

## Содержание

1	Посади дерево!	3
2	К чёрту условности!	3
3	Не комплексуй без комплексных чисел	5
4	Ноль без палочки	6
5	Ско и бка, бра и кет	8
6	Сферическая блоха. Ой, сфера Блоха	8
7	Действия с кубитами	9
8	Алгоритм Дойча	11
9	Два кубита — два весёлых друга	11
10	Действия на паре кубитов	11
11	Алгоритм Гровера: 2 кубита	12
12	Алгоритм Гровера: 3 кубита	12
13	Алгоритм Саймона: 2 кубита	12
14	Лог	12
15	ЗПШ-2019	13
16	Презентация	13
17	Встреча 1	13
18	Встреча 2	13
19	Встреча 3	14
20	Встреча 4	14
21	Встреча 5	14
22	Плакат	15
23	Набор сделай сам!	15
24	Решения	15
25	Источники мудрости	17

## Цель

Рассказать про квантовые вычисления девятиклассникам. Дойти до алгоритма Гровера с нуля, включая рассказ про вероятности и комплексные числа.

Спорные моменты:

- полный отказ от матриц, только обозначения Дирака;
- что делать с экспонентой  $e$ ?

## 1. Посади дерево!

**Определение 1.**  $A$  — событие,  $\mathbb{P}(A)$  — вероятность события  $A$ .

$X$  — случайная величина,  $\mathbb{E}(X)$  — математическое ожидание величины  $X$ .

- 1.1 В вазе пять неотличимых с виду конфет. Две без ореха и три — с орехом. Маша ест конфеты выбирая их наугад до тех пор, пока не съест первую конфету с орехом. Обозначим  $X$  — число съеденных конфет. Найди вероятности  $\mathbb{P}(X = 2)$ ,  $\mathbb{P}(X > 1)$  и ожидание  $\mathbb{E}(X)$ .
- 1.2 В коробке находится четыре внешне одинаковые лампочки, две из них исправны. Лампочки извлекают из коробки по одной до тех пор, пока не будут извлечены обе исправные.
1. Какова вероятность того, что опыт закончится извлечением трёх лампочек?
  2. Каково ожидаемое количество извлеченных лампочек?
- 1.3 Маша подкидывает монетку. Если она выпадает орлом, то Маша подкидывает монетку ещё один раз, если решкой — то ещё два раза. После этого Маша идёт в кино! Пусть  $X$  — количество выпавших орлов.
- Найди вероятности  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X = 1)$  и ожидание  $\mathbb{E}(X)$ .
- 1.4 Две команды равной силы играют в волейбол до трёх побед одной из них, не обязательно подряд. Ничья невозможна. Из-за равенства сил будем считать, что вероятность победы каждой равна 0.5. Величина  $N$  — количество сыгранных партий.
- Составьте табличку возможных значений  $N$  с их вероятностями.
- Найди вероятность  $\mathbb{P}(N - \text{чётное})$  и ожидание  $\mathbb{E}(N)$ .
- 1.5 Какова вероятность того, что у 13 человек не будет ни одного совпадения дней рождений?

## 2. К чёрту условности!

**Определение 2.** Условная вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- 2.1 В городе примерно 4% такси зелёного цвета и остальные жёлтые. Свидетель путает цвет на показаниях в суде с вероятностью 10%.
1. Какова вероятность того, свидетель скажет, что видел зелёное такси?
  2. Какова вероятность того, свидетель ошибётся?
  3. Какова вероятность того, что такси было зелёным, если свидетель говорит, что оно было зелёным?
  4. Какова вероятность того, что такси было жёлтым, если свидетель говорит, что оно было жёлтым?

2.2 У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из ситуаций найдите условную вероятность того, что у тётки Маши есть дети обоих полов.

1. Известно, что старший ребенок — мальчик.
2. Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть метлу. Это оказывается мальчик.
3. На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын?» тётя Маша ответила: «Да».
4. На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

2.3 Ты смертельно болен. Спасти тебя может только один вид целебной лягушки. Целебны у этого вида только самцы. Самцы и самки встречаются равновероятно. Ты на дороге и предельно ослаб и можешь проползти лишь 100 метров. Справа в 100 метров аж две лягушки целебного вида, изда- лека неясно кто. От двух лягушек в твою сторону дует ветер, поэтому ты можешь их слышать.

