Заметки к курсу mc201

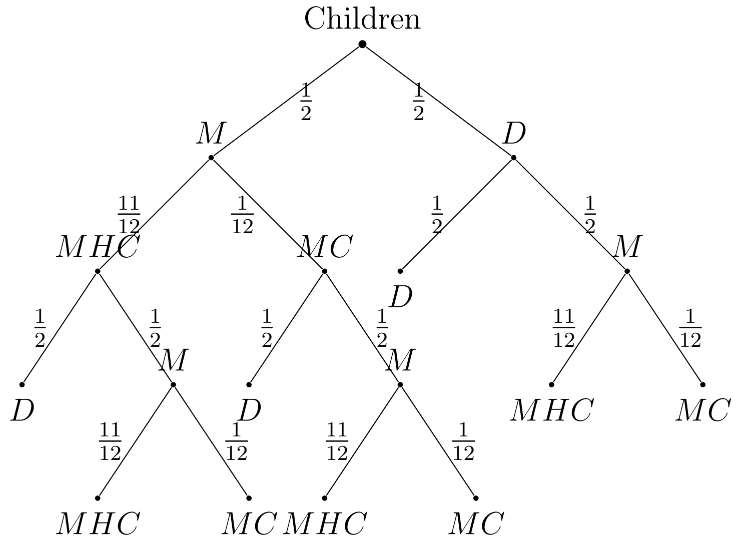
Борис Демешев

15 ноября 2012 г.

1 Чудеса теории вероятностей

Чудо 1. «Гороскоп»
У тёти Глаши двое детей.

1. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один из ее детей — мальчик. Находим просто по формуле (М — мальчик, D — девочка):
   $p(MM|\bar{D}D) = \frac{p(MM,\bar{D}D}{p(\bar{D}D)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$
2. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один мальчик — стрелец. Построим дерево судьбы тети Глаши(МС — мальчик-стрелец, МНС — мальчик-не стрелец):



Теперь вспомним, что вероятность исхода на дереве равна произведению вероятностей на веточках, ведущих к этому исходу. Найдем нужные ветви судьбы, где у тети Глаши рождается два сына и где один мальчик — стрелец, и посчитаем: $p(MM|\exists MC) = \frac{p(MM,\exists MC)}{p(\exists MC)} = \frac{1/12 \cdot 1/12 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 11/12 \cdot 1/2 \cdot 1/12}{1/12 \cdot 1/12 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 11/12 \cdot 1/2 \cdot 1/12 + 1/2 \cdot 1/12 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/12} = \frac{23}{47}$ Чудо! Вероятность двух сыновей при условии, что один сын — стрелец, почти 1/2! Почему так происходит? Потому что рождение стрельца — куда более редкое событие, чем рождение просто мальчика. endenumerate

Чудо 2. «Два конверта»
Вам предлагают два конверта. Известно, что суммы денег в них относятся как 1:2. Вы открыли один конверт, и увидели в нём 100 рублей. Вопрос: стоит ли поменять выбор конверта? А непонятно: мы не знаем закон распределения. Допустим, у нас такое распределение:

$(X;Y)$	$25;50$	$12,5;25$	$50;100$
$\mathbb{P}()$	$1/3$	$p1/3$	$1/3$

Тогда $\mathbb{E}(Y|X=100)=50$, и мы не будем менять конверт. Но в другом распределении, где, к примеру, вместо исхода $(25;50)$ был бы исход $(100;300)$, наш ожидаемый выигрыш от смены конверта был бы 175, и мы бы поменяли.

Чудо 3. «Спящая Красавица»
Спящая Красавица согласилась на участие в научном эксперименте. Протокол научного эксперимента:

1. Ее колют веретеном в воскресенье.
2. После укола веретеном подкидывают монетку.
3. В понедельник ее будят и задают вопрос. Если монетка в воскресенье выпала орлом, ее отпускают, если решка — снова колют веретеном.
4. Во вторник ее снова будят и задают тот же вопрос, но из-за психотропного вещества на конце веретена она не помнит, сколько раз она просыпалась.

Спросить ее могут:

- Какова вероятность того, что сегодня понедельник?
- Как выпала монетка?
- Какой сегодня день недели?

Как Спящей красавице нужно отвечать на вопросы?
Неясно. Первый вопрос вообще сформулирован некорректно: «сегодня понедельник» — это не событие, а функция от времени: $f(t=' ') = TRUE$ или $f(t=' ') = FALSE$. А на другие вопросы она отвечать каким-либо определенным образом не заинтересована.

