Сосинский А., **Конечные группы.**

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

Понятие группы, в частности, конечной группы — одно из важнейших понятий математики. И вместе с тем одно из самых распространенных и наиболее полезных для приложений.

Без конечных групп нельзя, например, указать, какие алгебраические уравнения разрешимы в радикалах, а какие — нет, описать, как устроены кристаллы, создавать коды, исправляющие ошибки. Об этом, однако, мы здесь рассказывать не будем, а ограничимся простейшими примерами конечных групп.

Иллюстрации: группы действий

Непустой набор некоторых действий, которые можно последовательно выполнять, называют *группой*, если в этом наборе для каждого действия обязательно присутствует обратное к нему, а результат последовательного выполнения любых двух действий тоже является действием из этого набора.

В качестве иллюстрации рассмотрим действия солдата, выполняющего команды строевой подготовки (рис. 1). Эти

∘	С	П	Л	К
С	С	П	Л	К
П	П	К	С	Л
Л	Л	С	К	П
К	К	Л	П	С

относительно ее центра (рис. 2). «Ничегонеделание» (в этом случае — поворот на 0°) обозначено через R_0, а остальные повороты (на 72°, 144°, 216°, 288°) — через R_1, R_2, R_3, R_4. Здесь $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2 = R_3$,

∘	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_0	R_1
R_3	R_3	R_4	R_0	R_1	R_2
R_4	R_4	R_0	R_1	R_2	R_3

Рис. 2.

$R_3 \circ R_3 = R_1$, $R_1 \circ R_4 = R_0$ (последнее означает, что R_4 обратно к R_1) и т. д. Набор

$$\Pi(\bigstar) = \{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4; \circ\}$$

образует группу.

Рассмотрим, наконец, «группу надевания носка» (рис. 3), состоящую из следующих действий:

- О = «Оставь, как есть»,
- П = «Сними и надень на другую ногу»,
- В = «Сними, выверни и надень на ту же ногу»,
- П′ = «Сними, выверни и надень на другую ногу».

Здесь ничегонеделание — это О, далее $П \circ В = П'$, $П \circ П = В \circ В = П' \circ П' = О$, $П' \circ П = В$ и т. д.

Снова получается группа Н={О, П, В,

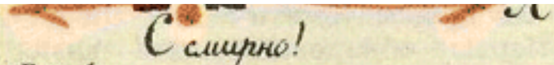
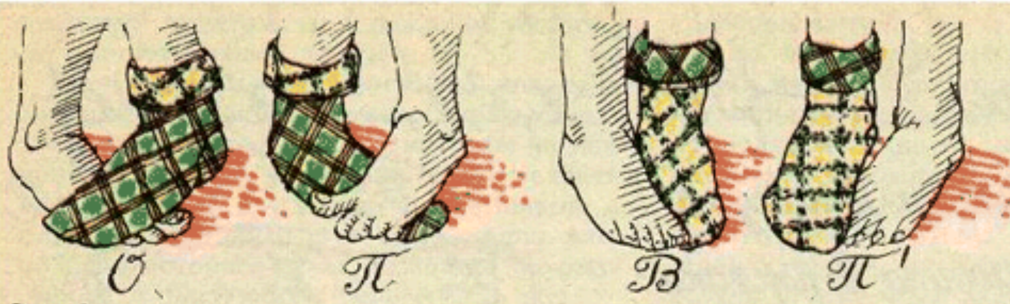


Рис. 1.

четыре действия составляют группу $R(\square)=\{С,\ П,\ Л,\ К;\ \circ\}$. Так, результат последовательного выполнения действий П и К (направо и кругом) будет совпадать с результатом действия Л (налево); это записывается в виде равенства $К\circ П = Л$. Точно так же $Л\circ Л = П\circ П = К$, $Л\circ П = П\circ Л = К\circ К = С$. Остальные соотношения в группе можно извлечь из ее *таблицы умножения*, показанной на рисунке 1. Особую роль играет здесь действие С, которое можно назвать «ничегонеделание». (Такое действие обязательно есть в любой группе: мы его получим, выполнив произвольное действие, а затем обратное к нему.) У нас действия П и Л обратны друг к другу, действие К — обратно к самому себе, и т. д.

