

Содержание

1	Посади дерево!	2
2	К чёрту условности!	2
3	Не комплексуй без комплексных чисел	4
4	Ноль без палочки	5
5	Сферическая блоха. Ой, сфера Блоха	6
6	Вентиль Адамара	6
7	Возможные действия	6
8	Алгоритм Дойча	6
9	Два кубита — два весёлых друга	6
10	Действия на паре кубитов	6
11	Алгоритм Гровера: 2 кубита	6
12	Алгоритм Гровера: 3 кубита	7
13	Алгоритм Саймона: 2 кубита	7
14	Лог	7
15	Набор сделай сам!	7
16	Решения	7
17	Источники мудрости	8

Цель

Рассказать про квантовые вычисления девятиклассникам. Дойти до алгоритма Гровера с нуля, включая рассказ про вероятности и комплексные числа.

Спорные моменты:

- полный отказ от матриц, только обозначения Дирака;
- что делать с экспонентой e ?

1. Посади дерево!

Определение 1. A — событие, $\mathbb{P}(A)$ — вероятность события A .

X — случайная величина, $\mathbb{E}(X)$ — математическое ожидание величины X .

1.1 В вазе пять неотличимых с виду конфет. Две без ореха и три — с орехом. Маша ест конфеты выбирая их наугад до тех пор, пока не съест первую конфету с орехом. Обозначим X — число съеденных конфет. Найди вероятности $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X > 1)$ и ожидание $\mathbb{E}(X)$.

1.2 В коробке находится четыре внешне одинаковые лампочки, две из них исправны. Лампочки извлекают из коробки по одной до тех пор, пока не будут извлечены обе исправные.

1. Какова вероятность того, что опыт закончится извлечением трёх лампочек?

2. Каково ожидаемое количество извлеченных лампочек?

1.3 Маша подкидывает монетку. Если она выпадает орлом, то Маша подкидывает монетку ещё один раз, если решкой — то ещё два раза. После этого Маша идёт в кино! Пусть X — количество выпавших орлов.

Найди вероятности $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ и ожидание $\mathbb{E}(X)$.

1.4 Две команды равной силы играют в волейбол до трёх побед одной из них, не обязательно подряд. Ничья невозможна. Из-за равенства сил будем считать, что вероятность победы каждой равна 0.5. Величина N — количество сыгранных партий.

Составьте табличку возможных значений N с их вероятностями.

Найди вероятность $\mathbb{P}(N - \text{чётное})$ и ожидание $\mathbb{E}(N)$.

1.5 Какова вероятность того, что у 13 человек не будет ни одного совпадения дней рождений?

2. К чёрту условности!

Определение 2. Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

2.1 В городе примерно 4% такси зелёного цвета и остальные жёлтые. Свидетель путает цвет на показаниях в суде с вероятностью 10%.

1. Какова вероятность того, свидетель скажет, что видел зелёное такси?

2. Какова вероятность того, свидетель ошибётся?

3. Какова вероятность того, что такси было зелёным, если свидетель говорит, что оно было зелёным?

4. Какова вероятность того, что такси было жёлтым, если свидетель говорит, что оно было жёлтым?

2.2 У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из ситуаций найдите условную вероятность того, что у тётки Маши есть дети обоих полов.

1. Известно, что старший ребенок — мальчик.
2. Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть метлу. Это оказывается мальчик.
3. На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын?» тётя Маша ответила: «Да».
4. На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

2.3 Ты смертельно болен. Спасти тебя может только один вид целебной лягушки. Целебны у этого вида только самцы. Самцы и самки встречаются равновероятно. Ты на дороге и предельно ослаб и можешь проползти лишь 100 метров. Справа в 100 метров аж две лягушки целебного вида, изда- лека неясно кто. От двух лягушек в твою сторону дует ветер, поэтому ты можешь их слышать.

Каковы твои шансы на спасение в каждом из случаев?

1. Самцы и самки квакают одинаково, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье.
2. Самки квакают, самцы — нет, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье, но не разобрать, одной лягушки или двух.
3. Самцы и самки квакают по разному, но одинаково часто. Ты слышишь отдельный квак одной из двух лягушек справа и это квак самки.

