

# 1 Занятие 1

Комплексное число — вектор на плоскости.

Для краткости вместо двух чисел в скобках  $(3, 4)$  пишут  $3 + 4i$ . Например,  $7, -2$  — горизонтальные векторы, а  $2i, -5i$  — вертикальные векторы.

Сложение чисел. Геометрическая и арифметическая интерпретация.

Страшные слова:

1. Длина, модуль,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. Действительная часть,  $Re(z) = a$
3. Мнимая часть  $Im(z) = b$
4. Аргумент, угол с положительным направлением действительной оси  $Arg(z)$

Умножение чисел. Геометрическая интерпретация.

При умножении двух комплексных чисел их длины умножаются, а углы (аргументы) складываются.

Из геометрических соображений находим  $(1 + i)^2, i^2$ , (примерно)  $(3 + 4i) \cdot (-2 + 2i)$ .

Арифметическая интерпретация:

1. раскрывай скобки
2. упрощай  $i^2 = -1$

Находим  $(1 + i)^2$  и  $(3 + 4i) \cdot (-2 + 2i)$  арифметически.

Доказательства одинаковости обеих интерпретаций.

Берём произвольное комплексное число  $z$ .

1. случай умножения на  $i$
2. случай умножения на положительное число 3
3. умножение на  $(3 + 4i)$  Замечаем, что  $(3 + 4i) * z = 3z + 4(z \text{ повернутое на } \pi/2)$ . Рисуем.  
О чудо! Углы сложились, а длина домножилась на 5.

Упр.

1. Найди  $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$ ,  $(2 + 5i)/(1 - i)$  и  $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$
2. Реши уравнение  $z^2 = -1$

Коммент:

1. случай умножения на положительное число, пожалуй, лучше было не рассказывать
2. 14 человек = 3 девярых + 6 десятых + 5 одиннадцатых

## 2 Лекция 2

Решаем уравнение  $z^3 = i$

Составляем табличку возможных аргументов  $i$ . Делим их на 3 во втором столбике. Рисуем все решения. Выписываем все решения.

Упражнение: Решите уравнение  $z^4 = 1$ ,  $w^4 = i$

используем  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$

Решаем квадратные уравнения (отрицательный дискриминант).

Ввели обозначения,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$

выводим  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$

Коммент:

$\cos(\alpha + \beta)$  — лучше было отложить на потом :)

## 3 Занятие 3

Сумма  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$

Геометрический способ нахождения. Арифметический способ нахождения с домножением на  $1/2$ .

Вечная черепаха. Всю жизнь движется по прямой. В первый час своей жизни движется со скоростью 10 км/ч, затем каждый час её скорость падает на 20%. Какой путь черепаха пройдет за свою бесконечную жизнь?

Вечная черепаха-2. Стартует в начале координат. Изначально ползёт вправо, затем каждый час поворачивает на  $90^\circ$  влево. Где она окажется в конце своего жизненного пути?

Вечная черепаха-3. На  $45^\circ$ ?

Три формы записи комплексных чисел:

1. алгебраическая  $1 + \sqrt{3}i$
2. тригонометрическая  $2(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3})$
3. экспоненциальная  $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

Задача про три квадрата. Чему равна сумма углов?

Коммент:

вечная черепаха-3 — «плохие» числа.

экспоненциальная форма слегка подвисла

## 4 Занятие 4

многозначные функции еще пример —  $\arg(z)$ ,  $\text{Arg}(z)$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии Спираль (угол  $90^\circ$ , угол  $60^\circ$ , угол  $45^\circ$ )

задача про три квадрата нарисуйте  $|z-3+4i|=2$  нарисуйте  $|z-3+2i|=i+7$  нарисуйте  $|z-i|=|z+i|$

$$(1 + \sqrt{3}i)^3 / (1 - i)^2 \quad (1 + i)^5 / (\sqrt{3} + i)^2 \quad (1 + \sqrt{3}i)^6$$

сопряжение комплексных чисел Что можно сказать про  $z$ , если  $z = \text{conjugate}(z)$  сопряжение и сумма сопряжение и произведение

Теорема о даме с собачкой? или позже?

$$(1 + i)^4$$

$$1/(2 - i)$$

теорема Абеля в задачах и упражнениях тривиум нму другие материалы нму

Последнее занятие — контрольная :)

Литература:

Понарин, Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах

Tristan Needham, Visual complex analysis.

Яглом, Комплексные числа

Ссылка на видео