1. Анонс курса

Введение в теорию групп

Что общего между выворачиванием носков наизнанку, попытками повесить картину на два гвоздя, целыми числами, кубиком Рубика и вращениями геометрических фигур? Теория групп — это абстрактный язык, объединяющий эти и многие другие непохожие предметы и действия с ними. Теория групп возникает повсюду: от поиска корней уравнений до описания симметрий кристаллов и атомов. А мы начнём с составления таблицы умножения для носков и перчаток :)

Требование к участникам: уметь делить с остатком.

Готов к численности: 10-20 человек.

2. Советы семинаристам (Артём Абанов)

- Начинать семинар с трёпа (2-3 минуты).
- Не решать задачи у доски!
- Школьников надо рассадить так, чтобы к любому можно было быстро подойти.
- Каждый школьник делает задачи индивидуально. Для этого к семинарскому занятию надо быть готовым. Идеально иметь кучу задач написанных на карточках или отдельных клочках бумаги.
- Ваша задача — подбирать каждому школьнику задачи чуть-чуть выше того уровня на котором ему/ей удобно и комфортно.
- Когда школьник решил задачу — i) похвалить, ii) проверить размерность, iii) проверить/обратить внимание на предельные случаи: можно ли ответ понять без вычислений?
- Если задача у школьника вызывает затруднение — похвалить и помочь коротким советом индивидуально.
- Если затруднения продолжаются — похвалить, придумать подзадачу которая ему/ей по силам и сделать поправку на будущее.
- Если замечаете, что школьники устали рассказать коротко какую-нибудь байку, лучше в тему.
- Обращать внимание школьников на смысл их действий и смысл полученных ответов. У формул есть смысл!

3. Группа и граф Кэли

Летнешкольное определение. **Группа** (group) — набор действий, обладающий следующими свойствами:

G1. Есть фиксированный список образующих действий, с помощью которых можно получить остальные действия.

G2. Действия являются детерминистическими.

G3. У любого действия есть обратное действие.

G4. Действия можно осуществлять в любом порядке в любом количестве и при этом получается некое действие.

Обозначение. Группа с образующими a, b и c обозначается $G = \langle a, b, c \rangle$.

Обозначение. Под записью $a \circ b$ мы будем подразумевать последовательность из двух действий[1]: сначала a, затем b.

1. На столе лежат две монетки: 1 рубль и 5 рублей. Абу Али ибн Синна умеет менять эти монетки местами. Порождает ли это действие группу? Если да, то сколько в ней элементов?

2. У меня в левом кармане две шишки, а в правом — пять. Я умею: перекладывать одну шишку из левого кармана в правый, перекладывать две шишки из правого кармана в левый. Порождают ли эти два действия группу? Если да, то сколько в ней элементов?

3. У Садовского в квартире три комнаты: маленькая, средняя и большая. В маленькой висит картина Айвазовского, в средней — Брюллова, в большой — Васнецова. Садовский умеет менять местами картины в маленькой и средней комнате, а также менять местами картины в средней и большой комнате. Порождают ли эти два действия группу? Если да, то сколько в ней элементов?

4. Приведи пример ситуации, в которой выполнены все требования кроме G2.

5. Приведи пример ситуации, в которой выполнены все требования кроме G3.

6. Приведи пример ситуации, в которой выполнены все требования кроме G4.

7. Почему требование G4 не означает, что в любой группе содержится бесконечное количество элементов?

8. Приведи пример группы

   а) из трёх действий;

   б) из четырёх действий;

   в) из бесконечного количества действий;

   г) в которой порядок действий не влияет на результат;

   д) в которой порядок действий влияет на результат.

9. Рассмотрим систему из двух выключателей при входе в ВК. Зондер умеет щёлкать левым выключателем и щёлкать правым. Эта группа действий называется группой Клейна и обозначается V_4.

[1] В некоторых книжках под этой записью подразумевают сначала b, потом a.

а) Сколько всего действий в группе Клейна?

б) Какие другие два действия порождают эту же группу?

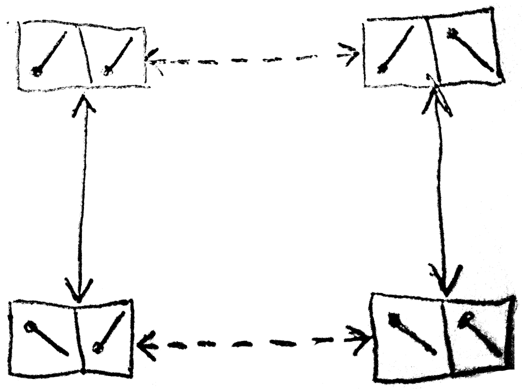
10. Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$. И группу действий на нём, состоящую в прибавлении или вычитании любого целого числа к данному. Например, в этой группе есть действия «прибавить 5» и «вычесть 42». Какие образующие можно выбрать в этой группе?

Определение. **Граф Кэли** (Cayley diagram) — рисунок на котором:

CD1. Все возможные состояния мира изображены точками;

CD2. Действия образующих группы нарисованы стрелочками. У каждой образующей свой цвет или свой стиль линии.

Пример. Граф Кэли для группы двух переключателей выглядит так



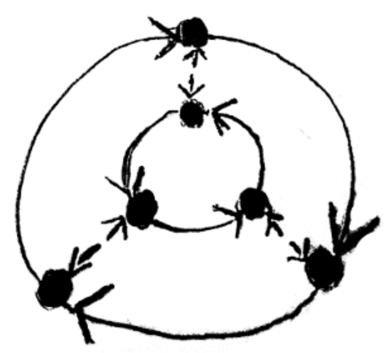
11. Изобрази граф Кэли для группы двух монеток на столе.

12. Изобрази граф Кэли для картин в квартире Садовского.

13. Изобрази кусочек графа Кэли для группы прибавления целых чисел.

