

МСМС для dummies

Винни-Пух

3 марта 2017 г.

Предисловие

```
library("knitr") # грамотное программирование
library("tikzDevice") # сохранение графиков в формате tikz

library("tidyverse") # Хэдли на нашей стороне
library("xtable")

theme_set(theme_bw()) # чёрно-белая тема для графиков
```


Глава 1

Неразобранные :)

<http://www.stat.columbia.edu/~gelman/book/solutions2.pdf>

1.1. Марковские цепи

- 1.1** Шахматный конь начинает в клетке A1. Каждый свой ход он выбирает равновероятно из возможных. Какова вероятность того, что через много-много ходов он окажется в клетке H8? Сколько в среднем длится путь от клетки A1 до клетки A1?

1.2. Ручные задачи

- 1.2** Случайные величины X_i независимы и одинаково распределены с табличкой

X	1	2	6
$\mathbb{P}()$	β	2β	$1 - 3\beta$

Известно, что $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 2$, $X_4 = 4$.

1. Найдите оценку $\hat{\beta}$ методом моментов.
2. Найдите оценку $\hat{\beta}$ методом максимального правдоподобия.

Априорно известно, что β равномерно на отрезке $[0; 1/3]$.

3. Найдите апостериорную условную функцию плотности β с учётом полученных наблюдений.
4. Сгенерируйте выборку из апостериорного распределения с помощью STAN.

Априорно известно, что β имеет функцию плотности $f(t) = 18t$ на отрезке $[0; 1/3]$.

5. Найдите апостериорную условную функцию плотности β с учётом полученных наблюдений.
6. Сгенерируйте выборку из апостериорного распределения с помощью STAN.

- 1.3** Маша прячется от Медведей в точке m на числовой прямой. Есть несколько Медведей, каждый из которых обнюхивает всю числовую прямую в поисках Маши. Медведю номер i кажется, что Машей сильнее всего пахнет в точке y_i . Естественно, Медведи могут ошибаться, например, у них может быть заложен нос, поэтому $y_i|m \sim \mathcal{N}(m, 2^2)$. При фиксированном m величины y_i независимы.

Известно, что $y_1 = 0.5$, $y_2 = -1$.

1. Найдите оценку \hat{m} методом моментов.
2. Найдите оценку \hat{m} методом максимального правдоподобия.

Априорно известно, что m нормально $\mathcal{N}(1, 4^2)$:

3. Найдите апостериорную условную функцию плотности m с учётом полученных наблюдений.
4. Сгенерируйте выборку из апостериорного распределения с помощью STAN.

Априорно известно, что m равномерно на отрезке $[0; 10]$:

5. Найдите апостериорную условную функцию плотности m с учётом полученных наблюдений.
6. Сгенерируйте выборку из апостериорного распределения с помощью STAN.

1.4 дискретная переменная — непрерывные наблюдения

1.5 дискретная переменная — дискретные наблюдения

1.3. toy stan

1.6 Напишите на языке STAN модель парной регрессии. А именно, априорно предполагается, что

$$\begin{cases} \beta_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^2) \\ \beta_2 \sim \mathcal{N}(1, 10^2) \\ \sigma^2 \sim IG(rate = 3, shape = 4) \end{cases}$$

Наблюдаемые y_i порождаются согласно уравнению

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i, u_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$$

На вход модели должны подаваться количество наблюдений N , значения зависимой переменной y_1, \dots, y_N и значения независимой переменной x_1, \dots, x_N .

1.7 Напишите на языке STAN модель процесса AR(1). А именно, априорно предполагается, что

$$\begin{cases} \beta_1 \sim \mathcal{N}(0, 10^2) \\ \beta_2 \sim \mathcal{N}(1, 10^2) \\ \sigma^2 \sim IG(rate = 3, shape = 4) \end{cases}$$

Наблюдаемые y_i порождаются согласно уравнению

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 y_{i-1} + u_i, u_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$$

На вход модели должны подаваться количество наблюдений N , значения зависимой переменной y_1, \dots, y_N . На выходе должна получаться выборка из апостериорного распределения β_1, β_2 и σ^2 .