Каковы твои шансы на спасение в каждом из случаев?

1. Самцы и самки квакают одинаково, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье.
2. Самки квакают, самцы — нет, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье, но не разобрать, одной лягушки или двух.
3. Самцы и самки квакают по разному, но одинаково часто. Ты слышишь отдельный квак одной из двух лягушек справа и это квак самки.

#### 2.4 Monty-Hall

Есть три закрытых двери. За двумя из них — по козе, за третьей автомобиль. Ты выбираешь одну из дверей. Допустим, ты выбрал дверь А. Ведущий шоу открывает дверь В и за ней нет автомобиля. В этот момент ведущий предлагает тебе изменить выбор двери.

Имеет ли смысл изменить выбор в каждой из трёх ситуаций?

1. Ведущий выбирал одну из трёх дверей равновероятно.
2. Ведущий выбирал одну из двух дверей не выбранных тобой равновероятно.
3. Ведущий выбирал дверь без машины и не совпадающую с твоей.

### 3. Не комплексуй без комплексных чисел

**Определение 3.** Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа,  $|z|$ .
2. Угол между вектором и горизонтальной осью — аргумента комплексного числа,  $\text{Arg } z$ .
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть,  $\text{Re } z$ .
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть,  $\text{Im } z$ .

3.1 Для комплексных чисел  $1 + i$  и  $3 + 4i$  найди  $|z|$ ,  $\text{Arg } z$ ,  $\text{Re } z$ ,  $\text{Im } z$ . Нарисуй числа  $1 + i$  и  $3 + 4i$ .

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение  $z^*$  комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

3.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется  $(1 + i)^2$ ?  $(1 + i)^{43}$ ?
2. Почему  $i^2 = -1$ ?
3. Чему равняется произведение произвольного комплексного числа  $z = a + bi$  на  $i$ ?
4. Нарисуй процесс умножения произвольного  $z = a + bi$  на  $3 + 4i$ . Почему  $(3 + 4i)z = 3z + 4iz$ ?

3.3 1. У комплексного числа  $w = \sqrt{11} + 5i$  найди  $|w|$ ,  $|w|^2$ ,  $\text{Arg } w$ ,  $\text{Re } w$ ,  $\text{Im } w$ ,  $w^*$ ,  $ww^*$ .

2. Найди  $(3 + 5i) \cdot (3 + 3i)$ ,  $(1 + i)/(1 - i)$ ,
3. Найди  $(\sqrt{3} + i)^{43}$ ,  $(1 - i)^{2018}$ ;
4. Найди  $(\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ)) \cdot (\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))$ ;
5. Найди  $(\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))$ ;

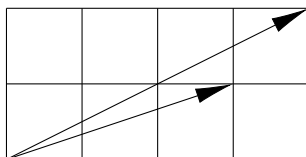
3.4 Реши уравнения  $z^2 = -1$ ,  $z^2 + 6z + 10 = 0$ ,  $z^6 = 64$ ,  $(z - 1)/(z + 1) = 1 + 3i$ .

3.5 Найди суммы  $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2019}$ ,  $(1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + (1 + i)^4 + \dots + (1 + i)^{2020}$ .

3.6 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на  $90^\circ$  налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

