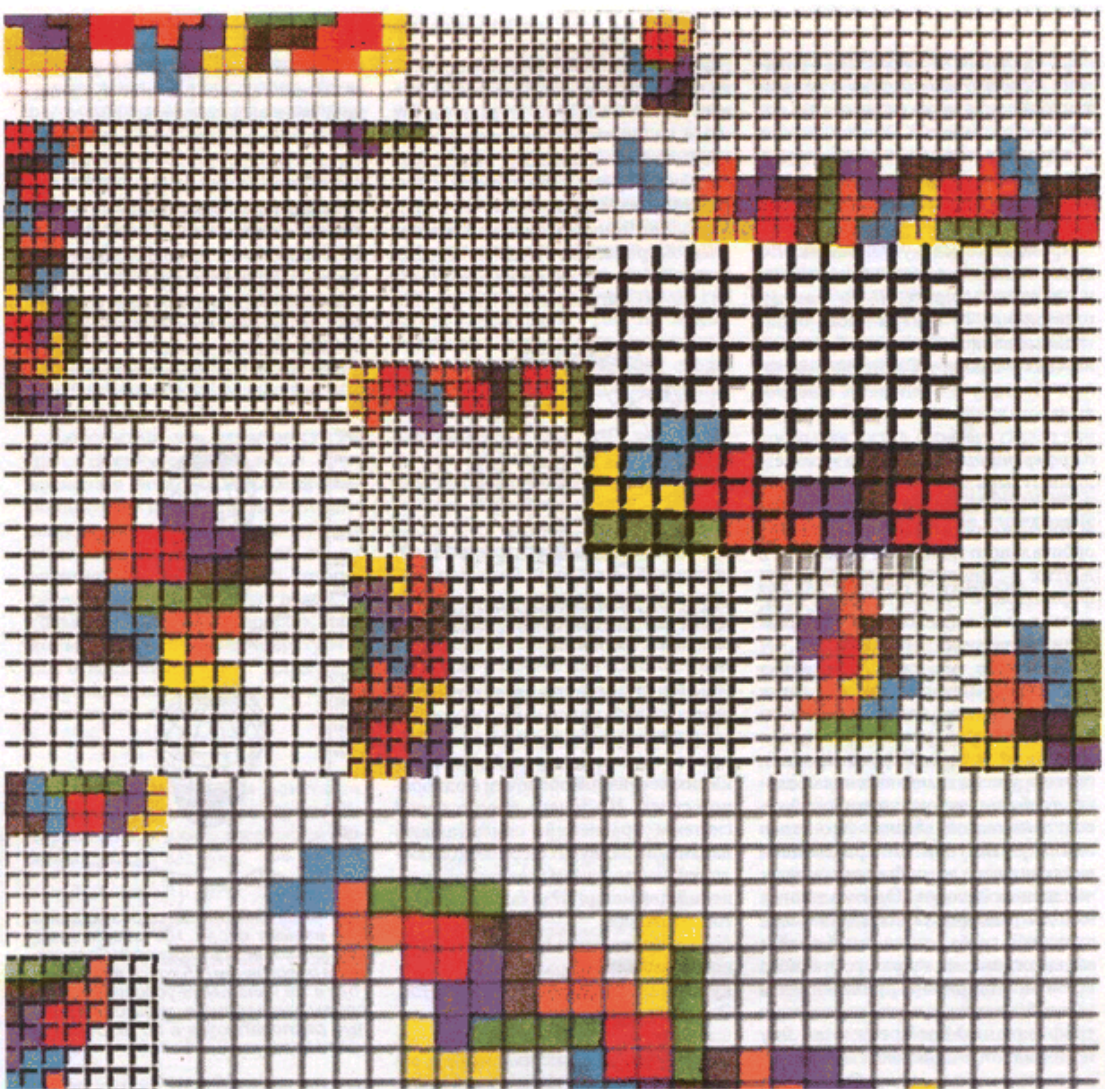
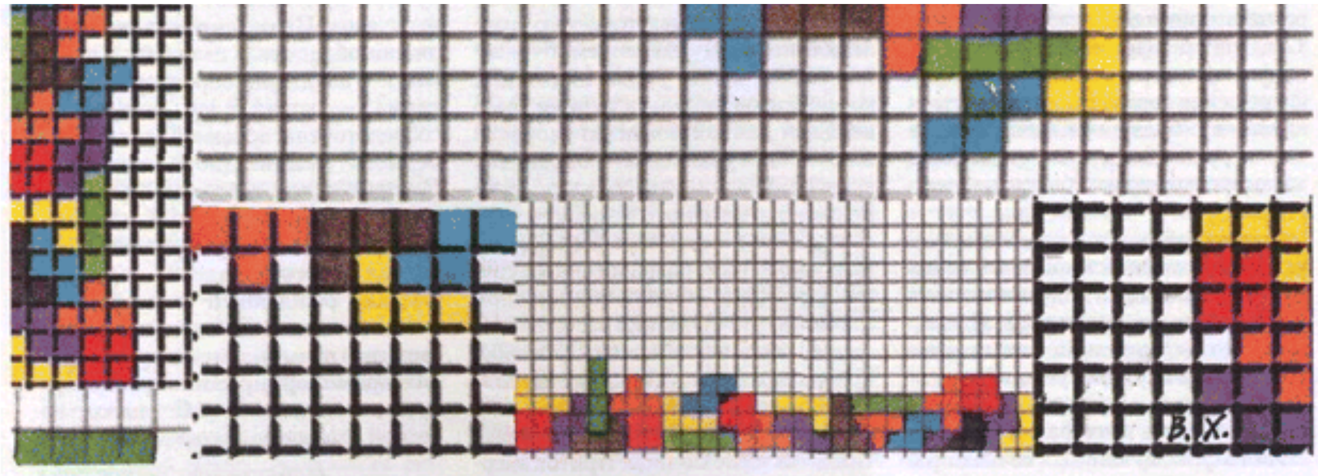
Фомин Д. , **Группы и замощения полимино.**





