$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)}_{\frac{7}{12}}\underbrace{E(Y)}_{\frac{7}{12}} =$$

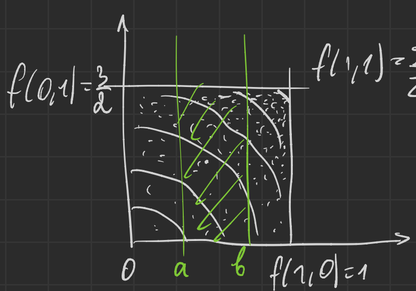
$$E(XY) = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1} xy\,(x+y)\,dy\,dx =$$

<u>лекция</u>

У пары (X,Y) есть совм. плотн $f(x,y)$

<u>Упр</u> Найдите $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+3y^2}{2}, & x \in [0,1],\ y \in [0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$

$$\frac{2x+3y^2}{2} = const \qquad 2x+3y^2 = const \qquad x = const - \frac{3}{2}y^2$$

$\mathbb{E}(X) \in [\frac{1}{2}; 1] \quad \mathbb{E}(Y) \in [\frac{1}{2}; 1]$.

$$f_X(x) \nearrow P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$f_X(x) \searrow P(X \in [a,b]) = f(a)\cdot(b-a) + o(b-a)$$

$$P(X \in [a,b]) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=a}^{b} \frac{2x+3y^2}{2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{1} \frac{1}{2}\left(x^2 + 3y^2x\right)\Big|_{x=a}^{b} dy = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} \left(b^2 + 3y^2b - a^2 - 3y^2a\right) dy =$$

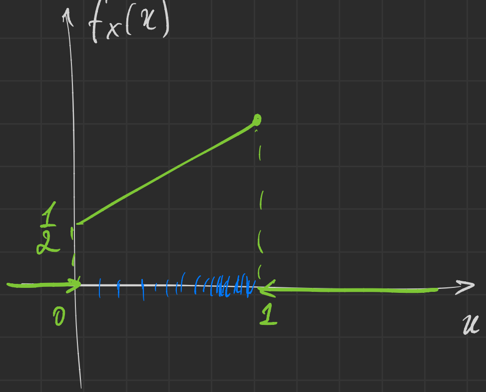
$$= \frac{1}{2}\left(b^2y + y^3b - a^2y - y^3a\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(b^2 + b - a^2 - a\right)$$

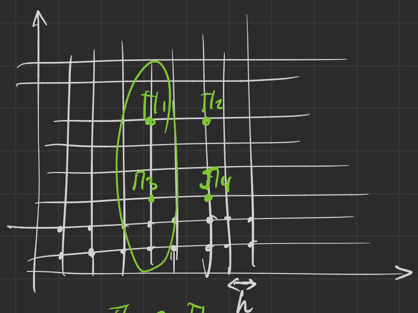
$$P(X \in [a,b]) \nearrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left(\frac{b^2+b}{2} - \frac{a^2+a}{2}\right)$$

$$P(X \in [a,b]) \searrow f(a)(b-a) + o(b-a)$$

$$F(x) = \frac{x^2+x}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{2}(2x+1) = x + \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$





$$P(X^d \in [a,b]) = P(X^d \in [a,b],\ Y^d = t)$$

$$= \sum_t P(X^d = a,\ Y^d = t) \cdot \frac{b-a}{h}$$

$h \to 0$

$\Pi_3 \sim \Pi_4$

$\Pi_1 \sim \Pi_2$

h - размер сетки

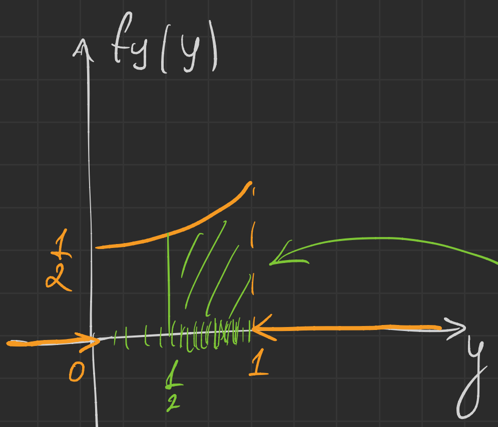
Теорема. Если $f(x,y)$ совместная плотность (X,Y), то $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x,\ Y=y) \leftarrow \text{дискретн.}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2x + 3y^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3y^2 x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 3y^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2$$



$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$P(y > \frac{1}{2}) =$

Упр.