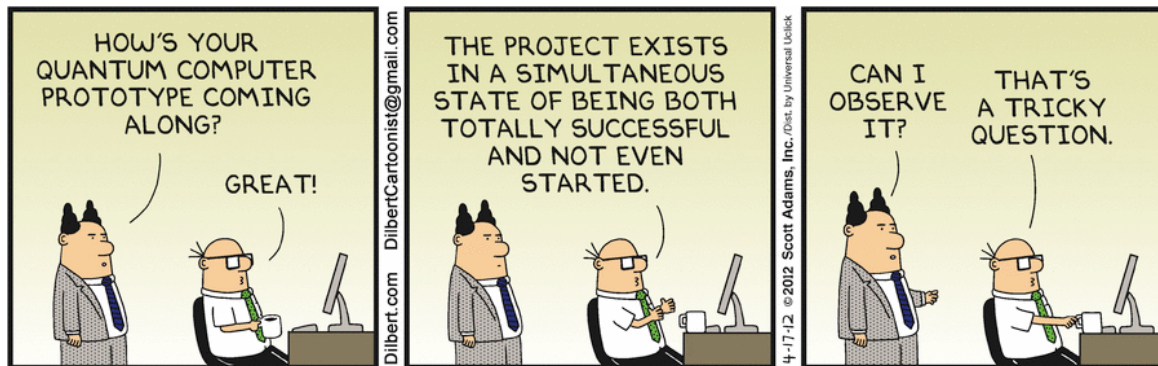
К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на  $60^\circ$ ?

3.7 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



3.8 На плоскости нарисована кошечка. Что произойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число  $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ ?

## 4. Ноль без палочки



4.1 Составь таблицу истинности для следующих классических схем:

(тут от фонаря схема примерно пятью элементами)

4.2 С помощью классических логических элементов *NOT*, *AND*, *OR* реализуй схемы:

1. *OR* с пятью входами: выдаёт на выходе 1, если хотя бы один из входов равен 1, и выдаёт 0 иначе.
2. исключающее ИЛИ, *XOR*;
3. сумматор для двух двухбитных чисел с трёхбитным выходом.

**Определение 4.** Кубит может находиться в бесконечном количестве состояний

$$|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$$

Амплитуды  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  — это комплексные числа удовлетворяющие соотношению  $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ . Также кубит можно записать в столбик:

$$|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Если измерить кубит  $|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$  в базисе  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , то он перейдёт в детерминистическое состояние  $|0\rangle$  с вероятностью  $|\alpha_0|^2$  и в детерминистическое состояние  $|1\rangle$  с вероятностью  $|\alpha_1|^2$ .

4.3 Для каждого выражения определи, является ли оно честным и благородным кубитом. Для кубитов определи вероятности пронаблюдать их в состояниях  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ :

1.  $\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$ ;
2.  $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle$ ;
3.  $|0\rangle + |1\rangle$ ;
4.  $\frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle$ ;
5.  $|1\rangle$ ;
6.  $\cos 10^\circ |0\rangle + (\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) \sin 12^\circ |1\rangle$ ;
7.  $\cos 15^\circ |0\rangle + (\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) \sin 15^\circ |1\rangle$ ;
8.  $(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) \cos 45^\circ |0\rangle + (\cos 22^\circ + i \sin 22^\circ) \sin 45^\circ |1\rangle$ ;

4.4 Два важных кубита, это  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  и  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ .

1. У Дианы в одной коробке 1000 кубитов  $|+\rangle$ , а в другой — 1000 кубитов  $\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ . К сожалению, коробки не подписаны. Сможет ли Диана производя измерения в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$  отличить, в какой коробке лежат какие кубиты?
2. У Дианы в одной коробке 1000 кубитов  $|+\rangle$ , а в другой 1000 кубитов  $|-\rangle$ . К сожалению, коробки не подписаны. Сможет ли Диана производя измерения отличить в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$ , в какой коробке лежат какие кубиты?
3. Вырази кубит  $|0\rangle$  через кубиты  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$ , то есть найди комплексные числа  $\beta_+$  и  $\beta_-$ , что  $|0\rangle = \beta_+|+\rangle + \beta_-|-\rangle$ .
4. Вырази кубит  $|1\rangle$  через кубиты  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$ .

4.5 Для каждого кубита определи вероятности каждого состояния при измерении в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$  и в базисе  $|+\rangle, |-\rangle$ :

1.  $\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ ;
2.  $\frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|-\rangle$ ;
3.  $|0\rangle$ ;
4.  $|+\rangle$ ;

4.6 Найди кубит  $|\beta\rangle$  такой, что при измерении в базисе  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  оба результата измерения равновероятны, а при измерении в базисе  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  состояние  $|+\rangle$  измеряется с вероятностью  $3/4$ .

