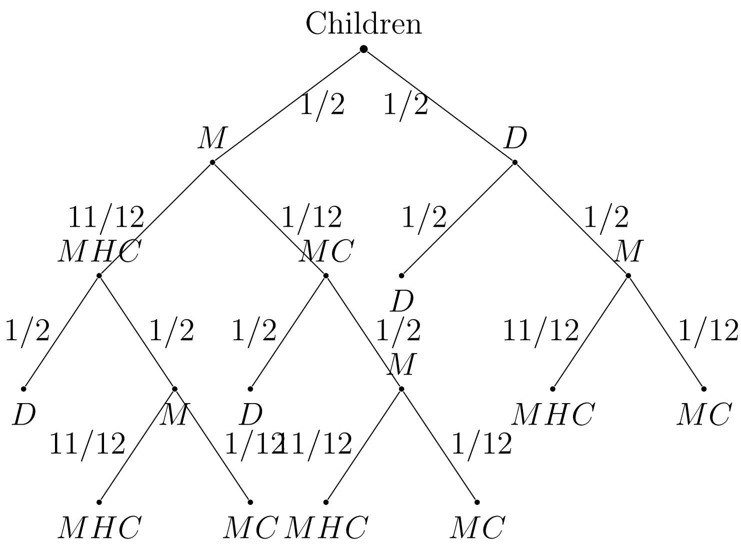
Заметки к курсу mc201

29 октября 2012 г.

1 Чудеса теории вероятностей

Чудо 1. «Гороскоп»
У тёти Глаши двое детей.

1. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один из ее детей — мальчик. Находим просто по формуле (M — мальчик, D — девочка): $p(MM|\bar{DD}) = \frac{p(MM,\bar{DD}}{p(\bar{DD})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$
2. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один мальчик — стрелец. Построим дерево судьбы тети Глаши(MC — мальчик-стрелец, MHC — мальчик-не стрелец):



Теперь вспомним, что вероятность исхода на дереве равна произведению вероятностей на веточках, ведущих к этому исходу. Найдем нужные ветви судьбы, где у тети Глаши рождается два сына и где один мальчик — стрелец, и посчитаем: $p(MM|\exists MC) = \frac{p(MM,\exists MC)}{p(\exists MC)} = \frac{1/12*1/12*1/2+1/2*11/12*1/2*1/12}{1/12*1/12*1/2+1/2*11/12*1/2*1/12+1/2*1/12*1/2+1/2*1/2*1/12} = \frac{23}{47}$ Чудо! Вероятность двух сыновей при условии, что один сын — стрелец, почти 1/2! Почему так происходит? Потому что рождение стрельца — куда более редкое событие, чем рождение просто мальчика. endenumerate

Чудо 2. «Два конверта»
Вам предлагают два конверта. Известно, что суммы денег в них относятся как 1:2. Вы открыли один конверт, и увидели в нём 100 рублей. Вопрос: стоит ли поменять выбор конверта? А непонятно: мы не знаем закон распределения. Допустим, у нас такое распределение:

$(X;Y)$	$25;50$	$12,5;25$	$50;100$
$\mathbb{P}()$	$1/3$	$p1/3$	$1/3$

Тогда $\mathbb{E}(Y|X=100) = 50$, и мы не будем менять конверт. Но в другом распределении, где, к примеру, вместо исхода $(25;50)$ был бы исход $(100;300)$, наш ожидаемый выигрыш от смены конверта был бы 175, и мы бы поменяли.

Чудо 3. «Спящая Красавица»
Спящая Красавица согласилась на участие в научном эксперименте. Протокол научного эксперимента:

1. Ее колют веретеном в воскресенье.
2. После укола веретеном подкидывают монетку.
3. В понедельник ее будят и задают вопрос. Если монетка в воскресенье выпала орлом, ее отпускают, если решка — снова колют веретеном.
4. Во вторник ее снова будят и задают тот же вопрос, но из-за психотропного вещества на конце веретена она не помнит, сколько раз она просыпалась.

Спросить ее могут:

- Какова вероятность того, что сегодня понедельник?
- Как выпала монетка?
- Какой сегодня день недели?

Как Спящей красавице нужно отвечать на вопросы?
Неясно. Первый вопрос вообще сформулирован некорректно: «сегодня понедельник» — это не событие, а функция от времени: $f(t =) = TRUE$ или $f(t =) = FALSE$. А на другие вопросы она отвечать каким-либо определенным образом не заинтересована.