	$Y=1$	$Y=3$
$X=1$	0,1	0,2
$X=2$	0,3	0,4

$\mathbb{E}(Y|X)$ $\quad E(Y|X=1)=\alpha$

$E(Y|X=2)=\beta$

$\begin{cases} \alpha, \text{ если } x=1 \\ \beta, \text{ если } x=2 \end{cases}$

Аналоги

плотности	дискретн
$f(x)$	$P(X=x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = E(X) = \sum_x x P(X=x)$$

$f(x,y)$	$P(X=x, Y=y)$
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$	$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$
$f(y\mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$	$P(Y=y\mid X=x) = \dfrac{P(Y=y, X=x)}{P(X=x)}$

Опр. Условная плотность $f(y|x) = \dfrac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$

$f_{Y|X}(y|x)$

Теорема. Если у (X,Y) есть условн. плотность $f(y|x)$, то $E(Y|X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y|X)\,dy$

обычн. ф-я 2-х пер-х

СВ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+3y^2}{2}, & \binom{x}{y} \in [0,1]^2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}+x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) $f(y|x) = ? = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\frac{2x+3y^2}{2}}{\frac{1}{2}+x} = \begin{cases} \dfrac{2x+3y^2}{1+2x}, & x \in [0,1],\ y \in [0,1] \\ \text{не опр.}, & x<0 \text{ и } x>1 \\ 0, & y \notin [0,1],\ x \in [0,1] \end{cases}$

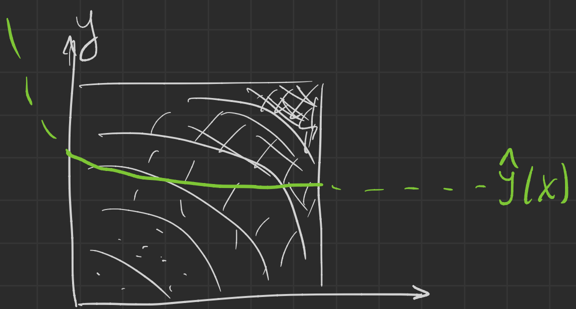
б) $E(Y|X) = ?$

в) Проинтерпретировать

б) $E(Y|X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y|x)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \dfrac{2X+3y^2}{1+2X}\, dy =$

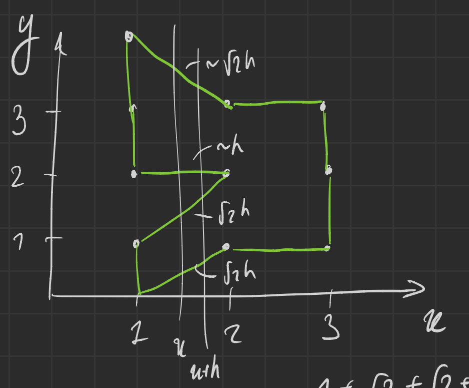
$$= \frac{X + \frac{3}{4}}{1+2X} = \frac{4X+3}{4+8X}$$

$$E(Y|X) = \frac{4X+3}{4+8X} = \hat{y}(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8X+4}$$



$E(Y|X=0) = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $E(Y|X=1) = \frac{7}{12}$

Упр. $\binom{X}{Y}$ выбир. ся равномерно на ломаной



а) $(Y|X=1)$, $(Y|X=2)$, $(Y|X=2{,}5)$, $(Y|X=3)$.

б) $E(Y|X)$

в) есть ли у (X,Y) совм. плотность?

нет

$1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+1$

$(y \mid X=2)$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$P(Y=y, X=2)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$E(Y \mid X=2) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3} + 1 = 2$$

$(y \mid X=2,5)$	$y=1$	$y=3$
$P(Y=y \mid X=2,5)$	$1/2$	$1/2$

$$E(Y \mid X=2,5) = 2$$

$$(Y \mid X=3) \sim Unif[1,3]$$

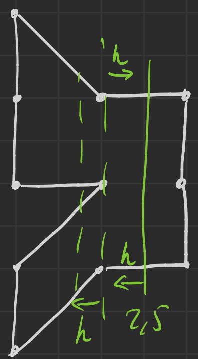
$$E(Y \mid X=3) = 2$$

$$(Y \mid X=1) \sim Unif([0,1] \cup [2,4])$$

$$E(Y \mid X=1) = \frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

a) $$E(Y \mid X) = \begin{cases} \frac{13}{6}, & X=1 \\ 2, & X \in (2,3] \\ \cancel{B}(x), & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}x + \frac{1}{3\sqrt{2}+1}\cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}(-x+5)$$



$E(Y|X)$ – семейство СВ

$P(X \in [2{,}5-h, 2{,}5])$

Энтропия

X с ф-ей плотности $f(x)$

X – дискр.

$$H(X) = -\sum_x \ln(p(x))p(x)$$

$$p(x) = P(X=x)$$

$$CE(p\|q) = -\sum_x \ln q(x)\cdot p(x)$$

$q(x) = Q(X=x)$ $p(x) = P(X=x)$

Опр. Энтропией СВ с ф-ей плотности $f(x)$ называется:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))\, f(x)\, dx$$