1.8 Напишите на языке STAN байесовский тест для сравнения средних при неизвестных дисперсиях и малом количестве наблюдений.

$$\begin{cases} \mu_A \sim \mathcal{N}(0, 100^2) \\ \mu_B \sim \mathcal{N}(0, 100^2) \\ \sigma_A^2 \sim IG(rate = 3, shape = 4) \\ \sigma_B^2 \sim IG(rate = 3, shape = 4) \end{cases}$$

При фиксированных параметрах распределения условно независимы и $y_i^A | \mu_A, \sigma_A^2 \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, $y_i^B | \mu_B, \sigma_B^2 \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$.

Даны конкретные наблюдения: $y_1^A = 2.7, y_2^A = 3.8, y_3^A = 4.1, y_1^B = 4.2, y_2^A = 3.8, y_3^A = 3.1$.

1. Постройте выборку из апостериорного распределения.
2. Оцените апостериорную вероятность того, что μ_B более чем на единицу превосходит μ_A .

1.4. stan - integrate out

- 1.9** Рассмотрим данные по количеству происшествий на английских шахтах. Предположим, что до момента b включительно количество происшествий за год имеет пуассоновское распределение с параметром λ_1 , а после момента b — пуассоновское с параметром λ_2 .

Всего есть данные за T дней. Предположим, что априорно b равномерно принимает значения от 1 до T , а $\lambda_i \sim IG(\text{rate} = 3, \text{shape} = 4)$.

Фактические данные по количеству происшествий за год рассчитайте исходя из дат происшествий по ссылке <http://people.reed.edu/~jones/141/Coal.html>.

С помощью STAN:

1. Постройте выборку из апостериорного распределения λ_1, λ_2, b .
2. Какой год наиболее вероятно был годом структурного сдвига?
3. Постройте прогноз распределения количества аварий на шахтах на следующий год.

1.5. Гиббс

- 1.10** Используя алгоритм Гиббса сгенерируйте выборку для двумерного нормального распределения $N(0, A)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6. Метрополис-Гастингс

- 1.11** Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для биномиального распределения $Bin(n, p)$ из равномерного на множестве $\{0, 1, 2, \dots, n\}$:

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

- 1.12** Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для биномиального распределения $Bin(n, p)$ из симметричного случайного блуждания на \mathbb{Z} .

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

- 1.13** Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для геометрического распределения $Geom(p)$ из симметричного случайного блуждания на \mathbb{Z} .

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

- 1.14** Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для пуассоновского распределения $Pois(\lambda)$ из симметричного случайного блуждания на \mathbb{Z} .

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

- 1.15** Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для функции плотности $\pi(x) \sim \exp(-x^2)(3 + x^2 + \cos x)$ из нормального $N(0, 1)$. Из нормального $N(0, \sigma^2)$.

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

1.16 Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для функции плотности $\pi(x) \sim \exp(-x^2)(3 + x^2 + \cos x)$ из случайного блуждания $X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. Вариант с $N(0, \sigma^2)$.

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

1.17 Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для стандартного нормального распределения $N(0, 1)$ из случайного блуждания $X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim U[-1, 1]$.

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

1.18 Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для двумерного нормального распределения $N(0, A)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ из случайного блуждания $X_{t+1,i} = X_{t,i} + \varepsilon_{t,i}$, где $\varepsilon_{t,i} \sim U[-1, 1]$.

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

1.19 Используя алгоритм Метрополиса-Хастингса сгенерируйте выборку для двумерного распределения с функцией плотности $p(x, y) = \exp(-4x^2 - 6y^2 + 2x - y + xy)$, $x > 0, y > 0$ из случайного блуждания $X_{t+1,i} = X_{t,i} + \varepsilon_{t,i}$, где $\varepsilon_{t,i} \sim U[-1, 1]$.

1. Подробно опишите алгоритм.
2. Реализуйте алгоритм на каком-нибудь языке программирования.

1.7. Регуляризация

1.20 Рассмотрим модель

$$y = X\beta + u,$$

где u_i независимы и $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Метод гребневой регрессии предполагает минимизацию функции

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2.$$

Рассмотрим байесовский подход к регрессии. Предположим, что априорное распределение имеет вид $\sigma^2 \sim \text{InvGamma}(a, b)$, $\beta_j | \sigma^2 \sim \mathcal{N}(0; c(\sigma^2))$.

При каких a , b и $c(\sigma^2)$ апостериорная мода $\hat{\beta}_{MAP}$ совпадёт с $\hat{\beta}_{Ridge}$?

