Метрика. ИП ✓

Слышно / видно? !!

Жмите !!

x – странно
y – линейно

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X^T X)^{-1} X^T y}$$ ← точечные оценки.

CI для β_2 : $[\hat{\beta}_2^L ; \hat{\beta}_2^R]$

→ $Var(\hat{\beta})$ – теоретич. ✓
→ $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ – оценка ✓

→ асимп CI $[\hat{\beta}_2 - 1.96 \cdot se(\hat{\beta}_2) ; \hat{\beta}_2 + 1.96\, se(\hat{\beta}_2)]$

→ для малых CI $[\hat{\beta}_2 - t_{cr} \cdot se(\hat{\beta}_2) ; \hat{\beta}_2 + t_{cr}\, se(\hat{\beta}_2)]$

Предп. Всё случайно!

① $\boxed{\text{набл – случ. выборка}}$

в частности: u_7 и y_8 незав

в частности $u_7 \sim u_9$ одинак. распр

② истина

$$y = X\beta + u \qquad y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + \beta_3 \cdot z_i + u_i$$

③ регрессия $\hat{y} = X \cdot \hat{\beta}$, мин МНК

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

4) $E(u|X) = 0 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} n \times 1$ n – число набл.

$E(u_1|X) = 0$

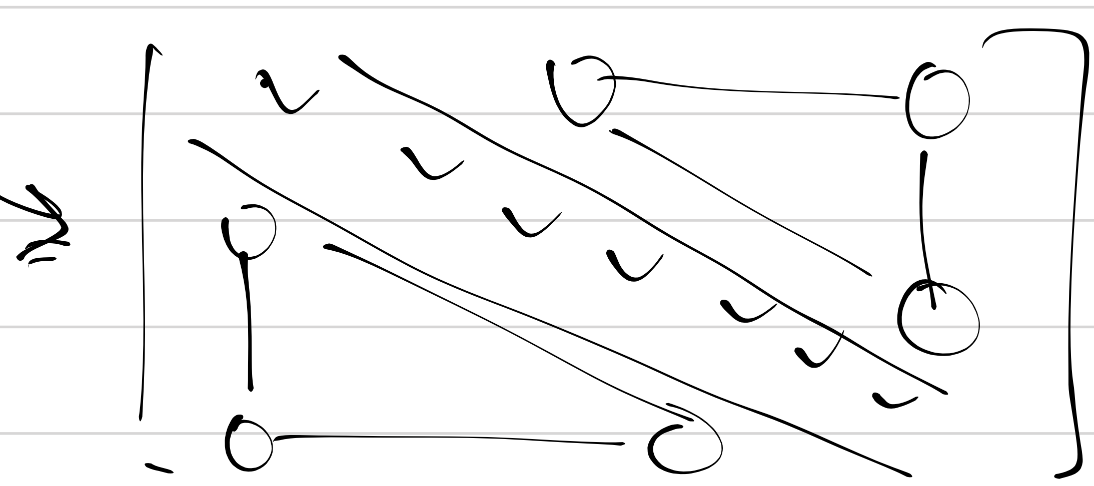
$E(u_2|X) = 0$

$\vdots$

$E(u_n|X) = 0$

(1) $\Rightarrow$ $Var(u|X) = \begin{bmatrix} Var(u_1|X) & Cov(u_1, u_2|X) & \dots \\ Cov(u_2, u_1|X) & & \vdots \\ \dots & \dots & Var(u_n|X) \end{bmatrix} =$

(1) набл-ия – это случ. выборка



$Var(u_i|X) = h_i$

гетероскедастичность

$Var(u_i|X) = h(x_i, z_i)$

[предп. о гомоскедаст.]

$\hookrightarrow Var(u_i|X) = \sigma^2$

$Var(\hat{\beta})$ тяжко! :

– X – случ. вел

– $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$

$Var(\hat{\beta}|X)$

скаляр r, s, q

$E(r+s|q) = E(r|q) + E(s|q)$

$E(h(q) \cdot r|q) \overset{?}{=} h(q) E(r|q)$

м-цы

$E(R+S|Q) = E(R|Q) + E(S|Q)$

$E(h(Q) \cdot R|Q) = h(Q) E(R|Q)$

Скаляры

$$Var(h(q)+z|q) \overset{?}{=} Var(z|q)$$

Матрицы. z – вектор

$$Var(h(Q)+z|Q) = Var(z|Q)$$

ков. матрица

$$Var(h(q)\cdot z|q) = h^2(q)\, Var(z|q) \quad !$$

$$\boxed{Var(h(Q)\cdot z|Q) = h(Q)\cdot Var(z|Q)\cdot h^T(Q)}$$

опр. $Var(z|q) =$

$$= E(z^2|q) - (E(z|q))^2$$

опр: $Var(z|Q) = E(z\cdot z^T|Q) - E(z|Q)\cdot E(z^T|Q)$

$$Cov(z,s|q) = Cov(s,z|q)$$

$$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad s=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

