получает ничего. Если требования поступают одновременно, то игроки делят сумму в шкатулке поровну.

На 101-ый день деньги сгорают.

Как будут играть абсолютно рациональные игроки, каждый из которых хочет побольше выиграть?

### 2.5 На острове живут 42 тигра и одна вкусная волшебная антилопа. Если тигр съест волшебную антилопу, то он сам превратится в волшебную антилопу. Мясо волшебной антилопы настолько вкусно, что любой тигр ради его вкуса готов на превращение в антилопу. Но ни один тигр не готов полностью расстаться с жизнью ради мяса антилопы.

Тигры охотятся только в одиночку. Другой еды на острове предостаточно. Что будет происходить на этом острове?

## 2.6 Мимимишные пираты

На корабле 50 пиратов и они раздобыли 100 золотых слитков. Слитки неделимые.

У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т.д. Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против, если дележ одобрен более чем половиной пиратов, включая предложившего дележ, то он принимается, если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Если пиратов остаётся двое, голосование не проводится и пираты делят золото поровну.

Жизненные ценности мимимишного пирата просты:

1. Выжить лучше, чем умереть.
  2. Если в обоих вариантах я жив, то лучше вариант, где у меня больше денег.
  3. Если я жив и одинаково денег, то лучше вариант, где больше **живых** товарищей.
  4. Если я жив, одинаково денег и живых товарищей, то лучше вариант, где деньги получают старшие.
1. Какой делёж будет реализован?
  2. Как изменится ответ для кровожадных пиратов, которые предпочитают **мёртвых** товарищей?

## 2.7 В стране 1000 жителей, включая короля, каждый из которых получает заработную плату в одну монету. Когда в стране победила демократия, король потерял свою власть, даже был лишен права голоса. Единственное, что он может — так это предлагать перераспределение заработной платы. Зарплата каждого жителя должна выражаться неотрицательным количеством монет, в сумме все зарплаты должны равняться 1000.

Когда король предлагает перераспределение зарплаты, каждый житель, кроме самого короля, может проголосовать за, против или вообще не приходить на голосование.

Новое распределение одобряется, если число голосов «за» строго больше числа голосов «против».

Каждый житель эгоистичен, голосует «за», если в новом проекте его зарплата растёт, «против», если падает, и не приходит на голосование, если ему предлагается одинаковая зарплата.

Какую зарплату в результате получит хитрый король и сколько голосований ему потребуется?

### 3. Состоянье у тебя истерическое

- 3.1 Из города А в город Б ведут две непересекающиеся дороги. Одновременно из А в Б выехали две машины по этим двум дорогам. Водителям удалось проехать так, чтобы машины постоянно находились в прямой видимости друг друга. Финишировали водители в Б одновременно. По дороге водители могли менять скорость.

Теперь водители хотят одновременно стартовать в разных городах, одновременно финишировать, и проехать, возможно меняя скорость, по двум дорогам так, чтобы ни разу не оказаться в пределах прямой видимости.

Получится ли у водителей задуманное?

3.2

### 4. Определение высоты здания

- 4.1 В доме 100 этажей. У тебя два одинаковых хрустальных шара. Если уронить хрустальные шары с первого этажа, то они не разбиваются, а если уронить с сотого, то разбиваются.

Ты можешь сбрасывать шары с любого этажа.

Твоя цель — за наименьшее количество бросков гарантированно определить, начиная с какого этажа разбиваются хрустальные шары.

Сколько бросков при оптимальной стратегии тебе потребуется в худшем случае?

- 4.2 В доме 100 этажей. У пожилого и остроглазого профессора два одинаковых хрустальных шара. Если уронить хрустальные шары с первого этажа, то они не разбиваются, а если уронить с сотого, то разбиваются.

Профессор может сбрасывать шары с любого этажа. Трудность в том, что в доме сломался лифт и профессору приходится ходить по лестнице. Вверх профессору идти тяжело, а вниз — очень легко.

