# Заметки к курсу mc201

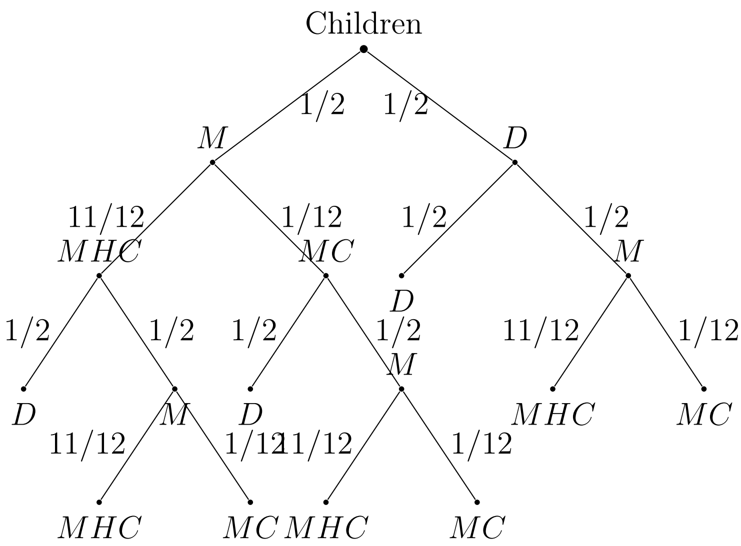
Борис Демешев

4 ноября 2012 г.

## 1 Чудеса теории вероятностей

Чудо 1. «Гороскоп»
У тёти Глаши двое детей.

1. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один из ее детей — мальчик. Находим просто по формуле (M — мальчик, D — девочка): $p(MM|\bar{D}\bar{D}) = \frac{p(MM,\bar{D}\bar{D}}{p(\bar{D}\bar{D})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$
2. Оценить вероятность того, что у нее два сына, при условии, что у хотя бы один мальчик — стрелец. Построим дерево судьбы тети Глаши(MC — мальчик-стрелец, MHC — мальчик-не стрелец):




Теперь вспомним, что вероятность исхода на дереве равна произведению вероятностей на веточках, ведущих к этому исходу. Найдем нужные ветви судьбы, где у тети Глаши рождается два сына и где один мальчик — стрелец, и посчитаем: $p(MM|\exists MC) = \frac{p(MM,\exists MC)}{p(\exists MC)} = \frac{1/12*1/12*1/2+1/2*11/12*1/2*1/12}{1/12*1/12*1/2+1/2*11/12*1/2*1/12+1/2*1/12*1/2+1/2*1/2*1/12} = \frac{23}{47}$ Чудо! Вероятность двух сыновей при условии, что один сын — стрелец, почти 1/2! Почему так происходит? Потому что рождение стрельца — куда более редкое событие, чем рождение просто мальчика. endenumerate

Чудо 2. «Два конверта»
Вам предлагают два конверта. Известно, что суммы денег в них относятся как 1:2. Вы открыли один конверт, и увидели в нём 100 рублей. Вопрос: стоит ли поменять выбор конверта? А непонятно: мы не знаем закон распределения. Допустим, у нас такое распределение:

| $(X;Y)$ | $25;50$ | $12,5;25$ | $50;100$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}()$ | $1/3$ | $p1/3$ | $1/3$ |

Тогда $\mathbb{E}(Y|X=100) = 50$, и мы не будем менять конверт. Но в другом распределении, где, к примеру, вместо исхода $(25;50)$ был бы исход $(100;300)$, наш ожидаемый выигрыш от смены конверта был бы 175, и мы бы поменяли.

Чудо 3. «Спящая Красавица»
Спящая Красавица согласилась на участие в научном эксперименте. Протокол научного эксперимента:

1. Ее колют веретеном в воскресенье.
2. После укола веретеном подкидывают монетку.
3. В понедельник ее будят и задают вопрос. Если монетка в воскресенье выпала орлом, ее отпускают, если решка — снова колют веретеном.
4. Во вторник ее снова будят и задают тот же вопрос, но из-за психотропного вещества на конце веретена она не помнит, сколько раз она просыпалась.

Спросить ее могут:

- Какова вероятность того, что сегодня понедельник?
- Как выпала монетка?
- Какой сегодня день недели?

