Научно-популярный
физико-математический журнал
"Квант"
(издается с января 1970 года)

Раухман А. , **Группоиды.**

А. Раухман

Группоиды

В алгебре, которая начиналась как наука о решении уравнений еще в средневековье («Квант», 1976, № 9, с. 2 и 1976, № 5, с. 3, 6), в XIX веке произошли сильные изменения, особенно ярко проявившиеся в работах французского математика Э. Галуа («Квант», 1973, № 10). В наше время алгебра — в первую очередь, наука об абстрактных операциях или, по выражению Н. Бурбаки («Квант», 1978, № 6, с. 32), наука об «алгебраических структурах». В этой статье предлагается исследовать элементарными средствами простейшую такую структуру — структуру группоида.

Алгебраические операции

Говорят, что на непустом множестве M определена (*бинарная*) *алгебраическая операция*, если задано

является результатом применения операции $*$ к паре $(a; b)$. Множество M с определенной на нем алгебраической операцией называется *группоидом* и обозначается $(M; *)$.

Задача 1. *Проверьте, что* $(\mathbf{N}; \cdot)$, $(\mathbf{N}; +)$, $(\mathbf{Z}; -)$, $(\mathbf{R}_0; :)$, *где* $\mathbf{R}_0$ — *множество ненулевых действительных чисел, являются группоидами, а* $(\mathbf{N}; -)$, $(\mathbf{Z}; :)$ — *нет. Приведите еще десяток группоидов из школьной математики.*

Свойства группоидов

Когда речь идет об обычных операциях сложения и умножения, вы умеете, не думая, пользоваться их основными свойствами. В этом таится определенная опасность: когда переходишь к произвольной операции, не все эти свойства справедливы, нельзя ими пользоваться «по аналогии». Рассмотрим, например, такие свойства сложения:

$$x+z=y+z \Rightarrow x=y \qquad (1)$$

$$x+y=y+x \qquad (2)$$

$$x=y \Rightarrow x+z=y+z \qquad (3)$$

$$x+y=z \Rightarrow x=z-y \qquad (4)$$

$$x+x=2x \qquad (5)$$

Какие из этих свойств верны, если вместо операции + в них взять произвольную алгебраическую операцию $*$?

Как мы увидим ниже, утверждения (1) и (2) верны далеко не *алгебраическая операция*, если задано правило, с помощью которого каждой упорядоченной паре элементов a и b этого множества ставится в соответствие определенный элемент c этого же множества.

Обычные операции сложения и умножения действительных чисел, конечно же, являются алгебраическими операциями. Но важно сразу понять, что совсем не обязательно рассматривать только операции над числами: множество M может состоять из элементов самой разнообразной природы — из многочленов, функций, перемещений, букв и даже слов.

Как правило, мы в дальнейшем будем обозначать алгебраические операции звездочкой $*$. Запись $c=a*b$ означает, что элемент $c \in M$ всегда. Однако утверждение (3) всегда верно (постарайтесь сообразить, почему)! Об утверждении (4) нельзя говорить, верно оно или не верно,— оно не понятно, так как знак «минус» не определен для произвольной операции $*$. Аналогично обстоит дело с утверждением (5): выражение $2x$ (где x — элемент произвольного множества M) пока не определено.

Таким образом, прежде всего нужно разобраться в основных свойствах группоидов. Таких свойств много, мы ограничимся пятью наиболее важными.

Свойство К. Группоид $(M; *)$ называется *коммутативным*, если для любых $a, b \in M$

$$a*b=b*a.$$

Так, группоиды $(\mathbf{Z}; +)$, $(\mathbf{R}; \cdot)$ коммутативны, но $(\mathbf{R}_0; :)$, конечно же, нет: например, $8:4 \neq 4:8$!

Свойство А. Группоид $(M;*)$ называется *ассоциативным*, если для любых $a, b, c \in M$

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

По-видимому, все известные вам операции этим свойством обладают; примеры не ассоциативных группоидов появятся ниже (см. задачу 2).

