Предпосылки

Предпосылка 1 (IID). *Случайные величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и одинаково распределены.*

Предпосылка 2 (Density). *У величины X_i есть функция плотности $f_\theta(x)$.*

Предпосылка 3 (Identifiability). *Если $\theta \neq \theta'$, то законы распределения f_θ и $f_{\theta'}$ отличаются.*

Предпосылка 4 (Support). *Носитель* $\operatorname{Supp} f_\theta$ *не зависит от θ. Носителем называют замыкание множества, на котором функция плотности положительна.*

Предпосылка 5 (Interior). *Истинное θ_T является внутренней точкой множества всех возможных значений неизвестного параметра Θ.*

Предпосылка 6 (Differentiable-k). *Плотность $f_\theta(x)$ дифференциируема по θ как минимум k раз.*

Предпосылка 7 (Uniqueness). *Условие первого порядка $\ell'(\theta) = 0$ имеет единственное решение.*

Предпосылка 8 (Interchange). *Интеграл $I = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx$ дважды дифференцируем по θ и вторая производная может быть найдена путём смены порядка интегрирования и дифференцирования.*

Предпосылка 9 (Bound). *Существует функция $M(x)$, такая что $\mathrm{E}_T(M(X_i)) < \infty$ и $|\partial^3 \ln f_\theta(x)/\partial\theta^3| \leq M(x)$ для всех x и всех θ из некоторой открытой окрестности настоящего θ_T.*

Теоремы

Теорема 1. *Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-1], [Uniqueness], то последовательность оценок максимального правдоподобия $(\hat\theta_n)$ состоятельная.*

Теорема 2. *Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-2], [Interchange], то*

$$\operatorname{Var}(\hat\theta_n) \geq \frac{(d\,\mathrm{E}(\hat\theta_n)/d\theta)^2}{I_F}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-3], [Interchange], [Bound], то оценки асимптотически нормальны*

$$\sqrt{I_F}(\hat\theta_n - \theta_T) \to \mathcal{N}(0; 1)$$

и, в частности, асимптотически эффективны:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\hat\theta_n) I_F = 1$$

Теорема 4. *Если выполнены условия [IID], [Density], [Identifiability], [Support], [Interior], [Differentiable-3], [Interchange], [Bound], (need to check multivariate case), $\theta = (\theta_a, \theta_b)$, то при верной H_0: $\theta_a = 0$ статистики LR, LM, W асимптотически распределены как $\chi^2_{p_a}$.*

Фабулы доказательств

Хи-квадрат распределение для статистики Вальда следует из асимптотической нормальности оценок.

Асимптотическая эквивалентность трёх статистик доказывается с помощью квадратичной аппроксимации рядом Тейлора.

А для квадратичной по θ логарифмической функции правдоподобия LR, LM, W статистики в точности эквивалентны, это просто манипуляции с параболой на уровне 9-го класса.

Формальные доказательства

Источники мудрости

[Mar13] Ryan Martin. *Likelihood and Maximum Likelihood Estimation.* 2013. URL: https://www2.stat.duke.edu/~sayan/SAMSI/lec/411notes03.pdf.

[Woo17] Simon N Wood. *Generalized additive models: an introduction with R.* CRC press, 2017. Шикарное приложение про максимальное правдоподобие и AIC.