14. Изобрази граф Кэли для группы переключателей, если образующими считать два действия: щёлкнуть левым и щёлкнуть обоими переключателями сразу.

15. Придумай группы с данными графами Кэли:



16. Можно ли сопоставить действия группы и вершины на графе Кэли? Если да, то как?

Заметки: Были все школьники. Хорошо и легко зашёл граф Кэли. Можно сразу с него начинать. Сразу группа и её граф. Плохо: точно нужно больше явного перечисления элементов группы. Пожалуй, логичнее всего было бы начать с двух примеров с графом Кэли, полным списком элементов и списком образующих. Пример неабелевой группы: робот, даём ему инструкции вперед-назад, поворот. Лучше чем преобразования плоскости.

4. Группа симметрий

1. У Васи один носок надетый на левую ногу. Вася умеет выполнять следующие два образующих действия: «переодень носок на другую ногу» и «выверни носок наизнанку и переодень на другую ногу». Нарисуй граф Кэли. Сколько всего действий в данной группе?

2. В вершинах квадрата стоят зондера в шапках. Шапки одинаковые, но одна вывернута наизнанку. Зондера умеют выполнять два образующих действия: передать шапки по часовой стрелке, вывернуть все шапки наоборот. Нарисуй граф Кэли. Сколько всего действий в данной группе?

3. Солдат умеет выполнять одну образующую команду: «повернись на 90 градусов по часовой стрелке». Нарисуй граф Кэли. Сколько всего действий в данной группе?

Определение. **Группа симметрий** — набор действий, переводящих фигуру (тело) ровно в себя и сохраняющий все расстояния между точками.

4. Нарисуй граф Кэли для группы симметрий:

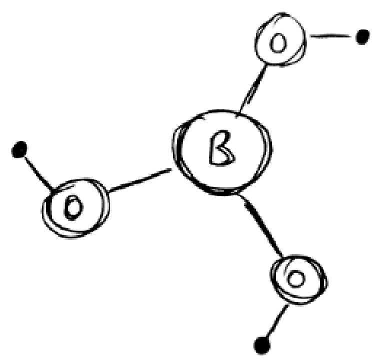
   а) прямоугольника с неравными сторонами;

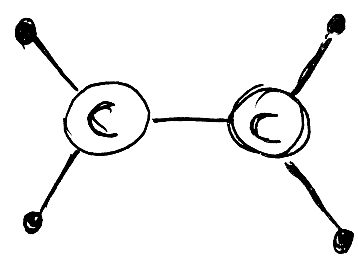
   б) равнобедренного, но не равностороннего треугольника;

   в) равностороннего треугольника;

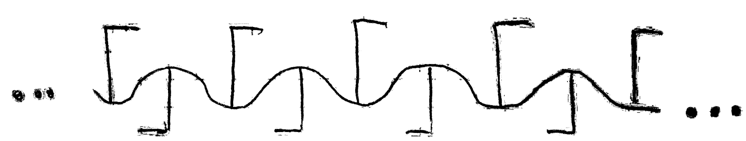
   г) квадрата;

   д) молекулы борной кислоты $B(OH)_3$ и молекулы этилена C_2H_4;



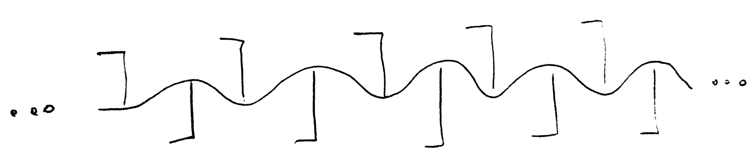


   е) мозаики;

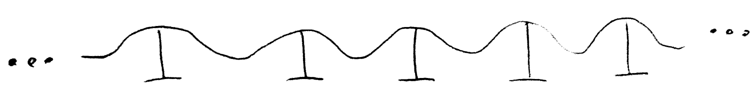


   ж) мозаики;

   з) мозаики;



   и) мозаики;



Все были. Сначала сделали первобытные спиннеры («вертушки»). Нужен лист бумаги и кнопка. Построили граф Кэли группы симметрий вертушки. Явно выписали полный список группы. Далее школьники решали задачи. Илья представил задачу с симметриями прямоугольника. На столе под присмотром Сони часть школьников залезла в таблицы умножения.

5. Таблица умножения

Наглядное определение. **Таблица умножения.** В строке r в столбце c находится произведение $r * c$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

5. Составь таблицы умножения для групп:

   а) Группа Клейна. При входе в ВК два выключателя. Зондер умеет выполнять два образующих действия: щёлкать левым выключателем и щёлкать правым.

   б) «Вращение солдата» (группа симметрий «вертушки»). Солдат умеет выполнять одну образующую команду: «повернись на 90 градусов по часовой стрелке».

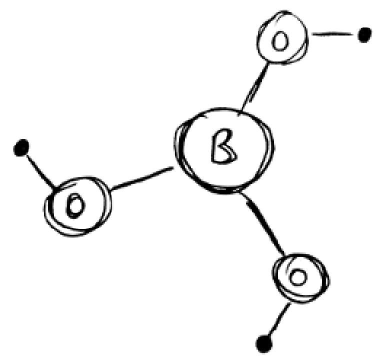
   в) «Переодевание носка». У Васи один носок надетый на левую ногу. Вася умеет выполнять следующие два образующих действия: «переодень носок на другую ногу» и «выверни носок наизнанку и переодень на другую ногу».

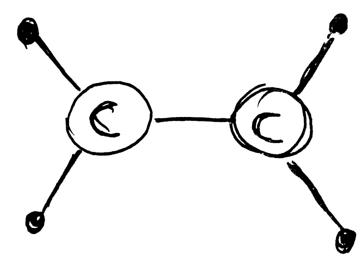
   г) Группа симметрий равнобедренного треугольника.

   д) Группа симметрий равностороннего треугольника.

   е) Группа симметрий квадрата.