Свойство Е. Элемент $e \in M$ называется *нейтральным* (говорят еще *единичным*, а для операции сложения — *нулевым*) в группоиде $(M; *)$, если для любого $a \in M$

$$a*e=e*a=a.$$

Мы будем говорить, что группоид $(M; *)$ обладает «свойством Е», если в нем есть нейтральный элемент. Выкладка $e=e*e'=e'$ показывает, что нейтральный элемент всегда единственный.

Для сложения чисел нейтраль-

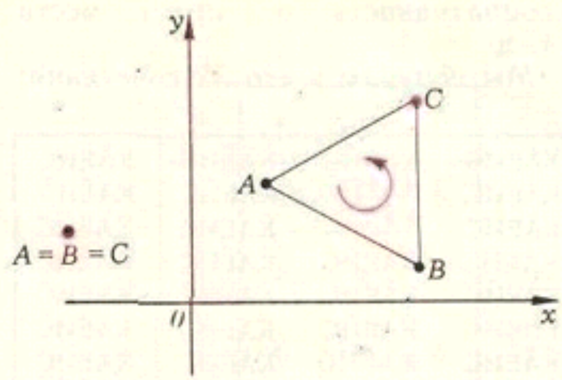


Рис. 1.

правила не действуют. Но такие примеры вы сейчас увидите!

Задача 2. *Исследуйте, какими из свойств* К, А, Е, И, С *обладают следующие группоиды:*

а. $(\mathbf{R}; *)$, *где для любых* $x, y \in \mathbf{R}$ $x*y=\max(x, y)$ ($\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x, y).

б. $(\mathbf{N}; *)$, *где* $x*y=$ **НОК** (x, y) (НОК — *наименьшее общее кратное*).

в. $(\mathbf{R}^2; *)$, *где* $\mathbf{R}^2$ — *координатная* ным элементом служит число 0, для умножения — число 1. А есть ли нейтральный элемент в группоиде всех перемещений плоскости (относительно операции композиции перемещений)? Конечно же, есть — тождественное преобразование.

Свойство И. Пусть $(M;\,*)$ — группоид с нейтральным элементом e. Тогда $(M;\,*)$ обладает свойством *инверсности* (говорят еще *обратимости*), если для любого $a \in M$ можно указать *обратный элемент*, то есть такой элемент $\bar{a} \in M$, что

$$a*\bar{a}=\bar{a}*a=e.$$

Для умножения чисел, например, обратным для элемента $a \neq 0$ служит элемент $1/a$, а при сложении — элемент $(-a)$. А вот для группоида $(\mathbf{N};\,+)$ *сложения натуральных чисел* уже нет свойства инверсности (почему?)

Свойство С. Группоид $(M;\,*)$ обладает свойством *сократимости*, если для любых $a,\ b,\ c \in M$

$$a*b=a*c \Rightarrow b=c$$
$$b*a=c*a \Rightarrow b=c.$$

Вам, наверное, пока трудно себе представить группоид, в котором эти

плоскость и для произвольной пары точек $(a;\,b)$ *и* $(c;\,d)$

$$(a;\,b)*(c;\,d)=(ac;\,bc+d).$$

Задача 3. *Пусть* $\mathbf{\Pi}$ — *множество точек плоскости. Определим на этом множестве алгебраическую операцию* $*$ *следующим образом: Пусть* $A,\ B \in \mathbf{\Pi}$; *если* $A=B$, *то считаем, что* $A*A=A$; *если* $A \neq B$, *положим* $A*B=C$, *где* C — *третья вершина правильного положительно ориентированного*) треугольника* ABC *(рис. 1). Исследуйте свойства группоида* $(\mathbf{\Pi},\,*)$.

Какие группоиды невозможны?

Составим таблицу всех мыслимых сочетаний пяти рассмотренных свойств. Этим выделяются различные типы группоидов $(M;\,*)$. Каждый такой тип мы охарактеризуем пятеркой букв вида К Ā Е Й С. В этой записи буква К означает, что группоид обладает свойством коммутативности, буква Ā — что свойство

*) Треугольник ABC называется *положительно ориентированным*, если обход вершин в порядке $A \to B \to C$ осуществляется против часовой стрелки.

