Содержание

Цель

Рассказать про комплексный числа, преобразование Мёбиуса, кватернионы, вращения, роторы, октонионы, гиперболическую и проективную геометрию.

- ччч

1. Комплексные числа. Определение

Определение 1. Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонатльной осью — аргумента комплексного числа, $\arg z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\operatorname{Re} z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, действительное число, $\operatorname{Im} z$.

1.1 Поехали.

1. Для комплексных чисел $1+i$ и $3+4i$ найди $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
2. Нарисуй числа $1+i$, $3+4i$, $3-i$, $-3i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение z^* комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

1.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1+i)^2$? $(1+i)^{43}$?
2. Почему $i^2=-1$?
3. Чему равняется произведение $z=6+3i$ на i?

Наивное умножение комплексных чисел. Раскрываем скобки и упрощаем по принципу $i^2=-1$.

1.3 Нарисуй процесс умножение произвольного z на $3+4i$. А именно, нарисуй $3z$, $4iz$, $(3+4i)z$ и по рисунку объясни, почему $(3+4i)z=3z+4iz$.

1.4
1. У комплексного числа $w=\sqrt{11}+5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, w^*, ww^*.
2. Найди $(3+5i)\cdot(3+3i)$, $(1+i)/(1-i)$,
3. Найди $(\sqrt{3}+i)^{43}$, $(1-i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))\cdot(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;

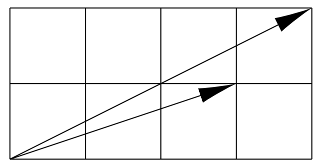
1.5 Реши уравнения $z^2=-1$, $z^2+6z+10=0$, $z^6=64$, $(z-1)/(z+1)=1+3i$.

1.6 Найди суммы $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{2019}$, $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\ldots+(1+i)^{2020}$.

1.7 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на 90° налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на 60°?

1.8 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



1.9 На плоскости нарисована кошечка. Что прозойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

1. Комплексные числа. Определение

Определение 2. Комплексное число — это вектор на плоскости.

1. Длина вектора — модуль комплексного числа, $|z|$.
2. Угол между вектором и горизонатльной осью — аргумента комплексного числа, $\arg z$.
3. Горизонтальная составляющая вектора — действительная часть, $\operatorname{Re} z$.
4. Вертикальная составляющая вектора — мнимая часть, действительное число, $\operatorname{Im} z$.

1.1 Поехали.

1. Для комплексных чисел $1+i$ и $3+4i$ найди $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
2. Нарисуй числа $1+i$, $3+4i$, $3-i$, $-3i$.

Действия:

1. Сложение комплексных чисел — сложение векторов.
2. Умножение комплексных чисел — длины векторов умножаются, аргументы складываются.
3. Сопряжение z^* комплексного числа — отражение относительно горизонтальной оси.

1.2 Базируясь на геометрическом определении умножения, ответь на вопросы:

1. Чему равняется $(1+i)^2$? $(1+i)^{43}$?
2. Почему $i^2=-1$?
3. Чему равняется произведение $z=6+3i$ на i?

Наивное умножение комплексных чисел. Раскрываем скобки и упрощаем по принципу $i^2=-1$.

1.3 Нарисуй процесс умножение произвольного z на $3+4i$. А именно, нарисуй $3z$, $4iz$, $(3+4i)z$ и по рисунку объясни, почему $(3+4i)z=3z+4iz$.

1.4
1. У комплексного числа $w=\sqrt{11}+5i$ найди $|w|$, $|w|^2$, $\operatorname{Arg} w$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, w^*, ww^*.
2. Найди $(3+5i)\cdot(3+3i)$, $(1+i)/(1-i)$,
3. Найди $(\sqrt{3}+i)^{43}$, $(1-i)^{2018}$;
4. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))\cdot(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;
5. Найди $(\cos(20^\circ)+i\sin(20^\circ))/(\cos(10^\circ)+i\sin(10^\circ))$;

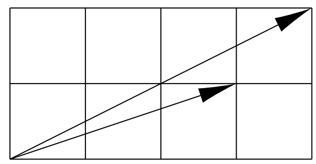
1.5 Реши уравнения $z^2=-1$, $z^2+6z+10=0$, $z^6=64$, $(z-1)/(z+1)=1+3i$.

1.6 Найди суммы $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{2019}$, $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\ldots+(1+i)^{2020}$.

1.7 Бесконечно живущая черепаха за первый день проходит 10 км на север. Затем каждый день она поворачивает на 90° налево и снижает скорость на 20%. К какой точке она приближается?

К какой точке стремится черепах, если она поворачивает на 60°?

1.8 Найди сумму углов между векторами и горизонтальной осью.



1.9 На плоскости нарисована кошечка. Что прозойдет с кошечкой, если каждую точку кошечки домножить на комплексное число $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$?

2. Комплексные числа. Геометрия и картинки

2.1 Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Снаружи каждой стороны четырёхугольника построим квадрат. Назовём отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, MN и KL.

1. Найди угол между MN и KL.
2. Найди отношение длин MN и KL.