Группы и замощения полимино

Д.ФОМИН

НАВЕРНЯКА многим читателям «Кванта» знакома захватывающая компьютерная игра *тетрис*, созданная в Советском Союзе и распространившаяся по всему миру. В этой игре требуется сложить как можно больше сплошных рядов из «падающих с неба» фигурок. Вы видите все 7 фигурок тетриса на

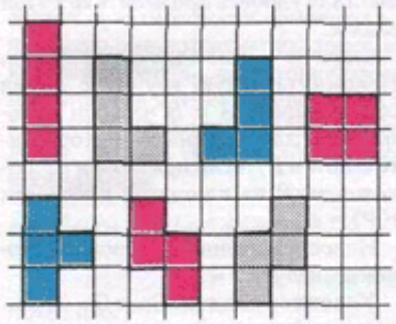


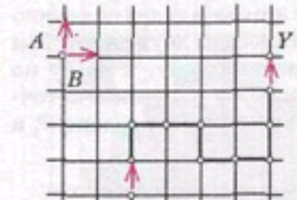
Рис. 1

рисунке 1; *по аналогии с домино их* называют тетрамино, так как они состоят не из двух, а из четырех одинаковых квадратиков. В тетрисе разрешается сдвигать и поворачивать фигуры, чтобы получить более плотную укладку. (Именно поэтому задачи о пентамино и других полимино получили благодаря профессору Университета Южной Калифорнии С.У.Голомбу. Впрочем, узнать подробнее об истории этого вида головоломок, о том, какие математические задачи с ними связаны и как их можно решать, лучше прямо из книги профессора Голомба «Полимино» (М.: Мир, 1975).

Мы же будем говорить только об одном, но, пожалуй, самом многочисленном классе задач о полимино: о задачах, в которых спрашивается, можно ли данную фигуру на клетчатой плоскости сложить из полимино некоторых фиксированных видов. Чтобы дать *положительный* ответ на такой вопрос, достаточно просто предъявить нужную укладку (обычно ее находят с помощью разумно организованного перебора, зачастую весьма трудоемкого). Но доказать перебором, что требуемая укладка невозможна, бывает гораздо труднее: слишком велико число вариантов, которые нужно рассмотреть. Для доказательства невозможности часто используют специальную раскраску плоскости (см. упомянутую книгу Голомба). Мы продемонстрируем новый подход к подобным задачам, основанный на применении групп

Пройдем по ней от начала к концу. Каждый отрезок между соседними узлами решетки будет проходиться в одном из четырех направлений, так что нашу ломаную можно задать последовательностью направлений движения.