ассоциативности не имеет места и т. д.

Мы получим всего 32 сочетания:

КАЕИС	К̅АЕИ̅С	К̅А̅Е̅ИС	КА̅ЕИ̅С̅
К̅АЕИС	К̅АЕИ̅С̅	К̅А̅ЕИ̅С	КАЕ̅И̅С̅
КА̅ЕИС	КА̅Е̅ИС	К̅А̅ЕИС̅	К̅А̅Е̅И̅С
КАЕИС	КА̅ЕИ̅С	К̅АЕ̅И̅С	К̅А̅Е̅ИС̅
КАЕИ̅С	КА̅ЕИС̅	К̅АЕ̅ИС̅	К̅АЕ̅И̅С̅
КАЕИС	КАЕ̅И̅С	К̅АЕИ̅С̅	КА̅Е̅И̅С̅
К̅А̅ЕИС	КАЕ̅ИС̅	КА̅Е̅И̅С	К̅А̅ЕИ̅С̅
К̅АЕ̅ИС	КАЕИ̅С̅	КА̅Е̅ИС̅	К̅А̅Е̅И̅С̅

Второй множитель

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	a

Первый множитель

Рис. 2.

Задача 5'. *Построить примеры группоидов всех 22 типов, указанных*

Однако не все указанные здесь типы группоидов существуют. Давайте совместными усилиями докажем, что группоиды, тип которых напечатан красным шрифтом, на самом деле невозможны.

Проще всего решается вопрос с теми типами, в обозначении которых встречается сочетание $\overline{\text{Е}}$ И (таких типов всего 8). Противоречивость $\overline{\text{Е}}$ и И становится совершенно ясной из анализа формулировки свойства И.

Задача 4. *Докажите, что*

$$А\ Е\ И \Rightarrow С,$$

то есть одновременное выполнение свойств А, Е и И влечет за собой выполнение свойства С.

Эта теорема исключает в нашей таблице еще два сочетания (какие?).

Какие группоиды существуют?

Итак, из 32 первоначально намеченных типов группоидов у нас осталось 22. Мы подошли теперь к основной задаче этой статьи:

Задача 5. ***Докажите, что все группоиды, типы которых напечатаны черным шрифтом, существуют.***

Как доказать существование математического объекта? Проще всего — построить пример. В самом деле, если мы сможем привести конкретный пример группоида, обладающего, скажем, свойствами К А $\overline{\text{Е}}$ $\overline{\text{И}}$ $\overline{\text{С}}$, то этим самым докажем существование данного типа группоидов.

Следовательно, чтобы решить задачу 5, достаточно сделать такую задачу:

...ных черным в таблице.

Наша задача распадается, таким образом, на 22 частные задачи. Хочется верить, что их число не испугает читателя. Так или иначе, читателю мы посоветуем сначала дочитать статью, а затем за них браться.

Отметим, что, решив задачу 5, мы одновременно ответим еще на один важный вопрос. Предположим, что нам удалось построить группоиды типов К А Е И С и К $\overline{\text{А}}$ Е И С. Существование таких группоидов означает, что свойство А является *логически независимым* от свойств К Е И С.

Задача 6. *Глядя на таблицу, установите, какие еще свойства независимы от остальных.*

Как найти группоид?

Задача 7. *Пусть $M = \{a, b, c\}$, а операция $*$ задана «таблицей умножения» (рис. 2). Каков тип группоида $(M; *)$?*

Задача 8. *Рассмотрим группоид $(\mathbf{R}; *)$, где для любых $x, y \in \mathbf{R}$*

$$x*y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{2})^3.$$

Каков тип группоида?

Задачи 7 и 8 подсказывают два способа задания группоидов — *табличный* и *формульный*. Эти способы могут вам пригодиться при решении основной задачи 5′.