Профессору нужно при наименьшем пути вверх определить, начиная с какого этажа разбиваются хрустальные шары.

Сколько этажей вверх при оптимальной стратегии потребуется пройти профессору в худшем случае?

## 5. Подбрасывание кубики

## 6. ООР и РОО

## 7. ООР и РОО с правом выбора

## 8. Ним-стоимость

## 9. Ним-подобные игры

## 10. Задача о разборчивой невесте

### 10.1 Задача о Разборчивой Невесте, Secretary problem

К Разборчивой невесте выстроилась длинная-длинная вереница из потенциальных женихов.<sup>2</sup> Разборчивая невеста хочет выбрать самого богатого из них и только его! Потенциальные женихи заходят к Разборчивой невесте по одному в случайном порядке. Невеста неплохо разбирается в богатстве и всегда может ранжировать всех, с кем она общалась, по величине богатства. Когда к Разборчивой невесте приходит очередной претендент, она должна сразу принять решение: выбрать данного кандидата или перейти к следующему. Вернуться к предыдущим кандидатам невозможно — они обижаются и уезжают.

1. Как выглядит оптимальная стратегия Разборчивой невесты? Чему равна вероятность выбора самого богатого жениха Разборчивой невестой?
2. Подруга-дурнушка Разборчивой невесты хочет выбрать второго по богатству жениха и только его! Как выглядит её оптимальная стратегия? Чему равна вероятность выбора второго по богатству жениха Подругой-дурнушкой?

## 11. Труэль

### 11.1 Труэль

Три игрока решили стреляться ради самой красивой девушки и организуют труэль (дуэль для трёх игроков). Игроки стреляют по очереди,  $A-B-C-A-...$  Каждый из игроков может либо целиться в одного из противников, либо стрелять в воздух. Вероятности попадания равны  $p_a = 0.6$ ,  $p_b = 0.5$  и  $p_c = 0.4$ , соответственно. Игра продолжается до определения единственного победителя, он и получает девушку в жёны.

1. Как выглядит оптимальная стратегия каждого игрока?
2. Чему равны вероятности выиграть для каждого игрока?

---

<sup>2</sup>Докторская диссертация член-корреспондента РАН Бориса Березовского «Разработка теоретических основ алгоритмизации принятия предпроектных решений и их применения» является обобщением задачи о разборчивой невесте, [http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem)

## 12. Задача о делении ставки

12.1 У домашнего учителя Алексея Ивановича один фридрихсдор. Перед ним обычная колода в 52 карты. Перед открытием каждой карты Алексей Иванович выбирает, какую долю своего богатства, от нуля до единицы, поставить на цвет следующей карты. Карты бывают двух цветов: чёрные и красные. Например, у Алексея Ивановича есть такая стратегия: не ставить ничего вплоть до последней карты и затем поставить весь рубль на нужный цвет. Такая стратегия гарантированно удвоит его богатство.

Найдите стратегию, которая максимизирует гарантированный выигрыш Алексея Ивановича. Чему равен этот максимальный гарантированный выигрыш?

## 13. Сходитесь!

13.1 Примирение невозможно, и потому Андрей и Борис решаются на дуэль.

13.2 Истеричная певица

Начинающая певица дает концерты каждый день. Каждый ее концерт приносит продюсеру 0.75 тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью 0.5. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии она не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только цветы от продюсера. Если подарить цветы на сумму  $0 \leq x \leq 1$  тысяч евро, то она выйдет из депрессии с вероятностью  $\sqrt{x}$ .

Какова оптимальная стратегия продюсера? Продюсер максимизирует текущую ожидаемую ценность певицы.

задача о змее горыныче?

## 14. Биномиальная модель цены акции

## 15. Опционы американского типа

## 16. Идеи

1. Начинай с хвоста
2. Сделай первый шаг
3. Цена позиции
4.  $MR=MC$ , сформулировать словами (!)