Теперь возьмем произвольную группу G и в ней — два элемента A и B. Сопоставим движению по ломаной вверх элемент A, вправо — B, вниз и влево — обратные элементы A^{-1} и B^{-1}, а всей ломаной в целом сопоставим элемент группы $t(XY)$, равный произведению этих 4-х элементов, взятых в том порядке, в котором встречаются соответствующие направления при



$$t(XY) = AABBA^{-1}BBAAA = A^2B^2A^{-1}B^2A^3$$

Рис. 2

движении вдоль ломаной (см. пример на рисунке 2).

Такое же произведение можно выписать для граничной линии любого плотную укладку. (Именно поэтому фигур ровно 7: это все возможные цельные фигуры из 4 квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам, с точностью до поворотов и параллельных переносов.) В другой игре-головоломке, *пентамино*, завоевавшей популярность задолго до тетриса, строительным материалом являются пластмассовые фигурки из 5 квадратиков, и их можно не только поворачивать, но и переворачивать другой стороной. С точностью до поворотов и переворачиваний, т.е. зеркальных отражений, имеется 12 различных пентамино, они и входят в набор. Из них можно сложить, например, шахматную доску, из которой вырезан центральный квадрат 4×4 (догадайтесь, как!). Эта задача была опубликована еще в 1907 г. известным автором головоломок Анри Дьюдени. Но настоящую известность

Эта статья была опубликована в журнале «Квантум» в 1991 году.

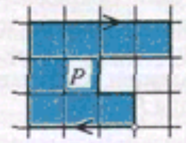
Иллюстрация В.Митурич-Хлебниковой

чам, основанный на применении групп. Его идея была сообщена автору в 1987 г. молодым ленинградским математиком Олегом Ижболдиным. Все необходимые сведения о группах можно найти в статье А.Сосинского в этом номере «Кванта».

От полимино к группам

Нарисуем на плоскости решетку из единичных квадратов. Будем рассматривать фигуры, состоящие из конечного числа этих квадратов. Такая фигура называется полимино, если все ее квадраты можно обойти так, что каждый следующий квадрат примыкает к предыдущему по стороне. Для простоты ограничимся случаем, когда граница полимино — это одна замкнутая ломаная, т.е. фигуры с «дырами» рассматривать не будем.

Пусть XY — ориентированная ломаная с началом X и концом Y, образованная линиями нашей решетки. писать для граничной линии любого полимино P, если отметить на ней начало (узел решетки O) и выбрать направление обхода, скажем, по часовой стрелке; обозначим его $t_O(P)$ (рис.3).



$$t_O(P) = B^{-3}A^{3}B^{4}A^{-1}B^{-2}A^{-1}BA^{-1}$$

Рис. 3

Упражнения (которые пригодятся нам в дальнейшем)

1. Докажите, что $t(YX) = t(XY)^{-1}$, где YX — та же ломаная XY, но проходимая из конца в начало.

2. Пусть O и O_1 — два узла на границе полимино P. Докажите, что

$$t_{O_1}(P) = t(O_1O)t_O(P)t(OO_1).$$

Из этих упражнений следует, что если произведение $t_O(P)$ — это еди-

ничный элемент e группы G, то равенство $t_O(P) = e$ сохранится и при замене направления обхода на противоположное, и при переносе начала обхода в другую точку (ибо в этом случае

$$t_{O_1}(P) = t(O_1O)t(OO_1) = = t(O_1O)t(OO_1)^{-1} = e).$$

Поэтому можно писать просто $t(P) = e$, не указывая ни начала, ни направления обхода.

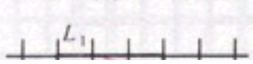
Теперь все готово, чтобы сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема. *Пусть полимино P составлено из полимино $P_1, P_2, \ldots P_k$ и пусть для элементов A и B некоторой группы G*

$$t(P_1) = t(P_2) = \ldots = t(P_k) = e.$$

Тогда и $t(P) = e$.