Рассмотрим другую группу, тоже состоящую из поворотов. Именно — группу поворотов пятиконечной звезды П(★) П'; ∘}, состоящая, как и $R(\square)$, из четырех действий. Группы Н и $R(\square)$, однако, принципиально разные: у них таблицы умножения отличаются не только обозначением элементов, но и своим строением. Так, по диагонали таблицы умножения Н стоит одно и то же действие О, в то время как на этой диагонали у $R(\square)$ стоят разные элементы.

Подозреваю, что у самых серьезных читателей нарастает возмущение: какая-то там строевая подготовка, надевание носков — что за глупости такие, не научно это все! Спешу возразить: научно, даже очень. Знаете, как на самом деле называется набор действий солдата? *Циклическая группа 4-го порядка* или *группа вычетов по модулю* 4. А наше «надевание носков» — *группа Клейна*. Повороты же звезды — это одна из так называемых *простых конечных групп*, о которых в этом номере «Кванта» написана целая статья (см. с. 2), а в других журналах — тысячи статей.



∘	О	П	В	П'
О	О	П	В	П'
П	П	О	П'	В
В	В	П'	О	П
П'	П'	В	П	О

Рис. 3.

Группы симметрий геометрических фигур

С каждой геометрической фигурой F можно связать вполне определенную группу $S(F)$, *называемую группой самосовмещений* или *группой симметрий* этой фигуры; по определению, ее набор действий состоит из всех перемещений, *совмещающих* фигуру F саму с собой. Например, $S(\square)$ состоит из 8 действий: четырех поворотов квадрата (относительно его центра, в том числе на 0°) и четырех *отражений* (относительно двух диагоналей и двух «средних линий» квадрата).

В группе $S(\triangle)$ самосовмещений правильного треугольника — 6 действий, в группе $S(▭)$ прямоугольника — 4. Таблица умножения группы $S(▭)$ изоб-

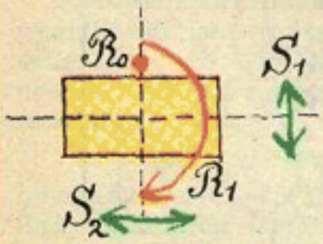
еще называется *циклической группой n-го порядка* и обычно обозначается через $\mathbf{Z}_n$.

В алгебре группы изучают «с точностью до изоморфизма», т. е. не различают изоморфные группы: алгебраисту не интересно, как называется группа и ее действия, ему важно знать структуру таблицы умножения группы.

Группы перестановок и их подгруппы

Рассмотрим конечный набор предметов — скажем, пять. Обозначим предметы цифрами, а весь набор через $N_5=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Перестановкой* $i\in S_5$ этих предметов называется любое взаимно однозначное отображение i: $N_5\to N_5$, т. е., попросту говоря, перенумерация предметов. Новый номер

Таблица умножения группы $S(\square)$ изображена на рисунке 4.



$\circ$	R_0	R_1	S_1	S_2
R_0	R_0	R_1	S_1	S_2
R_1	R_1	R_0	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	R_0	R_1
S_2	S_2	S_1	R_1	R_0

Рис. 4.

Если сравнить таблицу умножения для группы $S(\square)$ с таблицей умножения для группы Н, можно заметить, что эти таблицы отличаются только обозначением действий. Если переименовать действия так:

$$О \to R_0, \quad П \to R_1, \quad В \to S_1, \quad П' \to S_2,$$

то одна таблица превратится в другую. Группы с совпадающими (при подходящем переименовании действий) таблицами умножения называются *изоморфными*. Мы сейчас установили, что группы $S(\square)$ и Н изоморфны (их обычно в честь Ф. Клейна обозначают буквой K), а ранее заметили, что эти группы не изоморфны группе $R(\square)$ *действий солдата*.

