Содержание

Цель

Рассказать про комплексный числа, преобразование Мёбиуса, кватернионы, вращения, роторы, октонионы, гиперболическую и проективную геометрию.

- ччч

1. Комплексные числа. Определение

Определение 1. Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонатльной осью — аргумента комплексного числа, $\arg z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\operatorname{Re} z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, действительное число, $\operatorname{Im} z$.

1.1 Поехали.

1. Для комплексных чисел $1+i$ и $3+4i$ найди $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
2. Нарисуй числа $1+i$, $3+4i$, $3-i$, $-3i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение z^* комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

1.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1+i)^2$? $(1+i)^{43}$?
2. Почему $i^2=-1$?
3. Чему равняется произведение $z=6+3i$ на i?

Наивное умножение комплексных чисел. Раскрываем скобки и упрощаем по принципу $i^2=-1$.

1.3 Нарисуй процесс умножение произвольного z на $3+4i$. А именно, нарисуй $3z$, $4iz$, $(3+4i)z$ и по рисунку объясни, почему $(3+4i)z=3z+4iz$.

1.4

1. У комплексного числа $w=\sqrt{11}+5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, w^*, ww^*.
2. Найди $(3+5i)\cdot(3+3i)$, $(1+i)/(1-i)$,
3. Найди $(\sqrt{3}+i)^{43}$, $(1-i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))\cdot(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;

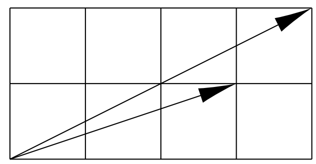
1.5 Реши уравнения $z^2=-1$, $z^2+6z+10=0$, $z^6=64$, $(z-1)/(z+1)=1+3i$.

1.6 Найди суммы $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{2019}$, $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\ldots+(1+i)^{2020}$.

1.7 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на 90° налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на 60°?

1.8 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



1.9 На плоскости нарисована кошечка. Что прозойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

1. Комплексные числа. Определение

Определение 2. Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонатльной осью — аргумента комплексного числа, $\arg z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\operatorname{Re} z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, действительное число, $\operatorname{Im} z$.

1.1 Поехали.

1. Для комплексных чисел $1+i$ и $3+4i$ найди $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
2. Нарисуй числа $1+i$, $3+4i$, $3-i$, $-3i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение z^* комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

1.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1+i)^2$? $(1+i)^{43}$?
2. Почему $i^2=-1$?
3. Чему равняется произведение $z=6+3i$ на i?

Наивное умножение комплексных чисел. Раскрываем скобки и упрощаем по принципу $i^2=-1$.

1.3 Нарисуй процесс умножение произвольного z на $3+4i$. А именно, нарисуй $3z$, $4iz$, $(3+4i)z$ и по рисунку объясни, почему $(3+4i)z=3z+4iz$.

1.4

1. У комплексного числа $w=\sqrt{11}+5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, w^*, ww^*.
2. Найди $(3+5i)\cdot(3+3i)$, $(1+i)/(1-i)$,
3. Найди $(\sqrt{3}+i)^{43}$, $(1-i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))\cdot(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;

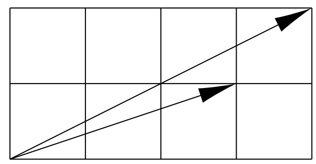
1.5 Реши уравнения $z^2=-1$, $z^2+6z+10=0$, $z^6=64$, $(z-1)/(z+1)=1+3i$.

1.6 Найди суммы $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{2019}$, $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\ldots+(1+i)^{2020}$.

1.7 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на 90° налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на 60°?

1.8 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



1.9 На плоскости нарисована кошечка. Что прозойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

2. Комплексные числа. Геометрия и картинки

2.1 Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Снаружи каждой стороны четырёхугольника построим квадрат. Назовём отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, MN и KL.

1. Найди угол между MN и KL.
2. Найди отношение длин MN и KL.