2.2 Нарисуй на комплексной плоскости множества

1. $|z| = 4$;
2. $|z - 2 + 3i| > 5$;
3. $\operatorname{Re} z = 3$;
4. $\operatorname{Im} z < 6$;
5. $1 < |2z - 6| < 2$;
6. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 < 8$;
7. $|z - 1| + |z + 1| \leq 2$;
8. $|\operatorname{Re} z| < |z|$;
9. $|z - i| = |z - (3 + 2i)|$;
10. $\operatorname{Re}((1 + i)z) > 2$;
11. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;
12. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;

2.3 Нарисуй на комплексной плоскости траектории, $t \to z(t)$, для $t \in \mathbb{R}$, отметив стрелкой направление:

1. $t \to 6 + it$;
2. $t \to t + 2 + 7i$;
3. $t \to t + 2 + it$;
4. $t \to t + it^2$;
5. $t \to \cos t + i \sin t$;
6. $t \to t \cdot (\cos t + i \sin t)$;
7. $t \to t \cdot (\cos t - i \sin t)$;

2.4 Нарисуй комплексные числа z_1 и z_2 с единичной длиной и аргументами $\pi/4$ и $\pi/2$.

1. Запиши z_1, z_2 и $z_1 + z_2$ в виде $a + bi$.
2. Найди $\tan 3\pi/8$;

2. Комплексные числа. Геометрия и картинки

2.1 Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Снаружи каждой стороны четырёхугольника построим квадрат. Назовём отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, MN и KL.

1. Найди угол между MN и KL.
2. Найди отношение длин MN и KL.

2.2 Нарисуй на комплексной плоскости множества

1. $|z| = 4$;
2. $|z - 2 + 3i| > 5$;
3. $\operatorname{Re} z = 3$;
4. $\operatorname{Im} z < 6$;
5. $1 < |2z - 6| < 2$;
6. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 < 8$;
7. $|z - 1| + |z + 1| \leq 2$;
8. $|\operatorname{Re} z| < |z|$;
9. $|z - i| = |z - (3 + 2i)|$;
10. $\operatorname{Re}((1 + i)z) > 2$;
11. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;
12. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right) = 0$;

2.3 Нарисуй на комплексной плоскости траектории, $t \to z(t)$, для $t \in \mathbb{R}$, отметив стрелкой направление:

1. $t \to 6 + it$;
2. $t \to t + 2 + 7i$;
3. $t \to t + 2 + it$;
4. $t \to t + it^2$;
5. $t \to \cos t + i \sin t$;
6. $t \to t \cdot (\cos t + i \sin t)$;
7. $t \to t \cdot (\cos t - i \sin t)$;

2.4 Нарисуй комплексные числа z_1 и z_2 с единичной длиной и аргументами $\pi/4$ и $\pi/2$.

1. Запиши z_1, z_2 и $z_1 + z_2$ в виде $a + bi$.
2. Найди $\tan 3\pi/8$;

3. Поле направления и экспонента

Определение 3. Если $z(t)$ — положение точки в момент t, то $\dot{z}(t)$ или $z'(t)$ — мгновенная скорость точки (вектор).

Определение 4. Поле направления — в каждой точки плоскости нарисован вектор скорости движения точки.

3.1 Нарисуй поле направления для каждого случая:

1. $\dot{z}(t) = 1$;
2. $\dot{z}(t) = i$;
3. $\dot{z}(t) = z(t)$;
4. $\dot{z}(t) = -z(t)$;
5. $\dot{z}(t) = iz(t)$;
6. $\dot{z}(t) = -iz(t)$;
7. $\dot{z}(t) = 2 - z(t)$;
8. $\dot{z}(t) = 2 - iz(t)$;

Определение 5. Экспонента $\exp(t)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = z(t)$.
Экспонента $\exp(it)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = iz(t)$.

3.2 Докажи, что

1. $\exp(1) \approx 1.01^{100}$;
2. $\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1)$;
3. $\exp(3) = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \exp(1)$;

3.3 Найди

1. $\exp(i\pi/3)$;
2. $\exp(i\pi/2)$;
3. Формула Эйлера! $\exp(i\pi)$;
4. $\exp(it)$;
5. $\exp(i\pi/3) \cdot \exp(i\pi/2)$;

3.4 Запиши комплексные числа с помощью экспоненты

1. $1 + i$;
2. $\sqrt{3} + i$;
3. $\sqrt{3} - i$;
4. $6i$;

3.5 Реши уравнения

1. $z^2 = 6$;
2. $z^2 = -9$;
3. $z^2 = 4i$;
4. $z^3 = -27$;
5. $z^2 = -4i$;
6. $z^2 + 4z + 13 = 0$;
7. $\frac{z+i+2}{z-i-3} = 4i$;
8. $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$;
9. $z^5 = 32$;
10. $z^6 = i$;
11. $z^7 = 1 - i$;

3. Поле направления и экспонента

Определение 6. Если $z(t)$ — положение точки в момент t, то $\dot{z}(t)$ или $z'(t)$ — мгновенная скорость точки (вектор).

