19.11.2012

Пример 1. Покажем, как при помощи процедуры *гиббсовского выбора* можно построить двумерную случайную выборку $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ такую, что каждый случайный вектор (X_i, Y_i) имеет плотность

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\},\ i = 1,\dots,n.$$

Заметим, что $x^2 - 2\rho xy + y^2 = (x-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2$. Используем это замечание при нахождении маргинальной плотности $f(y)$. Имеем

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(1-\rho^2)y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \cdot \sqrt{1-\rho^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

Тогда условная плотность $f(x\,|\,y) := \frac{f(x,y)}{f(y)}$ имеет следующий вид:

$$f(x\,|\,y) = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}}{\frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

Воспользуемся теперь процедурой гиббсовского выбора для построения искомой выборки. Пусть x_1 и y_1 – произвольные действительные числа, $m, n \in \mathbb{N}$. Положим $X_1 = x_1$ и $Y_1 = y_1$. Для $i = 2,\dots,m+n$ значения случайных величин X_i и Y_i определяются следующим образом:

- генерируем $X_i \sim N(\rho Y_{i-1}, 1-\rho^2)$;
- генерируем $Y_i \sim N(\rho X_i, 1-\rho^2)$.

В результате будут сгенерированы два $(m+n)\times 1$-мерных вектора X и Y. В каждом векторе отбрасываем первые m компонент, и получаем два искомых $n\times 1$-мерных вектора X и Y.

Проиллюстрируем описанную процедуру следующими двумя расчетами. Первый расчет соответствует $\rho = 0.9$, а второй – $\rho = -0.9$. Пусть $n = 1000$, $m = 500$. Результаты приводятся на следующих рисунках.

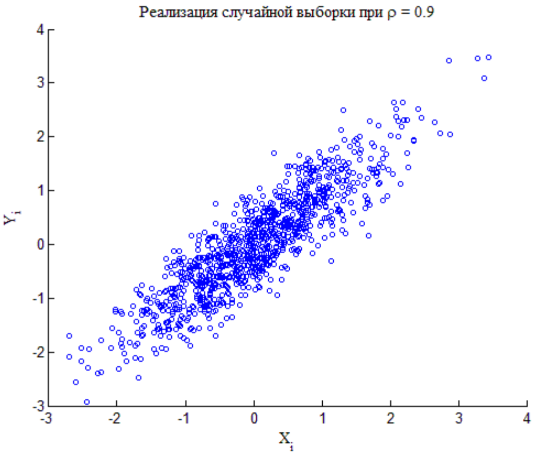


Рис. 1

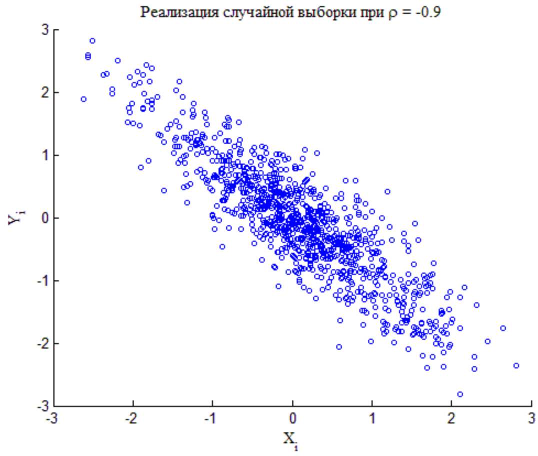


Рис. 2

Код программы в системе MATLAB

```
function [X,Y] = GIBBS_norm_corr_gen(n, m, rho)
N = m + n;
c = sqrt(1 - rho^2);
X = zeros(N,1);
Y = zeros(N,1);
for i = 2:N
    X(i) = rho * Y(i-1) + c * randn;
    Y(i) = rho * X(i) + c * randn;
```

```
end
X = X(m+1:end,1);
Y = Y(m+1:end,1);
scatter(X,Y,5);
H = plot(X, Y, 'o');
set(H, 'MarkerSize', 3);
title(['Реализация случайной выборки при \rho = ', num2str(rho)],...
    'FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
xlabel('X_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
ylabel('Y_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
```

Пример 2. Следующий пример относится к применению процедуре *гиббсовского выбора* для построения двумерной случайной выборки $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ такой, что каждый случайный вектор (X_i, Y_i) имеет плотность

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\tfrac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \tfrac{2\rho}{\sigma_X\sigma_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y) + \tfrac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\},\ i = 1,\dots,n.$$

Найдем маргинальную плотность $f(y)$. Имеем

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \left[u = \tfrac{x-\mu_X}{\sigma_X}\Big|_{-\infty}^{+\infty},\ dx = \sigma_X du,\ v = \tfrac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot [u^2 - 2\rho uv + v^2]\right\} \cdot \sigma_X du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot [(u-\rho v)^2 + (1-\rho^2)v^2]\right\} \cdot \sigma_X du =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{(1-\rho^2)v^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\tfrac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} du =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{v^2}{2}\right\} \cdot \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{v^2}{2}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}.$$