Пусть теперь в эксперименте предусмотрена система поощрений: за каждый правильный ответ Спящей Красавице будут дарить молодильное яблоко. Условимся для краткости называть случай с выпадением орла первым сценарием, решки — вторым. Тогда если она ответит «орел», то в первом сценарии она получит 1 яблоко, во втором — 0. Если же она ответит «решка», то в первом сценарии она ничего не получит, а во втором получит 2 яблока. Понятно, что выгоднее ей будет ответить «решка».
Система поощрений поменялась, и теперь за каждый неправильный ответ Спящую Красавицу превращают в тыкву. Если она в таком случае ответит «орел», то в первом сценарии она выживет, во втором — погибнет, с равными вероятностями. Если Красавица выберет «решку», то в первом сценарии она погибнет, а во втором — выживет, опять с равными вероятностями. Так что при такой системе ей все равно, что отвечать. Вот и чудо: ответ на один и тот же вопрос меняется в зависимости от системы поощрений.
На вопрос, какой сегодня день недели, ответ нужно тоже смотреть в зависимости от системы поощрений. Если за каждый правильный ответ дарят молодильное яблоко, то выгоднее отвечать понедельник (и в первом, и втором сценарии она получит по одному яблоку). Правда, если за каждый неправильный ответ превращают в тыкву, то все равно выгоднее отвечать понедельник (в таком случае ее хотя бы отпустят в первом сценарии, а во втором — превратят в тыкву, а если она будет отвечать «вторник», то превратится в тыкву в любом случае).
Чудо 4. Игра Паррондо(Parrondo'sgame, 1996)
Есть две игры: Игра A: выиграть 1 рубль с вероятностью 0.45 или проиграть 1 рубль с вероятностью 0.55. Видно, что игра A — проигрышная.
Игра B: Вы показываете содержимое вашего кошелька. Если сумма в Вашем кошельке делится на три, то вы получаете 1 рубль с вероятностью 0.05 и теряете рубль с вероятностью 0.95; если не делится — получаете рубль с вероятностью 0.7; проигрываете рубль — с вероятностью 0.3.
Задание:

1. Игра B — проигрышная, надо это доказать.
2. Ответить, что происходит с благосостоянием, если долго играть в игру B.
3. С вероятностями 1/2 и 1/2 играем в игры A и B: каждый раз подкидываем монетку и решаем, во что будем играть. Такая игра окажется выигрышной.

Задача — на дом. Здесь наметки: Поделим возможные суммы в кошельке на тройки (для упрощения предположим еще, что мы можем уходить в минус — брать кредит). Вертеться в стартовой тройке бесконечно нельзя: рано или поздно с вероятностью 1 вылетим из нее. Строим сетку, как мы можем ходить по тройкам с разных стартовых элементов.

2 Условная независимость

«Классическая» независимость событий A и B: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(C)$ Условная независимость. События A и B называются условно независимыми при условии, что событие C произошло, если $\mathbb{P}(AB \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$ или, что эквивалентно, $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C)$.

Примеры.

1. Независимые, но условно зависимые события. Монетку подбросили два раза. — выпал орел в первый раз, — выпал орел во второй раз, — выпал всего один орел. и независимы, но $\mathbb{P}(A \mid BC) = 0$, а $\mathbb{P}(A \mid C) = 1/2$: нет условной независимости.
2. Зависимые, но условно независимые события. A - Маша идет в кино, - Саша идет в кино, - они не знакомы.

   Есть правильная монетка ($1/2$ — орел) и неправильная монетка ($2/3$ — орел). Мы выбираем монетку с вероятностью $1/2$ и подбрасываем 2 раза (одну и ту же). A — в первый раз орел, B — орел во второй раз, C — была выбрана неправильная монетка.
   $\mathbb{P}(A) = 1/2 * 1/2 + 1/2 * 2/3 = 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/2*1/2+1/2*4/9)}{7/12} \neq 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C) = 2/3$ — интуитивно
3. Независимы при условии C, зависимы при отрицании C A — ел рыбы фугу, B — умер, C — фугу была правильно приготовлена. Если фугу была правильно приготовлена, то связи между смертью и рыбой фугу нет, если неправильно — есть.

Независимость случайных величин.
Случайные величины X и Y независимы, если: $\forall$ борелевских[1] подмножеств $A_x \subset \mathbb{R}, A_y \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in A_x; Y \in A_y) = \mathbb{P}(X \in A_x) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y) \tag{1}$$

Например: $\mathbb{P}(X \in (-\infty; 3) \cap Y \in (-\infty; 2)) = \mathbb{P}(X \in (-\infty; 3)) \cdot \mathbb{P}(Y \in (-\infty; 2))$ Примечание: для «плохих» — не борелевских множеств вероятность не определена.