Определение 7. Поле направления — в каждой точки плоскости нарисован вектор скорости движения точки.

3.1 Нарисуй поле направления для каждого случая:

1. $\dot{z}(t) = 1$;
2. $\dot{z}(t) = i$;
3. $\dot{z}(t) = z(t)$;
4. $\dot{z}(t) = -z(t)$;
5. $\dot{z}(t) = iz(t)$;
6. $\dot{z}(t) = -iz(t)$;
7. $\dot{z}(t) = 2 - z(t)$;
8. $\dot{z}(t) = 2 - iz(t)$;

Определение 8. Экспонента $\exp(t)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = z(t)$.
Экспонента $\exp(it)$ — функция $z(t)$ со свойствами $z(0) = 1$, $\dot{z}(t) = iz(t)$.

3.2 Докажи, что

1. $\exp(1) \approx 1.01^{100}$;
2. $\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1)$;
3. $\exp(3) = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \exp(1)$;

3.3 Найди

1. $\exp(i\pi/3)$;
2. $\exp(i\pi/2)$;
3. Формула Эйлера! $\exp(i\pi)$;
4. $\exp(it)$;
5. $\exp(i\pi/3) \cdot \exp(i\pi/2)$;

3.4 Запиши комплексные числа с помощью экспоненты

1. $1 + i$;
2. $\sqrt{3} + i$;
3. $\sqrt{3} - i$;
4. $6i$;

3.5 Реши уравнения

1. $z^2 = 6$;
2. $z^2 = -9$;
3. $z^2 = 4i$;
4. $z^3 = -27$;
5. $z^2 = -4i$;
6. $z^2 + 4z + 13 = 0$;
7. $\frac{z+i+2}{z-i-3} = 4i$;
8. $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$;
9. $z^5 = 32$;
10. $z^6 = i$;
11. $z^7 = 1 - i$;

4. Геометрия Фано

Количество точек и прямых на проективной плоскости порядка такого-то?

5. Лог. КЛШ-2019

1. Было 29 школьников, от 8-го до 10-го класса и одна храбрая семиклассница. Комплексное число — вектор на плоскости. Сложение и вычитание. Изобразите $3+4i$, $5i$, $-6+i$, -8. Длина и аргумент. Многозначная функция. Геометрическое умножение. Находим $(1+i)^{44}$. Геометрически считаем $i \cdot i$, $(5+6i) \cdot i$. Наивное умножение. Геометрически интерпретируем наивное умножение $z \cdot (3+4i)$. Рисуем число $\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$. Делим через домножение на сопряжённое. Делим геометрически. Находим сумму конечной геометрической прогрессии комплексных чисел.

2. Повторили основные мысли. Два варианта записи чисел. Явно $z = a + bi$, через длину и угол с косинусом и синусом. Решили задачу про сумму углов. Разобрал окружность с центром не в нуле. Далее школьники решали и сдавали номера.

3. Решили задачу про сумму квадратов через явное представление $z = a + bi$. Дальше пообсуждали, что разумно сделать после решения задачи. Придумать более простой метод. Придумать более универсальный метод. Проверить, работает ли старый метод, если пошевилить задачу. Пошевелили нашу задачу и пришли к выводу, что геометрическо множество точек Z таких, что $AZ^2+BZ^2 = const$ — это окружность. Влад, решивший дома задачу по геометрии с произвольным четырёхугольником, начал излагать её. Чтобы ускорить процесс, я изложил за него. Затем кратко рассказал про кривые. И школьники рисовали кривые.

5.1. Плакат

6. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8. $(4+2i)(3+i) = 10+10i$, $\pi/4$.

1.9. Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8. $(4+2i)(3+i)=10+10i$, $\pi/4$.

1.9. Кошка повернётся на $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

7. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1. Кратко про геометрию Фано, https://www.youtube.com/watch?v=CRqso5-uLfI
2. How to build hyperbolic soccer ball, http://theiff.org/images/IFF_HypSoccerBall.pdf
3. Chaim Goodman-Strauss, Compass and Straightedge in the Poincaré Disk
4. Mann, DIY hyperbolic course, https://math.berkeley.edu/~kpmann/DIY%20hyperbolic%20course.pdf
5. 3blue1brown, Quaternions visualized, https://www.youtube.com/watch?v=d4EgbgTm0Bg
6. Grant Sanderson, Visualizing quaternions, https://eater.net/quaternions
7. https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/, есть pdf-ка с картинками умножения на кватернионов и октонионов.
8. Hanson, Visualizing quaternions, примеры про ремень, мячик, Apollo
9. https://brilliant.org/wiki/complex-numbers-in-geometry/
10. Прасолов, Геометрия Лобачевского
11. Slerp, wiki, https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp
12. Wiki, 3d rotation, https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_formalisms_in_three_dimensions
13. Fano plane, https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-fano-plane/
14. Lam, Search finite Fano plane of order 10, https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf, связка с латинскими квадратами
15. http://kahrstrom.com/mathematics/documents/OnProjectivePlanes.pdf, геометрия как точки и линии