Пусть теперь в эксперименте предусмотрена система поощрений: за каждый правильный ответ Спящей Красавице будут дарить молодильное яблоко. Условимся для краткости называть случай с выпадением орла первым сценарием, решки — вторым. Тогда если она ответит «орел», то в первом сценарии она получит 1 яблоко, во втором — 0. Если же она ответит «решка», то в первом сценарии она ничего не получит, а во втором получит 2 яблока. Понятно, что выгоднее ей будет ответить «решка».
Система поощрений поменялась, и теперь за каждый неправильный ответ Спящую Красавицу превращают в тыкву. Если она в таком случае ответит «орел», то в первом сценарии она выживет, во втором — погибнет, с равными вероятностями. Если Красавица выберет «решку», то в первом сценарии она погибнет, а во втором — выживет, опять с равными вероятностями. Так что при такой системе ей все равно, что отвечать. Вот и чудо: ответ на один и тот же вопрос меняется в зависимости от системы поощрений.
На вопрос, какой сегодня день недели, ответ нужно тоже смотреть в зависимости от системы поощрений. Если за каждый правильный ответ дарят молодильное яблоко, то выгоднее отвечать понедельник (и в первом, и втором сценарии она получит по одному яблоку). Правда, если за каждый неправильный ответ превращают в тыкву, то все равно выгоднее отвечать понедельник (в таком случае ее хотя бы отпустят в первом сценарии, а во втором — превратят в тыкву, а если она будет отвечать «вторник», то превратится в тыкву в любом случае).
Чудо 4. Игра Паррондо(Parrondo'sgame, 1996)
Есть две игры: Игра А: выиграть 1 рубль с вероятностью 0.45 или проиграть 1 рубль с вероятностью 0.55. Видно, что игра А — проигрышная.
Игра В: Вы показываете содержимое вашего кошелька. Если сумма в Вашем кошельке делится на три, то вы получаете 1 рубль с вероятностью 0.05 и теряете рубль с вероятностью 0.95; если не делится — получаете рубль с вероятностью 0.7; проигрываете рубль — с вероятностью 0.3.
Задание:

1. Игра В — проигрышная, надо это доказать.
2. Ответить, что происходит с благосостоянием, если долго играть в игру В.
3. С вероятностями 1/2 и 1/2 играем в игры А и В: каждый раз подкидываем монетку и решаем, во что будем играть. Такая игра окажется выигрышной.

Задача — на дом. Здесь наметки: Поделим возможные суммы в кошельке на тройки (для упрощения предположим еще, что мы можем уходить в минус — брать кредит). Вертеться в стартовой тройке бесконечно нельзя: рано или поздно с вероятностью 1 вылетим из нее. Строим сетку, как мы можем ходить по тройкам с разных стартовых элементов.

2 Условная независимость

«Классическая» независимость событий A и B: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ Условная независимость. События A и B называются условно независимыми при условии, что событие C произошло, если $\mathbb{P}(AB \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$ или, что эквивалентно, $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C)$.

Примеры.

1. Независимые, но условно зависимые события. Монетку подбросили два раза. — выпал орел в первый раз, — выпал орел во второй раз, — выпал всего один орел. и независимы, но $\mathbb{P}(A \mid BC) = 0$, а $\mathbb{P}(A \mid C) = 1/2$: нет условной независимости.
2. Зависимые, но условно независимые события. A - Маша идет в кино, - Саша идет в кино, - они не знакомы.

   Есть правильная монетка (1/2 — орел) и неправильная монетка (2/3 — орел). Мы выбираем монетку с вероятностью 1/2 и подбрасываем 2 раза (одну и ту же). A — в первый раз орел, B — орел во второй раз, C — была выбрана неправильная монетка.
   $\mathbb{P}(A) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 2/3 = 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 4/9)}{7/12} \neq 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C) = 2/3$ — интуитивно
3. Независимы при условии C, зависимы при отрицании C A — ел рыбы фугу, B — умер, C — фугу была правильно приготовлена. Если фугу была правильно приготовлена, то связи между смертью и рыбой фугу нет, если неправильно — есть.

Независимость случайных величин.
Случайные величины X и Y независимы, если: $\forall$ борелевских[1] подмножеств $A_x \subset \mathbb{R}, A_y \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in A_x; Y \in A_y) = \mathbb{P}(X \in A_x) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y) \tag{1}$$

Например: $\mathbb{P}(X \in (-\infty; 3) \cap Y \in (-\infty; 2)) = \mathbb{P}(X \in (-\infty; 3)) \cdot \mathbb{P}(Y \in (-\infty; 2))$ Примечание: для «плохих» — не борелевских множеств вероятность не определена.

Дискретные случайные величины X и Y независимы, если: $\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$

Условная независимость случайных величин.
X и Y при условии Z: Дискретные случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если для любых x, y и z:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y \mid Z = z) = \mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid Z = z) \tag{2}$$

Произвольные случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если:

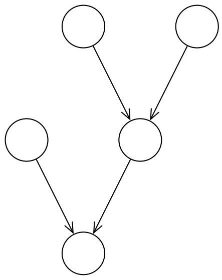
$$\mathbb{P}(X \in A_x \cap Y \in A_y \mid Z \in A_z) = \mathbb{P}(X \in A_x \mid Z \in A_z) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y \mid Z \in A_z) \tag{3}$$

Условную независимость величин обозначают $X \perp Y \mid Z$ Примечание: некоторые авторы пишут $A \perp B \mid C$ для событий, под этой записью подразумевается на самом деле сразу два условия:

$$A \perp B \mid C \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C \\ A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C^c \end{cases} \tag{4}$$

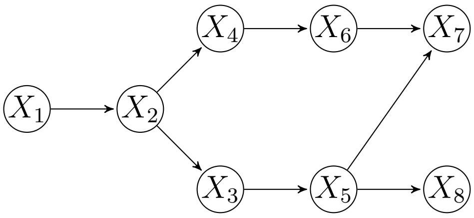
[1] Если смысл этого слова не ясен, то просто зачеркните его

3 Что такое байесовская сеть?

Определение. Ориентированный граф — это вот: 

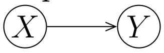
Определение. Направленный граф без циклов G называется байесовской сетью случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, если для любого узла X выполнено условие:

$$X \perp \text{non descendant}(X) \mid \text{parents}(X) \tag{5}$$



На картинке:

1. Кружочками обозначаются случайные величины.
2. Стрелочками — причинно следственные связи:

   Значение величины X становится известно раньше значения Y. Закон распределения величины Y зависит от значения величины X.