2.2 Нарисуй на комплексной плоскости множества

1. $|z| = 4$;
2. $|z - 2 + 3i| > 5$;
3. $\operatorname{Re} z = 3$;
4. $\operatorname{Im} z < 6$;
5. $1 < |2z - 6| < 2$;
6. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 < 8$;
7. $|z - 1| + |z + 1| \leq 2$;
8. $|\operatorname{Re} z| < |z|$;
9. $|z - i| = |z - (3 + 2i)|$;
10. $\operatorname{Re}((1 + i)z) > 2$;
11. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;
12. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;

2.3 Нарисуй на комплексной плоскости траектории, $t \to z(t)$, для $t \in \mathbb{R}$, отметив стрелкой направление:

1. $t \to 6 + it$;
2. $t \to t + 2 + 7i$;
3. $t \to t + 2 + it$;
4. $t \to t + it^2$;
5. $t \to \cos t + i \sin t$;
6. $t \to t \cdot (\cos t + i \sin t)$;
7. $t \to t \cdot (\cos t - i \sin t)$;

2.4 Нарисуй комплексные числа z_1 и z_2 с единичной длиной и аргументами $\pi/4$ и $\pi/2$.

1. Запиши z_1, z_2 и $z_1 + z_2$ в виде $a + bi$.
2. Найди $\tan 3\pi/8$;

2. Комплексные числа. Геометрия и картинки

2.1 Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Снаружи каждой стороны четырёхугольника построим квадрат. Назовём отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, MN и KL.

1. Найди угол между MN и KL.
2. Найди отношение длин MN и KL.

2.2 Нарисуй на комплексной плоскости множества

1. $|z| = 4$;
2. $|z - 2 + 3i| > 5$;
3. $\operatorname{Re} z = 3$;
4. $\operatorname{Im} z < 6$;
5. $1 < |2z - 6| < 2$;
6. $|z-1|^2 + |z+1|^2 < 8$;
7. $|z-1| + |z+1| \leq 2$;
8. $|\operatorname{Re} z| < |z|$;
9. $|z - i| = |z - (3+2i)|$;
10. $\operatorname{Re}((1+i)z) > 2$;
11. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;
12. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;

2.3 Нарисуй на комплексной плоскости траектории, $t \to z(t)$, для $t \in \mathbb{R}$, отметив стрелкой направление:

1. $t \to 6 + it$;
2. $t \to t + 2 + 7i$;
3. $t \to t + 2 + it$;
4. $t \to t + it^2$;
5. $t \to \cos t + i \sin t$;
6. $t \to t \cdot (\cos t + i \sin t)$;
7. $t \to t \cdot (\cos t - i \sin t)$;

2.4 Нарисуй комплексные числа z_1 и z_2 с единичной длиной и аргументами $\pi/4$ и $\pi/2$.

1. Запиши z_1, z_2 и $z_1 + z_2$ в виде $a + bi$.
2. Найди $\tan 3\pi/8$;

3. Поле направления и экспонента

Определение 3. Если $z(t)$ — положение точки в момент t, то $\dot{z}(t)$ или $z'(t)$ — мгновенная скорость точки (вектор).

Определение 4. Поле направления — в каждой точки плоскости нарисован вектор скорости движения точки.

3.1 Нарисуй поле направления для каждого случая:

1. $\dot{z}(t) = 1$;
2. $\dot{z}(t) = i$;
3. $\dot{z}(t) = z(t)$;
4. $\dot{z}(t) = -z(t)$;
5. $\dot{z}(t) = iz(t)$;
6. $\dot{z}(t) = -iz(t)$;
7. $\dot{z}(t) = 2 - z(t)$;
8. $\dot{z}(t) = 2 - iz(t)$;

Определение 5. Экспонента $\exp(t)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = z(t)$.
Экспонента $\exp(it)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = iz(t)$.

3.2 Докажи, что

1. $\exp(1) \approx 1.01^{100}$;
2. $\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1)$;
3. $\exp(3) = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \exp(1)$;

3.3 Найди

1. $\exp(i\pi/3)$;
2. $\exp(i\pi/2)$;
3. Формула Эйлера! $\exp(i\pi)$;
4. $\exp(it)$;
5. $\exp(i\pi/3) \cdot \exp(i\pi/2)$;

3.4 Запиши комплексные числа с помощью экспоненты

1. $1 + i$;
2. $\sqrt{3} + i$;
3. $\sqrt{3} - i$;
4. $6i$;

3.5 Реши уравнения

1. $z^2 = 6$;
2. $z^2 = -9$;
3. $z^2 = 4i$;
4. $z^3 = -27$;
5. $z^2 = -4i$;
6. $z^2 + 4z + 13 = 0$;
7. $\frac{z+i+2}{z-i-3} = 4i$;
8. $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$;
9. $z^5 = 32$;
10. $z^6 = i$;
11. $z^7 = 1 - i$;

3. Поле направления и экспонента

Определение 6. Если $z(t)$ — положение точки в момент t, то $\dot{z}(t)$ или $z'(t)$ — мгновенная скорость точки (вектор).