Читатель, возможно, догадался, почему мы обозначили группу действий солдата через $R(\square)$: она изоморфна *группе поворотов квадрата* относительно его центра на углы $2k\pi/4$, $k=0, 1, 2, 3$. Эта группа — частный случай (при $n=4$) *группы поворотов правильного n-угольника* (относительно его центра), которая перенумерация предметов. Новый номер $i(k)$ k-го предмета мы будем обозначать через i_k. Для наглядности перестановку i обычно представляют в виде таблицы:

$$i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5\end{pmatrix}.$$

Это позволяет легко находить произведение перестановок i и j. Например, если

$$i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

то $k(3)=(i\circ j)(3)=i(j(3))=i(5)=2$, так что

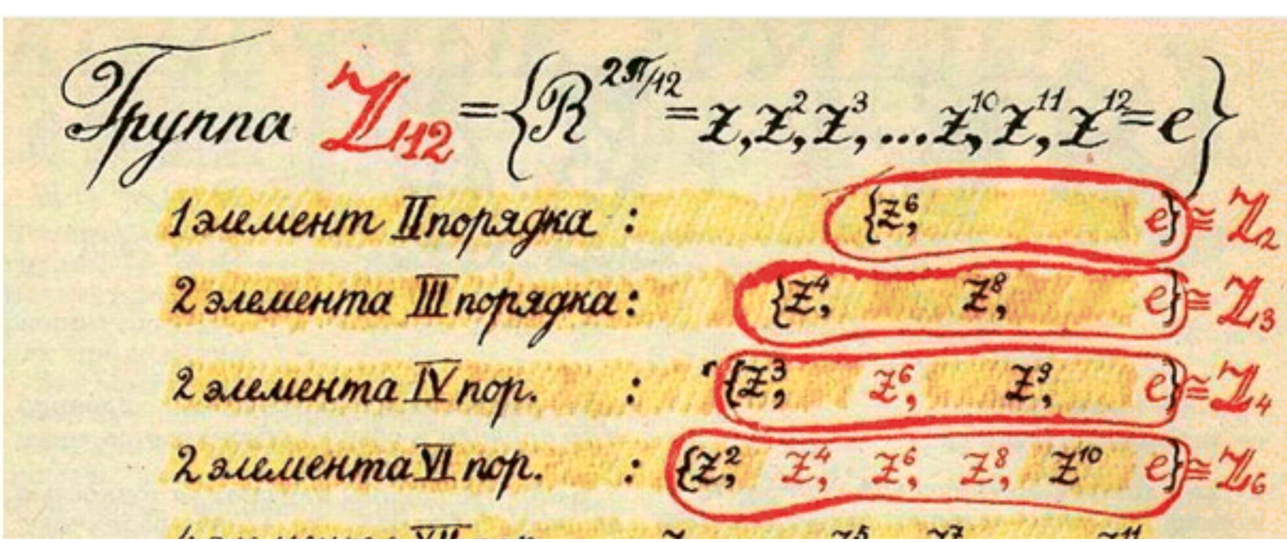
$$i\circ j=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

(обратите внимание, что при $k=i\circ j$ сначала выполняется j, *а потом* i, *причем* это не все равно: $i\circ j\neq j\circ i$ — проверьте!) Также легко находить обратные перестановки («чтением снизу вверх»):

$$i^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что S_5 образует группу, состоящую из $5!=120$ перестановок. Эта группа называется *группой перестановок пяти предметов* или *симметрической группой пятой степени*. Совершенно аналогично определяется *симметрическая группа S_n n-й степени* для любого натурального n.

Группы перестановок интересны в частности тем, что содержат много *подгрупп* (т. е. частей, которые сами являются группами). В группах перестановок содержатся подгруппы, изоморфные всем нашим ранее рассмотренным группам. Заинтере-



сованный читатель может в этом убедиться, проштудировав рисунок 5.

Рассматривая этот рисунок, читатель наверняка обратит внимание на красивые преобразований. Но к понятию группы можно подходить с более формальных, общих позиций; группы тогда считаются состоящими из элементов произвольной числовые закономерности, которые на нем проявляются. В частности, если назвать *порядком группы* число ее элементов, а *порядком элемента* g — наименьшее число k, для которого $g^k = e$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема Лагранжа. *Порядок любой подгруппы, также как порядок любого элемента группы, является делителем порядка группы.*

Доказательство (не очень сложное) мы здесь не приводим.