Тогда условная плотность $f(x\,|\,y) := \frac{f(x,y)}{f(y)}$ имеет следующий вид:

$$f(x\,|\,y) = \frac{\tfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\tfrac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \tfrac{2\rho}{\sigma_X\sigma_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y) + \tfrac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}} =$$

$$= \left[u = \tfrac{x-\mu_X}{\sigma_X},\ v = \tfrac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right] =$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[u^2 - 2\rho uv + v^2\right]\right\}}{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{v^2}{2}\right\}} =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(1-\rho^2)}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(1-\rho^2)}} \cdot \exp\left\{-\tfrac{(x-[\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)])^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\right\}.$$

Воспользуемся процедурой гиббсовкого выбора для построения искомой выборки. Пусть x_1 и y_1 – произвольные действительные числа, $m, n \in \mathbb{N}$. Положим $X_1 = x_1$ и $Y_1 = y_1$. Для $i = 2,\dots,m+n$ значения случайных величин X_i и Y_i определяются следующим образом:

- генерируем $X_i \sim N(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y_{i-1} - \mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2))$;
- генерируем $Y_i \sim N(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X_i - \mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2))$.

В результате будут сгенерированы два $(m+n)\times 1$- мерных вектора X и Y. В каждом векторе отбрасываем первые m компонент, и получаем два искомых $n\times 1$- мерных вектора X и Y.

На рисунках ниже приведены результаты четырех расчетов при различных значениях параметров.

$n=1000$, $m=10000$;
$\mu_X=10$, $\mu_Y=-10$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$, $\rho=0.7$

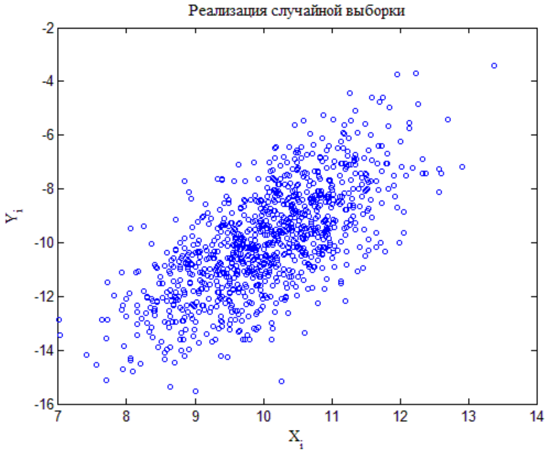


Рис. 3

$n=1000$, $m=10000$;
$\mu_X=10$, $\mu_Y=-10$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$, $\rho=-0.7$

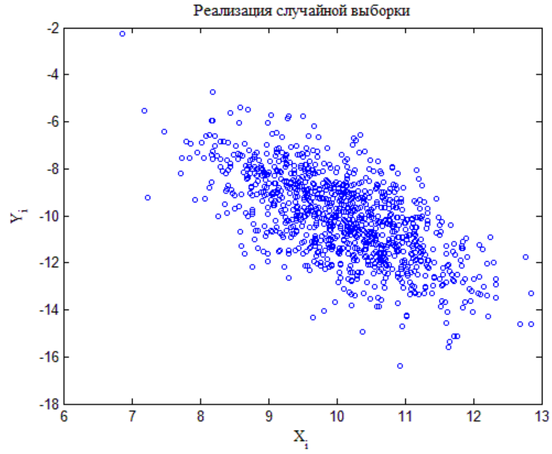


Рис. 4

$n=1000$, $m=10000$;
$\mu_X=10$, $\mu_Y=-10$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$, $\rho=0.9$

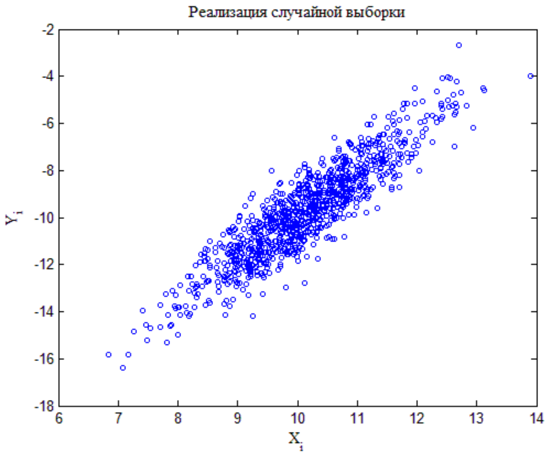


Рис. 5

$n=1000$, $m=500$;
$\mu_X=10$, $\mu_Y=-10$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$, $\rho=-0.9$