Определение 7. Поле направления — в каждой точки плоскости нарисован вектор скорости движения точки.

3.1 Нарисуй поле направления для каждого случая:

1. $\dot{z}(t) = 1$;
2. $\dot{z}(t) = i$;
3. $\dot{z}(t) = z(t)$;
4. $\dot{z}(t) = -z(t)$;
5. $\dot{z}(t) = iz(t)$;
6. $\dot{z}(t) = -iz(t)$;
7. $\dot{z}(t) = 2 - z(t)$;
8. $\dot{z}(t) = 2 - iz(t)$;

Определение 8. Экспонента $\exp(t)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = z(t)$.
Экспонента $\exp(it)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = iz(t)$.

3.2 Докажи, что

1. $\exp(1) \approx 1.01^{100}$;
2. $\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1)$;
3. $\exp(3) = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \exp(1)$;

3.3 Найди

1. $\exp(i\pi/3)$;
2. $\exp(i\pi/2)$;
3. Формула Эйлера! $\exp(i\pi)$;
4. $\exp(it)$;
5. $\exp(i\pi/3) \cdot \exp(i\pi/2)$;

3.4 Запиши комплексные числа с помощью экспоненты

1. $1 + i$;
2. $\sqrt{3} + i$;
3. $\sqrt{3} - i$;
4. $6i$;

3.5 Реши уравнения

1. $z^2 = 6$;
2. $z^2 = -9$;
3. $z^2 = 4i$;
4. $z^3 = -27$;
5. $z^2 = -4i$;
6. $z^2 + 4z + 13 = 0$;
7. $\frac{z+i+2}{z-i-3} = 4i$;
8. $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$;
9. $z^5 = 32$;
10. $z^6 = i$;
11. $z^7 = 1 - i$;

4. Кубические уравнения

4.1 Найди все значения многозначной функции

1. $8^{1/3}$;
2. $i^{1/3}$;
3. $(1+i)^{1/3}$;
4. $(\sqrt{3}+i)^{1/3}$;

4.2 Реши системы

1. $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=79 \\ xy+y+x=23 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x^3+y^3=10 \\ y\cdot x=2 \end{cases}$;

4.3 Реши кубическое уравнение

1. $z^3-15z-4=0$;
2. $z^3-15z-10=0$;
3. $z^3-6z-6=0$;

4.4 Подбери число t так, чтобы при замене $z=w+t$ в записи исчезло слагаемое w^2:

1. z^3+21z^2;
2. z^3-9z^2;
3. z^3+6z^2;

Определение 9. Экспонента $\exp(a+bi)=\exp(a)\cdot\exp(b)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0)=1$, $\dot{z}(t)=(a+bi)\cdot z(t)$.

5. Преобразования плоскости

Нарисуй исходное множество A и его образ $f(A)$ для случаев

5.1
1. $A = \{|z-1| = 1\}$, $f(z) = z^2$;
2. $A = \{\operatorname{Re} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
3. $A = \{\operatorname{Im} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
4. $A = \{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$, $f(z) = z^2$;
5. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = (1+i)z$;
6. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
7. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
8. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
9. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
10. $A = \{\operatorname{Im} z = 0\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
11. $A = \{|z| = 2\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;

Определение 10. Комплексная инверсия $f : z \to 1/z$;
Геометрическая инверсия (просто инверсия): $f : z \to 1/\bar{z}$ и обобщение.

5.2 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Нарисуй точки A и B внутри окружности и их образы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ после инверсии.

1. Найди подобные треугольники.
2. Найди длину $\tilde{A}\tilde{B}$, если $QA = 4$, $QB = 6$, $r = 10$, $AB = 5$.

5.3 Свойства инверсии:

1. Что получится, если инверсию применить два раза?
2. Во что переходит сама окружность при инверсии?

5.4 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Во что перейдёт при инверсии:

1. Прямая ℓ, проходящая через центр окружности Q.
2. Прямая ℓ, не проходящая через центр окружности Q.

5.5 Миша С. выполняет инверсию точки A относительно окружности радиуса m с центром в точке Q и получает точку $\tilde{A}_1$. Серёжа Л. выполняет инверсию той же точки A относительно окружности радиуса s с центром в точке Q и получает точку $\tilde{A}_2$.