   ж) молекулы борной кислоты $B(OH)_3$ и молекулы этилена C_2H_4;





6. Почему в таблице умножения в одной строке (или в столбце) все результаты различны?

7. Дозаполни все таблицы умножения. Буква e означает действие «ничего не делать».

а)

	e	a
e		
a		

б)

	e	a	b
e			
a			
b			

в)

	e	a	b	c
e				
a		b		
b				
c				

Определение. Группа действий называется **абелевой** (коммутативной), если порядок выполнения действий не влияет на результат, $a * b = b * a$.

Формальное определение группы. Множество G с операцией-тирьямпампацией $*$ называется группой, если:

G1. В множестве G существует «единичный» элемент, e, такой что для всех g выполнено $e*g = g*e = g$.

G2. Для любого элемента $g \in G$ существует обратный элемент, g^{-1}, такой что $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

G3. Операция-тирьямпампация $*$ ассоциативна, то есть для любых a, b, c выполнено $(a*b)*c = a*(b*c)$.

Пример. Ним-сложение натуральных чисел с нулём. Тирьямпампацию $*$ делаем так: каждое слагаемое переводим в двоичную систему счисления, складываем числа столбиком по принципу $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, переводим из двоичной обратно.

4. Сделай ним-сложения: $2 * 6$, $3 * 9$, $3 * 7$.

5. Что является «единицей» в ним-сложении?

6. Найди обратные элементы: 6^{-1}, 5^{-1}.

Рассказ про игру ним. Школьники играют две партии по парам.

Теорема. Позиция в игре ним является выигрышной, если ним-сумма строго больше нуля.

Выигрышная стратегия: подсунь противнику ним-сумму равную нулю.

Играю по ним-стратегии против добровольца Ильи.

6. Примеры групп и глубже про ним-сумму

1. Зондер надел сначала рубашку, а затем свитер, поэтому, чтобы ему раздеться надо сначала снять свитер, а потом — рубашку. Запиши это утверждение[2] с помощью действий a и b, где a — «надеть свитер», а b — «надеть рубашку».

   это упражнение надо переставить на после задания группы системой образующих и соотношений. Переформулировать!

2. Какие множества являются группой? Абелевой группой? Если множество — группа, то поясни, что является единицей группы и что является обратным элементом.

   оформить каждое упражнение отдельно. сначала спросить выполнить пару операций. потом спросить, что такое e...

   а) Рациональные числа. Под тирьямпампацией $*$ понимается обычное сложение.

   б) Рациональные числа. Под тирьямпампацией $*$ понимается обычное умножение.

   в) Рациональные числа кроме нуля. Под тирьямпампацией $*$ понимается обычное умножение.

   г) Множество G — натуральные числа и ноль. Под тирьямпампацией $*$ понимается ним-сложение.

   д) Множество G — скорости от минус до плюс скорости света. Тирьямпампация $*$ делается так

   $$a * b = \frac{a+b}{1+ab/c^2},$$

   где c — скорость света. Найди $0.5c * 0.5c$, $0.5c * 0.7c$, $-0.9c * 0.5c$.

Игры :) Рассмотрим игры, где у игроков одинаковое множество ходов. Например, шахматы не подходят.

1. Игра: двигай фишку по графу.

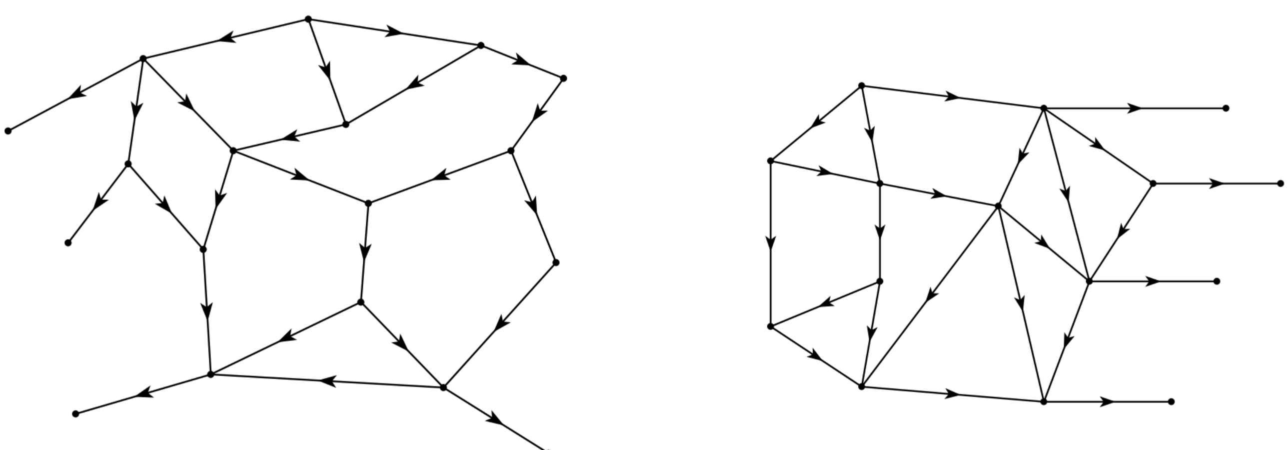


Fig. 3.2

2. Игра: переворачивай черепах! Переверни $H \to T$ и любую монетку слева от перевернутой по желанию.

   а) H-T-T-H-T-T-H б) T-H-H-T-T-H

[2]Здесь не совсем группа, так как невозможно снять свитер, когда он не надет, но получаемое тождество выполнено в любой группе.

3. Автомобильная пробка. Монетки на дорожке ведущей в пробку справа. Обгонять нельзя, можно ходить на любое число ходов в сторону пробки одной монеткой.

   а) М - - - М - - М - - - М - - | б) М - М - М - - М - - - М - - - - |

4. Определение. Ним-стоимостью позиции, $nim(G)$, называется минимальное неотрицательное число, не входящее в ним-стоимости позиций, следующих за позицией G. Рассчитайте ним-стоимости позиций в игре с графом.

