$$E(T_1 \mid T_1 < 1) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

или $$E(T_1 \mid T_1 < 1) = \frac{E(T_1 I(T_1 < 1))}{P(T_1 < 1)} = \frac{\int_0^1 t f(t)\, dt}{P(T_1 < 1)}$$

Лекция

<u>Опр.</u> корреляция (Corr)

$$Corr(X, Y) = (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{\frac{1}{2}} \cdot sign(\alpha_2)$$

$$Bestlin(Y \mid X) = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

$$Bestlin(X \mid Y) = \beta_1 + \beta_2 Y$$

$Y\,[°C]$

$X\,[\%]$

$[°C/\%]$

$$Bestlin(Y \mid X) = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

$$Bestlin(X \mid Y) = \beta_1 + \beta_2 Y$$

$[\%/°C]$

Классическое определение

$$\alpha_2 = \frac{cov(X,Y)}{varX}$$

$$\beta_2 = \frac{cov(X,Y)}{varY}$$

$$Corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{varX \cdot varY}}$$

Теор $Corr(X,Y)$ не измен-ся при смене единиц измерения X или Y.

Упр. $\max Corr(X,Y)$

$\min Corr(X,Y)$

$\square$ $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(\underbrace{(X-EX)^2}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$

$\forall t \quad Var(X-tY) \geqslant 0$

$h(t) = Var(X-tY) = Cov(X-tY, X-tY) \ominus$

Утв. Cov билинейна

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$$

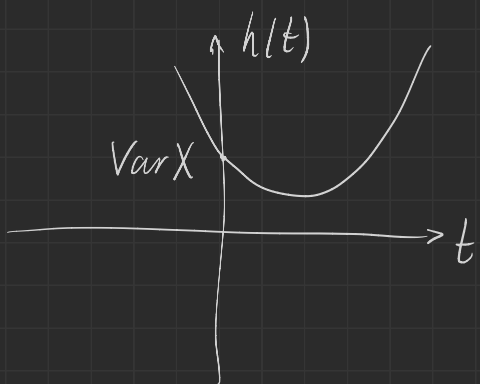
$$Cov(X_1 + X_2, Y) = E((X_1+X_2)\cdot Y) - E(X_1+X_2)EY =$$

$$= E(X_1Y) - E(X_1)EY + E(X_2Y) - EX_2EY$$

$$= Cov(X,X) + Cov(X,-tY) + Cov(-tY,X) + Cov(-tY,-tY) =$$

$$= Var(X) - t\,Cov(X,Y) - t\,Cov(X,Y) + t^2 Var(Y) =$$

$$= t^2 Var(Y) - 2t\,Cov(X,Y) + Var(X)$$ ← парабола



$$\forall t \quad h(t) = Var(X-tY) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{D} \leq 0$$

$$\mathcal{D} = 4Cov^2(X,Y) - 4VarX\,VarY \leq 0$$

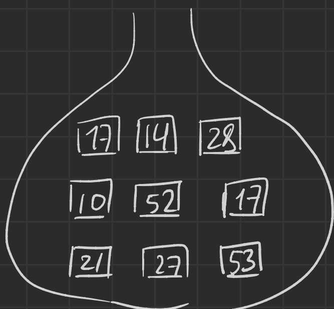
$$Cov^2(X,Y) \leq VarX\,VarY$$

Если $Var X, Var Y > 0$, то:

$$-1 \le Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X \, Var Y}} \le 1 \qquad \blacksquare$$

Утв. Cov билинейна и это круто!

Упр.



а) извлекаю два числа без повторов Y_1, Y_2 (бумажки)

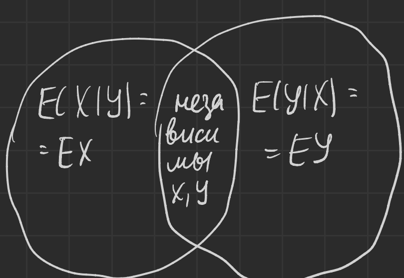
$$Corr(Y_1, Y_2) = ?$$

б) с возможностью повтора

$$Corr(X_1, X_2) = ? = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var X_1 \, Var X_2}}$$

X_1, X_2 - незав. $\Rightarrow Cov = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Corr(X_1, X_2) = 0$



$BestLin(Y|X) = EY$

$BestLin(X|Y) = EX$

$Cov(X,Y) = 0$

X_1, X_2 - незав-мы.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E(X_2|X_1) = EX_2 \\ E(X_1|X_2) = EX_1 \end{array}\right\} \rightarrow Cov(X_1, X_2) = 0$$

a) $\operatorname{Corr}(Y_1, Y_2) = \dfrac{\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\operatorname{Var} Y_1 \operatorname{Var} Y_2}}$