1. Как будут соотносится длины отрезков $Q\tilde{A}_1$ и $Q\tilde{A}_2$? Как зависит это отношение от выбора точки A?
2. Объясни содержательную разницу между инверсией Миши С. и Серёжи Л.

5.6 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Во что перейдёт при инверсии:

1. Окружность w, проходящая через центр исходной окружности Q.
2. Окружность w, не проходящая через центр иходной окружности Q.

5. Преобразования плоскости

Нарисуй исходное множество A и его образ $f(A)$ для случаев

5.1
1. $A = \{|z-1| = 1\}$, $f(z) = z^2$;
2. $A = \{\operatorname{Re} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
3. $A = \{\operatorname{Im} z = 1\}$, $f(z) = z^2$;
4. $A = \{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$, $f(z) = z^2$;
5. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = (1+i)z$;
6. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
7. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = \exp(z)$;
8. $A = \{\operatorname{Re} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
9. $A = \{\operatorname{Im} z = 4\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
10. $A = \{\operatorname{Im} z = 0\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;
11. $A = \{|z| = 2\}$, $f(z) = 1/\bar{z}$;

Определение 11. Комплексная инверсия $f : z \to 1/z$;
Геометрическая инверсия (просто инверсия): $f : z \to 1/\bar{z}$ и обобщение.

5.2 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Нарисуй точки A и B внутри окружности и их образы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ после инверсии.

1. Найди подобные треугольники.
2. Найди длину $\tilde{A}\tilde{B}$, если $QA = 4$, $QB = 6$, $r = 10$, $AB = 5$.

5.3 Свойства инверсии:

1. Что получится, если инверсию применить два раза?
2. Во что переходит сама окружность при инверсии?

5.4 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Во что перейдёт при инверсии:

1. Прямая ℓ, проходящая через центр окружности Q.
2. Прямая ℓ, не проходящая через центр окружности Q.

5.5 Миша С. выполняет инверсию точки A относительно окружности радиуса m с центром в точке Q и получает точку $\tilde{A}_1$. Серёжа Л. выполняет инверсию той же точки A относительно окружности радиуса s с центром в точке Q и получает точку $\tilde{A}_2$.

1. Как будут соотносится длины отрезков $Q\tilde{A}_1$ и $Q\tilde{A}_2$? Как зависит это отношение от выбора точки A?
2. Объясни содержательную разницу между инверсией Миши С. и Серёжи Л.

5.6 Нарисуй окружность с центром Q и радиусом r. Во что перейдёт при инверсии:

1. Окружность w, проходящая через центр исходной окружности Q.
2. Окружность w, не проходящая через центр иходной окружности Q.

6. Геометрия Фано

Количество точек и прямых на проективной плоскости порядка такого-то?

7. Лог. КЛШ-2019

1. Было 29 школьников, от 8-го до 10-го класса и одна храбрая семиклассница. Комплексное число — вектор на плоскости. Сложение и вычитание. Изобразите $3 + 4i$, $5i$, $-6 + i$, -8. Длина и аргумент. Многозначная функция. Геометрическое умножение. Находим $(1 + i)^{44}$. Геометрически считаем $i \cdot i$, $(5+6i) \cdot i$. Наивное умножение. Геометрически интерпретируем наивное умножение $z \cdot (3+4i)$. Рисуем число $\cos 40° + i \sin 40°$. Делим через домножение на сопряжённое. Делим геометрически. Находим сумму конечной геометрической прогрессии комплексных чисел.

2. Повторили основные мысли. Два варианта записи чисел. Явно $z = a + bi$, через длину и угол с косинусом и синусом. Решили задачу про сумму углов. Разобрал окружность с центром не в нуле. Далее школьники решали и сдавали номера.

3. Решили задачу про сумму квадратов через явное представление $z = a + bi$. Дальше пообсуждали, что разумно сделать после решения задачи. Придумать более простой метод. Придумать более универсальный метод. Проверить, работает ли старый метод, если пошевилить задачу. Пошевелили нашу задачу и пришли к выводу, что геометрическо множество точек Z таких, что $AZ^2 + BZ^2 = const$ — это окружность. Влад, решивший дома задачу по геометрии с произвольным четырёхугольником, начал излагать её. Чтобы ускорить процесс, я изложил за него. Затем кратко рассказал про кривые. И школьники рисовали кривые.

