

1 Занятие 1

Комплексное число — вектор на плоскости.

Для краткости вместо двух чисел в скобках $(3, 4)$ пишут $3 + 4i$. Например, $7, -2$ — горизонтальные векторы, а $2i, -5i$ — вертикальные векторы.

Сложение чисел. Геометрическая и арифметическая интерпретация.

Страшные слова:

1. Длина, модуль, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. Действительная часть, $Re(z) = a$
3. Мнимая часть $Im(z) = b$
4. Аргумент, угол с положительным направлением действительной оси $Arg(z)$

Умножение чисел. Геометрическая интерпретация.

При умножении двух комплексных чисел их длины умножаются, а углы (аргументы) складываются.

Из геометрических соображений находим $(1 + i)^2, i^2$, (примерно) $(3 + 4i) \cdot (-2 + 2i)$.

Арифметическая интерпретация:

1. раскрывай скобки
2. упрощай $i^2 = -1$

Находим $(1 + i)^2$ и $(3 + 4i) \cdot (-2 + 2i)$ арифметически.

Доказательства одинаковости обеих интерпретаций.

Берём произвольное комплексное число z .

1. случай умножения на i
2. случай умножения на положительное число 3
3. умножение на $(3 + 4i)$ Замечаем, что $(3 + 4i) * z = 3z + 4(z \text{ повернутое на } \pi/2)$. Рисуем.
О чудо! Углы сложились, а длина домножилась на 5.

Упр.

1. Найди $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$, $(2 + 5i)/(1 - i)$ и $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$
2. Реши уравнение $z^2 = -1$

Коммент:

1. случай умножения на положительное число, пожалуй, лучше было не рассказывать
2. 14 человек = 3 девярых + 6 десятых + 5 одиннадцатых

2 Лекция 2

Решаем уравнение $z^3 = i$

Составляем табличку возможных аргументов i . Делим их на 3 во втором столбике. Рисуем все решения. Выписываем все решения.

Упражнение: Решите уравнение $z^4 = 1$, $w^4 = i$

используем $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$

Решаем квадратные уравнения (отрицательный дискриминант).

Ввели обозначения, \mathbb{R} , \mathbb{C}

выводим $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$, $\cos(\alpha + \beta)$

Коммент:

$\cos(\alpha + \beta)$ — лучше было отложить на потом :)

3 Занятие 3

Сумма $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$

Геометрический способ нахождения. Арифметический способ нахождения с домножением на $1/2$.

Вечная черепаха. Всю жизнь движется по прямой. В первый час своей жизни движется со скоростью 10 км/ч, затем каждый час её скорость падает на 20%. Какой путь черепаха пройдет за свою бесконечную жизнь?

Вечная черепаха-2. Стартует в начале координат. Изначально ползёт вправо, затем каждый час поворачивает на 90° влево. Где она окажется в конце своего жизненного пути?

Вечная черепаха-3. На 45° ?

Три формы записи комплексных чисел:

1. алгебраическая $1 + \sqrt{3}i$
2. тригонометрическая $2(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3})$
3. экспоненциальная $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Задача про три квадрата. Чему равна сумма углов?

Коммент:

вечная черепаха-3 — «плохие» числа.

экспоненциальная форма слегка подвисла

4 Занятие 4

многозначные функции еще пример — $\arg(z)$, $\text{Arg}(z)$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии Спираль (угол 90° , угол 60° , угол 45°)

задача про три квадрата нарисуйте $|z-3+4i|=2$ нарисуйте $|z-3+2i|=i+7$ нарисуйте $|z-i|=|z+i|$

$$(1 + \sqrt{3}i)^3 / (1 - i)^2 \quad (1 + i)^5 / (\sqrt{3} + i)^2 \quad (1 + \sqrt{3}i)^6$$

сопряжение комплексных чисел Что можно сказать про z , если $z = \text{conjugate}(z)$ сопряжение и сумма сопряжение и произведение

Теорема о даме с собачкой? или позже?

$$(1 + i)^4$$

$$1/(2-i)$$

теорема Абеля в задачах и упражнениях тривиум нму другие материалы нму
Последнее занятие — контрольная :)