**Определение 5.** Квантовая операция  $NOT = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ .

4.7 Чему равны  $NOT(|0\rangle)$ ,  $NOT(|1\rangle)$ ,  $NOT(|+\rangle)$ ,  $NOT(|-\rangle)$ ?

## 5. Ско и бка, бра и кет

**Определение 6.** Каждому кубиту (кет-вектору) соответствует бра-вектор. Кет-вектору  $|a\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$  сопоставляется бра-вектор

$$\langle a| = |a\rangle^\dagger = \alpha_0^* \langle 0| + \alpha_1^* \langle 1|$$

Бра-вектор — это не кубит. Бра-вектор можно также записать в строку

$$\langle a| = (\alpha_0^* \quad \alpha_1^*)$$

Бра-векторы нужны, чтобы превращать кубиты в числа,  $\langle a| \cdot |b\rangle$  — это число!

Таблица умножения бра-векторов на кубиты (кет-вектора) соответствует школьному скалярному произведению.

5.1 Задан кубит  $|q\rangle = \frac{3+4i}{6} |0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{6} |1\rangle$ . Найди значения  $\langle 0|+$ ,  $\langle -|1\rangle$ ,  $\langle +|q\rangle$ ,  $\langle q|0\rangle$ ,  $\langle 0|q\rangle$ ,  $\langle q|q\rangle$ .

5.2 Задан кубит  $|q\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ . Найди значения  $\langle 0|q\rangle$ ,  $\langle q|0\rangle$ ,  $\langle 1|q\rangle$ ,  $\langle q|1\rangle$ .

5.3 Составь таблицу умножения  $\langle +|$  и  $\langle -|$  на  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$ .

**Определение 7.** Набор кубитов  $|a\rangle$  и  $|b\rangle$  называется ортонормальным базисом, если  $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$ ,  $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$ .

5.4 Задан кубит  $|q\rangle = \frac{3+4i}{6} |0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{6} |1\rangle$ .

1. Является ли пара  $|q\rangle$  и  $|0\rangle$  базисом, в котором можно проводить измерения?
2. Является ли пара  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  базисом, в котором можно проводить измерения?
3. Дополни кубит  $|q\rangle$  ещё одним кубитом так, чтобы получился ортонормальный базис.

5.5 Известно, что комплексное число  $r_\gamma$  при умножении на другие комплексные числа поворачивает их на угол  $\gamma$  против часовой стрелки. Также известно, что  $|q\rangle$  — это некоторый кубит.

1. Явно выпиши  $r_{90^\circ}$  и  $r_{-45^\circ}$ .
2. Будут ли кубитами  $2|q\rangle$  и  $r_\gamma |q\rangle$ ?
3. После измерения кубит  $|q\rangle$  оказывается в состоянии  $|0\rangle$  с вероятностью 0.75. Каковы вероятности состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  при измерении кубита  $r_\gamma |q\rangle$ ?

5.6 Известно, что комплексное число  $r_\gamma$  при умножении на другие комплексные числа поворачивает их на угол  $\gamma$  против часовой стрелки. Существует ли базис в котором вероятности измерения для кубитов  $|x\rangle$  и  $r_\gamma |x\rangle$  отличаются?

## 6. Сферическая блоха. Ой, сфера Блоха

**Определение 8.** Любой точке на сфере соответствует широта  $\theta \in [0; \theta]$ , измеряемая углом от северного полюса, и долгота  $\phi \in [0; 2\pi)$ , измеряемая углом от нулевого меридиана.

Точке  $(\theta, \phi)$  на сфере сопоставим множество кубитов

$$|q\rangle = r_\gamma \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + r_\phi \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

Множитель  $r_\gamma$  не влияет на вероятности измерения, поэтому разумно рисовать только углы  $\theta$  и  $\phi$ . На сфере Блоха угол  $\theta$  откладывается от вертикальной оси  $z$  вниз, а угол  $\phi$  от оси  $x$  против часовой.