## 17. Лог

1. Было 8 школьников, 9-10 класс. Решили 1.1. Сформулировали принципы. За + обязательно найдётся —, за — идут только плюсы. Рассчитываем на 1 шаг вперёд, и далее пользуемся уже рассчитанным. Начинай с хвоста. Предположение о рациональности игроков. Затем 1.3, 1.4. и 1.5.



2. Задача 2.1. Для сравнения рулеток сформулировали идею «нарисуй на плоскости». Задача 2.2. Сформулировали «все игроки знают правила игры». И варианты ходов, и платежи, известны обоим игрокам. Далее 2.3 — 2.5. В задаче 2.3 изображаем ходы двух игроков в матрице, то есть это «нарисуй на плоскости». Про тигров задача очень понравилась. На доске написал таблицу жизненных ценностей тигра.

## 18. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

2.1. Вероятность выигрыша для второго игрока —  $5/9$ .

2.2.

2.3.

2.4.

2.5. Один тигр съест антилопу, превратиться в неё, а дальше никто антилопу ловить не будет.

2.6.

2.7.

3.1.

3.2.

4.1.

4.2.

10.1. Пусть:

$n$  - количество потенциальных женихов,

$t$  - номер шага, на котором находится невеста,

$G_t$  - вероятность того, что  $t$ -ый жених лучше всех предыдущих,

$F_t$  - вероятность того, что пропустив  $t$  женихов и дальше пользуясь оптимальной стратегией (предполагается, что невеста будет пользоваться предложенной стратегией с  $t + 1$  шага), невеста выберет в мужа самого богатого.

Определим вероятность  $G_t$ . Очевидно, что  $G_n = 1$ . Тогда вероятность того, что  $n$ -ый жених будет лучше всех предыдущих, равна  $\frac{1}{n} \Rightarrow G_{n-1} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$  - вероятность "победы" на  $n - 1$  шаге. Пользуемся дальше подобной логикой.  $\frac{1}{n-1}$  - вероятность того, что  $n - 1$  жених лучше  $n - 2 \Rightarrow$  вероятность того, что  $n - 1$  будет не лучше  $n - 2$  равна  $1 - \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} \Rightarrow G_{n-2} = \frac{1}{n-1} \cdot 0 + \frac{n-2}{n-1} \cdot G_{n-1} = \frac{n-2}{n}$ . Используя метод математической индукции получаем, что  $G_t = \frac{t}{n}$ .

Теперь найдём  $F_t$ . Для этого стоит уточнить, что Разборчивая невеста будет пользоваться оптимальной стратегией с  $t + 1$  шага, то есть всех предыдущих женихов она сразу отвергает. И ещё очень важно заметить, что вероятность успеха невесты в её нелёгком деле не превышает величины  $F_t \Rightarrow F_{t+1} \leq F_t \Rightarrow F_t$  - убывающая последовательность. Из всего вышесказанного делаем вывод, что  $F_n = 0$ , так как отвергнув последнего жениха, невеста останется одна  $\Rightarrow F_{n-1} = \frac{1}{n}$  - вероятность, что  $n$ -ый жених лучше всех. Тогда  $F_{n-2} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-2)+(n-1)}{n(n-1)}$ . В данном случае сразу найти итоговый  $F_t$  затруднительно, поэтому рассмотрим величину  $\frac{F_t}{G_t}$ , тем более нам всё равно придётся сравнивать дальше эти величины. Получается, что  $\frac{F_{n-2}}{G_{n-2}} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \Rightarrow$  по методу математической индукции  $F_t = \frac{t}{n} \cdot (\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{n-1})$ .