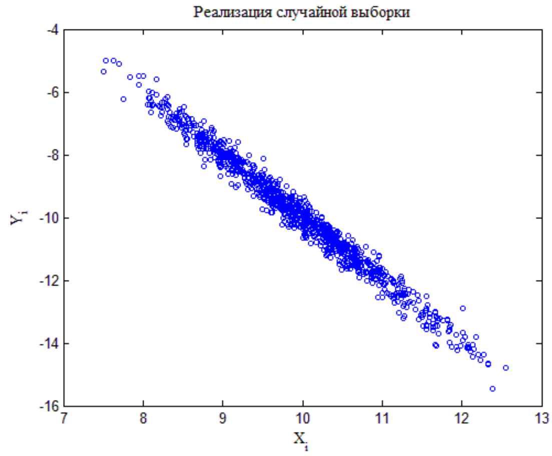


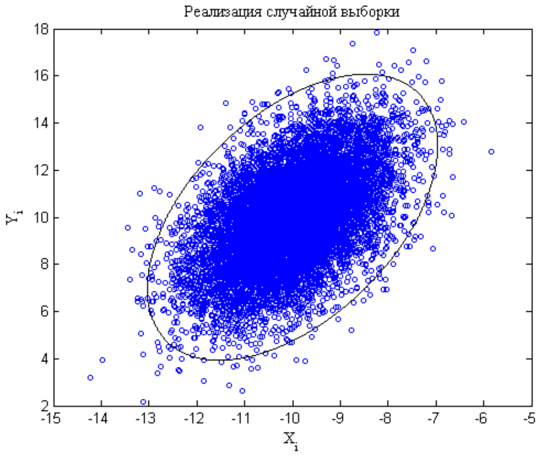
Рис. 6

Код программы в системе MATLAB

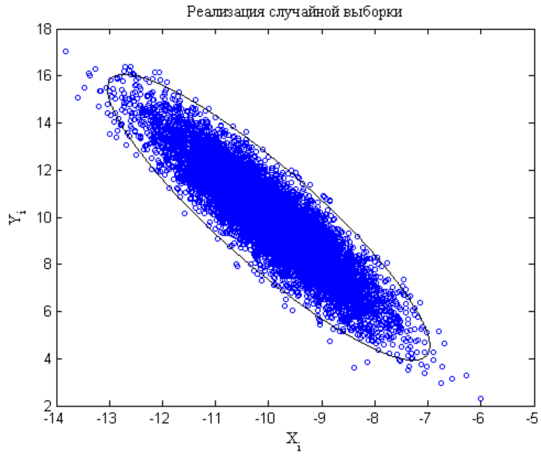
```
function [X,Y] = GIBBS_norm_corr_gen_GC(n, m, rho, muX, muY, sigmaX, sigmaY)
N = m + n;
c = sqrt(1 - rho^2);
X = zeros(N,1);
Y = zeros(N,1);
for i = 2:N
    X(i) = muX + rho * (sigmaX / sigmaY) * (Y(i-1) - muY) + sigmaX * c * randn;
    Y(i) = muY + rho * (sigmaY / sigmaX) * (X(i)   - muX) + sigmaY * c * randn;
end
X = X(m+1:end,1);
Y = Y(m+1:end,1);


H = plot(X, Y, 'o');
set(H, 'MarkerSize', 3);
title('Реализация случайной выборки','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
xlabel('X_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
ylabel('Y_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
```

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_Y\sigma_X & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{bmatrix},\ t\in[0;2\pi].$$

$n = 10000$, $m = 10000$;
$\mu_X = 10$, $\mu_Y = -10$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$, $\rho = 0.5$



$n = 10000$, $m = 10000$;
$\mu_X = 10$, $\mu_Y = -10$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$, $\rho = -0.9$



Код программы в системе MATLAB

```
function [X,Y] = GIBBS_norm_corr_gen_GC_ell(n, m, rho, muX, muY, sigmaX, sigmaY)
N = m + n;
c = sqrt(1 - rho^2);
X = zeros(N,1);
Y = zeros(N,1);
for i = 2:N
    X(i) = muX + rho * (sigmaX / sigmaY) * (Y(i-1) - muY) + sigmaX * c * randn;
    Y(i) = muY + rho * (sigmaY / sigmaX) * (X(i)   - muX) + sigmaY * c * randn;
end
X = X(m+1:end,1);
Y = Y(m+1:end,1);

MU = [muX,muY]';
SIGMA = [sigmaX^2             rho*sigmaX*sigmaY;
         rho*sigmaY*sigmaX             sigmaY^2];
t = [0:0.001:2*pi];
d = length(t);
q = 0.99;
a = sqrt(log((1-q)^(-2)));
z = a * [cos(t);sin(t)];
x = [MU(1)*ones(1,d);MU(2)*ones(1,d)] + SIGMA^(1/2) * z;
H = plot(X, Y, 'o', x(1,:), x(2,:),'k');
set(H, 'MarkerSize', 3);
title('Реализация случайной выборки','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
xlabel('X_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
ylabel('Y_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
```

Пример 3. При помощи процедуры *гиббсовского выбора* построим двумерную случайную выборку $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{n}$ такую, что каждый случайный вектор (X_i, Y_i) имеет плотность

$$f(x,y) = c \cdot \exp\{-xy - x - y\},\ x > 0,\ y > 0,$$

где c – нормирующая константа.