Возьмем узел X_3. Его потомки: X_5, X_7, X_8. Его предки: X_1, X_2, причем X_2 — его прямой родитель. X_3, X_1, X_4, X_6 — байесовская сеть — эти величины независимы при фиксированном X_2: при фиксированном X_2 знание о том, высокий X_1 или низкий, не влияет на отношения между X_1 b X_3.

Теорема. Величины X и Y независимы, если выполнены все три условия

1. Нет направленного пути от X до Y
2. Нет направленного пути от Y до X
3. Не существует такой величины Z, от которой был бы направленный путь и до X и до Y

Несколько терминов:

1. Вилка (fork)
2. Коллайдер, перевернутая вилка (collider, inverted fork)
3. Путь[1] (trail, path) от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B, в которой переходы могут делаться и по стрелочкам и против стрелочек
4. Направленный путь от A до B — последовательность вершин от вершины A до вершины B, в которой переходы делаются только по стрелочкам
5. Потомок. Узел Y называется потомком узла X, если существует направленный путь от X до Y.
6. Предок. Узел X называют предком узла Y, если существует направленный путь от X до Y.
7. Прямой родитель. Узел X — прямой родитель узла Y, если $X \to Y$.

Определение. Путь между X и Y называют d-разделенным (d-separated, directionally separated) множеством узлов Z если выполнено хотя бы одно из условий

1. узел из Z разрывает последовательное соединение на пути

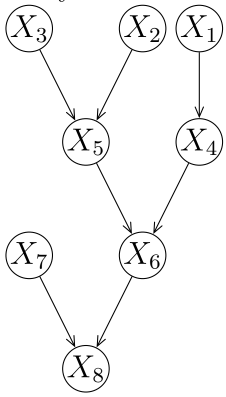
[1] В теории графов термином путь называют то, что мы называем направленным путем

2. узел из Z разрывает «вилку» на пути
3. на пути есть «коллайдер», не являющийся узлом из Z и не содержащий узел из Z в качестве одного из потомков

Можно эквивалентно говорить о том, что путь между X и Y НЕ является d-разделенным узлом Z, если выполнены оба условия:

1. любой коллайдер на пути либо сам является узлом из множества Z, либо имеет потомка из множества Z
2. никакой другой узел на пути не входит в множество Z

Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, если узлы X и Y являются d-разделенными узлом Z.



Упражнение
Проверьте независимость $X_1 \perp X_2$, $X_1 \perp X_2 \mid X_8$, $X_1 \perp X_2 \mid X_7$, $X_1 \perp X_2 \mid X_6$

4 Чебурашка (Марковские цепи)

Есть такой персонаж — Чебурашка. Он же у нас — некая система, которая может находиться в двух состояниях — a (хорошее настроение) и b(плохое настроение). Если мы находимся в состоянии a, вероятность перейти в состояние b — 0.7. Вероятность перейти из этого состояния обратно в состояние a, соответственно — 0.3. Если мы находимся в состоянии b, вероятность перейти в состояние a — 0.6, вероятность перейти в состоянии b — 0.4.

Cheburashka.png

Допустим, он стартовал из состояния a. S_t - состояние в момент времени t. Нас интересует вероятность того, что $S_t = a$. Особенно нас интересует предел при $t \to \infty$, то есть с какой вероятностью через много-много лет Чебурашка будет в хорошем настроении? В матричном виде получается, что эта системка — чистая линейная алгебра. Давайте мы введем вектор вероятностей:

$x_t = \begin{pmatrix} P(S_t = a) & P(S_t = b) \end{pmatrix}$.
Если Чебурашка стартует с хорошим настроением, то начальный вектор вероятностей: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найдем вектор вероятностей для следующего дня ($t = 1$): $P(S_1 = a) = 0.3$
$P(S_1 = b) = 0.7$
$x_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$
Выпишем x_2, и все станет ясно: $P(S_2 = a) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.6$
$P(S_2 = b) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.7$
Можем записать в общем виде: $P(S_{t+1} = a) = P(S_t = a) \cdot 0.3 + P(S_t = b) \cdot 0.6$
$P(S_{t+1} = b) = P(S_t = a) \cdot 0.7 + P(S_t = b) \cdot 0.4$
В чистом виде матричная алгебра, потому что $x_{t+1} = \begin{pmatrix} 0.30.7 \\ 0.60.4 \end{pmatrix} \cdot x_t \begin{pmatrix} S_t = a \\ S_t = b \end{pmatrix}$

x_{t+1} находится в явном виде. Матрица $\begin{pmatrix} 0.30.7 \\ 0.60.4 \end{pmatrix}$ — P. Тогда: $x_1 = Px_0$
$x_2 = Px_1 = P^2 x_0$
$x_3 = Px_2 = P^3 x_0$
$x_n = P^n x_0$

Возьмем и возведем матрицу в n-ую степень. Матрица P представима в виде: $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} = C \cdot D \cdot C^{-1}$, где C — матрица из собственных векторов, D — матрица собственных значений $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
Найдем собственные числа:
$\begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$
$(0.3 - \lambda)(0.4 - \lambda) - 0.6 \cdot 0.7 = 0$
$0.12 - 0.7\lambda + \lambda^2 - 0.42 = 0$
$\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3 = 0$
$\lambda_1 = 1 \lambda_2 = -0.3$