2.4 Monty-Hall

Есть три закрытых двери. За двумя из них — по козе, за третьей автомобиль. Ты выбираешь одну из дверей. Допустим, ты выбрал дверь А. Ведущий шоу открывает дверь В и за ней нет автомобиля. В этот момент ведущий предлагает тебе изменить выбор двери.

Имеет ли смысл изменить выбор в каждой из трёх ситуаций?

1. Ведущий выбирал одну из трёх дверей равновероятно.
2. Ведущий выбирал одну из двух дверей не выбранных тобой равновероятно.
3. Ведущий выбирал дверь без машины и не совпадающую с твоей.

3. Не комплексуй без комплексных чисел

Определение 3. Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонтальной осью — аргумента комплексного числа, $\text{Arg } z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\text{Re } z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, $\text{Im } z$.

3.1 Для комплексных чисел $1 + i$ и $3 + 4i$ найди $|z|$, $\text{Arg } z$, $\text{Re } z$, $\text{Im } z$. Нарисуй числа $1 + i$ и $3 + 4i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение z^* комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

3.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1 + i)^2$? $(1 + i)^{43}$?
2. Почему $i^2 = -1$?
3. Чему равняется произведение произвольного комплексного числа $z = a + bi$ на i ?
4. Нарисуй процесс умножения произвольного $z = a + bi$ на $3 + 4i$. Почему $(3 + 4i)z = 3z + 4iz$?

3.3 1. У комплексного числа $w = \sqrt{11} + 5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\text{Arg } w$, $\text{Re } w$, $\text{Im } w$, w^* , ww^* .

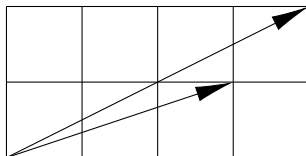
2. Найди $(3 + 5i) \cdot (3 + 3i)$, $(1 + i)/(1 - i)$,
3. Найди $(\sqrt{3} + i)^{43}$, $(1 - i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ)) \cdot (\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))$;

3.4 Реши уравнения $z^2 + 6z + 10 = 0$, $z^6 = 64$, $(z - 1)/(z + 1) = 1 + 3i$.

3.5 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на 90° налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

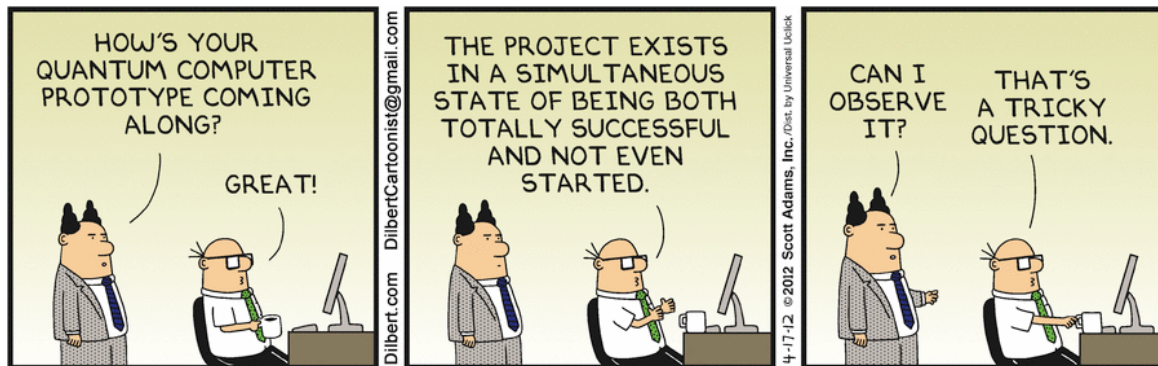
К какой точке стремится черепаха, если она поворачивает на 60° ?

3.6 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



3.7 На плоскости нарисована кошечка. Что произойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

4. Ноль без палочки



4.1 Составь таблицу истинности для следующих классических схем:

4.2 С помощью классических логических элементов *NOT*, *AND*, *OR* реализуй классические элементы:

1. исключающее ИЛИ, *XOR*;
2. управляемое НЕ, *CNOT*;

Определение 4. Кубит может находиться в бесконечном количестве состояний

$$|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$$

Амплитуды α_0 и α_1 — это комплексные числа удовлетворяющие соотношению $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$. Также кубит можно записать в столбик:

$$|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Если измерить кубит $|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$, то он перейдёт в детерминистическое состояние $|0\rangle$ с вероятностью $|\alpha_0|^2$ и в детерминистическое состояние $|1\rangle$ с вероятностью $|\alpha_1|^2$.