Как Спящей красавице нужно отвечать на вопросы?
Неясно. Первый вопрос вообще сформулирован некорректно: «сегодня понедельник» — это не событие, а функция от времени: $f(t = \text{пн}) = TRUE$ или $f(t = \text{пн}) = FALSE$. А на другие вопросы она отвечать каким-либо определенным образом не заинтересована.

Пусть теперь в эксперименте предусмотрена система поощрений: за каждый правильный ответ Спящей Красавице будут дарить молодильное яблоко. Условимся для краткости называть случай с выпадением орла первым сценарием, решки — вторым. Тогда если она ответит «орел», то в первом сценарии она получит 1 яблоко, во втором — 0. Если же она ответит «решка», то в первом сценарии она ничего не получит, а во втором получит 2 яблока. Понятно, что выгоднее ей будет ответить «решка».
Система поощрений поменялась, и теперь за каждый неправильный ответ Спящую Красавицу превращают в тыкву. Если она в таком случае ответит «орел», то в первом сценарии она выживет, во втором — погибнет, с равными вероятностями. Если Красавица выберет «решку», то в первом сценарии она погибнет, а во втором — выживет, опять с равными вероятностями. Так что при такой системе ей все равно, что отвечать. Вот и чудо: ответ на один и тот же вопрос меняется в зависимости от системы поощрений.
На вопрос, какой сегодня день недели, ответ нужно тоже смотреть в зависимости от системы поощрений. Если за каждый правильный ответ дарят молодильное яблоко, то выгоднее отвечать понедельник (и в первом, и втором сценарии она получит по одному яблоку). Правда, если за каждый неправильный ответ превращают в тыкву, то все равно выгоднее отвечать понедельник (в таком случае ее хотя бы отпустят в первом сценарии, а во втором — превратят в тыкву, а если она будет отвечать «вторник», то превратится в тыкву в любом случае).
Чудо 4. Игра Паррондо(Parrondo'sgame, 1996)
Есть две игры: Игра A: выиграть 1 рубль с вероятностью 0.45 или проиграть 1 рубль с вероятностью 0.55. Видно, что игра A — проигрышная.
Игра B: Вы показываете содержимое вашего кошелька. Если сумма в Вашем кошельке делится на три, то вы получаете 1 рубль с вероятностью 0.05 и теряете рубль с вероятностью 0.95; если не делится — получаете рубль с вероятностью 0.7; проигрываете рубль — с вероятностью 0.3.
Задание:

1. Игра B — проигрышная, надо это доказать.
2. Ответить, что происходит с благосостоянием, если долго играть в игру B.
3. С вероятностями 1/2 и 1/2 играем в игры A и B: каждый раз подкидываем монетку и решаем, во что будем играть. Такая игра окажется выигрышной.

Задача — на дом. Здесь наметки: Поделим возможные суммы в кошельке на тройки (для упрощения предположим еще, что мы можем уходить в минус — брать кредит). Вертеться в стартовой тройке бесконечно нельзя: рано или поздно с вероятностью 1 вылетим из нее. Строим сетку, как мы можем ходить по тройкам с разных стартовых элементов.

## 2 Условная независимость

«Классическая» независимость событий $A$ и $B$: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(C)$ Условная независимость. События $A$ и $B$ называются условно независимыми при условии, что событие $C$ произошло, если $\mathbb{P}(AB \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$ или, что эквивалентно, $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C)$.

Примеры.

1. Независимые, но условно зависимые события. Монетку подбросили два раза. $A$ — выпал орел в первый раз, $B$ — выпал орел во второй раз, $C$ — выпал всего один орел. $A$ и $B$ независимы, но $\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = 0$, а $\mathbb{P}(A \mid C) = 1/2$: нет условной независимости.
2. Зависимые, но условно независимые события. $A$ — Маша идет в кино, $B$ — Саша идет в кино, $C$ — они не знакомы.

   Есть правильная монетка (1/2 — орел) и неправильная монетка (2/3 — орел). Мы выбираем монетку с вероятностью 1/2 и подбрасываем 2 раза (одну и ту же). $A$ — в первый раз орел, $B$ — орел во второй раз, $C$ — была выбрана неправильная монетка.
   $\mathbb{P}(A) = 1/2 * 1/2 + 1/2 * 2/3 = 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/2*1/2+1/2*4/9)}{7/12} \neq 7/12$
   $\mathbb{P}(A \mid BC) = \mathbb{P}(A \mid C) = 2/3$ — интуитивно
3. Независимы при условии $C$, зависимы при отрицании $C$ $A$ — ел рыбы фугу, $B$ — умер, $C$ — фугу была правильно приготовлена. Если фугу была правильно приготовлена, то связи между смертью и рыбой фугу нет, если неправильно — есть.

