Сходимость случ-х величин.

Воспоминания!

① Сходимость числовых посл-стей.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{ces}\lim_{n\to\infty} a_n = a}$$

сходимость по Чезаро

Сходимость ф-ных послед-стей

$f_n(x) \to f$ поточечная на D $\forall x \in D$ $\Leftarrow$ $f_n(x) \rightrightarrows f$ равномерно на D

$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ $\qquad \lim b_n = \frac{1}{2}$ $\qquad \operatorname{ces}\lim b_n = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ $\qquad \lim a_n = ?$ нет

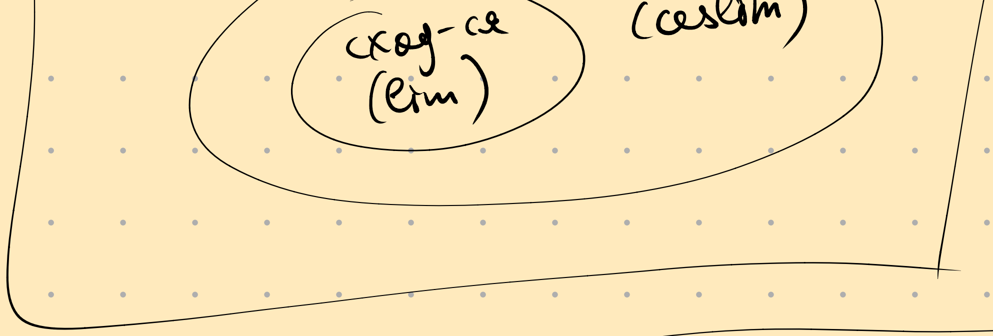
$\to 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\ldots$

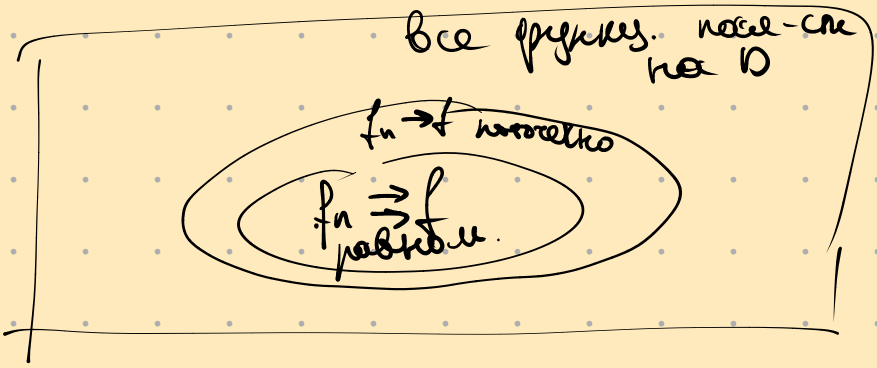
$$\operatorname{ces}\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Опр $\quad \operatorname{ces}\lim_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

Все (числов) послед-сти

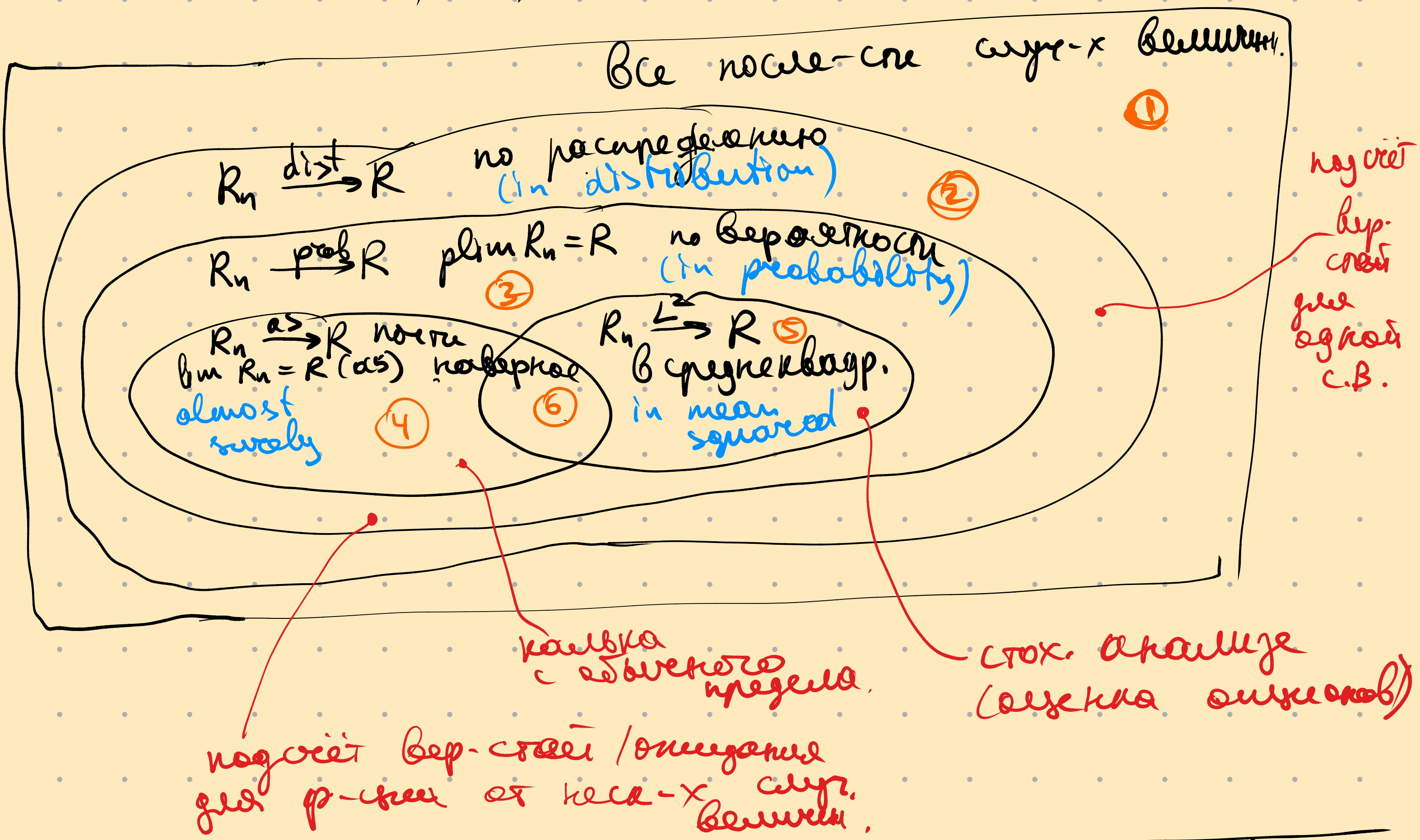
сх-ся по Чезаро





(случайные после-сти
[послед-сти случ-х величин]

$R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots\ldots$



Опр. $R_n \xrightarrow{as} R$ (почти наверное = almost surely)

с.в. с.в.

Ω – мн-во исходов.

$R_n : \Omega \to \mathbb{R}$

мн-во действ. чисел

если $\forall w \in A$ $\lim R_n(w) = R(w)$

и $P(A) = 1$

пример. В городе завалялось 3 послед-сти

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \frac{n^2 + 2n}{3n^2}$$

Случ-ный эксперимент

подбр. игральный кубик один раз!

$\boxed{1} \to R_n = a_n$

$\boxed{2}, \boxed{3} \quad R_n = b_n$

$\boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6} \quad R_n = c_n$

$R_1, R_2, R_3, R_4 \ldots\ldots$

а) $P(R_1 = 1) \, ? = P(R_1 = a_1) + P(R_1 = b_1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$!!

б) $P(\lim R_n = 0) \stackrel{?}{=} \frac{1}{6}$ $\qquad P(\lim R_n = e) = \frac{1}{2}$

$P(\lim R_n = 1) = 0$, $\qquad P(\lim R_n = \frac{1}{3}) = \frac{2}{6}$.

в) $P(\lim R_n$ сущ-т$) \stackrel{?}{=} 1$.

$\Omega = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \ldots \boxed{6}\}$

$A = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \ldots \boxed{6}\}$

для $\forall w \in A$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(w) = R(w)$$

$$R_n \xrightarrow{as} R$$

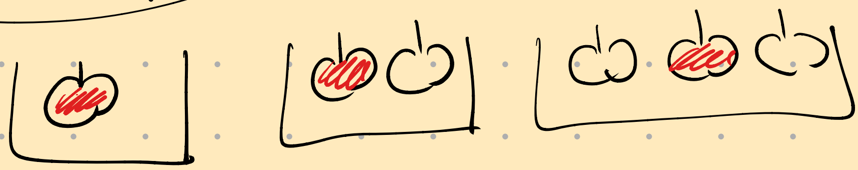
$P(R = 0) = \frac{1}{6}$

$P(R = e) = \frac{1}{2}$

$P(R = \frac{1}{3}) = \frac{2}{6}$

$$E(R) = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{2} e + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3}$$

Пример.



. . . . . .

В корзинке k лежит k яблок и ровно одно из них отравлено.

Было сказано есть яблоки все
все из корз №1 (в случ.-м порядке)
все из корз №2 (— // —)
все из корз №3 (— // —)
все из корз №4 (— // —)
. . . . .

$$R_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n\text{-ое яблоко отравлено} \\ 0, & \text{если } n\text{-ое яблоко не отравлено} \end{cases}$$

Как выглядит посл-сть R_n?

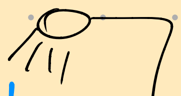
например

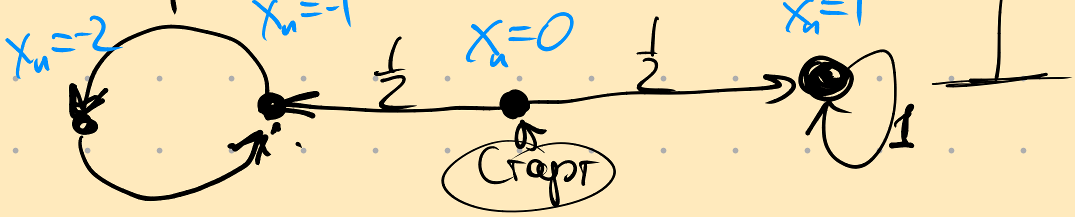
$$1,\ \underbrace{0,1}_{\text{корз 2}},\ \underbrace{0,1,0}_{\text{корз 3}},\ \underbrace{0100}_{\text{корз 4}}\ \dots$$

$$P(\lim R_n \text{ существует}) \overset{?}{=} 0$$

не сх-ся почти наверное $\quad R_n \not\xrightarrow{as} R$

Пример. конечный автомат:





Верн. пример

$$X_1=0,\ X_2=-1,\ X_3=-2,\ X_4=-1,\ X_5=-2 \ldots$$

$$X_1=0,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=1,\ X_5=1,\ldots$$

$$P(\lim X_n \text{ сущ}) \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$X_n \not\xrightarrow{as} X$$

Опр. сходимость в L^2
в среднеквадратичном (такое слово)

in mean squared.

$$R_n \xrightarrow{L^2} R \qquad R_n \xrightarrow{ms} R$$

$(R_n)_{n=1}^{\infty}$ сх-ся к R в L^2 если

① $E(R^2)<\infty$ $\quad E(R_n^2)<\infty \ \forall n$

② $\lim\limits_{n\to\infty} E((R_n-R)^2)=0$

пример ⑥ $\quad R_n \xrightarrow{as} R$, $R_n \xrightarrow{L^2} R$

$R_n=\frac{1}{n}$ (неслучайная)

$$P(\lim R_n \text{ сущ}) = 1$$

$\lim R_n = 0.$

$$E((R_n - R)^2) = E\left(\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = E\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \to 0$$

всё детерм.

пен 4 $\quad R_n \xrightarrow{as} R \quad R_n \not\xrightarrow{L^2} R$

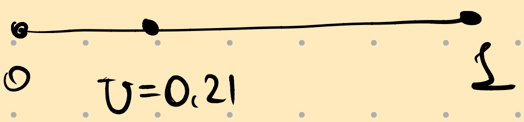
идея: будем всё сильнее завышать с.в. на всё меньшем множестве.

$U \sim Unif[0,1]$

$$R_n = \begin{cases} n, & \text{если } U \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{если } U > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$E(R_n^2) = n^2 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = n$$

$\boxed{\text{пример. реализации}}$



$U = 0{,}21$ $\quad R_1 = 1 \quad R_2 = 2 \quad R_3 = 3 \quad R_4 = 4 \quad R_5 = 0 \ldots$

$U = 0{,}11$ $\quad R: 1, 2, \ldots, 9, 0, 0, 0 \ldots$

$U = 0$ $\quad R: 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$

$P(\lim R_n \text{ сущ}) = 1 \qquad P(\lim R_n \text{ не сущ}) = P(U=0) = 0$

$R_n \xrightarrow{as} 0$ есть

правда ли $R_n \xrightarrow{L^2} 0$? нет

$$E\left((R_n - R)^2\right) = E\left((R_n - 0)^2\right) = E\left(R_n^2\right) = n \not\to 0$$

тип 5 $\quad R_n \not\xrightarrow{as} R \qquad R_n \xrightarrow{L^2} R$

$P(\lim R_n \text{ сущ}) < 1 \qquad E\left((R_n - R)^2\right) \to 0.$

пример про Белоснежку и отр. яблоки.

$P(\lim R_n \text{ сущ}) = 0 \qquad E\left((R_n - 0)^2\right) =$

$= E(R_n^2) = E(R_n) =$

$R_n \in \{0, 1\}$

$= P(R_n = 1)\cdot 1 + P(R_n = 0)\cdot 0$

$= P(R_n = 1) =$

$n \to \infty$

$= \frac{1}{k_n} \to 0$

k_n – номер корзинки из к-рой извлечено яблоко №n

Бядааа!

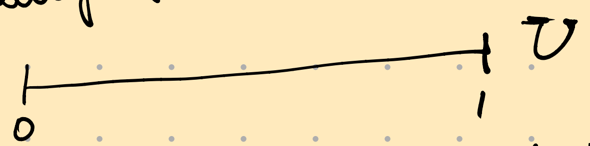
$\boxed{\text{Предел перестал быть единственным!}}$

пример

$U \sim Unif[0,1]$

$$R_n = \begin{cases} 42, & \text{если } U = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } U > \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{если } U < \frac{1}{2} \end{cases}$$

реализация



$U = 0{,}7 \qquad R_n: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \to 0$

$U = 0{,}2 \qquad R_n: 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \to 1$

$U = \frac{1}{2} \qquad R_n: 42, 42, 42, 42, 42, \ldots \to 42$

$$R_n \xrightarrow{as} R \qquad R = \begin{cases} 0, & \text{если } U > \frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } U < \frac{1}{2} \\ 42, & \text{если } U = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$R_n \xrightarrow{as} R'$ $\qquad R' = \begin{cases} 0, & \text{если } U > \frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } U < \frac{1}{2} \end{cases}$

$A = \{U \neq \frac{1}{2}\}$ $\qquad R_n \xrightarrow{as} R''$ $\qquad R'' = \begin{cases} 0, & \text{если } U > \frac{1}{2} \\ 1984, & \text{если } U = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } U < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\forall w \in A$ $\qquad R_n(w) \to R'(w)$

$P(\lim R_n = R) = 1$

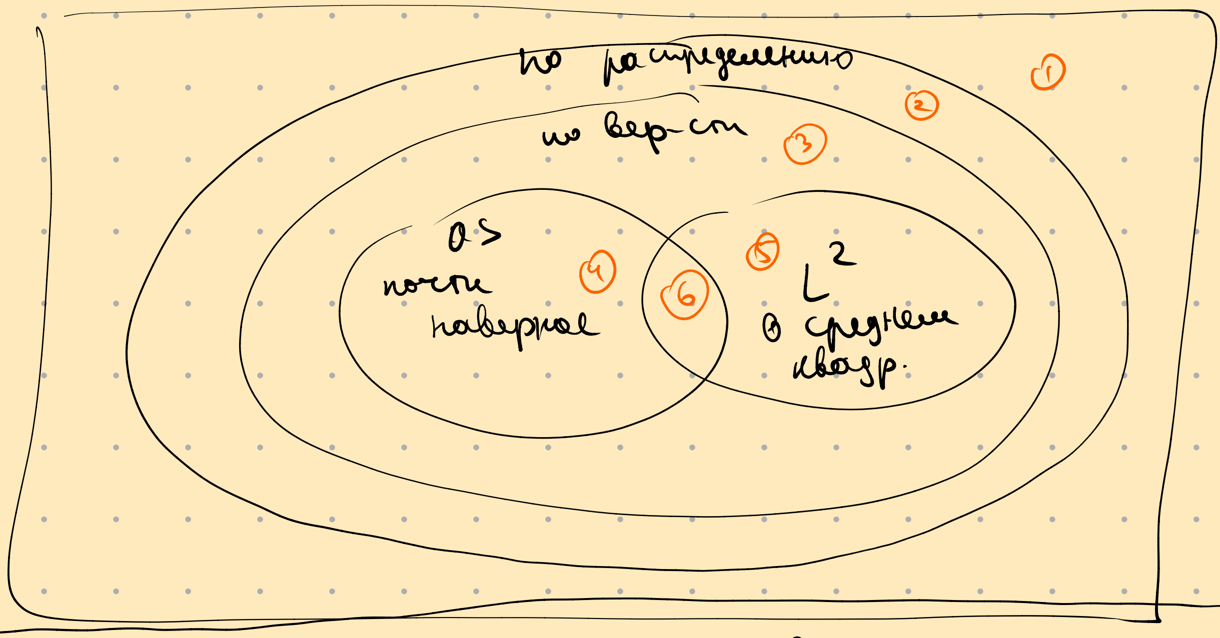
$P(\lim R_n = R') = 1$

$P(R' = R'') = P(U > \frac{1}{2}) + P(U < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Хорошая новость: (теоремы 2 шт)

если $R_n \xrightarrow{as} R$ и $R_n \xrightarrow{as} R'$, то $P(R = R') = 1$

если $R_n \xrightarrow{L^2} R$ и $R_n \xrightarrow{L^2} R'$, то $P(R = R') = 1$



Опр. $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ сх-ся к R по вероятности (in probability)

$R_n \xrightarrow{prob} R$ $\qquad R_n \xrightarrow{P} R$

$\operatorname{plim} R_n = R$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P(|R_n - R| > \varepsilon) = 0$$

вер-сть отличия R_n от R больше, чем на ε стремится к нулю.

Вариант

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists T \quad \forall n \geq T \quad P(|R_n - R| > \varepsilon) < \delta$$

ная : $R_n \xrightarrow{as} R$

сущ. событие A с $P(A)=1$, такое что
$\forall w \in A \quad \lim R_n(w) = R(w)$

Пример. (типа 5)

$R_n \not\xrightarrow{as} R$

почти нав. нет

[вариация бело снежки]

$R_n \xrightarrow{L^2} R$

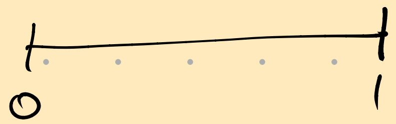
по вер-сти есть

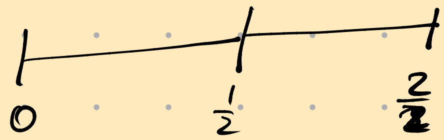
$\operatorname{plim} R_n = R$
$(R_n \xrightarrow{prob} R)$

$U \sim \text{Unif}[0,1]$

R_n будут индикаторами уменьшающегося множества, „бегающего" по отрезку $[0,1]$

$R_1 = I(U \in [0;1]) \equiv 1$

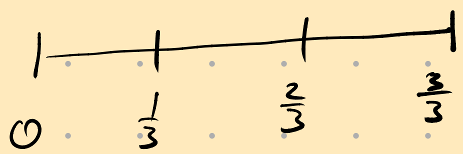




$R_2 = I(U \in [0;\tfrac{1}{2}])$ $\quad R_3 = I(U \in [\tfrac{1}{2};\tfrac{2}{2}])$

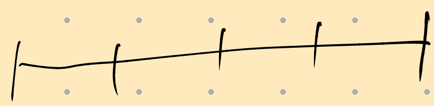
$n=3 \quad k=1 \quad m=2$

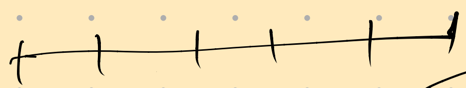
$P(R_3 = 1) = P(U \in [\tfrac{1}{2}; \tfrac{1+1}{2}])$



$R_4 = I(U \in [0;\tfrac{1}{3}])$ $\quad R_5 = I(U \in [\tfrac{1}{3};\tfrac{2}{3}])$

$R_6 = I(U \in [\tfrac{2}{3};\tfrac{3}{3}])$





$U = 0{,}1 \quad R_1 = 1, \quad R_2 = 1 \quad R_3 = 0 \quad R_4 = 1 \quad R_5 = 0 \quad R_6 = 0, \ldots$

$R_n \xrightarrow{as} ?$

$\lim R = ?$ $\quad / \; R_n \xrightarrow{prob} ? \; /$

$$p(\lim R_n \text{ сущест}) = 0$$

$$P(|R_n - 0| > \varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \geq 1)$$

$$P(|R_n - 0| > \varepsilon) \to P(R_n = 1) = P\left(U \in \left[\tfrac{k}{m} ; \tfrac{k+1}{m}\right]\right) = \quad (\varepsilon \in (0;1))$$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$

$R_n \in \{0, 1\}$

$k(n)$, $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$

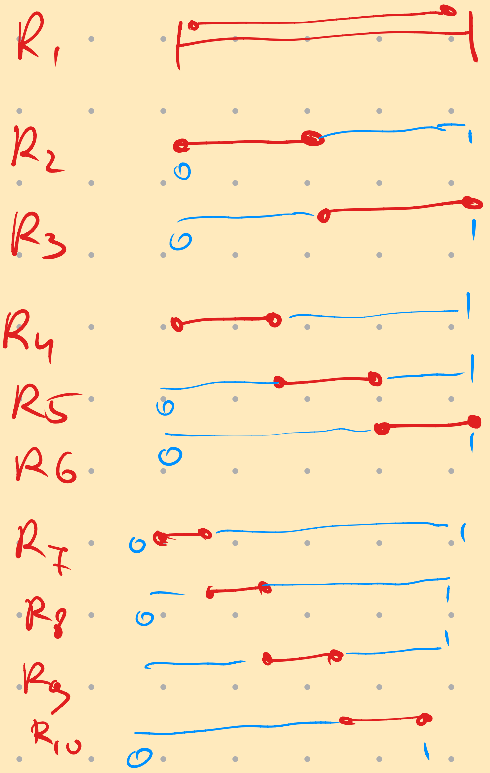
$$= \frac{1}{m(n)} \to 0$$

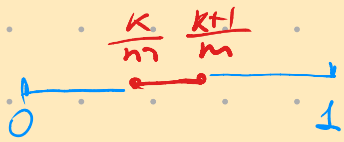
в L^2

$$E\big((R_n - \underset{\text{предел}}{0})^2\big) = E(R_n^2) = E(R_n) = 1 \cdot P(R_n = 1) + 0 \cdot P(R_n = 0) =$$

$R_n \in \{0, 1\}$

$$= P(R_n = 1) = \frac{1}{m(n)} \to 0$$



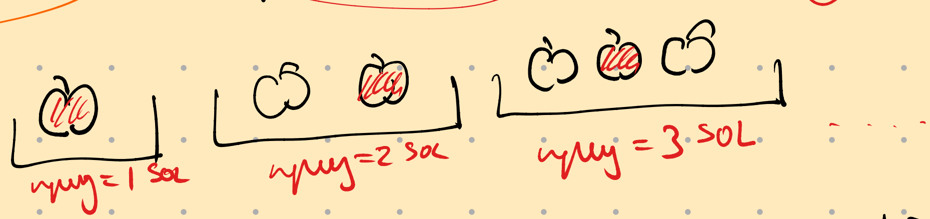


$$R_n = I\left(U \in \left[\tfrac{k}{m} ; \tfrac{k+1}{m}\right]\right)$$

$$n \uparrow \Rightarrow m \uparrow$$

тип 3

$\operatorname{plim} R_n = R$ ✓ $\qquad R_n \overset{as}{\not\to} R$ ✓ $\qquad R_n \overset{L^2}{\not\to} R$



R_n — все вещи при след-нии n-го эпизода.

ест яблоко из корз №1

ест все яблоки из корз №2 в случ. порядке

ест все яблоки из корз №3 в случ. порядке

...

типичная реализация:

$\underline{1},\ \underline{0,2},\ \underline{0,3,0},\ \underline{4,0,0,0},\ \underline{0,5,0,0,0},\ \ldots$

$\operatorname{plim} R_n = 0$

$$P(|R_n - 0| > \varepsilon) \overset{\forall \varepsilon > 0}{\leq} P(R_n \neq 0) = P(R_n = n) = \frac{1}{k(n)} \to 0$$

$k(n)$ ← номер корзины, где лежит ябл №n

$R_n \xrightarrow{L^2} ?$ нет.

$$E\left((R_n - 0)^2\right) = E(R_n^2) = k^2 \cdot \frac{1}{k} + 0 \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{k^2}{k} = k(n) \not\to 0$$

$n \to \infty \Rightarrow k(n) \to +\infty$

Опр. сходимость по распределению. (несл. по верное)

$$R_n \xrightarrow{dist} R$$

$$\lim P(R_n \in [a;b]) = P(R \in [a;b])$$

для $\forall a, b$ т.ч. $P(R = a) = 0$ и $P(R = b) = 0$.

пример. $R_n \xrightarrow{dist} 0$

$R_1 \sim Unif[0;1]$

$R_2 \sim Unif[0;\frac{1}{2}]$

$R_3 \sim Unif[0;\frac{1}{3}]$

$\vdots$

$R_n \sim Unif[0;\frac{1}{n}]$

$P(R_n \in [0{,}2;0{,}5]) \xrightarrow{?} 0$

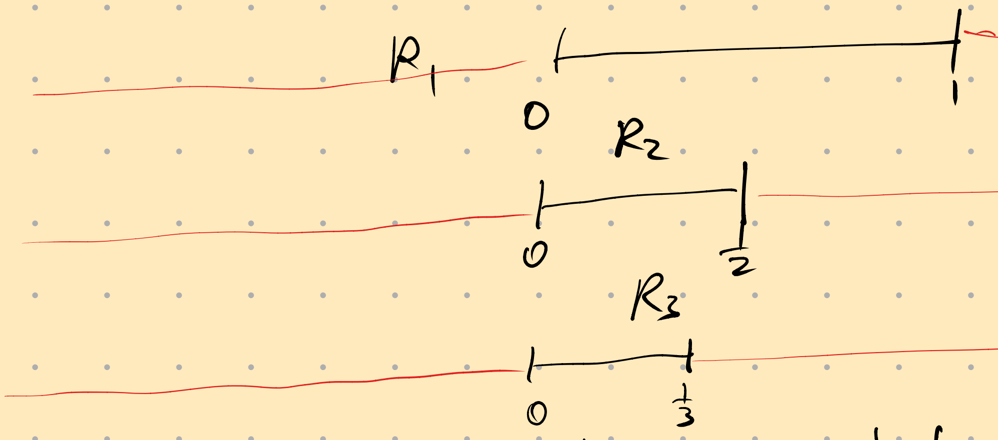
$P(R_n \in [-0{,}7;0{,}1]) \xrightarrow{?} 1$

$P(R_n \in [0.0002, 10^6]) \xrightarrow{?} 0$

$P(0\in[0{,}2;0.5]) = 0$

$P(0\in[-0{,}7;0{,}1]) = 1$

$P(0\in[0{,}0002, 10^6]) = 0$



$P(R_n\in[0;\frac{1}{8}]) \to 1$

$P(0\in[0;\frac{1}{8}]) = 1$

$P(R_n\in[-\frac{1}{8};0]) = 0$

$P(0\in[-\frac{1}{8};0]) = 1$

$$R_n \xrightarrow{dist} 0$$

пример.

$$U \sim Unif[0,2]$$

$$R_n = (U)^{\frac{1}{n}}\cdot I(U>1) + U^n\cdot I(U\le 1)$$

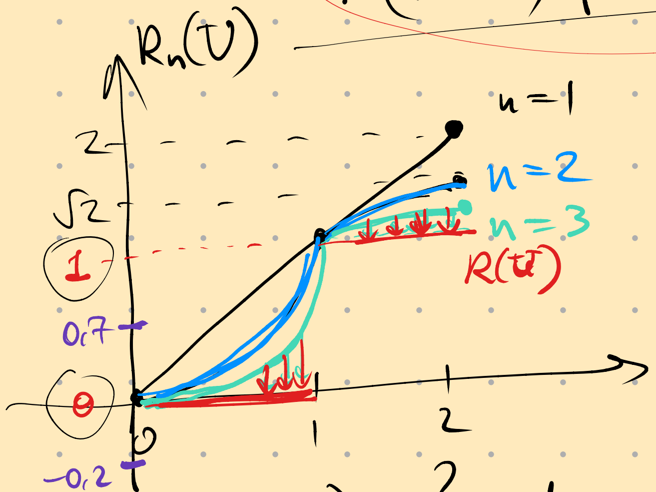
$$R_n \xrightarrow{dist} R \qquad R?$$

реализация

$U = 1.5$ $\quad R_1 = 1.5^1 \quad R_2 = 1.5^{1/2} \quad R_3 = 1.5^{1/3} \ \dots \to 1$

$U = 0{,}7$ $\quad R_1 = 0{,}7 \quad R_2 = 0{,}7^2 \quad R_3 = 0{,}7^3 \ \dots \to 0$

r	0	1
$P(R=r)$	1/2	1/2



$$P(R_n\in[0.7, 1.5]) \xrightarrow{?} \frac{1}{2} = P(R\in[0{,}7, 1.5])$$

$$P(R_n\in[-0{,}2;0{,}7]) \to \frac{1}{2} = P(R\in[-0{,}2;0{,}7])$$

$P(R_n \in [0;1]) = \frac{1}{2} \neq 1 = P(R \in [0;1])$

$R_n \xrightarrow{dist} R$

есть ф. плотн — дискретная.

Офиц. опр. (станд)

$R_n \xrightarrow{dist} R$

у R_n ф-ция распр-ия это F_n

у R ф-ция распр-ия это F.

$F_n(t) \to F(t)$ для $\forall t \in \mathbb{R}$, где $F(t)$ непрерывна.

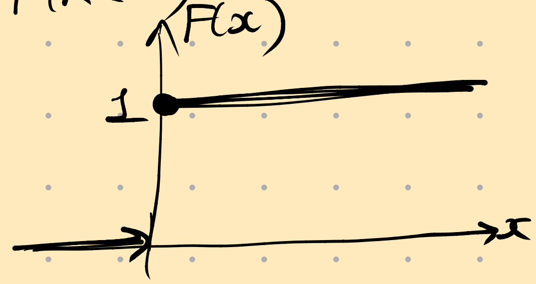
Пример. $R_n \sim Unif[0;\frac{1}{n}]$

F_n?

$R \equiv 0$ ← дискретная

F? $\nexists$ плотн! не сущ.

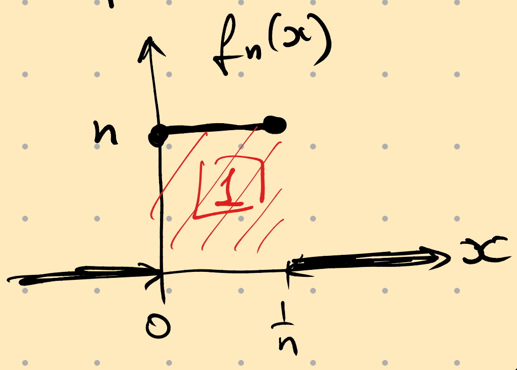
$P(R \leq x)$

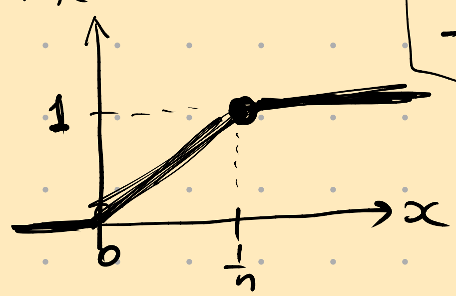


$R_n \sim Unif[0;\frac{1}{n}]$

ф. плотн f_n? ф. распр F_n?

$F_n(x) = P(R_n \leq x)$



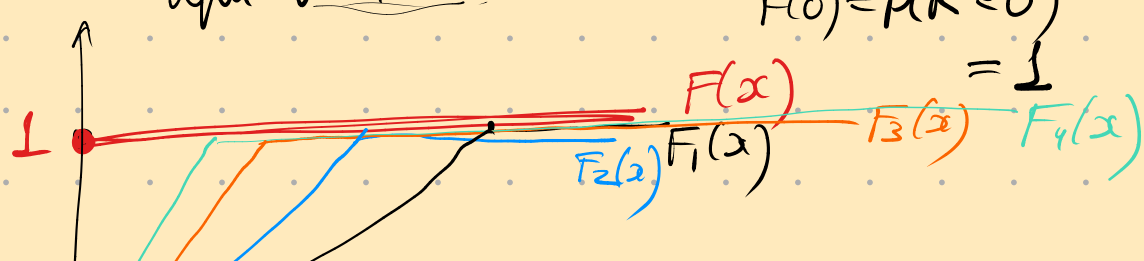


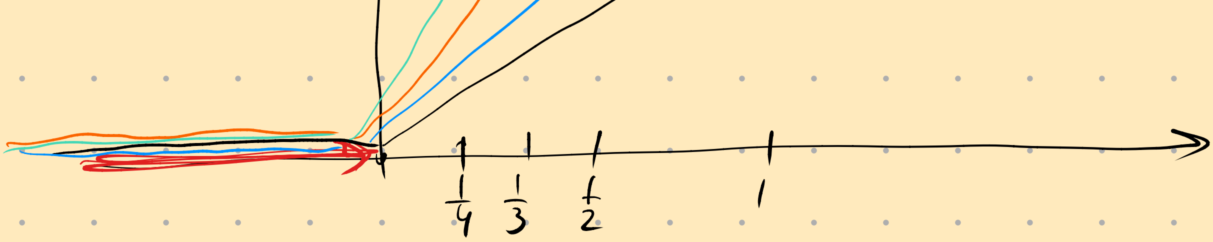
$F_n(x) \to F(x)$?

при $\forall x \neq 0$

$F(x) = P(R \leq x)$

$F(0) = P(R \leq 0) = 1$





$x=0$ — это точка разрыва $F(x)$

$F_n(x) \to F(x)$ во всех точках непрерывности F.

L^2

$$E\big((R_n - 0)^2\big) = E(R_n^2) = \int_0^{1/n} \tau^2 \cdot f_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{1/n} \tau^2 \cdot n \cdot d\tau = \frac{\tau^3}{3}\cdot n \Big|_{\tau=0}^{\tau=\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{3n^2} \to 0$$

a.s.?

$P(\lim R_n$ сущ$)$ → 1 да; → не∃ нет

не достаточно информации

мы не знаем, как зависят R_n между собой!

Сит-ция 1

$U \sim Unif[0;1]$

$R_1 = U \sim Unif[0,1]$

$R_2 = \frac{U}{2} \sim Unif[0,\frac{1}{2}]$

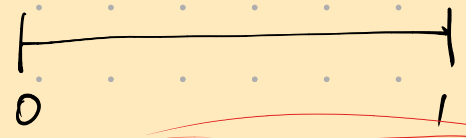
$R_3 = \frac{U}{3} \sim Unif[0,\frac{1}{3}]$

$R_4 = \frac{U}{4} \sim Unif[0,\frac{1}{4}]$

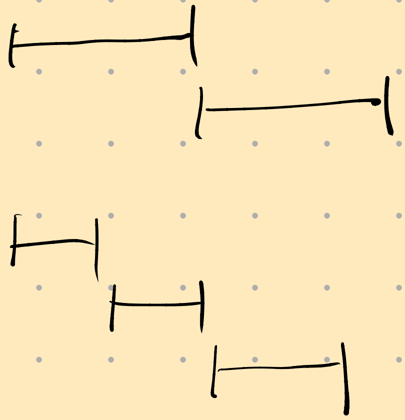
$\vdots$

$U = 0{,}25$ $\quad R_1 = 0{,}25 \quad R_2 = \frac{0{,}25}{2} \quad R_3 = \frac{0{,}25}{3} \ldots \to 0$

Сит-ция 2



$R_1 = U$ $\quad R_1 \sim Unf[0;1]$



$R_2 = \frac{U}{2}$ $\sim Unf[0;\frac{1}{2}]$

$R_3 = \frac{1-U}{3} \sim Unf[0;\frac{1}{3}]$

...

пример.

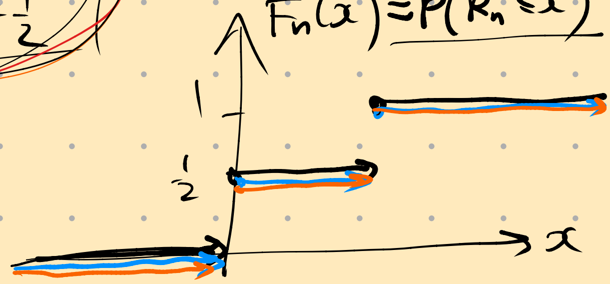
$\forall R_n$

$P(R_n = 0) = \frac{1}{2}$

$P(R_n = 1) = \frac{1}{2}$

$F_n(x) \equiv F(x)$

$F_n(x) = P(R_n \le x)$



$R_n \xrightarrow{dist} R$

$R_n \xrightarrow{as} ?$

ответ зависит от того, как связать R_n между собой.

$P(R_n \le -1) = 0$

$P(R_n \le -0{,}5) = 0$

$P(R_n \le 0{,}3) = \frac{1}{2}$

$P(R_n \le 0{,}7) = \frac{1}{2}$

$P(R_n \le 1{,}5) = 1$

$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{?} F(x)$

$P(R=0) = \frac{1}{2}$

$P(R=1) = \frac{1}{2}$

сит. 1

подбр. монетку 1 раз.

сит 2

подбр монетку 2 раза.

орлом $R_1=R_2=R_3=\ldots=0$

решкой $R_1=R_2=R_3=\ldots=1$.

$P(\lim R_n \text{ сущ})=1$

$R_n \xrightarrow{as} R_1$

сит 3

подбр монетку 1 раз

орлом $R_1=0, R_2=1, R_3=0, \ldots$

решкой $R_1=1$ $R_2=0$ $R_3=1, \ldots$

$P(R_n=1)=\frac{1}{2}$

$p(\lim R_n \text{ сущ})=0$

$R_1=R_3=R_5=R_7=\ldots=$

$=I(\text{решка в 1-м броске})$

$R_2=R_4=R_6=R_8=\ldots=$

$=I(\text{решка во 2-м броске})$

	R_1	R_2	R_3						
ор, ор	0,	0,	0,	0,	0	…			
ор, реш	0,	1,	0,	1,	0,	1,	0,	1	…
реш, ор	1,	0,	1,	0,	1,	0,	1,	0,	1, …
ре, ре	1,	1,	1,	1,	1,	…			

$P(\lim R_n \text{ сущ})=\frac{1}{2}$

$P(R_n=1)\overset{?}{=}\frac{1}{2}$

$R_n \overset{as}{\not\to}$

в определениях as, prob, L^2: важно

$R_1:\Omega\to\mathbb{R}$

$R_2:\Omega\to\mathbb{R}$

$R_3:\Omega\to\mathbb{R}$

в опр-ии dist

$R_1:\Omega_1\to\mathbb{R}$

$R_2:\Omega_2\to\mathbb{R}$

$R_3:\Omega_3\to\mathbb{R}$

$R_4:\Omega_4\to\mathbb{R}$

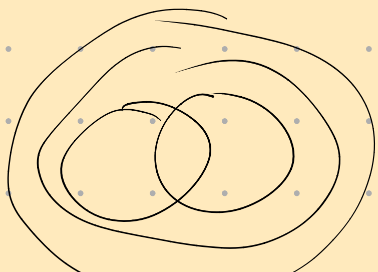
эксперименты м. быть разные!

Теор!

ц) $R_n \xrightarrow{as} R \Rightarrow \operatorname{plim} R_n=R$

ц) $R_n \xrightarrow{L^2} R \Rightarrow \operatorname{plim} R_n=R$

ц) $\operatorname{plim} R_n=R \Rightarrow R_n \xrightarrow{dist} R$



Теор об удобстве plim

1. если левая и правая часть опр-ные то

$$\text{plim}(R_n+S_n) = \text{plim}\, R_n + \text{plim}\, S_n$$

$$\text{plim}(R_n \cdot S_n) = \text{plim}\, R_n \cdot \text{plim}\, S_n$$

$$\text{plim}\,\frac{R_n}{S_n} = \frac{\text{plim}\, R_n}{\text{plim}\, S_n}$$

2. если g - непр. ф-ция и обе части сущ.

$$\text{plim}\, g(R_n) = g(\text{plim}\, R_n)$$

3. если последов-сть неслуч-ая то $\text{plim}\, R_n = \lim R_n$

4. закон больших чисел (ЗБЧ) (в слабой форме)
Weak Law of Large Numbers. WLLN

если $X_1, X_2, X_3 \ldots$ независимы и одинаково распределены с $E(X_n)=\mu$
и $R_n = \dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \overline{X}_n$

то $\text{plim}\, R_n = \text{plim}\, \overline{X}_n = \mu$

об удобстве предела почти наверное. (as)

1. если $R_n \xrightarrow{as} R$, $S_n \xrightarrow{as} S$ то $R_n + S_n \xrightarrow{as} R+S$

$$R_n \cdot S_n \xrightarrow{as} R \cdot S$$

$$\frac{R_n}{S_n} \xrightarrow{as} \frac{R}{S} \quad \text{(обе части опр-ны)}$$

3. " если посл-я R_n не случ, и $\lim R_n = R$, то $R_n \xrightarrow{as} R$

4. " Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)

strong law of large numbers.

Если $X_1, X_2, \ldots$ незав. один. расп с $E(X_n)=\mu$ и $R_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \bar{X}_n$

то $R_n = \bar{X}_n \xrightarrow{as} \mu$

② Если g - непр. ф-ция и $R_n \xrightarrow{as} R$, то

$$g(R_n) \xrightarrow{as} g(R)$$

можно переставить as-предел и непр-ую $g(\cdot)$

Центральная Предельная Теорема. (про dist)
(Central limit theorem.)

Если $X_1, X_2, \ldots$ незав. один. распределены с $E(X_i)=\mu$ и $Var(X_i)=\sigma^2$ и

$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$,

то $$R_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{dist} N(0;1)$$

Упр. $X_1, X_2, \ldots$ незав. один. расп.

x	-1	0	1
$P(X_i=x)$	0,2	0.6	0.2

$E(X_1^2) = 0,4$ $[0,2\cdot 1+0,6\cdot 0+0,2\cdot 1]$

$S_{200} = X_1+X_2+\ldots+X_{200}$

найдите (примерно) $P(S_{200} \geq 20)$?
[комп]

ЦПТ. $\frac{S_{200} - E(S_{200})}{\sqrt{Var(S_{200})}}$ примерно $N(0;1)$

$$E(S_{200}) = E(X_1 + \dots + X_{200}) = EX_1 + \dots + EX_{200} =$$
$$= 200 \cdot EX_1 = 0$$
$$EX_1 = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}2 = 0$$

$$Var(S_{200}) = Var(X_1 + \dots + X_{200}) =$$ билинейная Cov
$$= Cov(X_1 + \dots + X_{200},\ X_1 + X_2 + \dots + X_{200}) =$$
$$= Cov(X_1, X_1) + \underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{=0} + \dots + Cov(X_n, X_n) =$$

т.к. X_1 и X_2 незав.

$Cov(X_2, X_7) = 0$ т.к. X_2 и X_7 незав.

$$= \underbrace{Var X_1}_{Cov(X_1, X_1)} + Var X_2 + \dots + \underbrace{Var X_n}_{Cov(X_n, X_n)} =$$
$$= n \cdot Var X_1 = n \cdot 0{,}4 = 200 \cdot 0{,}4 = 80$$

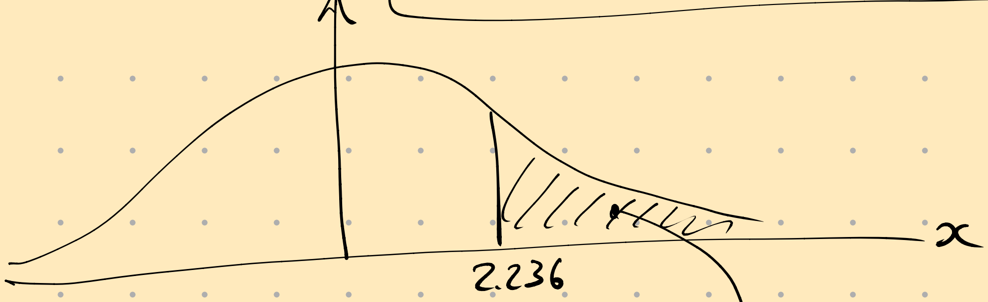
$$Var X_1 = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = E(X_1^2) - 0^2 = E(X_1^2) = 0{,}4.$$

Ц.П.Т.
$$\frac{S_{200} - \overbrace{0}^{E(S_n)}}{\sqrt{\underbrace{80}_{Var(S_n)}}} \overset{approx}{\sim} \boxed{N(0;1)}$$

$$P(S_{200} \geq 20) = P\left(\boxed{\frac{S_{200} - 0}{\sqrt{80}}} \geq \frac{20 - 0}{\sqrt{80}}\right) \approx$$
Ц.П.Т.
$$\approx P\left(N(0;1) \geq \frac{20}{\sqrt{80}}\right) =$$

$$\frac{20}{\sqrt{80}} \approx 2{,}236$$
$$= P(N(0;1) \geq 2.236) =$$

$N(0;1)$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



$$= \int_{2.236}^{\infty} f(x)\,dx \quad !!$$

свели вер-ю задачу к интегрир-ию.

A) оставить как есть !!

B) численно на компе

руками явно не берётся

py

1 from scipy import stats

stats.norm.cdf $\leftarrow F(x) = P(N \le x)$

Q: $P(N \geq 2.236) = 1 - P(N \le 2.236) = 1 - F(2.236)$

2 1 − stats.norm.cdf(2.236)

excel (ru)
1 − НОРМРАСП(2.236)

R 1 − pnorm(2.236)

C) дедушкин / бабушкин. рецепт

по таблицам функции F.

ответ: $1 - F(2.236)$

стр 19 в кэмбр. таблицах.

$F(\boxed{2.2}\boxed{3}\boxed{6})$

столбец 3

строка 2.2 → 0,9871

6 ADD

+0,0002

$F(2.236) \approx 0{,}9873$

(D) численно руками.

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4/4}{2!} - \frac{x^6/8}{3!}} \dots\dots$$

$$\int_{2.236}^{10} T_k(x)\,dx$$

[1] from scipy import stats

[2] $F = \boxed{\text{stats.norm.cdf}}$

[3] $1 - F(2.236)$ answ

$F(2.236) = \underline{0,9873}\,24114\dots\dots$