Опр. Энтропией [дифференциальной] СВ называется: $H(X) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))\, f(x)\, dx$

Опр. $p(x)$, $q(x)$ — две плотности

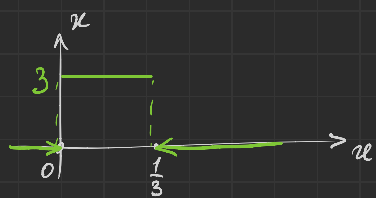
$CE(p\|q)$ — кросс энтропия из q в p.

$$CE(p\|q) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln(q(x))\, p(x)\, dx$$

$X \sim Unif\left[0, \frac{1}{3}\right]$

а) $f(x) \overset{?}{=}$

б) $H(X) \overset{?}{=}$



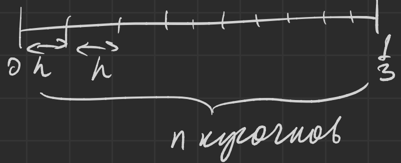
$$= \begin{cases} 3, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H(X) = -\int\limits_{0}^{1/3} 3 \ln 3\, dx = -3x \ln 3 \Big|_0^{\frac{1}{3}} = -\ln 3 < 0 \ (\approx -1{,}1)$$

$h \approx 0$ погрешность

$X^d \leftarrow$ дискретные

$$H(X^d) \stackrel{?}{=} -\sum_{x^d} P(X^d = x^d) \cdot \ln P(X^d = x^d)$$



$$h = \frac{1/3}{n}$$

$$P(X^d = x^d) = f(x^d) \cdot h + o(h)$$

[в нашем $\frac{1}{n}$]

$$= P(X \in [x^d; x^d + h]) = f(x^d) \cdot h + o(h)$$

$$H(X^d) = -\sum_{x^d} \left(f(x^d) \cdot h + o(h)\right) \ln\left(f(x^d) \cdot h + o(h)\right) \approx$$

$$\approx -\sum_{x^d} h f(x^d) \ln\left(f(x^d) \cdot h\right) = -\sum_{x^d} h f(x^d) \ln f(x^d) -$$

$$- \sum_{x^d} \underbrace{h f(x^d)}_{\text{площадь} = 1} \cdot \ln h \approx -\sum f(x^d) \ln f(x^d)\, h - \ln h =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x^d)\, dx - \ln h$$

$$\overbrace{H(X^d)}^{\text{энтропия}} \approx \overbrace{H(X)}^{\text{дифф. энтропия}} - \ln h$$

Цель: отгадать X с точностью до $e^{-5} = h$

$5 - 1{,}1 = 3{,}9$ вопроса

с точностью до e^{-10}

$10 - 1{,}1 = 8{,}9$ вопросов

Упр. $q(x), p(x)$ – ф-и плотности

$CE(p\|q) = -3$

цель отгадать x с точностью x с точностью до e^{-10}, то примерно 7 вопросов.

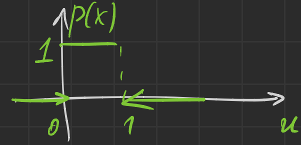
Опр. Дивергенция Кульбака Лейблера (Kullback Leibler)

$$D_{KL}(p\|q) = KL(p\|q) = CE(p\|q) - H(p) \geq 0$$

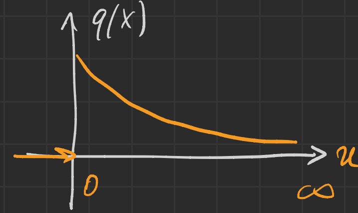
среднее кол-во лишних вопросов из-за неопр. стратегии.

$$= CE(p\|q) - \ln h - (H(p) - \ln h) \geq 0$$

Упр. $p: X \sim Unif[0,1]$



$$q: q(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Хотим отгадать X с точностью до 10^{-9}.

а) $$H(p) = -\int_0^1 p(x) \ln p(x)\, dx = -\int_0^1 \ln 1\, dx = -\ln 1 = 0$$

$$CE(p\|q) = -\int_0^1 p(x) \cdot \ln(q(x))\, dx = -\int_0^1 \ln e^{-x}\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

$$KL(p\|q) = CE(p\|q) - H(p) = \frac{1}{2}$$

а) Сколько вопросов в среднем потреб-ся?
Если Никита знает картину мира.

$$H(X^d) \approx H(X) - \ln h = H(X) - \ln 10^{-9} = H(X) + 9 \ln 10 \approx \text{[нат]}$$

$$\approx 0 + 9\ln 10/\ln 2 \approx 29{,}9 \text{ вопросов}$$
[бит]

б) сколько в сред. лишних вопр. зададим из-за наивности?

$$KL(p\|q) = \frac{1}{2}[\text{нат}] \to \frac{1}{2\ln 2} \approx 0{,}7 \text{ вопросов.}$$