6.1 Изобразите на сфере Блоха и запишите алгебраически кубиты  $(\theta = 90^\circ, \phi = 60^\circ)$ ,  $(\theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ)$ ,  $(\theta = 180^\circ, \phi = 60^\circ)$ ,  $(\theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ)$ ,  $(\theta = 120^\circ, \phi = 60^\circ)$ .

- 6.2 1. Изобрази на сфере Блоха  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ ;  
2. Изобрази на сфере Блоха  $NOT(|0\rangle)$ ,  $NOT(|1\rangle)$ ,  $NOT(|+\rangle)$ ,  $NOT(|-\rangle)$ ;

6.3 Во что переходит кубит с углами  $(\theta, \phi)$  на сфере Блоха под действием  $X, Y, Z$ ?

## 7. Действия с кубитами

**Определение 9.** Любое действие с кубитами можно записать с помощью кет-бра:

$$U = \beta_{00} |0\rangle\langle 0| + \beta_{01} |0\rangle\langle 1| + \beta_{10} |1\rangle\langle 0| + \beta_{11} |1\rangle\langle 1|$$

Умножаем кет-бра на кубит по принципу:  $|0\rangle\langle 1| \cdot |1\rangle = |0\rangle \cdot \langle 1|1\rangle = |0\rangle$ .

Не все действия возможны.

**Определение 10.** Стандартные обозначения действий:

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$Y = -i |0\rangle\langle 1| + i |1\rangle\langle 0|$$

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Вентиль Адамара:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

7.1 Рассмотрим кубит  $|q\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{i}{2} |1\rangle$ .

1. Найди  $I \cdot |0\rangle$ ,  $I \cdot |+\rangle$ ,  $I \cdot |q\rangle$ . Что делает действие  $I$ ?
2. Найди  $X \cdot |0\rangle$ ,  $X \cdot |+\rangle$ ,  $X \cdot |q\rangle$ . Что делает действие  $X$ ?
3. Найди  $H \cdot |0\rangle$ ,  $H \cdot |+\rangle$ ,  $H^2 \cdot |1\rangle$ . Что делает действие  $H^2$ ?
4. Найди  $Y \cdot |1\rangle$ ,  $XZ \cdot |1\rangle$ ,  $Y \cdot |q\rangle$ . В чём разница между  $XZ$  и  $Y$ ?
5. Найдит  $Z \cdot |+\rangle$ ,  $Z \cdot |-\rangle$ ,  $Z \cdot |0\rangle$ .
6. Правда ли, что  $XZ = ZX$ ?

**Определение 11.** У любого действия  $A$  есть сопряжённое  $A^\dagger$ . Сопряжение выполняется по принципу:

$$(\beta \cdot |a\rangle\langle b|)^\dagger = \beta^\dagger |b\rangle\langle a|$$

Действие  $A$  является разрешённым, если  $A^\dagger A = I$ .

7.2 Является разрешённым действие  $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle\langle 0|$ ?

Являются разрешёнными действия  $I, X, Y, Z, H$ ?

- 7.3 Является разрешённым домножение кубита на поворот  $r_\gamma$ ? Как записать поворот с помощью  $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ ?
- 7.4
1. Как записать действия  $I, X, Y, Z, H$  в базисе  $|+\rangle, |-\rangle$ ?
  2. Что делают действия  $I, X, Y, Z$  на сфере Блоха?
  3. Как записать действие  $|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$  в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$ ?
- 7.5
1. Как выглядит действие, отменяющее действие  $Z$ ?
  2. У любого ли разрешённого действия есть обратное?
- 7.6 Как записать действие  $NOT$  с помощью кет-бра записи?

## 8. Алгоритм Дойча



## 9. Два кубита — два весёлых друга

9.1 Алиса посылает Бобу пару кубитов в состоянии<sup>1</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

1. Если Боб измерит сразу оба кубита, то каковы будут вероятности каждого состояния?
2. Боб решил измерить только первый кубит. Каковы вероятности измерить  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ ? В каких состояниях при этом окажется второй кубит?
3. Боб решил измерить только второй кубит. Каковы вероятности измерить  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ ? В каких состояниях при этом окажется первый кубит?

