

Домашнее задание 1

Дедлайн: 2025-03-20, 21:00.

Оцениваемая часть:

1. В красном мешке у Деда Мороза 5 красных и 4 синих шара, а в синем мешке — 3 красных и 10 синих шаров. Сначала Дед Мороз выбирает один из мешков равновероятно. Затем Дед Мороз достаёт из выбранного мешка один шар. А затем Дед Мороз достаёт ещё два шара из *другого* мешка.

Обозначим R — общее число красных извлечённых шаров, и B — общее число синих шаров.

- (a) Составьте табличку распределения случайной величины R .
- (b) Найдите $\mathbb{P}(R - \text{чётное})$, $\mathbb{E}(R)$, $\mathbb{E}(2B + 7)$, $\mathbb{E}(R \cdot B)$.
- (c) Найдите $\mathbb{P}(R \geq 1, B \geq 1)$, $\mathbb{E}(R \cdot I(B \geq 1))$.

Напоминалочка: $I(A)$ — индикатор события A , случайная величина, равная 1, если событие A произошло и 0 — иначе.

2. У Илона Маска две монетки: A -монетка выпадает орлом с вероятностью 0.3, B -монетка выпадает орлом с вероятностью 0.4. Каждая из монеток выпадает либо решкой, либо орлом. Всего Илон делает 100 подбрасываний. Сначала Илон Маск подбрасывает монетку A . Затем он действует по простому правилу: если выпал орёл, то следующей будет подброшена монетка A , если выпала решка, то следующей будет подброшена монетка B . Обозначим X — общее число выпавших орлов, Y — общее число орлов выпавших на монетке B .

- (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(Y)$.
- (b) Найдите $\mathbb{E}(XY)$.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Маши две монетки: золотая и серебряная. Сначала Маша подкидывает золотую монетку. Если золотая монетка выпала орлом, то Маша подкидывает серебряную монетку один раз. Если золотая монетка выпала решкой — то подкидывает серебряную два раза.

Пусть X — общее количество выпавших орлов на золотой и серебряной монетках.

- (a) Найдите все возможные значения X и их вероятности.
- (b) Каково ожидаемое количество выпавших орлов?

4. Вспомним свойство аддитивности вероятности. A : Если задан набор несовместных событий $A_1, A_2, \dots, (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j)$, то $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

Докажите, что свойство аддитивности эквивалентно свойству B и свойству C .

B : Если задан набор вложенных событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \dots$, то $\lim_i \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(\lim_i B_i)$.

C : Если задан набор вложенных событий $\dots C_3 \subseteq C_2 \subseteq C_1$, то $\lim_i \mathbb{P}(C_i) = \mathbb{P}(\lim_i C_i)$.

5. В шкатулке у Маши 100 пар серёжек. Каждый день утром она выбирает одну пару наугад, носит ее, а вечером возвращает в шкатулку. Проходит год.

- (a) Сколько в среднем пар окажутся ни разу не надетыми?
 - (b) Сколько в среднем пар окажутся надетыми не менее двух раз?
6. Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников один раз стреляет в случайно выбираемую им утку. Охотники целятся одновременно, поэтому несколько охотников могут выбрать одну и ту же утку. Величина Y — количество выживших уток, X — количество попавших в цель охотников.
- (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, если охотники стреляют без промаха.
 - (b) Как изменятся ответы, если вероятность попадания равна 0.7?

Домашнее задание 2

Дедлайн: 2025-03-27, 21:00.

Оцениваемая часть:

1. Аллея из десяти каштанов скоро вся зацветёт! Завтра каждый каштан может либо цвести, либо — нет, независимо от других. Вероятность того, что k -й по счёту каштан цветёт равна $1/k$.
 - (a) Найдите ожидаемое количество цветущих каштанов.
 - (b) Если два каштана, стоящих рядом, цветут, то проходящий аллею Хосе де Рибас улыбается и говорит «Très bien!» Сколько раз Хосе в среднем скажет «Très bien»?
2. Мы подбрасываем правильную монетку до тех пор, пока впервые не выпадет последовательность $ННТ$ или $ТНТ$.
 - (a) Сколько бросков в среднем потребуется?
 - (b) Какова вероятность того, что эксперимент окончится последовательностью $ННТ$?
 - (c) Сколько в среднем выпадет решек?