стр, столб

$$Cov(z,s|Q) = Cov^T(s,z|Q)$$

$$= \begin{pmatrix} Cov(z_1,s_1|Q) & Cov(z_1,s_2|Q) & Cov(z_1,s_3|Q) \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

$$Cov(h(Q)\cdot z, g(Q)\cdot s|Q) =$$

$$= h(Q)\cdot Cov(z,s|Q)\cdot g^T(Q)$$

$$Cov(h(Q)+z, s|Q) \overset{?}{=} Cov(z,s|Q)$$

$$Var(z+s|Q) \overset{?}{=} Var(z|Q) + Var(s|Q) +$$

$$+ Cov(z,s|Q) + Cov(s,z|Q)$$

$$Cov(a+b, z|Q) = Cov(a,z|Q) + Cov(b,z|Q)$$

$Var(u|X) = V$ — V - диаг.
$E(u|X) = 0$ — [+ гомоскед: $V = \sigma^2 \cdot I$]
β - конст

Случ. векторы: u, y, $\hat\beta$, $\hat y$, $\hat u$

Упр. $E(\cdot|X)$, $Var(\cdot|X)$, $Cov(\cdot,\cdot|X)$
5 шт $[n\times 1]$ — 5 шт — 20 шт

$E(u|X) = 0$ (дано) ?

$E(y|X) = E(\underbrace{X\beta}_{\text{фикс}} + u|X) = X\beta + E(u|X) = X\beta$ $[n\times 1]$

$E(\hat\beta|X) = E((X^TX)^{-1}X^Ty|X) = (X^TX)^{-1}X^T \cdot E(y|X) =$
$= \underbrace{(X^TX)^{-1}X^TX}_{\text{обратные}}\beta = \beta$ $[k\times 1]$?

$X_{n\times k}$ — n - наблюдений, k - коэф-в бета
$\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_k\end{pmatrix}$

$Var(y|X) = Var(\underbrace{X\beta}_{\text{фикс}} + u|X) = Var(u|X) = \underset{\text{диаг.}\ [n\times n]}{V} \overset{\text{при гомо}}{=} \sigma^2 I$

$Var(\hat\beta|X) = Var((X^TX)^{-1}X^Ty|X) \overset{\text{?}}{=}$ [истин]

$\begin{bmatrix} Var(y_1|X) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & Var(y_n|X)\end{bmatrix}$

$= (X^TX)^{-1}X^T Var(y|X) \cdot ((X^TX)^{-1}X^T)^T$ (A)

Sandwich type estimator → $\boxed{\widehat{Var}(\hat\beta|X) = (X^TX)^{-1}X^T \cdot \boxed{\hat V} \cdot ((X^TX)^{-1}X^T)^T}$ (B)

Упр $(X^TX)^T = X'X'' = X^TX$ ① — $X' = X^T$
$((X^TX)^{-1})^T = (X^TX)^{-1}$ ②
$((X^TX)^{-1}X^T)^T = X'' \cdot (X'X)^{-1\prime} = X \cdot (X'X)^{-1}$
$(AB)^T = B^TA^T$

$Var(\hat\beta|X) = (X^TX)^{-1}X^T \cdot V \cdot X(X^TX)^{-1} \xrightarrow{\text{упр}}$? $\sigma^2(X'X)^{-1}$

упр если $V = \sigma^2 I$

$$\mathrm{Var}(\beta|X) = (X'X)^{-1}X' \cdot V \cdot X(X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1}X' \cdot \sigma^2 \cdot I \cdot X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1} \underbrace{X'X}(\underbrace{X'X})^{-1} =$$

доп. предп. $V = \sigma^2 \cdot I = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & \vdots \\ 0 & & \sigma^2 & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$

скаляр

$I \cdot A = A$

одно и то же

$$= \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1}$$

$[k \times k]$?

$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$

$[n \times n]$ $\mathrm{Cov}(\hat{y}, y|X) =$

$$\mathrm{Cov}(X \cdot \hat{\beta}, y|X) = X \cdot \mathrm{Cov}(\underbrace{(X^TX)^{-1}X^T}y, y|X) =$$

$$= X(X^TX)^{-1}X^T \cdot \mathrm{Cov}(y, y|X) =$$

$$= X(X^TX)^{-1}X^T \cdot \mathrm{Var}(y|X) = X(X^TX)^{-1}X^T \cdot V.$$

Как оцен-ся?

sandwich-type estim

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}|X) = (X^TX)^{-1}X^T \cdot \hat{V} \cdot X(X^TX)^{-1}$$

гомоск

$$= \hat{\sigma}^2 (X^TX)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k}$$

для $\hat{V}$ есть много способов:

White ~50 назад

HC0

HC1

HC2

HC3

HC4

HC4m

⋮

$V = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(u_1|X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{Var}(u_n|X) \end{bmatrix}$

$\hat{u} = y - \hat{y}$

$\hat{V}_{HC0} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{u}_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{u}_n^2 \end{bmatrix}$

heterosk consistent

Софт! (*) Хочу МНК + HC3

Хочу МНК + homosk

Хочу МНК + homosk

Упр

3000 набл

y	x	повт
2	1	× 1000 раз
1	2	× 1000 раз
3	3	1000 раз

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

а) X^TX? X^Ty?

б) $\hat{\beta}$? $\hat{y}$? $\hat{u}$?

в) RSS, ESS, TSS, R^2?

г) $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X)$ при предп [гомоскед]

$\widehat{Var}_{HC0}(\hat{\beta}|X)$

д) asy CI с исп $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X)$

с исп $\widehat{Var}_{HC0}(\hat{\beta}|X)$

а) $X^TX = \begin{bmatrix} 3000 & 6000 \\ 6000 & 14000 \end{bmatrix}$

б) $X'y = \begin{bmatrix} 6000 \\ 13000 \end{bmatrix}$

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X'y$$

→ д/з доделать 2 задачи