7. Великое примирение и сумма игр

7.1. Великое примерение!

Определение. Множество G с операцией $*$ — группа, если

A1. Результат операции $a * b$ определён для всех a и b и всегда лежит внутри G.

A2. Есть нейтральный элемент e, такой что $a * e = e * a = a$ для всех a.

A3. У любого элемента a есть обратный a^{-1}, такой что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

A4. Операция $a * b$ ассоциативна, то есть для любых a, b и c выполнено равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

1. Рассмотрим обычные действительные числа. Какие свойства группы нарушает действие $a * b = 2a + 2b$?

2. Рассмотрим действительные числа. Какие свойства группы нарушает действие $a * b = a - b$?

Летнешкольное определение. **Группа** (group) — набор действий, обладающий следующими свойствами:

G1. Есть фиксированный список образующих действий, с помощью которых можно получить остальные действия.

G2. Действия являются детерминистическими.

G3. У любого действия есть обратное действие.

G4. Действия можно осуществлять в любом порядке в любом количестве и при этом получается некое действие.

Примиряем летнешкольное определение группы и формальное определение.

1. Что в летнешкольком определении является элементом группы?

2. Что в летнешкольком определением является операцией $*$?

3. Какое действие в летнешкольном определении является единицей?

4. Почему в летнешкольном определении группы выполнена ассоциативность?

5. Почему группа в летнешкольном определении является формальной группой?

6. Почему формальная группа является группой в летнешкольном определении?

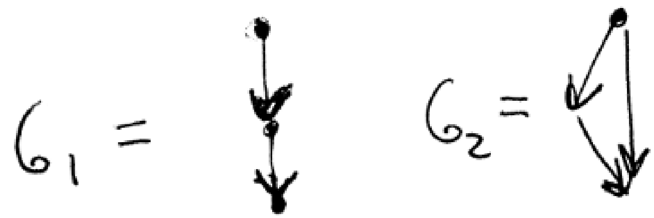
7.2. Складываем игры

Сумма игр $G_1 * G_2$ — это игра, в которой игрок при ходе выбирает одну из игр, G_1 или G_2, и делает в ней ход по её правилам.

Пример. Складываем два графа.

1. Какая игра получится если сложить ним с кучками 3-2-7 и ним кучками 2-8?

2. Сложите два графа G_1 и G_2:



3. Найдите ним-стоимость позиций игры G_1, позиций игры G_2 и позиций игры $G = G_1 + G_2$.

Теорема (Шпраг-Гранди, Sprague-Grundy):

$$nim(G_1 * G_2) = nim(G_1) \oplus nim(G_2),$$

где $*$ — сложение игр, а $\oplus$ — сложение ним-чисел.

Определение. Будем считать две игры идентичными, если у них одинаковая ним-стоимость.

1. Идентичны ли ним с кучками 2-6-9 и кучками 5-9-1?

2. Упрости ним-стоимости $nim(G * G)$, $nim(G * G * G)$

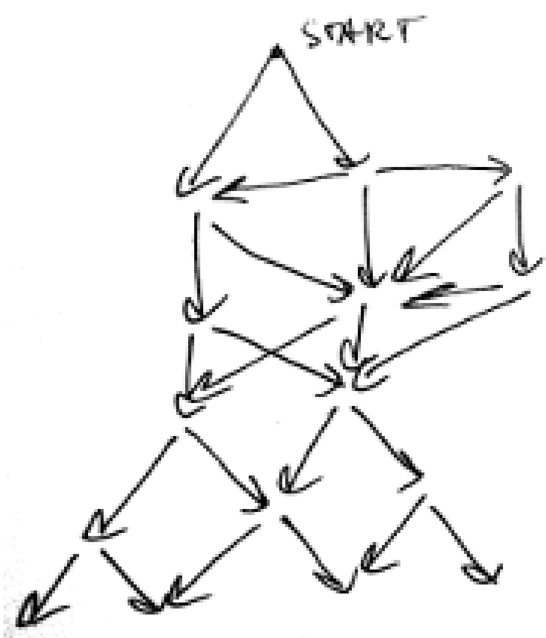
3. Что является единицей группы игр?

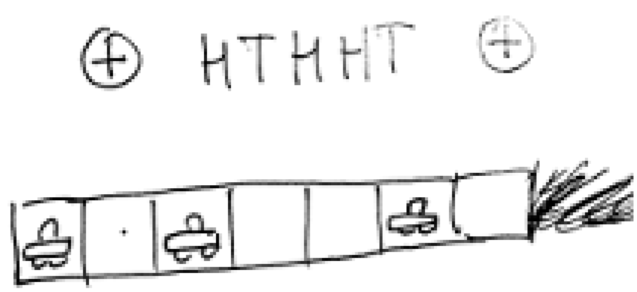
4. Что такое игра, обратная к данной?

5. Верно ли, что $G_1 * G_2 = G_2 * G_1$?

Решаем черепашек и машинки.