## 10. Действия на паре кубитов

10.1 Что получит Алиса, если применит действие  $H^{\otimes 2}$  к паре кубит

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

10.2 Рассмотрим действие на паре кубит  $A = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ .

1. Найди  $A \cdot |00\rangle$ ,  $A \cdot |10\rangle$ ,  $A \cdot |++\rangle$ ;
2. Что делает действие  $A$ ?

10.3 Запиши:

1. пару кубит  $|++\rangle$  в стандартном базисе;
2. пару кубит  $|+0\rangle$  в стандартном базисе;
3. пару кубит  $|00\rangle$  в базисе  $|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$

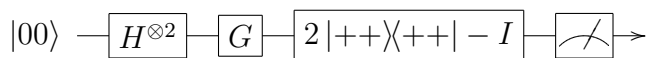
10.4 Приведи пример действия  $A$  на паре кубит, которое невозможно представить в виде тензорного произведения действий. То есть невозможно придумать такие однокубитные действия  $B$  и  $C$ , что  $A = B \otimes C$ .

10.5 Запиши действие  $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$  в базисе  $|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$ .

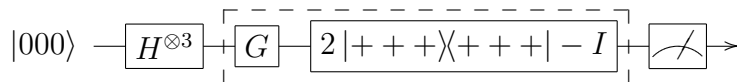
10.6 Рассмотрим диффузию  $D = 2|++\rangle\langle ++| - I^{\otimes 2}$ . Найди  $D \cdot |00\rangle$ ,  $D \cdot |10\rangle$ ,  $D \cdot |++\rangle$ ,  $D^{-1}$ .

<sup>1</sup>Конечно, это состояние кубитов, а не Алисы!

## 11. Алгоритм Гровера: 2 кубита



## 12. Алгоритм Гровера: 3 кубита



## 13. Алгоритм Саймона: 2 кубита

## 14. Лог

1. Было 11 школьников, 8-10 класс. Умножение вероятностей на дереве и расчёт ожидания на примере 1.1, 1.2. Задача про метание маркера в доску, школьники сами предлагают формулу  $\mathbb{P}(A|B) = S(A \cap B)/S(B)$ . Задача 2.1. Школьники прочли и начали предлагать ответы на 2.2.
2. Решили 2.2. Влад предложил решение без дерева. Решали 2.3. Перешли к комплексным числам. Школьники посчитали модуль и аргумент. Дали геометрическое определение умножения. Умножили исходя из геометрического определения  $(1+i)(1-i)$  и  $(1+i)^{43}$ .
3. Геометрически умножили:  $i \cdot i$ ,  $i \cdot (3+5i)$ ,  $(2+3i) \cdot (3+5i)$ . На примере тем самым доказали, что можно умножать алгебраически, заменяя  $i^2$  на  $-1$ . Решили 3.3, 3.5, 3.6.
4. Не было одной Ани. Сделали пару делений комплексных чисел: одно алгебраическое через сопряжение, другое — геометрическое. Решили задачу про черепаху и угол  $60^\circ$ . Далее школьники решили задачу на нахождение таблицы истинности и создание  $XOR$  с помощью  $NOT$ ,  $OR$  и  $AND$ . Указали два разных способа создания  $XOR$ . Определил кубит перед самым концом занятия.
5. Повторно определил кубит, решили 4.3 — 4.7.  $NOT$  идёт очень легко, можно было также рассмотреть поворот кубита на угол  $\gamma$ . Начал рассказывать про бра-векторы.
6. Не было Ильи. Аккуратнее рассказал про бра-векторы. Решили 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6.
7. Рассказал про действия с кубитами. Написал, что можно умножать, а что нет. Школьники решили 7.1 (1, 2, 3) и 7.2 (два примера: разрешённое и запрещённое). Под конец 7.5 и 7.6.
8. Вспомнили, что поворот кубита не влияет на вероятности измерений. Далее переводили кубиты из алгебраической записи на сферу Блоха. Многим было трудно. Лучше было сделать наоборот, зная два угла на сфере нарисовать кубит и привести его алгебраическую форму записи. Затем пытались по сфере Блоха понять, как  $X$  действует на углы. К концу оставалось чуть-чуть, потом один парень остался и с ним доработали.
9. Сделал правильное изложение действия на кубит. Начал с широты и долготы кубита на сфере Блоха. Потом записали его формулой, потом применили действие, потом сказали как меняется широта и долгота. Затем школьники легко сделали автомат, который решает классическую задачу Дойча, поскольку он состоит из одного действия  $XOR$ . То есть я нарисовал коробку, в ней