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Пети есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0; 1)$. У Васи есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $1/2$. Они одновременно подбрасывают свои монетки до тех пор, пока у них не окажется набранным одинаковое количество орлов. В частности, они останавливаются после первого подбрасывания, если оно дало одинаковые результаты.
Сколько в среднем раз им придётся подбросить монетку?
4. Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет.
 - (a) Како вероятность того, что Илья Муромец будет исключительно мимо спящих Змеев Горынычей, если каждый раз будет выбирать случайную дорогу на развилке?

- (b) Какова вероятность того, что Василиса Премудрая *сможет найти на карте* бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?
5. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других движется по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.
- (a) Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.
- (b) Как изменятся ответы, если вероятность движения по часовой стрелке равна p ?
6. Маша и Даша играют в следующую игру. Правильный кубик подкидывают неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Маша получает сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается и Даша получает сумму, лежащую на кону. Изначально на кону лежит ноль рублей.
- (a) Какова вероятность того, что игра рано или поздно закончится выпадением 6-ки?
- (b) Какова ожидаемая продолжительность игры?
- (c) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши и ожидаемый выигрыш Даши?
- (d) Чему равны ожидаемые расходы организаторов игры?
- (e) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши, если изначально на кону лежит 100 рублей?
- (f) Изменим изначальное условие: если выпадает 5, то сумма на кону сгорает, а игра продолжается. Чему будет равен средний выигрыш Маши и средний выигрыш Даши в новую игру?

Домашнее задание 3

Дедлайн: 2025-04-05, 21:00.

Оцениваемая часть:

1. Таблица совместного распределения пары величин X и Y имеет вид

| | $X = -1$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---------|----------|---------|---------|
| $Y = 0$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| $Y = 1$ | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

- (a) Найдите $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X \geq 0)$, $\mathbb{E}(Y \mid X \geq 0)$.
- (b) Найдите $\mathbb{P}(X \geq 0 \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
- (c) Найдите $\mathbb{E}(1/(X + 2) \mid Y = 0)$, $\mathbb{E}(1/(X + 2) \mid Y)$.
2. Дональд Трамп подкидывает монетку бесконечное число раз. Монетка выпадает орлом с вероятностью 0.4 и решкой — с вероятностью 0.6. Обозначим X — номер броска, когда впервые выпал орёл, а Y — индикатор того, что орёл был в третьем броске.
- (a) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathbb{E}(X)$.
- (b) Найдите $\mathbb{P}(X \geq 5 \mid Y = 1)$ и $\mathbb{P}(X \geq 5 \mid Y)$.

(c) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 5)$, $\mathbb{E}(X \mid Y = 1)$.

(d) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. Ген карих глаз доминирует ген синих. Следовательно, у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb — карие. У диплоидных организмов (а мы такие :) одна аллель наследуется от папы, а одна — от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына — кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке.

Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?

4. У Ивана Грозного n бояр. Каждый боярин берёт мзду независимо от других с вероятностью $1/2$.

(a) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если случайно выбранный боярин берёт мзду?

(b) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если хотя бы один из бояр берёт мзду?

5. На праздник ровно 5% жён итальянских мафиози получили в подарок цветы. Цветы получают в подарок только от мужа. Также известно, что 0.5% жён получили в подарок пирожные, причём половина жён получила их от мужа, а половина — от брата. Среди жён, получивших пирожные от мужа, 90% получили в подарок цветы. Среди жён, получивших пирожные от брата, 5% получили в подарок цветы.

(a) Кармела получила в подарок цветы. Какова условная вероятность того, что она получила пирожные в подарок от мужа?

(b) Талия получила в подарок цветы и пирожные. Какова условная вероятность того, что она получила пирожные в подарок от мужа?

6. Задача Эльчалана Мосселя.

Ты подбрасываешь кубик до первой шестерки.

(a) Чему равно ожидаемое общее количество сделанных за игру бросков?

(b) Чему равно ожидаемое общее количество сделанных за игру бросков, если за время игры ни разу не выпало нечётное число?

(c) Как изменится ответ, если за время игры было a нечётных бросков?