1. Найдите оптимальный ход в сумме игр



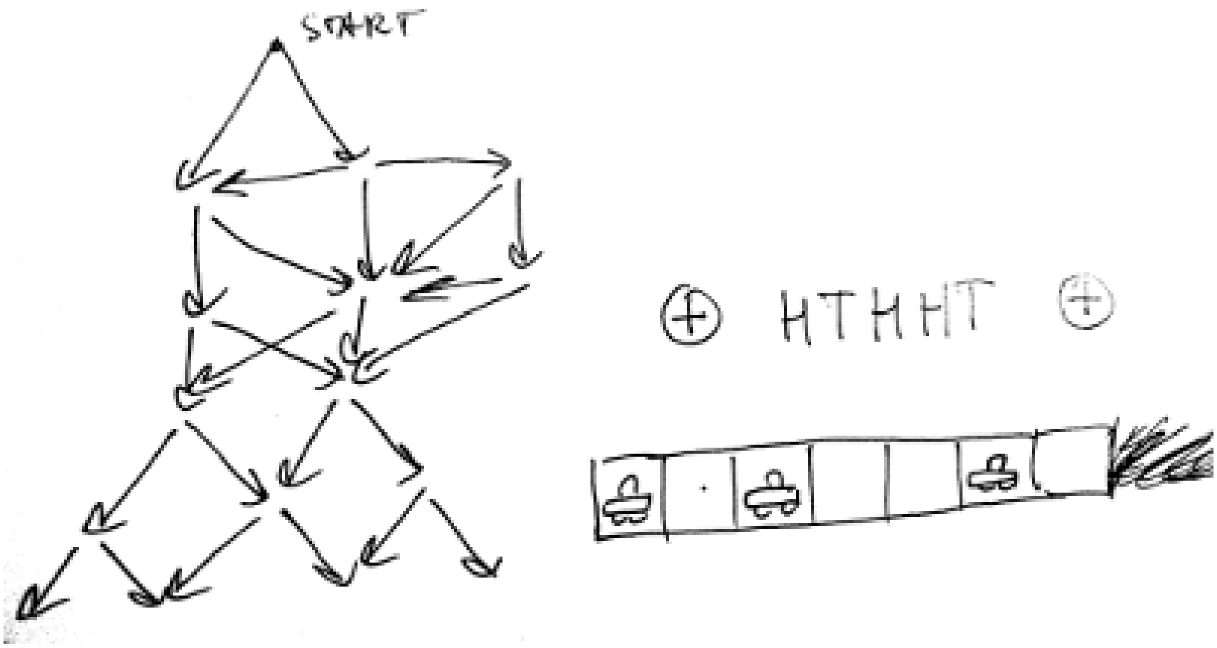


При решении машинок я ошибся и перепутал нечётные интервала с начала и с конца.

8. Группа перестановок

8.1. Работа над ошибками :)

Найдите оптимальный ход в сумме игр



8.2. Группа перестановок

Определение. **Группа перестановок** (подстановок) n предметов, S_n. Другое название: симметрическая группа.

Обозначения на примерах:

Перестановка, переводящая $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$, записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Образ: представь себе школьников, сидящих на занумерованных стульях. Перестановка говорит с какого стула (первая строка) на какой стул (вторая строка) надо пересаживаться школьникам.

Определение. **Циклом** (2567) называется перестановка, переводящая $2 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 7$, $7 \to 2$, и оставляющая другие числа на своих местах. Например,

$$(2567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Цикл из двух элементов, например, (49), называется **транспозицией**.

Под умножением циклов подразумевается их последовательное применение.

1. Перемножь циклы $(2541) \circ (123) \circ (124)$.

2. Рассмотрим перестановку

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Разложи перестановку в произведение непересекающихся циклов.

   Подсказка: нарисуй стрелочками с какого на какой стул пересаживаются школьники.

9. Группа перестановок-2

Определение. **Группа перестановок** (подстановок) n предметов, S_n. Другое название: симметрическая группа.

Обозначения на примерах:

Перестановка, переводящая $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$, записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Образ: представь себе школьников, сидящих на занумерованных стульях. Перестановка говорит с какого стула (первая строка) на какой стул (вторая строка) надо пересаживаться школьникам.

Определение. **Циклом** (2567) называется перестановка, переводящая $2 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 7$, $7 \to 2$, и оставляющая другие числа на своих местах. Например,

$$(2567) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Цикл из двух элементов, например, (49), называется **транспозицией**.

Под умножением циклов подразумевается их последовательное применение.

1. Найди все циклы совпадающие с (159).

2. Может ли во второй строке перестановки стоять два одинаковых числа?

3. Докажи, что любую перестановку можно разложить в произведение циклов.

4. Разложи цикл (14532) в произведение транспозиций.

5. Докажи, что любой цикл можно разложить в произведение транспозиций.

6. Нарисуй граф Кэли группы S_3 взяв за образующие (12) и (23).

7. Нарисуй граф Кэли группы S_3 взяв за образующие (12) и (123).

8. Похожа ли группа S_3 на группу симметрий равностороннего треугольника?

9. Найди перестановку обратную следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Предложи два разных разложения цикла (1234) на транспозиции.

11. В классе 17 школьников сидят на 17-ти занумерованных стульях. Учитель требует, чтобы школьники пересаживались каждую минуту по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

Через сколько минут все школьники вернутся на свои первоначальные места?

Определение. Наименьшее количество раз, которое нужно повторить перестановку s, чтобы получилась исходная расстановка чисел, называется **порядком перестановки** s.

12. Найди порядок перестановок $a = (12784)$ и $b = (12)(456)$.

13. В группе S_9 приведи пример перестановки порядка 7, 10, 12, 11, если они существуют.

14. Зондер утверждает, что разложил некую перестановку σ на транспозиции двумя способами: на 13 транспозиций и на 42 транспозиции. Возможно ли такое?

Определение. Перестановка σ из S_n называется **чётной**, если она раскладывается в чётное количество транспозиций.

15. Определи, являются ли чётными перестановки:

    а) $\alpha = (12345)$;
    б) $\beta = (5732)$;
    в) $\gamma = (234) \circ (5678)$.

16. Разрешима ли на кубике Рубика позиция, где переставлены два угловых кубика? А два бортовых кубика?

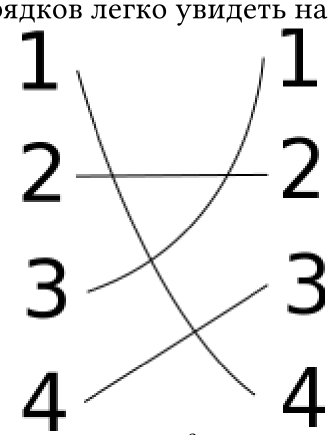
17. Разрешима ли в игре «15» позиция, где переставлены 1 и 2? А 14 и 15?