$E Y_1 = \frac{1}{9} \cdot 17 + \frac{1}{9} \cdot 14 + \ldots$

$E(Y_1^2) = \frac{1}{9} \cdot 17^2 + \frac{1}{9} \cdot 14^2 + \ldots$

$\operatorname{Var} Y_1 = E(Y_1^2) - (E Y_1)^2$

$E(Y_1 Y_2) = \frac{1}{9 \cdot 8} 17 \cdot 14 + \frac{1}{9 \cdot 8} \cdot 17 \cdot 28 + \ldots$

$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) \to > 0$

$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) \to < 0$ имя.

$\operatorname{Cov}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_9, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_9) = \operatorname{Cov}(239, 239)$

$= \operatorname{Var}(239) = 0$

$\underbrace{\operatorname{Cov}(Y_1, Y_1)}_{\operatorname{Var} Y_1} + \operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) + \ldots = 0$

v	17		52
$P(Y_1 = v)$	$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{9}$

v	17		52
$P(Y_2 = v)$	$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{9}$

	v		52
$P(y_2=v \mid y_1=52)$			0

$$E(y_2 \mid y_1=52) < E(y_1)$$

$$Cov(y_1,y_1) + Cov(y_1,y_2) + \ldots = 0$$

$$9Var(y_1) + 72\,Cov(y_1,y_2) = 0$$

$$Cov(y_1,y_2) = -\frac{9}{72}Var(y_1)$$

$$Corr(y_1,y_2) = \frac{-\frac{9}{72}Var(y_1)}{\sqrt{Var\,y_1\,Var\,y_2}} = -\frac{9}{72}$$

<u>Формулы:</u>

$$Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$$

$$Var(X+Y) = Cov(X+Y,X+Y) = Var\,X + 2Cov(X,Y) + Var\,Y$$

$$Var(X-Y) = Cov(X-Y,X-Y) = Var\,X - 2Cov(X,Y) + Var\,Y$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad Var(\alpha X+\beta) = \alpha^2 Var\,X$

X – RV

1 курс

$\mathrm{Cov}(X, Y)$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$$

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X}\sqrt{\mathrm{Var}Y}}$$

Т. Пифагора:

Если $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, то:

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y$$

9 класс

$\langle u, v \rangle \leftarrow$ скалярное произв.

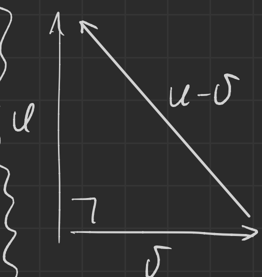
$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$$

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Теор. Пифагора:

Если $u \perp v$, то:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



Аксиома Гершеля-Максвелла.

в $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow$ комп-ты скорости

в $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

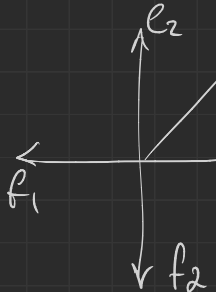
1. Есть совместная плотность
2. Компоненты независимы.
3. $f(x,y)$ зависит только от $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|$. $\Big\{ E(X) = 0$

„Закон распред-я инвариантен к повороту".

Упр.

$f(x,y)$?

1. $E(X) \overset{?}{=} 0$ (по третьей предпосылке)



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_e \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_f \Rightarrow E(X) = E(-X)$

2. $X \overset{?}{\sim} Y$ одинаково распределены?

$f(x,y) \underset{②}{=} f_x(x) \cdot f_y(y)$

f - совм. плотность $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

h - плотность СВ x/y.

