Группы и Симметрии

Саша Абанов

Университет Стони Брук, США

(Dated: июль-август, 2015)

Данные записки представляют с собой краткое содержание и задачи к семинарам курса прочитанного автором в Красноярской Летней Школе (КЛШ) в 2016 году для школьников старших классов. Курс представлял собой введение в теорию групп. Курс состоял из 3 лекций и 3 семинаров.

В основе современной физики лежит понятие симметрии. Например, мы говорим, что энергия сохраняется потому, что законы физики инвариантны относительно временных сдвигов, а электрический заряд сохраняется потому, что наша Вселенная обладает калибровочной симметрией. Теория групп и их представлений – это математический аппарат, который позволяет работать с симметриями и их следствиями. В этом курсе мы познакомимся с некоторыми основными понятиями теории групп. Основной упор будет делаться на разбор простейших примеров и приложений теории групп.

Contents

Использованная литература

При подготовке курса автор использовал курс прочитанный Павлом Этингофом для школьников

- P. Etingof, *Groups around us.*

Я также использовал статьи из журнала "Квант"

- А. Колмогоров, *Группы преобразований*, Квант.
- Л. Садовский, М. Аршинов, *Группы*, Квант.
- А. Б. Сосинский, *Конечные группы*, Квант.
- А. И. Кострикин, *Простые группы*, Квант.
- Э. Белага, *Алгебра – древняя и современная*, Квант.

Идеи проектов на выставку итоговых проектов КЛШ

1. Раскраска многоугольников и малая теорема Ферма.

2. Раскраска многогранников и теорема Полиа.

3. *Группа симметрий Судоку.

Проекты отмеченные звёздочкой были представлены школьниками КЛШ на выставку итоговых проектов.

Лекция 1: Группы преобразований.

1. Примеры преобразований и действий.

   (a) Композиции преобразований.

   (b) Тождественное преобразование.

   (c) Обратимые преобразования.

   (d) Обратные преобразования.

2. Определение группы преобразований.

3. Ассоциативность композиции преобразований.

4. Таблицы умножения для некоторых групп преобразований.

5. Первое знакомство с изоморфизмом групп.

6. Дальнейшие примеры:

   (a) Группа перестановок и знакопеременная группа.

   (b) Группы движений плоскости и пространства.

   (c) Группы симметрий геометрических фигур.

Семинар 1: Группы преобразований.

Задача 1: Составьте таблицу умножения для преобразований симметрии правильного треугольника. Идентифицируйте обратный элемент для каждой из симметрий.

Задача 2: Показать, что группа симметрий правильного треугольника изоморфна группе перестановок S_3.

Задача 3: Рассмотрите поворот куба на 90^o вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных граней и поворот на 120^o вокруг главной диагонали куба. Назовем эти повороты буквами α и β, соответственно. Найдите симметрию, соответствующую композиции $\beta \circ \alpha$. Совпадает ли эта операция с $\alpha \circ \beta$?

Задача 4: Найдите перестановку обратную следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Запишите эту перестановку как произведение циклов.

Задача 5: Покажите, что каждая перестановка может быть записана как произведение непересекающихся циклов.

Задача 6: 15 школьников сидят в классе с 15 стульями занумерованными числами от 1 до 15. Учитель требует, чтобы школьники пересаживались каждую минуту по следующему правилу:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 \end{matrix}$$

(a) Запишите эту перестановку как произведение циклов

(b) Через сколько минут все студенты вернуться на свои первоначальные места?

**Задача 7:* Порядком перестановки s называется наименьшее число d такое, что $s^d = I$, где I - тождественная перестановка.

(a) Найдите порядок цикла длины n.

(b) Найдите порядок перестановки $(12)(34795)(6\,10\,11\,12\,13\,14\,15)$.

(c) Пусть перестановка s является произведением непересекающихся циклов длин $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (в этом случае мы пишем, что перестановка имеет **тип** $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle$). Каков порядок перестановки s?

(d) Найдите примеры перестановок длины 9, которые имеют порядок $7, 10, 12, 11$ (если они существуют)?

**Задача 8:* Обозначим как a и b два некоторых поворота икосаэдра на угол 72° вокруг двух соседних вершин. Докажите, что любую симметрию икосаэдра можно записать как композицию некоторого количества операций a и b (например, $a \circ b \circ b \circ a \circ b$).

Задача 9: Найдите все симметрии тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра* и додекаэдра*. Какие из них удовлетворяют равенству $a^2 = e$? Равенству $a^3 = e$? Равенству $a^5 = e$? Составьте таблицы умножений для полученных групп симметрий.

Задача 10: Сколько существует ожерелий, составленных из 17 различных бусинок?

Лекция 2: Понятие абстрактной группы

1. Бинарные операции

2. Определение абстрактной группы. Аксиомы группы.

3. Коммутативные (Абелевые) группы

4. Гомоморфизм и изоморфизм

5. Подгруппы

6. Порядок элемента группы и подгруппы

7. Теорема Лагранжа

Семинар 2: Абстрактные группы

Задача 1: Являются ли сложение, вычитание, умножение и деление бинарными операциями на множестве всех нечётных чисел?