Найдем собственные векторы: $\begin{pmatrix} -0.7 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$ Подбираем любой собственный вектор: $h_1 = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ Получилось, что матрица Р представима в виде: $P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$
В P^n только серединка будет возводиться в степень. В явном виде получили уравнение вероятности того, в каком настроении будет Чебурашка через n дней: $x_n = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} x_0$ Найдем теперь предел x_n при $n \to \infty$. Если матрицу возвести в очень большую степень, то 1 останется 1, а -0.3 — 0: $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

Можно руками досчитать уравнение: $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot x_0$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot 1/13 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot x_0$

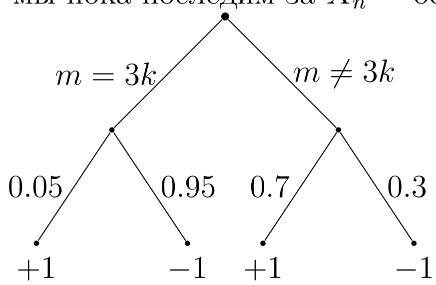
$\lim_{n\to\infty} x_n = (-1/13)\cdot\begin{pmatrix} 6x_1 & 6x_2 \\ 7x_1 & 7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/13 \\ 7/13 \end{pmatrix}$

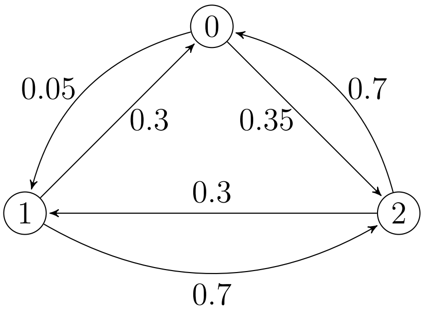
Получили, что ответ не зависит от x_0: еважно, как мы начинали — вероятности состояний a и b в пределе будут одинаковы. Этот результат можно было получить и проще.

Представим старого Чебурашку через много-много лет. Наступает следующий день, и бесконечно старый Чебурашка мало чем отличается от бесконечно старого Чебурашки, прожившего еще один день. Математически: есть вектор x_∞. Если пройдет еще один день, то он не должен измениться. У нас есть зависимость: $x_{t+1} = Px_t$ Если мы возьмем предел слева и справа от зависимости x_t и x_{t+1}(предположив, что предел есть), получим: $\lim_{t\to\infty} x_\infty = Px_\infty$ Сумма вероятностей равна 1, и получается простенькое уравнение (r — вероятность состояния a): $\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} x_\infty = lim_{t\to\infty}x_t = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} r = 0.3r + 0.6(1-r) \Rightarrow r = 6/13$

Получили те же $6/13$, только просто. Ремарка: Предполагалось, что предел существует, из-за свойств матрицы P(его собственные значения меньше либо равны 1,это потом отдельно как-нибудь докажем) это действительно так Давайте пойдем дальше. Как применить к игре Паррондо Чебурашку?

Теорию марковских цепей отложим на следующий раз. Сейчас — игра паррондо У нас была игра Б. Возможно 3 остатка от деления на 3 — 0, 1 и 2. Давайте чертить стрелочки. Тут все красиво: здесь — по часовой стрелке, тут — против. Если сейчас остаток от деления на 0, какова вероятность что следующий остаток будет 1? Сейчас остаток 0 - сумма в кошельке делится на 3. С вероятностью 0.05 я получу 1 рубль, и остаток станет 1, с вероятностью 0.95 он станет 2. Сейчас оствток — 2: нужно прибавить рубль — 0.7, рубль — 0.3. Аналогично для рубля. Не будем матрицу составлять. У нас много случайных величин, мы пока последим за X_n — остатком от деления на 3 суммы в кошельке в момент времени n.





X_t — суммы в кошельке в момент времени t $\lim n \to \infty(X_n = 0)$ $\lim n \to \infty(X_n = 1)$ $\lim n \to \infty(X_n = 2)$ Посчитаем пределы. Как мы это будем делать? Введем вектор вероятностей y_n:

$y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ Как и в случае с Чебурашкой, $y_{n+1} = P \cdot y_n$

. Только размерность матрицы Р будет другая. Найдем матрицу Р в этом случае. Какова вероятность перейти в состояние 0, если я был в состоянии 0 - 0: нули по диагонали. Если я был в состоянии 0, то какова вероятность перейти в состояние

$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+2} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot P(X_n = 0) + 0.3P(X_n = 1) + 0.7P(X_n = 2) \\ 0.05P(X_n = 0) + 0 \cdot P(X_n = 1) + 0.3P(X_n = 2) \\ 0/05P(X_n = 0) + 0.7P(X_n = 1) + 0 \cdot P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ Значит, наша матрица

P имеет следующий вид: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.05 & 0 & 0.3 \\ 0.05 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$ И мы хотим найти $y_\infty = \liminf y_n$, то есть если я буду долго-долго играть в эту игру, каковы будут вероятности иметь остатки 0,1 и 2 от деления на 3 суммы в кошельке. Не будем сейчас считать собственные числа. Пойдем по идее $y_\infty = P \cdot y_\infty$ Введем две неизвестных(a - вероятность 0, b- вероятность 1):
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0.3b+0.7(1-a-b) \\ 0.05a+0+0.3(1-a-b) \\ 0.05a+0.7b+0 \end{pmatrix}$ Двух уравнений для двух неизвестных достаточно, поэтому третье не будем дальше смотреть. Решаем:

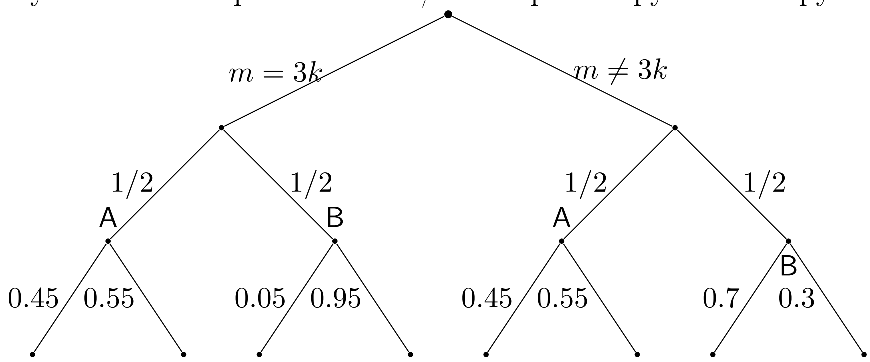
$$\begin{cases} a = 0.3b + 0.7 - 0.7a - 0.7b \\ b = 0.05a + 0.3 - 0.3a - 0.3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.7a + 0.4b = 0.7 \\ 0.25a + 1.3b = 0.3 \end{cases}$$

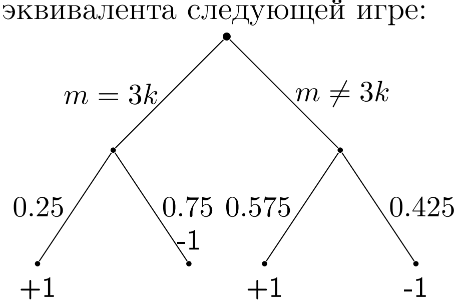
Домножим все на 10, и тогда получается: $a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 2.5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{91-12}{221-10} = \frac{79}{211}$

Нашли a, точно так же находим b: $b = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 2.5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{211} = \frac{33{,}5}{211}$

Это нам дает возможность оперделить,выигрышная эта игра или проигрышная, потому что мы знаем, что когда пройдет много-много времени, с вероятнотсью $79/211$ остаток будет кратен 0.
Я знаю: $\frac{79}{211} \Rightarrow m = 3k$
$\frac{132}{211} \Rightarrow m \neq 3k$
Посмотрим мат.ожидание выигрыша через много-много лет: $\frac{79}{211}(0.05 - 0.95) + \frac{132}{211}(0.7 - 0.3) = -0.9\frac{79}{211} + \frac{132}{211}0.4 = \frac{132\cdot 4 - 79\cdot 9}{10\cdot 211} < 0$ То есть сама по себе эта игра через много времени будет приносить отрицательное матожидание выигрыша. А что будет, если ее комбинировать с игрой А? Не будем до конца доводить вычисления, просто идейно: Можем дерево упростить: сначала смотреть, делится ли сумма в кошельке на 3, и уже затем с вероятностью 1/2 выбирать игру А или игру В.

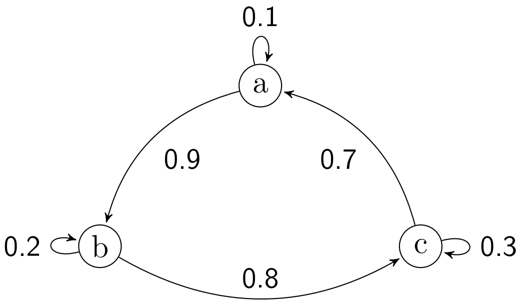


Тогда получается вот такое дерево:
Получается, что мы можем усреднить эти вероятности и получить, что игра $1/2A + 1/2B$ эквивалента следующей игре:



Для такой игры мы можем с помощью цепей Маркова посчитать предельные вероятноти остатка 0, остатка 1, остатка 2. Зная предельные вероятности, узнаю средний выигрыш. Получится, что он все-таки получается положительный. Вот такое чудо: играешь долго-долго в игру А, она отрицательный выирыш дает, Б - тоже, а с вероятностями — положительный выигрыш. Заодно мы и цепи Маркова прошли, хотя бы на практике. Осталось дома что-нибудбь порешать.

Упражнение 1. Мышь бегает по коридорчикам:



Нужно найти: $\mathbb{P}(S_t = a)$, $\mathbb{P}(S_t = b)$, $\mathbb{P}(S_t = c)$ при $t \to \infty$

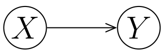
Упражнение 2. Даша и Глаша. Даша и Глаша подкидывают «правильную» монетку до тех пор, пока не выпадет ОРО или РРР. Глаша выигрывает в случае РРР, Даша — в случае ОРО. Найти вероятность того, что выиграет Даша.

Упражнение 3. Изначально конь стоит на А1 и дальше ходит равновероятно любым возможным способом. Какой процент своей бесконечной жизни конь проведет в стойле $H8$?

5 Байесовские сети

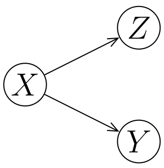
В теории вероятностей о причинно-следственных связях не говорят: есть совместная функция плотности X и Y, а кто причина, кто следствие, не говорят: X может влиять на Y, Y может влиять на X или какая-то Z может влиять и на X, и на Y. Одна и та же формула и в случае зависимого Y, и в случае зависимого X: $p(x) \cdot p(y \mid x) = p(x \mid y) = p(y) \cdot p(x \mid y)$. Но когда X влияет на Y, логичнее запись $p(x) \cdot p(y \mid x)$.