4. Рисовали поле направлений. Хороший образ: нарисовать стрелочки ветра и куда несёт парашутиста. Определили две экспоненты: $\exp(t)$ и $\exp(it)$. Посчитали вместе примерно $\exp(1)$, $\exp(2)$. Перевели запись $\exp(it)$ для хороших t в координатную форму. Подытожили три формы записи комплексных чисел.

5. Повторили три формы записи комплексных чисел. Эффективнее всего решать уравнения табличкой. Хотя до этого процесса мы дошли только в конце. Берём исходное число записываем его в виде $27 \exp(120° + 360° k)$. Пишем длину, угол. Далее табличкой пишем то же самое для нескольких k. Затем в общей записи и в примерах делим угол на три, а из длины извлекаем кубический корень. Изображаем четыре кандидата, замечаем, что три кандидата совпадают. Записываем каждого кандидата в координатной форме записи. После этого школьники решали сами задачи на нахождение корней. Из-за не оптимального рассказа после перерыва ещё раз изложил алгоритм решения.

6. Вспомнили экспоненту для действительных чисел, $\exp(t)$, экспоненту от чисто мнимых, $\exp(it)$. И определили экспоненту от комплексных чисел $\exp(a + bi)$. Доказали через выделение полного квадрата, что дискриминант работает для квадратного уравнения. Многие школьники немного удивлённо узнали, что дискриминант — это то, что остаётся в правой части после умножения уравнения на 4 и выделения полного квадрата. Далее я рассказал про симметричную замену. И пример, где симметричная замена в системе не работает, но создаёт мостик до кубического уравнения. Начали решать кубическое уравнение. Схематично обозначил окончание. Надо было взять хорошие коэффициенты. Плохие коэффициенты от фонаря — резкое препятствие!

7. Реакция на критику: парты — появились. Немного темно — увы. Мотивационное: квантовые вычисления и преобразование Лоренца. Решали 5.1. Разобрали вместе 1 пункт, задал 2, 3, 5, 6. Шло тяжело. Разобрал 2. Напомнил про то, что такое $\exp(a+bi)$.

8. Преобразования кошки для $w=2z$, $\exp(2+\pi iz)$, iz, $\operatorname{Re} z$, $(1+i)z$. Начали преобразовывать координатную сетку при преобразовании $w=z^2$.

9. Возвели комплексную кошку в квадрат. Получили глаз. Дома её никто в квадрат не возводил, но после моего начала решения и просьбы продолжить, нашлись те, кто смог продолжить. Проговорили формулу и геометрический смысл сопряжения. Школьники сами решили, как записать формулами симметрию относительно вертикальной оси и биссектрисы первой четверти. Определили геометрическую инверсию относительно окружности. Инвертировали 5 данных точек относительно данной окружности.

7.1. Плакат

8. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8. $(4+2i)(3+i)=10+10i$, $\pi/4$.

1.9. Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8. $(4+2i)(3+i) = 10+10i$, $\pi/4$.

1.9. Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

4.1.

4.2.

4.3.

4.4.

5.1.

5.2.

5.3.

5.4.

5.5.

5.6.

5.1.

5.2.

5.3.

5.4.

5.5.

5.6.

9. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1. Кратко про геометрию Фано, https://www.youtube.com/watch?v=CRqso5-uLfI
2. How to build hyperbolic soccer ball, http://theiff.org/images/IFF_HypSoccerBall.pdf
3. Chaim Goodman-Strauss, Compass and Straightedge in the Poincaré Disk
4. Mann, DIY hyperbolic course, https://math.berkeley.edu/~kpmann/DIY%20hyperbolic%20course.pdf
5. 3blue1brown, Quaternions visualized, https://www.youtube.com/watch?v=d4EgbgTm0Bg
6. Grant Sanderson, Visualizing quaternions, https://eater.net/quaternions
7. https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/, есть pdf-ка с картинками умножения на кватернионов и октонионов.
8. Hanson, Visualizing quaternions, примеры про ремень, мячик, Apollo
9. https://brilliant.org/wiki/complex-numbers-in-geometry/
10. Прасолов, Геометрия Лобачевского
11. Slerp, wiki, https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp
12. Wiki, 3d rotation, https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_formalisms_in_three_dimensions
13. Fano plane, https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-fano-plane/
14. Lam, Search finite Fano plane of order 10, https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf, связка с латинскими квадратами
15. http://kahrstrom.com/mathematics/documents/OnProjectivePlanes.pdf, геометрия как точки и линии