Независимость случайных величин.
Случайные величины $X$ и $Y$ независимы, если: $\forall$ борелевских[1] подмножеств $A_x \subset \mathbb{R}, A_y \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in A_x; Y \in A_y) = \mathbb{P}(X \in A_x) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y) \tag{1}$$

Например: $\mathbb{P}(X \in (-\infty; 3) \cap Y \in (-\infty; 2)) = \mathbb{P}(X \in (-\infty; 3)) \cdot \mathbb{P}(Y \in (-\infty; 2))$ Примечание: для «плохих» — не борелевских множеств вероятность не определена.

Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ независимы, если: $\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y)$

Условная независимость случайных величин.
$X$ и $Y$ при условии $Z$: Дискретные случайные величины $X$ и $Y$ условно независимы при условии $Z$, если для любых $x$, $y$ и $z$:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y \mid Z = z) = \mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid Z = z) \tag{2}$$

Произвольные случайные величины $X$ и $Y$ условно независимы при условии $Z$, если:

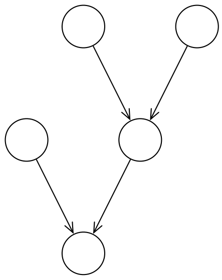
$$\mathbb{P}(X \in A_x \cap Y \in A_y \mid Z \in A_z) = \mathbb{P}(X \in A_x \mid Z \in A_z) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_y \mid Z \in A_z) \tag{3}$$

Условную независимость величин обозначают $X \perp Y \mid Z$ Примечание: некоторые авторы пишут $A \perp B \mid C$ для событий, под этой записью подразумевается на самом деле сразу два условия:

$$A \perp B \mid C \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C \\ A \text{ и } B \text{ независимы при условии } C^c \end{cases} \tag{4}$$

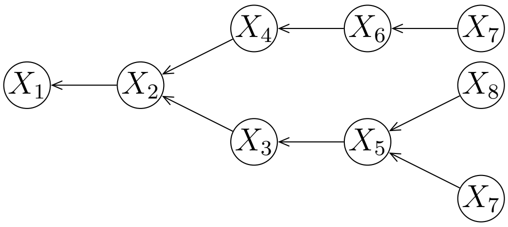
[1] Если смысл этого слова не ясен, то просто зачеркните его

# 3 Что такое байесовская сеть?

Определение. Ориентированный граф — это вот: 

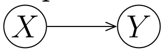
Определение. Направленный граф без циклов $G$ называется байесовской сетью случайных величин $X_1$, …, $X_n$, если для любого узла $X$ выполнено условие:

$$X \perp \text{non descendant}(X) \mid \text{parents}(X) \tag{5}$$




На картинке:

1. Кружочками обозначаются случайные величины.
2. Стрелочками — причинно следственные связи:

   Значение величины $X$ становится известно раньше значения $Y$. Закон распределения величины $Y$ зависит от значения величины $X$.

Возьмем узел $X_3$. Его потомки: $X_5$, $X_7$, $X_8$. Его предки: $X_1$, $X_2$, причем $X_2$ — его прямой родитель. $X_3, X_1, X_4, X_6$ — байесовская сеть — эти величины независимы при фиксированном $X_2$: при фиксированном $X_2$ знание о том, высокий $X_1$ или низкий, не влияет на отношения между $X_1$ b $X_3$.

Теорема. Величины $X$ и $Y$ независимы, если выполнены все три условия

1. Нет направленного пути от $X$ до $Y$
2. Нет направленного пути от $Y$ до $X$
3. Не существует такой величины $Z$, от которой был бы направленный путь и до $X$ и до $Y$

Несколько терминов:

1. Вилка (fork)
2. Коллайдер, перевернутая вилка (collider, inverted fork)
3. Путь[1] (trail, path) от $A$ до $B$ — последовательность вершин от вершины $A$ до вершины $B$, в которой переходы могут делаться и по стрелочкам и против стрелочек
4. Направленный путь от $A$ до $B$ — последовательность вершин от вершины $A$ до вершины $B$, в которой переходы делаются только по стрелочкам
5. Потомок. Узел $Y$ называется потомком узла $X$, если существует направленный путь от $X$ до $Y$.
6. Предок. Узел $X$ называют предком узла $Y$, если существует направленный путь от $X$ до $Y$.
7. Прямой родитель. Узел $X$ — прямой родитель узла $Y$, если $X \to Y$.