$f(x,y) = h(x) \cdot h(y)$

$f(x,y) = g(\underbrace{x^2+y^2}_{\text{длина вектора}})$ из 3-го следует

$h(x) = u(x^2)$

$g(x^2+y^2) = u(x^2) \cdot u(y^2) \quad \forall x,y$

$x=0$: $\quad g(y^2) = u_0 \cdot u(y^2)$

Возьмём $y^2 = x^2+y^2$

$g(x^2+y^2) = u_0 \cdot u(x^2+y^2)$

$u_0 \cdot u(x^2+y^2) = u(x^2) \cdot u(y^2)$

$\forall a,b$: $\quad c\, u(a+b) = u(a) \cdot u(b)$

$\lambda^{a+b} = \lambda^a \cdot \lambda^b \qquad \lambda = e^t$

$e^{t(a+b)} = e^{ta} \cdot e^{tb}$

$$u_0 \cdot u'(a+b) = u'(a) \cdot u(b)$$

$$a=0: \quad u_0 \cdot u'(b) = u'(0) \cdot u(b)$$

$$u'(b) = u(b) \cdot k$$

$$u(b) = u_0 \cdot \exp(kb)$$

$$u(b) = u_0 \cdot \exp(kb)$$

$$h(x) = u(x^2) = u_0 \cdot \exp(k \cdot x^2)$$

$$h(x) = h(-x) \Rightarrow h(x) = h(x^2)$$

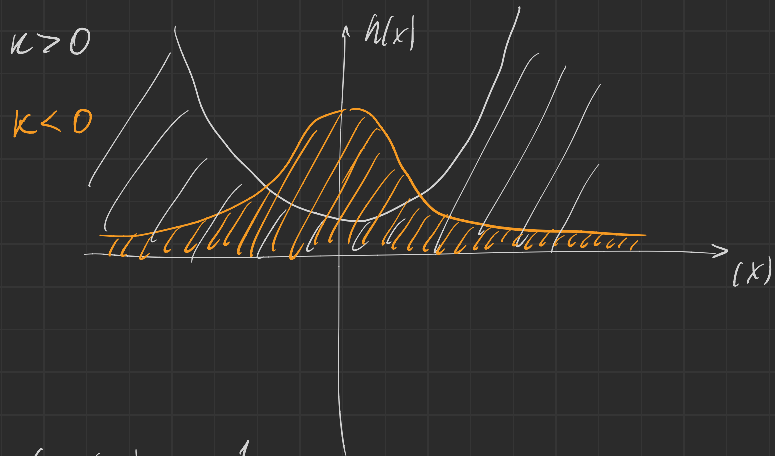
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{=0} = \mathbb{E}(X^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\boxed{x}}_{= u} \cdot \underbrace{\boxed{x \cdot u_0 \cdot \exp(k \cdot x^2)}}_{= v'} dx =$$

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= 1 \\ v &= \frac{u_0 \cdot \exp(kx^2)}{2k} \end{aligned} \right\} = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v u' dx =$$

$$= \frac{x u_0 \exp(kx^2)}{2k} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0 \exp(kx^2)}{2k} dx}_{\frac{1}{2k}} = -\frac{1}{2k} = \sigma^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 1 \text{ , т.к. ф-я плотности}$$



Упр. $Var(X) = -\frac{1}{2k}$

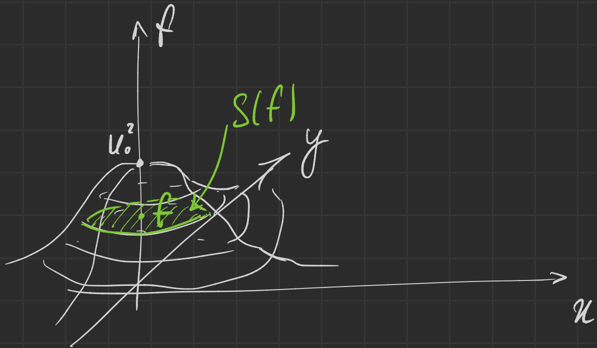
$u_0 = ?$ метод Кавальери + метод Мамченона Имауаманена.

$$k = -\frac{1}{2\sigma^2} \qquad h(x) = u_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$h(y) = u_0 \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(x,y) = u_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(x,y) = u_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$



объём под шляпой = 1

$$\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} u_0^2 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) dx\,dy = 1$$

$$\downarrow$$

путь крестьянина

Путь Кавальери:

$$f = u_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$S(f) = \pi R^2 = \pi\,(x^2+y^2)$$

$$\ln f = 2\ln u_0 - \frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=(2\ln u_0-\ln f)2\sigma^2$$

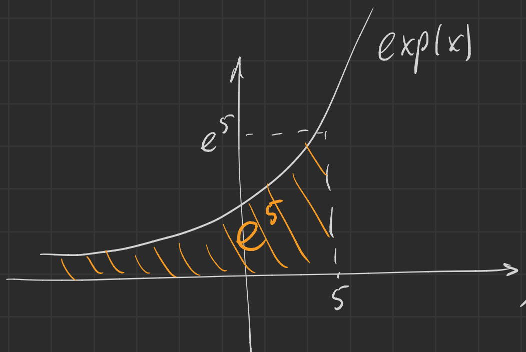
$$S(f)=\pi\cdot(2\ln u_0-\ln f)2\sigma^2$$