18. На одном старом телефоне я видел такую игрушку. В вершинах квадрата $ABCD$ лежат шарики разных цветов. Нажав на любую вершину игрок может переставить циклом шарики в этой вершине и двух соседних. Можно ли в этой игрушке переставить шарики в двух соседних вершинах квадрата?

10. Частые гости

Определение. Рассмотрим некоторую перестановку a, которая пересаживает школьников по стульям. Если до перестановки a Вася сидел раньше Пети, а после перестановки — позже, то назовём это беспорядком.

Число беспорядков легко увидеть на диаграмме. Рассмотрим цикл (143):



Цикл создаёт 4 беспорядка[3].

1. Изначально все школьники сидят на стульях в алфавитном порядке. Сколько беспорядков создаёт транспозиция (39)? А сколько беспорядков создаёт цикл (572)?

2. Перестановка a сама по себе создаёт 8 беспорядков, перестановка b сама по себе — 7 беспорядков. Сколько беспорядков может создавать перестановка $c = a \circ b$?

3. Какая перестановка получится, если за чётной перестановкой сделать нечётную?

4. Определи, являются ли чётными перестановки:

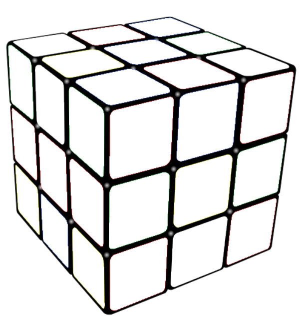
   а) $\alpha = (12345)$;

   б) $\beta = (5732)$;

   в) $\gamma = (234) \circ (5678)$.

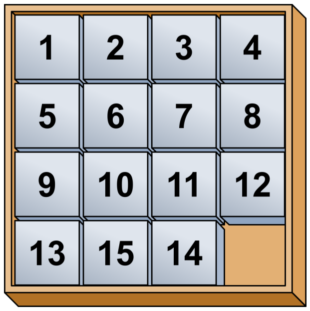
5. Цикл длиной 42 является чётной перестановкой или нечётной?

6. Разрешима ли на кубике Рубика позиция, где переставлены два угловых кубика? А два бортовых кубика?



7. Разрешима ли в игре «15» позиция, где переставлены 14 и 15? А 1 и 2?

[3]Линии следует проводить так, чтобы избегать пересечений в одной точке!



8. На одном старом телефоне я видел такую игрушку. В вершинах квадрата $ABCD$ лежат шарики разных цветов. Нажав на любую вершину игрок может переставить циклом шарики в этой вершине и двух соседних. Можно ли в этой игрушке переставить шарики в двух соседних вершинах квадрата?

Определение. **Тривиальной** называется группа состоящая из одного элемента, $\{e\}$.

Определение. **Циклическая группа порядка** n — группа симметрий классической детской n-угольной вертушки. Обозначение: C_n или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

9. Нарисуй граф Кэли групп C_3 и C_4.

Определение. **Подгруппа** H — часть группы G, которая сама по себе является группой. Обозначение $H < G$.

10. Выпиши все подгруппы в группе V_4 (действия зондера над двумя выключателями в ВК).
11. Выпиши все подгруппы в группе S_3 (перестановки трёх предметов).
12. Выпиши все подгруппы в группе C_5.
13. Выпиши все подгруппы в группе C_6.
14. (*) Выпиши все подгруппы в группе ним-чисел от 0 до 7.

Определение. **Граф циклов группы**. Точками изображаем элементы группы. Находим наибольшую циклическую подгруппу и соединяем её элементы окружностью. Находим циклическую среди ещё несоединённых элементов и повторяем. Получаем кучу окружностей проходящих через $\{e\}$.

Пример. Граф циклов для группы V_4.

15. Нарисуй граф циклов группы S_3.
16. Нарисуй граф циклов группы C_5.
17. Нарисуй граф циклов группы ним-чисел от 0 до 7.

Определение. **Диэдральная группа** D_n — группа симметрий правильного n-угольника.

18. Нарисуй граф Кэли групп D_3, D_4, D_5.
19. Нарисуй графы циклов групп D_3, D_4, D_5.

Определение. Преобразование $f : G \to H$ называется **гомоморфизмом групп**, если $f(a * b) = f(a) * f(b)$.

1. У Васи на листочке написано целое число. Вася умеет прибавлять любое целое число к написанному на бумажке. Перед Петей на столе две монетки: рубль и 5 рублей. Петя умеет менять их местами. Что из предложенного является гомоморфизмом групп?

   а) Если Вася изменяет число больше чем на 42 по абсолютной величине, то Петя меняет монетки местами.

   б) Если Вася изменяет число на нечётную величину, то Петя меняет монетки местами.

   в) Если Вася вычитает ровно 7, то Петя меняет монетки местами.

2. В чём отличие гомоморфизма от изоморфизма?

3. Деление перестановок на чётные и нечётный задаёт гомоморфизм между S_3 и C_2. Выпиши его в явном виде.

11. Мы делили апельсин

Подгруппы, смежные классы. Теорема Лагранжа.

Упр. Найди все подгрупы в группе...

Определение. Рассмотрим группу G и её подгруппу H, $H < G$. Возьмём произвольный элемент g и будем умножать его на все элементы из H по-очереди. В результате получится **левый смежный класс** gH.

Упр. Нарежьте группу G на смежные классы по подгруппе H. Изобразите на графе Кэли.

Лемма.

1. Все смежные классы имеют одинаковый размер, равный размеру H.
2. Любые два смежных класса либо полностью совпадают, либо не пересекаются.
3. Элементы a и b лежат в одном классе, если и только если $a = b \cdot h$, где $h \in H$.