Определение. Путь между $X$ и $Y$ называют $d$-разделенным (d-separated, directionally separated) множеством узлов $Z$ если выполнено хотя бы одно из условий

1. узел из $Z$ разрывает последовательное соединение на пути

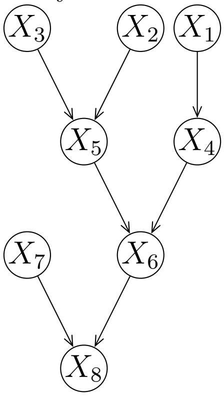
[1] В теории графов термином путь называют то, что мы называем направленным путем

2. узел из $Z$ разрывает «вилку» на пути
3. на пути есть «коллайдер», не являющийся узлом из $Z$ и не содержащий узел из $Z$ в качестве одного из потомков

Можно эквивалентно говорить о том, что путь между $X$ и $Y$ НЕ является $d$-разделенным узлом $Z$, если выполнены оба условия:

1. любой коллайдер на пути либо сам является узлом из множества $Z$, либо имеет потомка из множества $Z$
2. никакой другой узел на пути не входит в множество $Z$

Случайные величины $X$ и $Y$ условно независимы при условии $Z$, если узлы $X$ и $Y$ являются $d$-разделенными узлом $Z$.




Упражнение
Проверьте независимость $X_1 \perp X_2$, $X_1 \perp X_2 \mid X_8$, $X_1 \perp X_2 \mid X_7$, $X_1 \perp X_2 \mid X_6$

# 4 Сходимость марковских цепей

Введем обозначения:

1. $T_i$ — время до посещения состояния $i$, если начать в состоянии $i$

Случайная величина $T_i$ особенна тем, что она может принимать нечисловое значение $+\infty$, если цепь начала в состоянии $i$, но никогда в него не вернулась.
Для подсчета математического ожидания $\mathbb{E}(T_i)$ мы примем соглашение, что $0 \cdot \infty = 0$. Другими словами, если $\mathbb{P}(T_i = \infty) = 0$, то $\mathbb{E}(T_i) = \sum k\mathbb{P}(T_i = k)$, а если $\mathbb{P}(T_i = \infty) > 0$, то $\mathbb{E}(T_i) = \infty$.
Вероятность того, что цепь из состояния $i$ когда-либо вернется в состояние $i$ мы обозначим $f_i$, то есть $f_i = 1 - \mathbb{P}(T_i = \infty)$.
Простая классификация состояний:

1. $f_i = 1$, $\mathbb{E}(T_i) < \infty$. Транзиентное, переходное, transient
2. $f_i < 1$, $\mathbb{E}(T_i) = \infty$. Нулевое рекуррентное, возвратное, null-recurrent
3. $f_i < 1$, $\mathbb{E}(T_i) < \infty$. Положительное рекуррентное, возвратное, positive recurrent

Определение. Марковская цепь называется несократимой, irreducible, если из любого состояния можно с положительной вероятностью попасть в любое за некоторое количество ходов.
Определение. Регулярная цепь, regular. Существует число $k$, такое, что за $k$ шагов можно с положительной вероятностью из любого состояния попасть в любое.
Утверждение. Регулярная — частный случай несократимой.
Упражнение. Приведите пример несократимой, нерегулярной.
Определение. Вектор $\pi$ называется стационарным вектором марковской цепи, если $\pi = \pi P$.
Упражнение. Приведите пример цепи с несколькими стационарными векторами. Без стационарных векторов.
У несократимой марковской цепи стационарный вектор существует если и только если все состояния являются положительными возвратными. В этом случае он единственный и $\pi_j = 1/E(T_j)$.
Лемма 1. Если в несократимой Марковской цепи существует стационарный вектор, то все состояния являются положительными возвратными и $\pi_j = 1/\mathbb{E}(T_j)$.

Лемма 2. Если хотя бы одно состояние несократимой цепи является положительным возвратным, то хотя бы один стационарный вектор существует.
В несократимой непериодичной цепи, где все состояния положительные возвратные, стационарный вектор является предельным для любого стартового распределения. Иными словами, для любого вектора вероятностей $p$: $\lim pP^n = \pi$.
Пример. Несократимая цепь, где все состояния положительные возвратные. Есть стационарный вектор. Нет сходимости к нему.