По такой логике можно расклаывать на сомножители совместные функции плотности: для



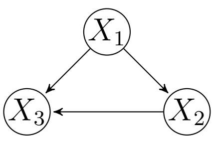
$p(x, y) = p(x)p(y \mid x)$

для



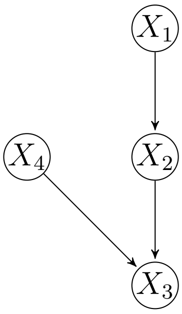
$p(x, y, z) = p(x) \cdot p(y \mid x)p(z \mid x)$

для



$p(X_1, X_2, X_3) = p(X_1)p(X_2 \mid X_1)p(X_3 \mid X_1, X_2)$

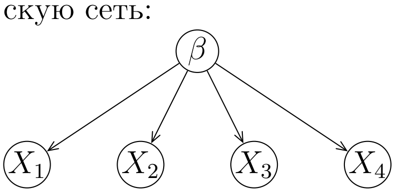
для



$p(x_1, X_2, X_3, X_4) = p(X_1)p(X_4)p(X_2 \mid X_1)p(X_3 \mid X_1, X_4)$
Мысль такая: нужно всегда перемножать условные вероятности иксов при фиксированном родителе.
Проведем байесовский анализ для простейших случаев. Модель 1. Есть случайные величины X_1,X_2,... Они независимы и имеют следующее распределение:

	1	2	7
p	β	2β	$1-3\beta$

Есть классические методы: можем оценивать бета с помощью метода максимального правдоподобия или моментов. Пусть выборка: $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 2$, $X_4 = 7$. Можем оценить β с помощью метода моментов, метода максимального правдоподобия и байесовского метода.
Что говорит метод моментов? Если число наблюдений велико, то среднее по выборке должно примерно равняться мат. ожиданию: $\mathbb{E}(X_i) = \beta + 4\beta + 7 - 21\beta = 16\beta$. Тогда по методу моментов:
$\bar{X} = 7 - 16\hat{\beta}$
$\hat{\beta}_{mm} = (7 - \bar{X})/16 = 1/4$
Что говорит метод максимального правдоподобия? Надо максимизировать по β $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 2 \cap X_3 = 2 \cap X_4 = 7)$ Получается: $4\beta^3(1-3\beta) \Rightarrow \max_\beta$ Считаем, что то, что нам попалось — самые часто встречающиеся наблюдения. Решаем задачу максимизации с позиции девятиклассника: $4\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \alpha$ Если числа не равны, то я возьму от большего кусочек и передам в другой. Тогда сумма не поменяется (сумма вероятностей равна 1). Получается, что все они равны. $\beta = 1/4$ (совпали оценки случайно)
Байесовский подход. До получения данных должно быть представление о β. Нарисуем байесовскую сеть:



Пишем совместную функцию плотности: $p(X_1, X_2, X_3, X_4, \beta) = p(\beta)p(X_1 \mid \beta)p(X_2 \mid \beta)p(X_3 \mid \beta)p(X_4 \mid \beta)$
Априорное мнение о β : $p(\beta)$. Порассуждаем:$\beta \in [0; 1/3]$ Будем для простоты верить, что β распределено равномерно на этом промежутке. Мы вложились в мнение о β: мы получим наше мнение о β с учетом вероятности $p(\beta \mid X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{p(\beta, X_1, X_2, X_3, X_4)}{p(X_1, X_2, X_3, X_4} \sim p(\beta)p(X_1 \mid \beta)p(X_2 \mid \beta)p(X_3 \mid \beta)p(X_4 \mid \beta) = 3\beta^2\beta(1-3\beta) = \beta^3(1-3\beta)$
Интеграл под функцией плотности должен быть равен 1, значит мы можем вычислить константу: $\int_0^{1/3} \beta^3(1-3\beta)dt = \frac{(1/3)^4}{4} - \frac{3(1/3)^5}{5} = \frac{1}{81 \cdot 20}$ Значит, с учетом имеющихся наблюдений функция плотности: $81 \cdot 20 \cdot \beta^3(1-3\beta)$ Таков Байесовский подход: положите свое мнение на входе о параметре, и на выходе получите это мнение с учетом результатов наблюдений. При этом Байесовский подход дает нам оценку целой функции плотности, а как точечную оценку мы можем выбрать моду, матожидание, среднее. Можем построить интервал, в который β войдет с вероятностью, допустим, 90%.
Почему Байесовский метод дает нам распределение β, хотя это число? Мягкий подход: функция плотности выражает всю неуверенность о β Жесткий подход: почему β вообще должно быть числом? Допустим, β - это рост слона: в детстве он голодал, он рос, его рост к сегодняшнему

числу — случайная величина: его могли не кормить и.т.д. Рост — результат случайных событий и сам является случайной величиной.
Мы можем смотреть, насколько устойчив результат при разных верах — насколько будет устойчиво условное распределение при разных априорных распределениях. Если при разных верах условное распределение несильно меняется, это хорошо — значит, мы взяли достаточное количество наблюдений.