Теорема Лагранжа. Размер группы G делится на размер подгруппы H нацело.

Доказательство. Смежные классы покрывают всю группу. Группа G нарезана на куски одинакового размера без наложений.

12. Раскраски и теорема Бернсайда

Группа G действует на множестве X. Например, X — все ожерелья из шести бусин трёх цветов, а $G = D_6$, то есть туда входят все вращения и отражение относительно вертикальной оси.

Три понятия: одно особое и два очень похожих.

Определение. Орбита позиции x, $orb(x)$, — все позиции, в которые можно перевести позицию x, действуя на неё группой G. Иногда орбиту обозначают Gx.

Упр. $X = ...$, $G = ...$, Найдите орбиту ...

Определение. Стабилизатор позиции x, $stab(x)$, — все действия, не изменяющие позицию x.

Упр. Найдите стабилизатор...

Формально: $stab(x) = \{g \in G | gx = x\}$.

Определение. Неподвижные точки действия g, $fix(g)$ — все позиции, не изменяющиеся под действием x.

Упр. Найдите неподвижные точки...

Формально: $fix(g) = \{x \in X | gx = x\}$.

Табличка. По строкам — элементы из G, по столбцам — элементы из X. Закрашиваем те клетки, где $gx = x$. Переделать в упражнение.

Как по таблице найти $stab(x)$? А $fix(g)$?

Теорема.

$$\sum_{g \in G} |fix(g)| = \sum_{x \in X} |stab(x)|$$

Доказательство. Левая и правая часть — это количество закрашенных клеток в таблице.

Упражнение. Что из $fix(g)$, $orb(x)$, $stab(x)$ является группой?

Лемма. Разрежем G на смежные классы по $H = stab(x)$. Получим смежные классы $e \cdot stab(x)$, $g_1 \cdot stab(x)$, ...

1. Если a и b лежат в одном смежном классе, то $a \cdot x = b \cdot x$.
2. Если a и b лежат в разных смежных классах, то $a \cdot x \neq b \cdot x$.
3. Количество смежных класов равно $|orb(x)|$.

4. $|orb(x)| \cdot |stab(x)| = |G|$.

Лемма Бернсайда (леммма не Бернсайда). Число орбит (принципиально разных раскрасок) равно

$$n_{orb} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |stab(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

Доказательство.

Разрежем множество X на орбиты. Орбиты имеют разное количество элементов.

Если в какой-то орбите n элементов, то каждой позиции в этой арбите припишем вес $1/n$. Тогда сумма весов на одной орбите равна единице, а сумма всех весов в X равна числу орбит.

Здесь картинка. Сравнение нарезки G на смежные классы по стабилизатору произвольного x и нарезки X на орбиты.

$$n_{orb} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|orb(x)|} = \sum_{x \in X} \frac{|stab(x)|}{|orb(x)| \cdot |stab(x)|} = \sum_{x \in X} \frac{|stab(x)|}{|G|} = \\ = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |stab(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)| \quad (1)$$

Примеры на теорему Бернсайда.

Ожерелья из 5 бусин 3 цветов.

Правильная пирамидка 10 цветов граней.

13. Лемма Бернсайда — семинар

1. Сколькими существенно различными (небратскими) способами можно раскрасить рёбра (стороны) правильной пирамидки в 10 цветов?

   Вопросы-подсказки:

   а) Сколько элементов в множестве X?

   б) Сколько элементов в группе G?

   в) Сколько элементов в $fix(e)$?

   г) Сколько элементов в $fix(a)$? Здесь a — поворот на 120 градусов вокруг оси проходящей, через вершину и середину грани.

   д) Сколько элементов в $fix(p)$? Здесь p — композиция двух поворотов, не оставляющая на месте ни одной вершины пирамидки.

   е) Сколько есть небратских раскрасок ребёр пирамидки в 10 цветов?

2. Рассмотрим ненулевые остатки от деления на 5. Например, под $[1]$ будем подразумевать произвольное число, дающее при делении на 5 остаток 1.

   а) Какой остаток от деления на 5 у числа $[2] \cdot [3]$?

   б) Составь таблицу умножения для $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$.

   в) Образуют ли $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ группу?

3. Рассмотрим ненулевые остатки от деления на 6. Например, под $[1]$ будем подразумевать произвольное число, дающее при делении на 6 остаток 1.

   а) Какой остаток от деления на 6 у числа $[2] \cdot [3]$?

   б) Составь таблицу умножения для $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$.

   в) Образуют ли $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$ группу?

4. Найди НОД (наибольший общий делитель) чисел 221 и 247. Найди такие целые числа a и b, что $a \cdot 221 + b \cdot 247 = \text{НОД}(221, 247)$.

5. Найди НОД чисел 221 и 135. Найди такие целые числа a и b, что $a \cdot 221 + b \cdot 135 = \text{НОД}(221, 135)$.

6. Малая теорема Ферма на бусах. Множество X — все бусы из 5 камней a цветов. Разрешим только повороты бус, то есть $G = C_5$.

   а) Что является орбитой полностью одноцветных бус?

   б) Что является орбитой не полностью одноцветных бус?

   в) Докажи, что $a^5 - a$ делится на 5.

   г) Приведи пример, когда $a^6 - a$ не делится на 6.

   д) Почему $a^5 - a$ обязательно делится на 5, а $a^6 - a$ не обязательно делится на 6?

Определение. **Прямая сумма групп** $G_1 \oplus G_2$ — все пары элементов (a_1, a_2), которые умножаются по принципу $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 * b_2)$.

Пример: $C_2 \oplus S_3$.

7. Рассмотрим группы $C_5 = \langle c \rangle$ и S_3. Рассмотрим два элемента в $C_5 \oplus S_3$: $a = (g^2, (12))$ и $b = (g^4, (23))$. Найди $a * b$ и $b * a$.