Докажем это сначала для полимино P, составленного из двух частей P_1 и P_2, примыкающих друг к другу по одной ломаной XY. Двинемся из точки X по общему участку границ P_1 и



составляющих P, всегда найдется такое, которое составляет с объединением остальных такую же пару, как P_1 и P_2 в предыдущем рассуждении.

Упражнение 3. Докажите, что если $AB = BA$, то $t(P) = e$ для любого полимино P.

Из этого упражнения видно, что использовать коммутативные группы в задачах об укладке полимино бессмысленно: они не дадут никакой информации. Ясно также, что мы можем ограничиться только группами, все элементы которых являются произведениями каких-то двух элементов и обратных к ним, взятых в любом числе и порядке. Такие группы называют *группами, порожденными двумя элементами*, а сами эти элементы — их *образующими*.

Приведем два примера (они появляются и в статье Сосинского).

Первый — это группа S_3 перестановок чисел 1, 2, 3. Она порождается перестановками

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Проверьте, что 4 перестановки из S_3, отличные от A и B,

Впрочем, в дальнейшем будет использоваться другая пара образующих — r и $r_1 = rR$. Это действительно образующие, так как $R = rr_1$. Все группы диэдра, за исключением D_2, некоммутативны: $rr_1 = R \neq R^{-1} = r_1r$.

Теперь можно вернуться к задачам об укладке полимино. Обычно в них задается определенный набор стандартных полимино (скажем, 12 пентамино) и требуется составлять из них различные фигуры, причем стандартные полимино можно сдвигать, поворачивать, переворачивать и составлять в любом порядке. Переформулируем основную теорему так, чтобы стало удобнее применять ее к этой задаче.

Сначала — еще одно определение. Некоммутативную группу с двумя образующими A и B назовем *нуль-группой* для полимино P (относительно A и B), если при любом расположении P на клетчатой плоскости $t(P) = e$.

Непосредственно из основной теоремы следует

Условие укладки. *Если G — нуль-группа для каждого из полимино $P_1, \ldots, P_k$, то и для любого полимино P, которое можно сложить из поли-*

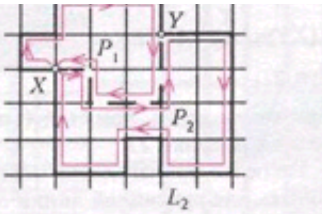


Рис. 4

P, обойдем P_1, а затем P_2 (рис.4), выписывая произведение соответствующих элементов группы G. Ломаную YX мы пройдем туда и обратно, поэтому соответствующие множители в произведении сократятся и результат будет эквивалентен однократному обходу границы P:

$$t_X(P_1)t_X(P_2)=t(L_1)t(YX)t(XY)t(L_2)= =t(L_1)t(L_2)=t_X(P),$$

где L_1 — это общий участок границ P_1 и P от X до Y, а L_2 — общий участок границ P_2 и P от Y до X. Следовательно, $t_X(P) = t(P_1)t(P_2) = e$. Аккуратное доказательство в случае произвольного числа k кусков, на которые разрезано полимино P, проводится аналогично, с использованием индукции по k. Достаточно только заметить, что среди полимино $P_1, \ldots, P_k$,

совпадают с $A^2 = e$, AB, BA и ABA.

Второй пример — это так называемая группа диэдра D_n ($n = 2, 3, \ldots$), т.е. группа симметрий правильного n-угольника (при $n = 2$ n-угольником считается отрезок). Она состоит из всех изометрий плоскости, отображающих этот n-угольник на себя: это n поворотов вокруг центра n-угольника на углы 0, $2\pi/n$, $4\pi/n, \ldots$ $\ldots, 2(n-1)\pi/n$ и n осевых симметрий

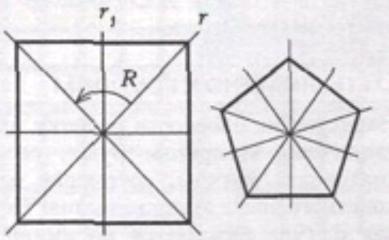


Рис. 5

относительно серединных перпендикуляров к сторонам (рис. 5). За образующие в этой группе можно взять поворот R на угол $2\pi/n$ и любую из симметрий r.