1.21 Рассмотрим модель

$$y = X\beta + u,$$

где u_i независимы и $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Метод LASSO предполагает минимизацию функции

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k |\beta_j|.$$

Рассмотрим байесовский подход к регрессии. Предположим, что априорное распределение имеет вид $\sigma^2 \sim InvGamma(a, b)$, $\beta_j | \sigma^2 \sim DoubleExp(c(\sigma^2))$.

При каких a , b и $c(\sigma^2)$ апостериорная мода $\hat{\beta}_{MAP}$ совпадёт с $\hat{\beta}_{LASSO}$?

1.22 Храбрый Охотник ловит Покемонов в случайном порядке. Вес i -го пойманного Покемона, y_i , имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Параметры μ и σ неизвестны.

Храбрый охотник хочет оценить μ по формуле $\hat{\mu} = c \sum_{i=1}^n y_i$.

1. При каком c величина $\mathbb{E}((\hat{\mu} - \mu)^2)$ будет минимальна?
2. Возможно ли использовать на практике данное c ?

1.8. Сопряжённые распределение

Надёргать: википедия, статья Айвазяна, примеры у Tsay
названия распределений — с вики

1.23 При известном параметре p , наблюдаемые y_1, \dots, y_n независимы и имеют распределение Бернулли, $y_i | p \sim Bernoulli(p)$. Априорно параметр p имеет бета-распределение, $p \sim beta(\alpha, \beta)$.

1. Найдите апостериорное распределение параметра p .
2. Найдите апостериорный прогнозный закон распределения y_{n+1} .
3. Проинтерпретируйте смысл априорных гиперпараметров α и β .

1.24 При известном параметре p , наблюдаемые y_1, \dots, y_n независимы и имеют биномиальное распределение, $y_i | p \sim Bin(k, p)$. Априорно параметр p имеет бета-распределение, $p \sim beta(\alpha, \beta)$.

1. Найдите апостериорное распределение параметра p .
2. Проинтерпретируйте смысл априорных гиперпараметров α и β .

1.25 При известном параметре λ , наблюдаемые y_1, \dots, y_n независимы и имеют пуассоновское распределение, $y_i | \lambda \sim Pois(\lambda)$. Априорно параметр λ имеет гамма-распределение, $p \sim Gamma(shape = \alpha, rate = \beta)$.

1. Найдите апостериорное распределение параметра λ .
2. Найдите апостериорный прогнозный закон распределения y_{n+1} .
3. Проинтерпретируйте смысл априорных гиперпараметров α и β .

1.26 При известном параметре σ^2 , наблюдаемые y_1, \dots, y_n независимы и имеют нормальное распределение, $y_i | \sigma^2 \sim \mathcal{N}(9, \sigma^2)$. Априорно параметр σ^2 имеет обратное гамма-распределение, $\sigma^2 \sim InvGamma(shape = \alpha, rate = \beta)$.

1. Найдите апостериорное распределение параметра σ^2 .
2. Проинтерпретируйте смысл априорных гиперпараметров σ^2 и β .

1.27 При известном параметре μ , наблюдаемые y_1, \dots, y_n независимы и имеют нормальное распределение, $y_i|\mu \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$. Априорно параметр μ имеет нормальное распределение, $\mu \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2)$.

1. Найдите апостериорное распределение параметра μ .
2. Найдите апостериорный прогнозный закон распределения y_{n+1} .

Глава 2

Решения и ответы к избранным задачам

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8.

1.9.

1.10.

1.11.

1.12.

1.13.

1.14.

1.15.

1.16.

1.17.

1.18.

1.19.

1.20.

1.21. При любых a и b , и $c(\sigma^2) = \lambda/2\sigma^2$

1.22. $c = \frac{1}{n+\sigma^2/\mu^2}$, нет, так как μ и σ^2 неизвестны.

1.23.

1.24.

1.25.

1.26.

1.27.

Список обозначений

Оглавление

1	Неразобранные :)	5
1.1	Марковские цепи	5
1.2	Ручные задачи	5
1.3	toy stan	6
1.4	stan - integrate out	7
1.5	Гиббс	7
1.6	Метрополис-Гастингс	7
1.7	Регуляризация	8
1.8	Сопряжённые распределение	9
2	Решения и ответы к избранным задачам	11