Найдем маргинальную плотность $f(y)$. Имеем

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = c \cdot \int_{0}^{+\infty} \exp\{-xy - x - y\}\, dx =$$

$$= c \cdot \exp\{-y\} \int_{0}^{+\infty} \exp\{-(1+y)x\}\, dx = c \cdot \exp\{-y\} \cdot \frac{\exp\{-(1+y)x\}}{-(1+y)}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{c \cdot \exp\{-y\}}{1+y}.$$

Найдем теперь условную плотность:

$$f(x \mid y) := \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{c \cdot \exp\{-xy - x - y\}}{\frac{c \cdot \exp\{-y\}}{1+y}} = (1+y) \cdot \exp\{-(1+y) \cdot x\}.$$

Воспользуемся процедурой гиббсовкого выбора для построения искомой выборки. Пусть x_1 и y_1 – произвольные действительные числа, $m, n \in \mathbb{N}$. Положим $X_1 = x_1$ и $Y_1 = y_1$.

Для $i = 2, \dots, m+n$ значения случайных величин X_i и Y_i определяются следующим образом:

- генерируем $X_i \sim Exp(1+Y_{i-1})$;
- генерируем $Y_i \sim Exp(1+X_i)$.

(здесь запись $\xi \sim Exp(\lambda)$ означает, что случайная величина имеет показательное распределение с параметром λ, т.е. плотность случайной величины ξ имеет вид $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(x)$).

В результате будут сгенерированы два $(m+n)\times 1$- мерных вектора X и Y. В каждом векторе отбрасываем первые m компонент, и получаем два искомых $n \times 1$- мерных вектора X и Y.

На рисунках 7 и 8 приведены результаты двух расчетов.

$n = 1000$, $m = 500$

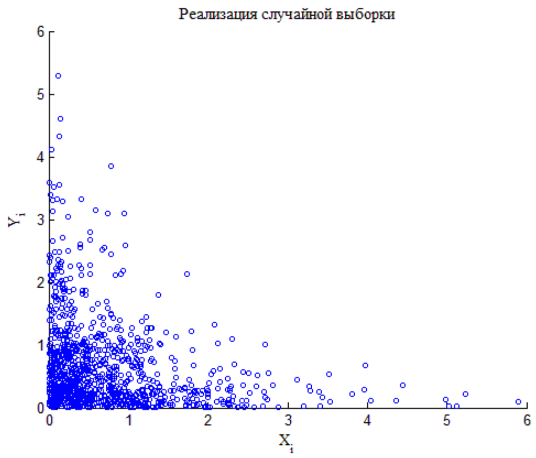


Рис. 7

$n = 1000$, $m = 5000$

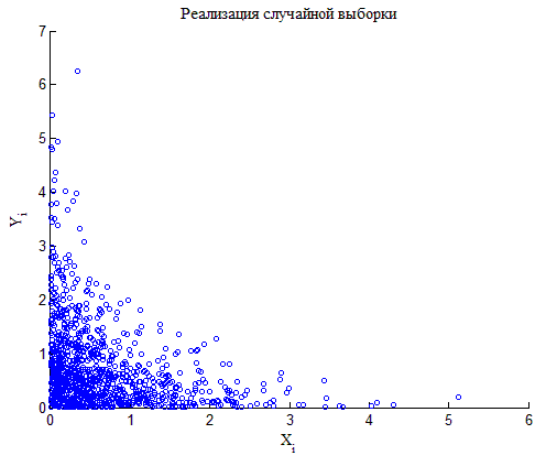


Рис. 8

Код программы в системе MATLAB

```
function [X,Y] = GIBBS_exponential(n, m)
N = m + n;
X = zeros(N,1);
Y = zeros(N,1);
for i = 2:N
    X(i) = exprnd(1 / (1 + Y(i-1)));
    Y(i) = exprnd(1 / (1 + X(i)));
end
X = X(m+1:end,1);
Y = Y(m+1:end,1);
H = plot(X, Y, 'o');
set(H, 'MarkerSize', 3);
title('Реализация случайной выборки',...
    'FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
xlabel('X_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
ylabel('Y_i','FontSize',11,'FontName','Times New Roman');
```