Упражнение 5. Проверьте, что все повороты в группе D_n можно записать в виде R, R^2, R^3, ..., $R^n = e$, а осевые симметрии — в виде r, rR, rR^2, ..., rR^{n-1}.

мино типов $P_1, \ldots, P_k$, G также будет нуль-группой.

Примеры

1. *Мономино.* Для одиночного квадратика P при любом его расположении на решетке $t(P) = ABA^{-1}B^{-1}$ (рис.6, *а*). Равенство $t(P) = e$ означало бы, что $AB = BA$, т.е. что G — коммутативная группа. Но такие группы мы условились не рассматривать. Итак, нуль-группы для мономино нет. Это вполне естественно, так как любое полимино, очевидно, можно уложить с помощью мономино.

2. *Домино* можно расположить на решетке двумя способами; им отвечают два произведения (рис.6, *б*)

$$t_1 = AB^2A^{-1}B^{-2} \text{ и } t_2 = A^2BA^{-2}B^{-1}.$$

Группа S_3 с указанными выше образующими

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

является нуль-группой для домино. В самом деле, поскольку $A^2 = B^2 = e$,

$$t_1 = AeA^{-1}e = AA^{-1} = e,\ t_2 = BB^{-1} = e.$$

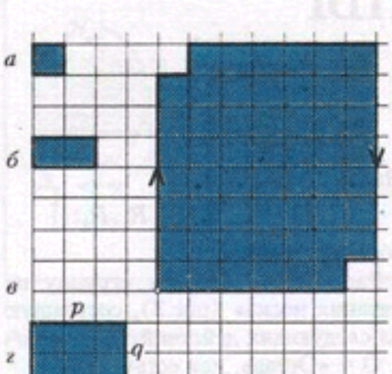


Рис. 6

Теперь можно решить известную задачу о возможности замощения с помощью домино шахматной доски, из которой вырезаны две противоположные угловые клетки, например a8 и h1 (рис.6, *в*). Если обходить такую доску, начав с угла a1, то получим произведение

ны p, причем эти циклы имеют ровно один общий элемент (рис.7):

$$A = \begin{pmatrix} 12\ldots p-1 & p & p+1\ldots 2p-1 \\ 23\ldots p & 1 & p+1\ldots 2p-1 \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} 12\ldots p-1 & p & p+1\ldots 2p-1 \\ 12\ldots p-1 & p+1 & p+2\ldots p \end{pmatrix}.$$

Двум возможным расположениям P на клетчатой плоскости отвечают произведения $t_1 = A^pB^qA^{-p}B^{-q}$ и $t_2 = B^pA^qB^{-p}A^{-q}$. Поскольку $A^p = B^p = e$, оба произведения равны e, т.е. G — нуль-группа для прямоугольного полимино P. Другой нуль-группой для P является группа G_1, порожденная двумя циклами A_1 и B_1 длины q, имеющими единственный общий элемент.

Пользуясь этой конструкцией, докажем, что *прямоугольник Q размером $m \times n$ можно разрезать на пря-*

на q, либо одно из них делится и на p, и на q, а другое имеет вид $xp + yq$, где x и y — целые неотрицательные числа (*Указание*. Группа перестановок, порожденная двумя циклами длин p и q, имеющими ровно один общий элемент, является нуль-группой для обоих квадратов $p \times p$ и $q \times q$.)

В этих упражнениях удается получить необходимое и достаточное условие замощения. Но надо признаться, что это редкий случай. Наша теорема дает только необходимость и в основном может применяться тогда, когда нужно установить невозможность той или иной укладки.

