

Предпосылки

Предпосылка 1 (IID). Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и одинаково распределены.

Предпосылка 2 (Density). У величины X_i есть функция плотности $f_\theta(x)$.

Предпосылка 3 (Identifiability). Если $\theta \neq \theta'$, то законы распределения f_θ и $f_{\theta'}$ отличаются.

Предпосылка 4 (Support). Носитель $\text{Supp } f_\theta$ не зависит от θ . Носителем называют замыкание множества, на котором функция плотности положительна.

Предпосылка 5 (Interior). Истинное θ_T является внутренней точкой множества всех возможных значений неизвестного параметра Θ .

Предпосылка 6 (Differentiable-k). Плотность $f_\theta(x)$ дифференцируема по θ как минимум k раз.

Предпосылка 7 (Uniqueness). Условие первого порядка $\ell'(\theta) = 0$ имеет единственное решение.

Предпосылка 8 (Interchange). Интеграл $I = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx$ дважды дифференцируем по θ и вторая производная может быть найдена путём смены порядка интегрирования и дифференцирования.

Предпосылка 9 (Bound). Существует функция $M(x)$, такая что $E_T(M(X_i)) < \infty$ и $|\partial^3 \ln f_\theta(x) / \partial \theta^3| \leq M(x)$ для всех x и всех θ из некоторой открытой окрестности настоящего θ_T .

Теоремы

Теорема 1. Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-1], [Uniqueness], то последовательность оценок максимального правдоподобия $(\hat{\theta}_n)$ состоятельная.

Теорема 2. Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-2], [Interchange], то

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{(d E(\hat{\theta}_n) / d \theta)^2}{I_F}$$

Теорема 3. Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-3], [Interchange], [Bound], то оценки асимптотически нормальны

$$\sqrt{I_F}(\hat{\theta}_n - \theta_T) \rightarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

и, в частности, асимптотически эффективны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) I_F = 1$$

Фабулы доказательств

Формальные доказательства

Источники мудрости