6 Поглощающие состояния

Определение. Состояние i называется поглощающим(absorbing), если $P_i = 1$.
Определение. Состояние i называется переходным, если $P_i < 1$.
Определение. Вся цепь Маркова называется поглощающей, если из любого состояния можно попасть в какое-нибудь поглощающее, необязательно за один ход.
Матрицу поглощающей цепи всегда можно представить в виде: $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$, где Q — квадратная матрица, R — прямоугольная матрица I — единичная матрица, 0 — нулевая.
Теорема. Вне зависимости от стартового узла(распределения), поглощающая Марковская цепь достигает поглощающего состояния с вероятностью 1.
Доказательство. Из любого узла есть хотя бы одна траектория, ведущая к поглощающему узлу. Все эти траектории ограничены общей максимальной длиной m. Жизнь цепи поделена на несколько участков по m шагов. За первые m шагов есть вероятность $p > 0$ завершиться, поскольку из любого состояния есть траектория до поглощающего узла. Вероятность того, что цепь не достигнет поглощающего узла за m шагов — $(1 - p) < 1$.
$p('''') \leqslant (1-p)(1-p)(1-p)... = 0$
Другая формулировка: $lim_{n\to\infty} Q^n = 0$
Обоснование:
$\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}_{i\to j}$ — вероятность попасть из состояния i в j
$\mathbb{P}^2_{ij} = \mathbb{P}^2_{i\to j}$ — вероятность попасть из состояния i в j за два хода.
$P \cdot P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & \text{Гадость} \\ 0 & I \end{pmatrix}$
Пример с Винни-Пухом. Винни-Пух хромает на левую ногу и ходит с вероятностью 3/4 направо, 1/4 — налево. Он живет с друзьями в своем мире:

chapters/Vinnie.png

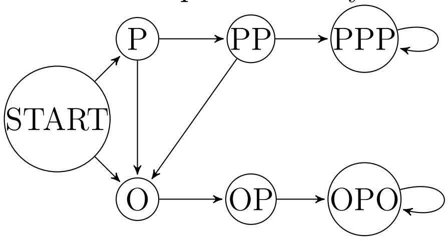
Нора Кролика и домик Винни-Пуха — поглощающие состояния для Винни. Нам нужно найти ожидаемое количество раз, которое Винни-Пух проведет у Пятачка. Пусть Винни-Пух стартует от дерева с пчелами, и это состояние 1. Дерево — состояние 2, дом Пятачка — состояние 3, дом

Винни-Пуха — состояние 4, и нора Кролика — 5. Тогда матрица перехода:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Пусть Y — время(в количествах посещений), которое Винни-Пух проведет у Пятачка до поглощения своим домом или норой Кролика. $Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + ...$, где
$$Y_i = \begin{cases} 1,\text{если в момент времени t=i Винни-Пух у Пятачка} \\ 0,\text{если в момент времени t=i Винни-Пух не у Пятачка} \end{cases}$$
$E(Y) = E(Y_0) + E(Y_1) + E(Y_2) + ... = p(Y_0 = 1) + p(Y_1 = 1) + p(Y_2 = 1) + ... = P^0_{13} + P^1_{13} + P^2_{13} + ... = Q^0_{13} + Q^1_{13} + Q^2)13 + ... \Rightarrow$ Представляет интерес матрица $N = Q^0(= I) + Q^1 + Q^2 + Q^3 + ...$, которая будет показывать ожидаемое количество посещений всех узлов при разных стартовых точках. Как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $N = (I - Q)^{-1}$.
Докажем это.

1. Матрица $(I - Q)$ обратима. Пойдем от противного: предположим, что $\exists x | x(I - Q) = 0$
   $x = xQ$
   $xQ = xQ^2 \Rightarrow x = xQ^2 = xQ^3 = ... \Rightarrow x = xQ^n$
   $\lim_{n\to\infty} x = lim_{n\to\infty} xQ^n$
   Единственное решение такой системы — нулевое.
2. $(I + Q^1 + Q^2 + ... + Q^n)(I - Q) = I - Q^{n+1}$
   $\lim_{n\to\infty}[(I + Q^1 + Q^2 + ... + Q^n)(I - Q) = \lim_{n\to\infty}(I - Q^{n+1})$
   $(I + Q^1 + Q^2 + ... + Q^n)(I - Q) = I(\lim_{n\to\infty} Q^{n+1} = 0)$
   $I + Q^1 + Q^2 + ... + Q^n = (I - Q)^{-1}$ (можем так делать, поскольку матрица обратима).

Найдем $(I - Q)^{-1}$ для Винни-Пуха:
$$(I - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 & 0,9 \\ 0,4 & 1,6 & 1,2 \\ 0,1 & 0,4 & 1,3 \end{pmatrix}$$
В этой матрице N_{ij} — среднее число посещений состояния j при старте из состояния i, то есть среднее число визитов к Пятачку при старте с дерева с пчелами — $N_{13} = 0,9$. Из этой матрицы легко найти и ожидаемое время до поглощения при старте с какого-либо состояния: к примеру, если стартовать с дерева с пчелами(узел 1), то пройдет: $1,3 + 1,2 + 0,9 = 3,4$.

Задача про Дашу и Глашу.
Вспомним условие: Даша и Глаша подкидывают «правильную» монетку до тех пор, пока не выпадет ОРО или РРР. Глаша выигрывает в случае РРР, Даша — в случае ОРО.