источник 0, источник 1, далее  $f$  применяется к этим двум источникам. А далее требование к выходу. Затем составляли квантовый аналог функции  $f$ . Здесь тяжело пошло моё изложение с общей формулой,

$$f : \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle \rightarrow (-1)^{f(0)} \alpha_0 |0\rangle + (-1)^{f(1)} \alpha_1 |1\rangle$$

Надо по-другому, возможно таблицу! Сказать неформально, что квантовый оракул у некоторых амплитуд вероятностей меняет знак, а у некоторых — сохраняет. А далее составить таблицу. Столбцы нужны такие. Классическая функция  $f$ , её действия на каждом классическом бите, меняет ли знак амплитуда нуля и единицы, (да или нет), выписанная формула для квантового оракула аналога каждой формулы. Без общей формулы. И затем мы построили квантовый алгоритм Дойча. Мы упростили начав алгоритм с источника  $|+\rangle$ . Успели на одной из четырёх возможных функций убедиться, что алгоритм срабатывает.

10. Реализовали табличку соответствия классической  $f$  и аналогичного квантового оракула. Проверили работоспособность алгоритма Дойча ещё на одной функции. Далее начали про несколько кубитов. Разобрались с полным и частичным измерением системы из нескольких кубитов.
11. Немного несистемно разбирались с действиями на паре кубит. Тензорное произведение кубит, тензорное произведение действий.
12. Повторили тензорное произведение. Начали алгоритм Гровера.

## 15. ЗПШ-2019

## 16. Презентация

Три раунда презентации по 10 минут. Для школьников 10-11 классов. Обычные компьютеры оперируют битами. Посмотрели, что делают операции NOT, умножение на 0, XOR, AND. Сколько бит может запомнить твой телефон? Угадай, сколько состояний у кубита :)

## 17. Встреча 1

Комплексные числа — вектора на плоскости. Две формы записи:  $3 + 4i$ ,  $5e^{i45^\circ}$ . Не объяснял, что такое  $e$ , просто сказал, что это так записывается. Сложение комплексных чисел. Складывать удобнее в первой форме записи. Геометрическое определение умножения комплексных чисел. Умножать удобнее во второй. Почему  $i^2 = -1$ ? Здесь надо было бы сказать про деление. Но я сказал об этом позже :)

Задача про улитку, ползущую одну минуту, снижающую скорость на 20%, поворачивающую на  $30^\circ$ . Можно подобрать числа получше.

Задача про  $(4 + 2i) \cdot (3 + i)$

Определение кубита. Примеры кубитов. Две операции: NOT и измерение.

## 18. Встреча 2

Ограничимся на время действительными коэффициентами. Тогда коэффициенты — это косинус и синус. Поляризационный фильтр.

Бра, кет и числа.

Таблица умножения для бра и кетов. Для кетов и бра.

Обозначение для  $NOT$ .

Вентиль Адамара. Задачки: дана цепочка, вероятности обнаружить что-то на выходе. (мало решали, можно ещё).

Кубиты плюс и минус.

Не все действия разрешены!

Требования к разрешённому действию (не все) - линейность (множитель выносится) - вероятности после действия тоже должны в сумме давать 1

Два кубита. Бесконечное число состояний, четыре комплексных числа.

Действие на паре кубит.

$$CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|.$$

## 19. Встреча 3

Выразили кубиты  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  через  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$ . Школьники легко справились сами решив систему уравнений. Просто написали определение  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  и трактовали это как систему.

Действия на паре кубит. Тензорное произведение действий. Действие с одним кубитом из пары.

Частичное измерение. Решили несколько примеров на частичное измерение.

Одновременное подбрасывание монетки и шифрование.

## 20. Встреча 4

Вентиль Паули  $Z$ .