Конечные и бесконечные группоиды

Группоид $(M; *)$ называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от того, конечно или бесконечно множество M.

Задача 9. *Рассмотрим два группоида:*

1) $(M; *)$, *где* $M=\{e, a, b\}$, *а операция* $*$ *задана таблицей* (рис. 3);

2) $(\mathbf{N}_0; \Delta)$, *где* $\mathbf{N}_0$ — *множество целых неотрицательных чисел, причем для любых* $x, y \in \mathbf{N}_0$ $x \Delta y = |x - y|$.

Покажите, что группоиды $(M; *)$, $(\mathbf{N}_0; \Delta)$ *относятся к одному и тому же типу (какому?).*

Как видим, для некоторых типов группоидов в качестве примеров можно привести и конечный, и бесконечный случаи.

Для других попытка придумать конечный группоид не приводит к успеху. Причина состоит в том, что в конечных группоидах появляются новые зависимости между свойствами операции $*$.

Задача 10. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Докажите, что*

К Е С ⇒ И.

Задача 11*. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Тогда*

А С ⇒ Е И.

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	b

Рис. 3.

Докажите это!

Утверждения задач 10 и 11 предохранят вас от безнадежных попыток придумать конечный группоид в тех случаях, когда он невозможен.

Ждем писем!

Если вам удастся найти примеры всех 22 типов, пришлите их нам. В случае, когда возможны конечный и бесконечный группоиды, хорошо найти и тот, и другой.

Геометрические доказательства теорем о средних

Возьмем полуокружность с центром O и пусть A — произвольная точка на продолжении ее диаметра BC, $[OD] \perp [BC]$, $[AE]$ — касательная и $[EF] \perp [BC]$ (см. рисунок). Положим $|AB| = a_1$ и $|AC| = a_2$ $(a_1 \neq a_2)$. Тогда

$$|AO| = \frac{a_1+a_2}{2},$$

$$|AE| = \sqrt{|AO|^2 - |OE|^2} = \sqrt{a_1 a_2},$$

$$|AD| = \sqrt{|AO|^2 + |OD|^2} = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},$$

$$|AF| = \frac{|AE|^2}{|AO|} = \frac{a_1 a_2}{\frac{a_1+a_2}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}},$$

то есть $|AO|$ — это *среднее арифметическое*, $|AE|$ — *среднее геометрическое*, $|AD|$ — *среднее квадратичное* и $|AF|$ — *среднее гармоническое* положительных чисел a_1 и a_2.

Поскольку $|AD| > |AO|$, $|AO| > |AE|$ и $|AE| > |AF|$, получаем такую цепочку неравенств:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} > \frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2} > \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$$

(нетрудно видеть, что для $a_1 = a_2$ эти неравенства превращаются в равенства)*).

Заметим еще, что среднее геометрическое двух положительных чисел является также средним геометрическим между их средним арифметическим и средним гармоническим:

$$a_{\text{ср.геом}} = \sqrt{a_{\text{ср.арифм.}} \cdot a_{\text{ср.гарм.}}}$$

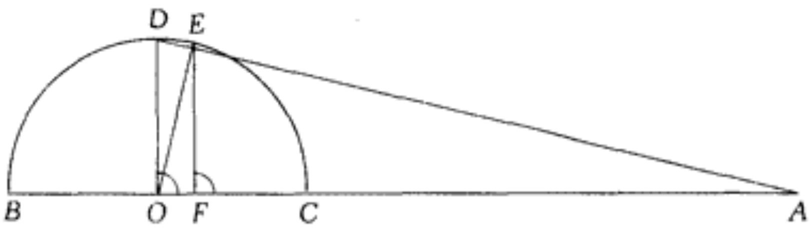
Это ясно аналитически:

$$\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} = a_1 a_2,$$

и геометрически:

$$|AE| = \sqrt{|AO| \cdot |AF|}.$$

А. Искендеров



***) Определения *средних* для случая n чисел, а также доказательства соответствующих неравенств см. в «Кванте», 1980, № 3, с. 22—23.**