Перейдём к самой стратегии. Представим, что  $F_t$  и  $G_t$  непрерывные функции (хотя это не так, потому что они зависят от целых чисел). Тогда  $F_t$  - монотонно убывающая функция, а  $G_t$  монотонно возрастающая и изобразить их в осях  $t, P$ , где  $P$  - вероятность и  $E(G_t) = E(F_t) = [0; 1]$  ( $E$  - область значения), то найдётся такая точка  $T$ , в которой эти графики пересекутся  $\Rightarrow$  надо найти ближайшее целое  $t_1$ , до которого невеста пропустит всех женихов, а дальше остановится на первом же, который лучше всех предыдущих.

Для того, чтобы найти это оптимальное  $t_1$ , необходимо рассмотреть соотношение  $\frac{F_t}{G_t}$  и сравнить его с 1. Получается, что  $\frac{F_t}{G_t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$ , для  $t \geq t_1$ .

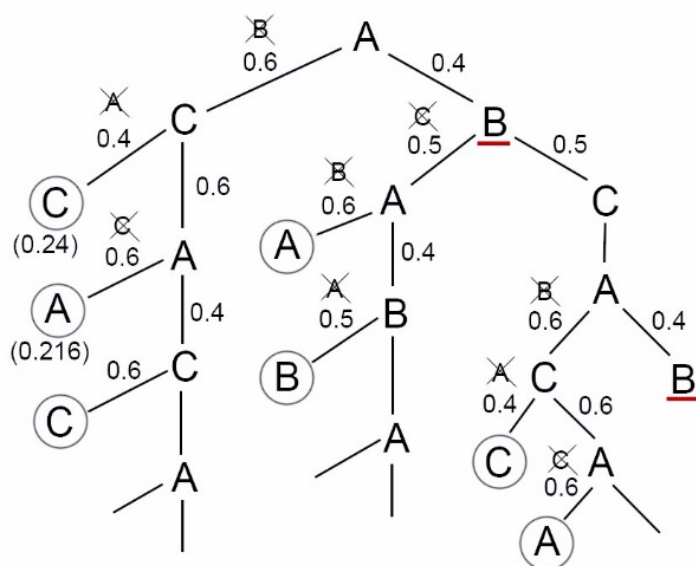
Предположим, что  $n, t$  - достаточно большие числа, которые позволят нам перейти к рассматриванию функций. Заметим, что если нарисовать график  $y = \frac{1}{x}$ , отметить точки  $t, t + 1, \dots, n$  и нарисовать прямоугольники с длиной соответствующей  $\frac{1}{t}, \frac{1}{t+1}, \dots, \frac{1}{n}$  и шириной 1, то сумма площадей этих прямоугольников будет соответствовать  $S = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$ .

Если произвести сжатие и растяжение функции  $y = \frac{1}{x}$  в  $t$  раз, величина  $\frac{1}{t}$  станет очень маленькой  $\Rightarrow$  сумма площадей прямоугольников практически в точности будет соответствовать площади под графиком на отрезке  $[t, n]$ . Заметим, что равенство  $S(xy) = S(x) + S(y)$  выполняется для всех  $x, y > 1$ , что соответствует одному из свойств логарифмов  $\Rightarrow S(x) = \log_a(x) \Rightarrow$  для обратной функции будет выполняться  $H(x+y) = H(x) * H(y) \Rightarrow$  это показательная функция  $H(x) = a^x$ . В итоге получаем, что  $a$  - это то самое число, которое нам надо узнать для того, чтобы найти  $S(x)$ . Так как  $H(1) = a \Rightarrow F(a) = 1 \Rightarrow$  рассмотрим различные значения площади под  $y = \frac{1}{x}$ .  $S(2) < 1 \Rightarrow a > 2$ ,  $S(2, 5) < 1 \Rightarrow a > 2, 5$ ,  $S(3) > 1 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow$  интуитивно понятно, что  $a = e$ . В итоге имеем, что  $\frac{F_t}{G_t} = 1 \Leftrightarrow \frac{n}{t} = e \Leftrightarrow \frac{t}{n} = \frac{1}{e} \Rightarrow F_t = G_t = \frac{t}{n} = \frac{1}{e} \Rightarrow$  вероятность «успеха» невесты найти самого богатого  $\frac{1}{e} \approx 0,368$ .