4.3 Для каждого выражения определи, является ли оно честным и благородным кубитом. Для кубитов определи вероятности пронаблюдать их в состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$

1. $\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$;
2. $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle$;
3. $|0\rangle + |1\rangle$;
4. $\frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle$;
5. $|1\rangle$;
6. $\cos 10^\circ |0\rangle + (\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) \sin 12^\circ |1\rangle$;
7. $\cos 15^\circ |0\rangle + (\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) \sin 15^\circ |1\rangle$;
8. $(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) \cos 45^\circ |0\rangle + (\cos 22^\circ + i \sin 22^\circ) \sin 45^\circ |1\rangle$;

5. Сферическая блоха. Ой, сфера Блоха

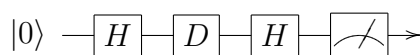
6. Вентиль Адамара

Вентиль Адамара.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

7. Возможные действия

8. Алгоритм Дойча



9. Два кубита — два весёлых друга

9.1 Алиса посылает Бобу пару кубитов в состоянии¹

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$$

1. Если Боб измерит сразу оба кубита, то каковы будут вероятности каждого состояния?
2. Боб решил измерить только первый кубит. Каковы вероятности измерить $|0\rangle$ и $|1\rangle$? В каких состояниях при этом окажется второй кубит?
3. Боб решил измерить только второй кубит. Каковы вероятности измерить $|0\rangle$ и $|1\rangle$? В каких состояниях при этом окажется первый кубит?

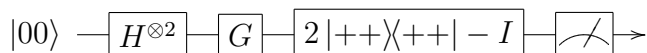
10. Действия на паре кубитов

10.1 Что получит Алиса, если применит действие $H^{\otimes 2}$ к паре кубит

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

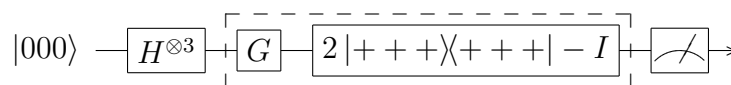
10.2 Приведи пример действия A на паре кубит, которое невозможно представить в виде тензорного произведения действий. То есть невозможно придумать такие однокубитные действия B и C , что $A = B \otimes C$.

11. Алгоритм Гровера: 2 кубита



¹Конечно, это состояние кубитов, а не Алисы!

12. Алгоритм Гровера: 3 кубита



13. Алгоритм Саймона: 2 кубита

14. Лог

1. Было 11 школьников, 8-10 класс. Умножение вероятностей на дереве и расчёт ожидания на примере 1.1, 1.2. Задача про метание маркера в доску, школьники сами предлагают формулу $\mathbb{P}(A|B) = S(A \cap B)/S(B)$. Задача 2.1. Школьники прочли и начали предлагать ответы на 2.2.
2. Решили 2.2. Влад предложил решение без дерева. Решали 2.3. Перешли к комплексным числам. Школьники посчитали модуль и аргумент. Дали геометрическое определение умножения. Умножили исходя из геометрического определения $(1+i)(1-i)$ и $(1+i)^{43}$.
3. Геометрически умножили: $i \cdot i$, $i \cdot (3+5i)$, $(2+3i) \cdot (3+5i)$. На примере тем самым доказали, что можно умножать алгебраически, заменяя i^2 на -1 . Решили 3.3, 3.5, 3.6.

15. Набор сделай сам!

[Sta]

16. Решения

1.1. $\mathbb{P}(X = 1) = 3/5$, $\mathbb{P}(X = 2) = 3/10$, $\mathbb{P}(X = 3) = 1/10$, $\mathbb{E}(X) = 1.5$

1.2.

1.3.

1.4. N 3 4 5

2/8 3/8 3/8

1.5.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.6. $(4 + 2i)(3 + i) = 10 + 10i$, $\pi/4$.

3.7. Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

4.1.

4.2.

4.3.

9.1.

10.1.

10.2. Например, $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$.

17. Источники мудрости

[Sta] Mark Stay. *Deutsch's algorithm with a pair of sunglasses and some mirrors*. URL: <https://www.classe.cornell.edu/spr/2004-04/msg0060395.html>. Инструкция по сборке квантового компьютера для алгоритма Дойча.