Квантовая телепортация (разобрали половину до первого сообщения от Алисы)

Классический оракул. Умеет отвечать на вопрос: Любит ли Лисица Сыр? Любит ли Лисица Колобков? И отвечает да или нет.

Квантовый оракул умеет отвечать вопрос: Любит ли Лисица суперпозицию Сыра и Колобка? И отвечает суперпозицией да и нет.

Построили классическую схему реализующую ответы на вопрос "Правда ли Лисица по разному относится к сыру и колобку?"

Затем разобрали пошагово, что происходит в квантовой схеме. Показали уменьшение числа запросов к Оракулу в два раза.

Возможно, целиком разобрать телепортацию, а оракула перенести на следующий день.

## 21. Встреча 5

Доделали квантовую телепортацию (часть со вторым сообщением от Алисы для развязки запутанных кубитов).

Разобрали игру  $xXORy = aANDb$ . Казино подбрасывает две монетки, сообщает  $x$  Алисе и  $y$  — Бобу. Алиса и Боб сообщают казино  $a$  и  $b$ . Ввёл выигрыш 1000 и проигрыш -1200. Выписали классические стратегии Алиса и Боба. Далее предложил двум школьникам (мальчику и девочке) выбрать по стратегии за Алису и за Боба. Посчитали их вероятность выигрыша против казино. Повторили. Сказал, что всегда будет одна вторая. Посчитали ожидаемый выигрыш на 100 партий. Оказался отрицательным.

Нарисовали схему квантовой стратегии. Для случаев  $x = 0, y = 0, x = 1, y = 0, x = 1, y = 1$  посчитали вероятности выиграть Алисы и Боба. Подсчёт можно упростить тем, что два частичных измерения

системы эквивалентны полному измерению системы в смысле вероятностей. Четвёртый случай сказал, что вероятность 25%. Итого 100%, 100%, 25%, 25%. Получаем итоговую вероятность победы А и Б 0.625 и положительный выигрыш на 100 партий.

## 22. Плакат

На плакат вынесли поляризационные фильтры и квантовое казино против Алисы и Боба. Олег (9 класс) держал оборону около плаката практически один.

## 23. Набор сделай сам!

[Sta]

## 24. Решения

1.1.  $\mathbb{P}(X = 1) = 3/5, \mathbb{P}(X = 2) = 3/10, \mathbb{P}(X = 3) = 1/10, \mathbb{E}(X) = 1.5$

1.2.

1.3.

1.4. N 3 4 5

2/8 3/8 3/8

1.5.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.6.

3.7.  $(4 + 2i)(3 + i) = 10 + 10i, \pi/4.$

3.8. Кошка повернётся на  $\pi/4$  против часовой стрелки относительно начала координат

4.1.

4.2.

4.3.

4.4.

4.5.

4.6. Записываем уравнения, получаем что  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_0 - \alpha_1$  образуют равносторонний треугольник. Например, одно из решений  $\alpha_0 = 1/\sqrt{2}$ , а  $\alpha_1 = \alpha_0 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ .

4.7.

5.1.

5.2.

5.3.

5.4.

5.5.

5.6.

6.1.

6.2.

6.3.

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5.  $Z^\dagger$  отменяет  $Z$

7.6.  $NOT = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$



9.1.

10.1.

10.2.  $A \cdot |00\rangle = |00\rangle, A \cdot |10\rangle = |11\rangle.$

10.3.

10.4. Например,  $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|.$

10.5.

10.6.  $D \cdot |00\rangle = \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle + |11\rangle - |00\rangle)$

## 25. Источники мудрости

Замечательная серия от Jonathan Hui

[https://medium.com/@jonathan\\_hui/qc-programming-with-quantum-gates-2-qubit-operator-871528d136db](https://medium.com/@jonathan_hui/qc-programming-with-quantum-gates-2-qubit-operator-871528d136db)

[Sta] Mark Stay. *Deutch's algorithm with a pair of sunglasses and some mirrors*. URL: <https://www.classe.cornell.edu/spr/2004-04/msg0060395.html>. Инструкция по сборке квантового компьютера для алгоритма Дойча.