Задача 2: Покажите, что положительные рациональные числа с операцией умножения образуют группу. (мультипликативная группа положительных рациональных чисел).

Задача 3: Является ли группой множество рациональных чисел с операцией умножения?

Задача 4: Рассмотрите множество целых чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ с операцией сложения по модулю n. Является ли это множество группой для $n = 7$? любого целого n? Можете ли вы придумать геометрическую реализацию этой группы?

Задача 5: Показать, что группа симметрий правильного треугольника изоморфна группе перестановок S_3.

Задача 6: Установите соответствие между преобразованиями симметрии квадрата и перестановками его вершин. Убедитесь, что не каждой перестановке соответствует преобразование симметрии квадрата. Сравните порядки (число элементов) группы симметрии квадрата и группы перестановок S_4.

Задача 7: Фабрика игрушек выпускает проволочные кубики, в вершинах которых расположены маленькие разноцветные шарики. По ГОСТу в каждом кубике должны быть использованы шарики всех восьми цветов (белого и семи цветов радуги). Сколько разных моделей кубиков может выпускать фабрика?

Задача 8: p – простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.)

**Задача 9:* К кубику Рубика применили последовательность поворотов. Доказать, что применяя ее несколько раз, можно привести кубик в начальное состояние.

Лекция 3: Группы и попытки их классификации

1. Теорема Лагранжа и её применения

   (a) Порядок групп симметрий многогранников

   (b) Делимость некоторых степеней натуральных чисел

2. Теорема Кэли

3. Классификация конечных простых групп

Семинар 3: Разные задачи.

Задача 1: Найти группу симметрии прямоугольного параллелепипеда вершины которого раскрашены (через одну) в синий и красный цвета. Каков порядок этой группы? Составить таблицу умножения для этой группы. Можете ли вы найти изоморфизм этой группы с подгруппой группы перестановок?

Задача 2: Разложить на циклы перестановку

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 5 & 3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти порядок этой перестановки и обратную перестановку. Найти произведение $\alpha * \beta$, где $\beta = (3, 6, 7)$.

Задача 3: Найдите порядок группы симметрий куба и убедитесь в справедливости теоремы Лагранжа, рассматривая различные элементы этой группы.

Задача 4: Авторы: Шнирельман А., Константинов Н.Н. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).

Задача 5: Некоторый текст зашифровали, поставив в соответствие каждой букве некоторую (возможно, ту же самую букву) букву так, что текст можно однозначно расшифровать. Докажите, что найдется такое число N, что после N-кратного применения шифрования заведомо получится исходный текст. Найдите из всех таких значений N наименьшее, годящееся для всех шифров (при условии, что в алфавите 33 буквы). (Задача с сайта www.cryptography.ru.)

Задача 6: Комбинация A поворотов кубика Рубика называется порождающей, если среди результатов многократного применения комбинации A встретятся всевозможные состояния, в которые можно перевести кубик Рубика при помощи поворотов. Существует ли порождающая комбинация поворотов?

Задача 7: В окружность вписан неправильный n-угольник, который при повороте окружности около центра на некоторый угол $\alpha \neq 2\pi$ совмещается сам с собой. Доказать, что n – число составное.

**Задача 8:* Автор: Гринберг Н. На пульте имеется несколько кнопок, с помощью которых осуществляется управление световым табло. После нажатия любой кнопки некоторые лампочки на табло переключаются (для каждой кнопки есть свой набор лампочек, причём наборы могут пересекаться). Доказать, что число состояний, в которых может находиться табло, равно некоторой степени числа 2.

ИМЯ: **КОМАНДА:**

Загоночная Контрольная

по курсу:

«Группы и Симметрии»
УЗ, лектор: Саша Абанов

Задача 1:

а) Найдите группу симметрии правильного шестиугольника вершины которого раскрашены (через одну) в синий и красный цвета.

б) Каков порядок этой группы?

в) Составьте таблицу умножения для этой группы.

г) Можете ли вы найти изоморфизм этой группы с подгруппой некоторой группы перестановок?

Решение:

Задача 2: Разложить на циклы перестановку

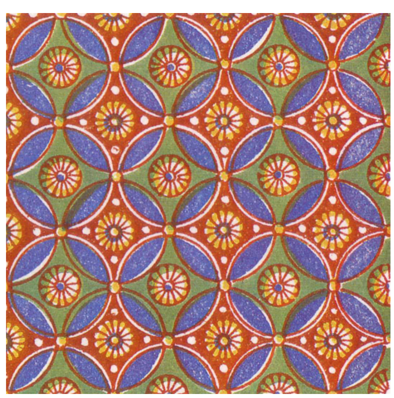
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 9 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти порядок этой перестановки и обратную перестановку. Найти произведение $\beta * \alpha$, где $\beta = (2, 7, 8)$.

Примечание: ответ для обратной перестановки и для произведения запишите в виде разложения по циклам.

Решение:

**Задача 3 [задача вне зачёта]:* Орнамент, показанный на рисунке, использовался ещё древними Египтянами. Идентифицируйте преобразования симметрии сохраняющие рисунок (предполагается, что рисунок занимает всю бесконечную плоскость).



Решение: