Игра «Кегли»

В ряд с некоторыми пропусками стоят n кеглей. Игроки по очереди вышибают кегли. За один ход можно вышибить любые одну или две рядом стоящих кегли. Выигрывает тот, кто вышиб последнюю кеглю.

Теория игры.

Каждой конфигурации кеглей G можно сопоставить число в двоичной системе счисления, Ним-значение $N(G)$, по двум принципам:

1. если ряд кеглей G разделен уже выбитой кеглей (или несколькими) на два участка G_1 и G_2, то $N(G) = N(G_1)\ XOR\ N(G_2)$

2. если из конфигурации G, выбив кегли согласно правилам, можно попасть в конфигурации $G_1, G_2, \ldots, G_k$, то $N(G) = \min\{t \mid t \geq 0, \forall i : t \neq N(G_i)\}$. Если словами, то $N(G)$ равно наименьшему двоичному числу не совпадающему ни с одним $N(G_i)$.

Первый игрок выигрывает если и только если $N(G) > 0$.

Табличка $N(G)$ для n кеглей стоящих подряд без пропусков:

n	$N(G)$
0	000
1	001
2	010
3	011
4	001
5	100
6	011
7	010
8	001
9	100
10	010

Например, рассмотрим позицию $(6, 7, 8)$, т.е. 6 кеглей в ряд, пропуск, 7 кеглей в ряд, пропуск, 8 кеглей в ряд. Её Ним-значение равно 011 XOR 010 XOR 001 = 000, т.е. это позиция проигрышная для ходящего первым.

Например, рассмотрим $(4, 5, 6)$. Ним стоимость равна 001 XOR 100 XOR 011 = 110. Это выигрышная позиция для первого. Если перевести 100 в 010, то стоимость станет равной нулю, а позиция — проигрышной для того, кто будет ходить вторым. Значит из ряда в 5 кеглей можно уничтожить 3 крайних, тогда в этом ряду останется две кегли, которые стоят 010.

Игра полностью решается, начиная с некоторого n для ряда из n кеглей величина $N(G)$ начинает вести себя периодически.