Взаимоотношения групп: гомоморфизмы

Группы изучают не каждую саму по себе, а в их взаимодействии. Назовем *гомоморфизмом* $\gamma: G \to H$ группы G в группу H всякое отображение, ставящее в соответствие каждому действию g из G вполне определенное действие $h = \gamma(g)$ из H, если для любых g и g' из G выполняется

$$\gamma(g \circ g') = \gamma(g) \circ \gamma(g').$$

(Коротко говорят так: гомоморфизм — это отображение, сохраняющее операцию $\circ$.)

Бестолковый солдат, который игнорирует команды «кругом» и «смирно», а в ответ на команды «налево» и «направо» поворачивается кругом, тем самым задает гомоморфизм

$$\beta: R(\square) \to \mathbf{Z}_2 = \{С, К; \circ\}$$

по правилу $\beta(С) = \beta(К) = С$, $\beta(П) = \beta(Л) = К$. Задумавшийся солдат, не реагирующий ни на какую команду, определяет *тривиальный гомоморфизм* в *тривиальную группу*:

$$\alpha: R(\square) \to \{e\}.$$

Нетривиальные гомоморфизмы не всегда существуют. Например, любой гомоморфизм $\alpha: \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_2$ или $\beta: \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_6$ — тривиален.

Абстрактные группы и теорема Кэли

До сих пор мы рассматривали вполне конкретные группы, состоящие из действий — поворотов, симметрий и других преобразований, а умножение — тоже произвольная операция (не обязательно композиция действий). Получается следующее аксиоматическое определение. Множество G элементов произвольной природы, в котором задана *бинарная операция* $*$ (состоящая в том, что каждой паре элементов $a, b \in G$ ставится в соответствие их *произведение* $c = a * b$, тоже являющееся элементом G) называется (*абстрактной*) *группой*, если

1°. операция $*$ *ассоциативна*, т. е. для любых $a, b, c \in G$

$$a * (b * c) = (a * b) * c;$$

2°. в G имеется единственный *нейтральный элемент* $e \in G$, для которого

$$a * e = e * a = a$$

при любом $a \in G$;

3°. для каждого $a \in G$ существует единственный *обратный элемент* $a^{-1} \in G$ такой, что

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e.$$

Это общее определение позволяет сразу получить много новых примеров групп. Так, целые числа $\mathbf{Z}$ образуют группу (в качестве $*$ берем операцию $+$, нейтральный элемент — это 0, а обратным к $a \in \mathbf{Z}$ служит $(-a)$); ненулевые действительные числа $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ образуют группу относительно умножения и т. д.

Однако по существу абстрактный подход ничего нового не дает: оказывается, что любая абстрактная группа изоморфна некоторой группе действий. Мы докажем это здесь лишь для конечных групп.

Теорема Кэли. *Всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n.*

Доказательство. Пусть $G = \{e = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Каждому элементу $g_k \in G$ поставим в соответствие перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

где i_1 — номер элемента $g_k * g_1 = g_k * e$ (на самом деле $i_1 = k$), i_2 — номер элемента $g_k * g_2$, ..., i_n — номер элемента $g_k * g_n$. Тогда все i_s различны (т. е. действительно получается перестановка) и соответствие

$$g_k \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

задает гомоморфизм $h: G \to S_n$ (это следует из ассоциативности), притом h отображает G взаимно однозначно на подгруппу $h(G) \subset S_n$ (это следует из аксиом 2° и 3°).

Рис. 5. Подгруппы циклической группы $\mathbf{Z}_{12}$ и групп перестановок S_4 и S_5. Красным выделены циклические подгруппы $\mathbf{Z}_k$, зеленым — так называемые знакопеременные группы (A_4 и A_5). В описании групп S_4 цифры в круглых скобках обозначают циклы, т. е. перестановки, меняющие цифры по кругу, например $(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (т. е. $1 \to 2 \to 3 \to 1$, $4 \to 4$) или $(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $(13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

||