Несколько задач о нуль-группах

А. Докажите, что группа D_4 симметрий квадрата с образующими r и r_1 (см. рис.5) является нуль-группой для T-тетрамино (рис.8, *а*).

$$t = A^7BAAB^7A^{-7}B^{-1}A^{-1}B^{-7} =$$

$$= (AB)^4 = AB \neq e,$$

поскольку

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, желаемое замощение невозможно. С тем же успехом мы могли бы здесь воспользоваться группой D_3 симметрий правильного треугольника, взяв за образующие отражения относительно двух его высот. Возможно, вам будет проще иметь *дело с этой группой. Однако на самом деле* S_3 и D_3 — это всего лишь два разных обличья одной и той же абстрактной группы (т.е. они *изоморфны*); и вы это увидите сразу, как только занумеруете вершины треугольника и посмотрите, как переставляются номера при симметриях.

3. $p \times q$*-мино.* Рассмотрим прямоугольник P размером $p \times q$ (рис.6, *г*). В качестве группы G возьмем группу перестановок, порожденную двумя циклическими перестановками дли-

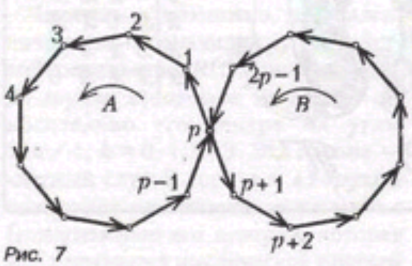


Рис. 7

моугольники $p \times q$ *только в том случае, когда каждое из чисел* p *и* q *является делителем хотя бы одного из чисел* m *и* n.

В этом случае условие укладки принимает вид $t(Q) = A^nB^mA^{-n}B^{-m} = e$ или $A^nB^m = B^mA^n$. Для указанных выше циклических перестановок A и B это равенство возможно только если $A^n = e$ или $B^m = e$ (проследите за общим элементом циклов при преобразованиях A^nB^m и B^mA^n). Но $A^n = e$, только если n делится на p, а $B^m = e$, если m делится на p. Заменяя циклы A и B на циклы A_1 и B_1 длины q, получим, что или n, или m делится на q.

Очевидно, что рассматриваемая укладка возможна только в том случае, если каждое из чисел m и n имеет вид $xp + yq$, где x и y — некоторые целые неотрицательные числа (сторона большого прямоугольника составляется из сторон меньших прямоугольников). Объединяя все три условия, получаем, что либо одно из чисел m и n должно делится на p, а другое на q, либо одно из чисел делится и на p, и на q, а другое имеет вид $xp + yq$ $(x,\ y \geq 0)$.

Упражнения

6. Докажите, что последнее условие не только необходимо, но и достаточно, чтобы можно было замостить $m \times n$-мино с помощью $p \times q$-мино.

7. Докажите, что прямоугольник $m \times n$ можно замостить квадратами $p \times p$ и $q \times q$ тогда и только тогда, когда либо оба числа m и n делятся на p, либо оба они делятся

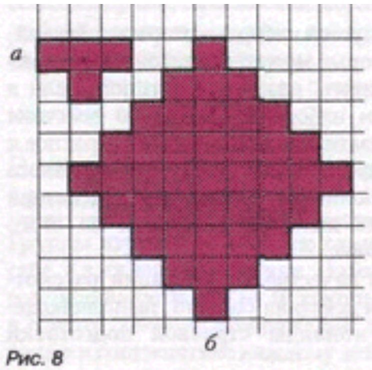


Рис. 8

В. Существует ли $4k$-мино ($k = 1, 2, \ldots$), для которого группа D_4 (из задачи А) не является нуль-группой?

С. Докажите, что а) при $n = 2, 3, 4$, б) для любого $n \geq 2$ существует общая нуль-группа для всех n-мино.

D. Докажите, что D_{18} — это нуль-группа для полимино на рисунке 8,*б*. Как надо выбрать образующие A и B?

Е. Раскрасим клетки полимино P черным и белым цветом в шахматном порядке и обозначим через $c(P)$ абсолютную величину разности между числом черных и белых клеток. Докажите, что при $c(P) > 0$ группа $D_{2c(P)}$ является нуль-группой для P, а для любого $n > 2c(P)$ группа D_n не будет нуль-группой для P (теорема о шахматной раскраске).

А теперь попробуйте сами придумать другие примеры нуль-групп и решить с их помощью какие-нибудь интересные задачи о замощении по*лимино.*