8. Нарисуй граф Кэли для группы $C_2 \oplus C_3$. Сколько элементов в этой группе? Выпиши использованные тобой образующие.

9. Представь группу V_4 (два выключателя) как прямую сумму двух групп.

10. Представь группу ним-чисел от 0 до 7 как прямую сумму трёх групп.

13.1. Многочлены

Определение. Многочлен называется **симметричным**, если от перестановки двух любых аргументов он не изменится. Например, $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3$, здесь $f(5, 4, 3) = f(3, 4, 5)$.

Определение. Многочлен называется **знакопеременным**, если от перестановки двух любых аргументов он меняет знак. Например, $f(x, y) = xy - yx$, здесь $f(4, 5) = -f(5, 4)$.

11. Являются ли многочлены симметричными? знакопеременными?

    а) $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)$;
    б) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + (x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2$;
    в) $h(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

Определение. **Знакопеременная группа** A_n — это группа перестановок знакопеременного многочлена.

12. Найди знакопеременную группу A_3, то есть ответь на вопрос, как можно переставлять аргументы знакопеременного многочлена $f(x, y, z)$, чтобы он сохранил знак?

13. (*) Найди знакопеременную группу A_4, то есть ответь на вопрос, как можно переставлять аргументы знакопеременного многочлена $f(x, y, z, w)$, чтобы он сохранил знак?

Пример 1. Сколько существует способов раскрасить грани куба в 5 цветов? в n цветов?
Всего кубов $|X| = 5^6$, а действий (вращений куба): $|G| = 24$. (считаем по паре соседних вершин)
Поехали:

1. Вращение имени Артёма, e. Оно одно и у него 5^6 неподвижных точек.
2. Вращения на 90° вокруг оси через центр двух граней. Таких вращений 6 и у каждого 5^3 неподвижных точек.
3. Вращения на 180. Таких вращений 3 и у каждого 5^4 неподвижных точек.
4. Вращения на 120 вокруг вершины. Их 8 (по часовой с каждой вершины вершины) и у каждого 5^2 неподвижных точек.
5. Вращения на 180 через середины ребёр. Их 6 и у каждого по 5^3 неподвижных точек.

Пример 2. Сколько существует принципиально различных графов на четырёх вершинах?
(пример с Burnside lemma на aops)
Во-первых, $|S_4| = 24$. У графа C_4^2 потенциальных рёбер, поэтому всего $2^6 = 64$ графа.
Поехали:

1. Перестановка имени Артёма, e. Она одна и у неё 64 неподвижных точек.
2. Циклы типа (12). Их 6 и у каждого 16 неподвижных точек.
3. Циклы типа $(12)(34)$. Их 3 и у каждого 16 неподвижных точек.
4. Циклы типа (123). Их 8 и у каждого 3 неподвижных точки.
5. Циклы типа (1234). Их 6 и у каждой 4 неподвижных точки.

Итого: 11 разных графов.

14. Малая теорема Ферма

Доказательство раз. Замечаем, что $aG = G$. Перемножаем все элементы G и aG. Получаем одно и то же, следовательно $a^{p-1}\prod g = \prod g$, то есть a^{p-1} равно даёт единичный остаток от деления на p.

Доказательство два. Через раскраски бус.

14.1. Теорема Кэли

Не начинали.

Определение. Группы G и H называются **изоморфными**, если есть взаимно-однозначное соответствие между элементами этих групп, «уважающее» операцию умножения. То есть, взаимно-однозначное соответствие f удовлетворяет требованию $f(a * b) = f(a) * f(b)$.

6. По графу Кэлли сопоставь каждой образующей группы V_4 некоторую перестановку.
7. По таблице умножения сопоставь каждому элементу группы некоторую перестановку:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Теорема Кэли. Любая группа действий изоморфна некоторой подгруппе в группе перестановок S_n.

Доказательство раз. Нарисуем граф Кэли. Сопоставим вершины и элементы группы. Получается, что каждая образующая переставляет элементы группы. То есть каждая образующая — это перестановка. А любое действие порождается образующими.

Доказательство два. Через равенство таблиц умножения.

Прикольный вопрос: Что общего между картонной коробкой из под макарон, тремя выключателями на стене и ним-числами от 0 до 7?

Группа $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$.

15. Что могло бы быть...

Не успели: как повесить картину на два гвоздя, перечисления Редфилда, теорему Кэли, как решать кубик Рубика, факторгруппы и много чего ещё :)

16. Загоночная

1. Рассмотрим группу S_9 (пересадки школьников по стульям). Возведи в 42-ую степень перестановку $(1234)(795)(86)$.

2. Рассмотрим все правильные пирамидки. Каждую **вершину** пирамидки разрешено красить в один из 7 цветов. Сколько существует принципиально различных (не совмещаемых вращением) пирамидок?

3. Рассмотрим группу S_9. Нарисуй граф Кэли подгруппы с образующими $a = (123)$ и $b = (1234)$.

17. Источники мудрости

Visual Group Theory. Книга, вдохновившая меня на этот курс. Не хватает в ней только леммы Бернсайда.

https://www.reddit.com/r/math/comments/1e7aw2/group_theory_for_kids/

https://www.youtube.com/playlist?list=PLgEpoT7yAl9VWebUfw4uOlut1ZaoFjFcb, Савватеев Теория Галуа

https://www.youtube.com/playlist?list=PLgEpoT7yAl9XgSQcTuUEyriQyLu1dEy_B, Савватеев Теорема Ферма

https://www.youtube.com/watch?v=ihoATq9jSlQ&t=13s, Савватеев Теория Групп

http://qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html. Серьёзный курс НМУ + МФТИ.

http://web.mit.edu/sp.268/www/nim.pdf. Кратко про комбинаторные игры.

http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15859-f01/www/notes/comb.pdf. Фергюсон, Комбинаторные игры.

По лемме Бернсайда: https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside%27s_lemma.

Symmetries of things

Adventures in group theory