Дискретные случайные величины X и Y независимы, если: $\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y)$

Условная независимость случайных величин.
X и Y при условии Z: Дискретные случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если для любых x, y и z:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y \mid Z = z) = \mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid Z = z) \tag{2}$$

Произвольные случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если:

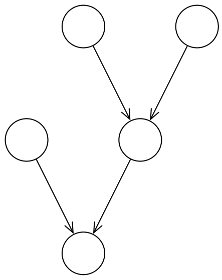
$$\mathbb{P}(X \in A_x \cap Y \in A_y \mid Z \in A_z) = \mathbb{P}(X \in A_x \mid Z \in A_z) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y \mid Z \in A_z) \tag{3}$$

Условную независимость величин обозначают $X \perp Y \mid Z$ Примечание: некоторые авторы пишут $A \perp B \mid C$ для событий, под этой записью подразумевается на самом деле сразу два условия:

$$A \perp B \mid C \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C \\ A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C^c \end{cases} \tag{4}$$

[1] Если смысл этого слова не ясен, то просто зачеркните его

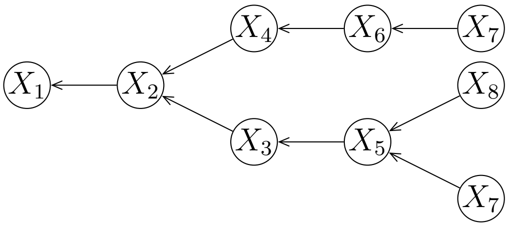
3 Что такое байесовская сеть?



Определение. Ориентированный граф — это вот:

Определение. Направленный граф без циклов G называется байесовской сетью случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, если для любого узла X выполнено условие:

$$X \perp \text{non descendant}(X) \mid \text{parents}(X) \tag{5}$$



На картинке:

1. Кружочками обозначаются случайные величины.
2. Стрелочками — причинно следственные связи:

   $$X \longrightarrow Y$$

   Значение величины X становится известно раньше значения Y. Закон распределения величины Y зависит от значения величины X.

Возьмем узел X_3. Его потомки: X_5, X_7, X_8. Его предки: X_1, X_2, причем X_2 — его прямой родитель. X_3, X_1, X_4, X_6 — байесовская сеть — эти величины независимы при фиксированном X_2: при фиксированном X_2 знание о том, высокий X_1 или низкий, не влияет на отношения между X_1 b X_3.

Теорема. Величины X и Y независимы, если выполнены все три условия

1. Нет направленного пути от X до Y
2. Нет направленного пути от Y до X
3. Не существует такой величины Z, от которой был бы направленный путь и до X и до Y

Несколько терминов:

1. Вилка (fork)
2. Коллайдер, перевернутая вилка (collider, inverted fork)
3. Путь[1] (trail, path) от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B, в которой переходы могут делаться и по стрелочкам и против стрелочек
4. Направленный путь от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B, в которой переходы делаются только по стрелочкам
5. Потомок. Узел Y называется потомком узла X, если существует направленный путь от X до Y.
6. Предок. Узел X называют предком узла Y, если существует направленный путь от X до Y.
7. Прямой родитель. Узел X — прямой родитель узла Y, если $X \to Y$.

Определение. Путь между X и Y называют d-разделенным (d-separated, directionally separated) множеством узлов Z если выполнено хотя бы одно из условий

1. узел из Z разрывает последовательное соединение на пути

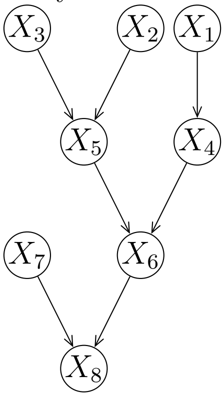
[1]В теории графов термином путь называют то, что мы называем направленным путем

2. узел из Z разрывает «вилку» на пути
3. на пути есть «коллайдер», не являющийся узлом из Z и не содержащий узел из Z в качестве одного из потомков

Можно эквивалентно говорить о том, что путь между X и Y НЕ является d-разделенным узлом Z, если выполнены оба условия:

1. любой коллайдер на пути либо сам является узлом из множества Z, либо имеет потомка из множества Z
2. никакой другой узел на пути не входит в множество Z

Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если узлы X и Y являются d-разделенными узлом Z.



Упражнение

Проверьте независимость $X_1 \perp X_2$, $X_1 \perp X_2 \mid X_8$, $X_1 \perp X_2 \mid X_7$, $X_1 \perp X_2 \mid X_6$