А оптимальная стратегия такова: пропустить  $\approx 36,8\%$  женихов и выбрать первого же, который будет лучше всех своих предшественников.

### 11.1. Оптимальные стратегии

Оптимальная стратегия игрока А (вероятность попадания 0.6) - в любом случае будет стрелять в противника, так как его вероятность попасть больше, чем у остальных, а вероятность, что попадут в него, меньше.



Оптимальная стратегия игрока С (вероятность попадания 0.4) - стрелять в воздух до того момента, как в игре останутся два игрока (С + А/В). Так он дает сильным игрокам возможность "разобраться" друг с другом, и если один убивает другого, то следующим ходом он первым имеет возможность уничтожить оставшегося (пусть и с небольшой вероятностью). В противном случае, если он убивает А, то следующим ходом с большой вероятностью В убьет его самого.

Оптимальная стратегия игрока В (вероятность попадания 0.5) совпадает со стратегией игрока А (может быть, В и выгодно бы было отклоняться, но он понимает стратегию С и в таком случае не будет стрелять в воздух).

#### Решение по дереву вероятностей

1. Если первым выстрелом А убил В (с вероятностью 0.6), то шанс победить остается у А и у С. Вероятность, что дальше С попадет в цель своим первым выстрелом и победит = 0.24. Если же С промахивается, а следующим ходом А его убивает, то А побеждает с вероятностью 0.216. Если А промахивается, то исход дуэли решает С и цикл повторяется. Можно заметить, что вероятность победы любого из них - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$\P(\text{победа С}) = \frac{0.24}{1-0.24} = 0.32$$

$$\P(\text{победа А}) = \frac{0.216}{1-0.24} = 0.28$$

2. Если первым выстрелом А не убивает В, то

а) следующим ходом В убивает С и победа разыгрывается между А и В;

б) В не убивает С, тогда (С стреляет в воздух) либо А убивает В, либо промахивается, и ход опять падает на В (при этом все живы) - цикл повторяется.

$$\text{а) } \P(\text{победа А}) = \frac{0.12}{1-0.2} = 0.15$$

$$\P(\text{победа В}) = \frac{0.04}{1-0.2} = 0.05$$

б) Теперь можно учесть повтор цикла для вероятности А и В (случай, когда А промахнулся и ход опять перешел В)

$$\P(\text{победа А}) = \frac{0.15}{1-0.2} = 0.19$$

$$\mathbb{P}(\text{победа В}) = \frac{0.05}{1-0.2} = 0.06$$

Если же А сразу убивает В, то (учитывая все циклы)

$$\mathbb{P}(\text{победа А}) = \frac{\frac{0.0432}{1-0.24}}{1-0.2} = 0.07$$

$$\mathbb{P}(\text{победа С}) = \frac{\frac{0.048}{1-0.24}}{1-0.2} = 0.08$$

Проверим сумму вероятностей:  $0.32 + 0.28 + 0.19 + 0.06 + 0.07 + 0.08 = 1$

Результат:

$$\mathbb{P}(\text{победит А}) = 0.28 + 0.19 + 0.07 = 0.54$$

$$\mathbb{P}(\text{победит В}) = 0.06$$

$$\mathbb{P}(\text{победит С}) = 0.32 + 0.08 = 0.4$$

12.1.

13.1.

13.2. Рассмотрим совершенно конкурентный невольничий рынок начинающих певиц. Певицы в хорошем настроении продаются по  $V_1$ , в депрессии — по  $V_2$ . Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 = 0.75 + (0.5V_1 + 0.5V_2) \\ V_2 = \max_x \sqrt{x}V_1 + (1 - \sqrt{x})V_2 - x \end{cases}$$

Оптимизируем и получаем,  $x^* = (V_1 - V_2)^2/4$ . Из первого уравнения находим  $(V_1 - V_2)/2 = 0.75$ .