Построим дерево игры:
Построим матрицу перехода для этой игры:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сначала решим руками. Пусть g_i — вероятность того, что выиграет Глаша (выпадет комбинация «РРР»), если стартовать с узла i. Тогда:

$\{ \; g_5 = 1/2 g_3 + 1/2 \cdot 0 = 1/2 g_3$

$g_4 = 1/2 g_5 + 1/2 g_4 = 1/2 g_3$

$g_2 = 1/2 g_4 + 1/2 g_3 = 1/4 g_3$

$g_1 = 1/2 g_2 + 1/2 g_4 = 5/8 g_3$

$g_3 = 1/2 \cdot 1 + 1/2 g_4 \Rightarrow g_1 = 5/12$

Тот же результат можно было найти обобщенно: как матрицу B, элементы которой — вероятности попасть в поглощающие состояния, стартуя с разных узлов. Чтобы было удобнее работать с матрицей $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$, занумеруем по-разному поглощающие и переходные состояния: i — номер переходного состояния, j — номер поглощающего состояния. Тогда

$B_{i \to j} = R_{ij} + [Q_{i \to 1} B_{1 \to j} + Q_{i \to 2} B_{2 \to j} + ...]$

$B_{i \to j} = R_{ij} + \sum_{k=1}^{n} Q_{i \to k} B_{k \to j}$

$B_{i \to j} = R_{ij} + (QB)_{ij}$

$B = R + QB$

$(I - Q)B = R$

$B = (I - Q)^{-1} R = NR$

$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$

Для Винни-Пуха:

$$B = NR = \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 & 0,9 \\ 0,4 & 1,6 & 1,2 \\ 0,1 & 0,4 & 1,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,675 & 0,325 \\ 0,9 & 0,1 \\ 0,975 & 0,025 \end{pmatrix}$$

В этой матрице мы можем, к примеру посмотреть вероятность попадания во 2 поглощающее состояние из 2 переходного, то есть вероятность того, что Винни-Пух навсегда останется у Кролика, если стартует с дерева без пчел.

7 Сходимость марковских цепей

Введем обозначения:

1. T_i — время до посещения состояния i, если начать в состоянии i

Случайная величина T_i особенна тем, что она может принимать нечисловое значение $+\infty$, если цепь начала в состоянии i, но никогда в него не вернулась.

Для подсчета математического ожидания $\mathbb{E}(T_i)$ мы примем соглашение, что $0 \cdot \infty = 0$. Другими словами, если $\mathbb{P}(T_i = \infty) = 0$, то $\mathbb{E}(T_i) = \sum k \mathbb{P}(T_i = k)$, а если $\mathbb{P}(T_i = \infty) > 0$, то $\mathbb{E}(T_i) = \infty$.

Вероятность того, что цепь из состояния i когда-либо вернется в состояние i мы обозначим f_i, то есть $f_i = 1 - \mathbb{P}(T_i = \infty)$.

Простая классификация состояний:

1. $f_i = 1$, $\mathbb{E}(T_i) < \infty$. Транзиентное, переходное, transient
2. $f_i < 1$, $\mathbb{E}(T_i) = \infty$. Нулевое рекуррентное, возвратное, null-recurrent
3. $f_i < 1$, $\mathbb{E}(T_i) < \infty$. Положительное рекуррентное, возвратное, positive recurrent

Определение. Марковская цепь называется несократимой, irreducible, если из любого состояния можно с положительной вероятностью попасть в любое за некоторое количество ходов.

Определение. Регулярная цепь, regular. Существует число k, такое, что за k шагов можно с положительной вероятностью из любого состояния попасть в любое.
Утверждение. Регулярная — частный случай несократимой.
Упражнение. Приведите пример несократимой, нерегулярной.
Определение. Вектор π называется стационарным вектором марковской цепи, если $\pi = \pi P$.
Упражнение. Приведите пример цепи с несколькими стационарными векторами. Без стационарных векторов.
У несократимой марковской цепи стационарный вектор существует если и только если все состояния являются положительными возвратными. В этом случае он единственный и $\pi_j = 1/E(T_j)$.
Лемма 1. Если в несократимой Марковской цепи существует стационарный вектор, то все состояния являются положительными возвратными и $\pi_j = 1/\mathbb{E}(T_j)$.
Лемма 2. Если хотя бы одно состояние несократимой цепи является положительным возвратным, то хотя бы один стационарный вектор существует.
В несократимой непериодичной цепи, где все состояния положительные возвратные, стационарный вектор является предельным для любого стартового распределения. Иными словами, для любого вектора вероятностей p: $\lim pP^n = \pi$.
Пример. Несократимая цепь, где все состояния положительные возвратные. Есть стационарный вектор. Нет сходимости к нему.
Примеры для бесконечного числа состояний. Несократимая апериодичная без стационарного вектора. Случайное блуждание с сильным сносом.
Доказательства. Ross, Second course in Stochastic Processes, p.149-157
Для конечных всё несколько проще.
В цепи с конечным числом состояний регулярность равносильна апериодичности и несократимости.
? proof
Теорема Брауэра.
Применения теоремы Брауэра.
Уронили карту мира. Можно взять иголку и проткнуть карту так, чтобы иголка и на карте и на земле воткнулась в одну точку.
Лемма о причесывании ежа. Ежа нельзя причесать. Одна иголка будет стоять вертикально.
На марсе есть тайфуны.
Как не мешай кофе есть неподвижная точка.
Есть равновесие Нэша.
На земном шаре есть две антиподальные точки с равной температурой.
В цепи с конечным числом состояний есть стационарный вектор.