$$\int_0^{u_0^2} S(f)df=1$$

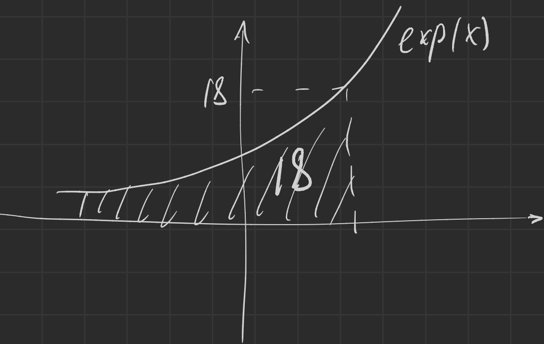
$$\Rightarrow \int_0^{u_0^2}(2\pi\sigma^2\ln u_0-2\pi\sigma^2\ln f)\,df=1$$

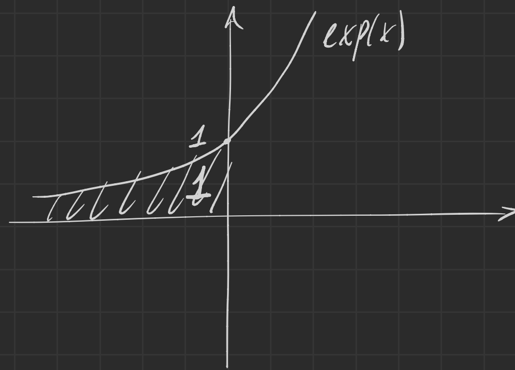
$$2\pi\sigma^2u_0^2\ln u_0^2-2\pi\sigma^2\int_0^{u_0^2}\ln f\,df=1$$

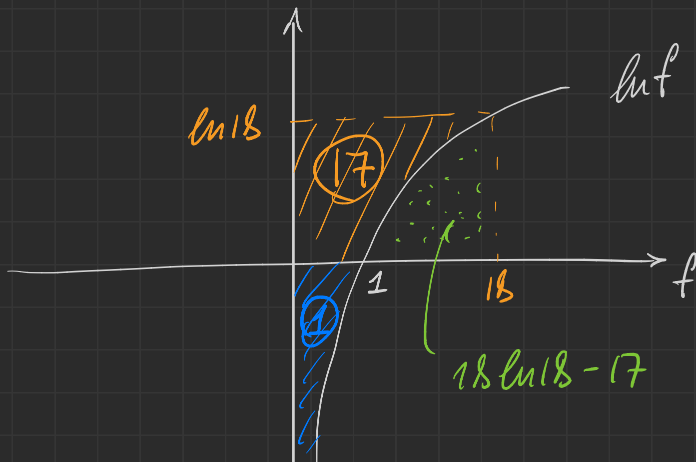
$$\int_0^t \ln f\,df$$



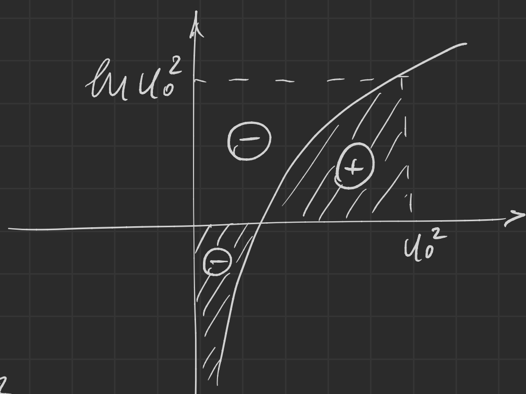
$$(\exp(x))'=\exp(x) \qquad \exp(x)=\int_{-\infty}^{x}\exp(t)dt$$







$$\int_0^{u_0^2} \ln f \, df =$$



$$= u_0^2 \cdot \ln u_0^2 - u_0^2$$

$$2\pi\sigma^2 u_0^2 \ln u_0 - 2\pi\sigma^2 \left(u_0^2 \ln(u_0^2) - u_0^2 \right) = 2\pi\sigma^2 u_0^2$$

$$\boxed{K_0^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2}}$$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

<u>Опр.</u> Если вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ удовлетв. предпосылкам:
(Гершеля – Максвелла)

1. Есть совместная плотность
2. компоненты независимы
3. Закон распредел. вектора инвариантен к повороту
4. $Var(x_i) = 1$

То закон распред. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется [многомерным] <u>стандартным нормальным</u> распределением. [распред. Гаусса]

$$X \sim N(0; I)$$

← identity matrix

вектор из нулей

единичная матрица

$$E(X) = \begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$var(X) = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{n \times n} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2 \cdot 1}\right)$$

$$f(x, y) = u_0^2 \exp\left(\frac{-x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$u_0^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \qquad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

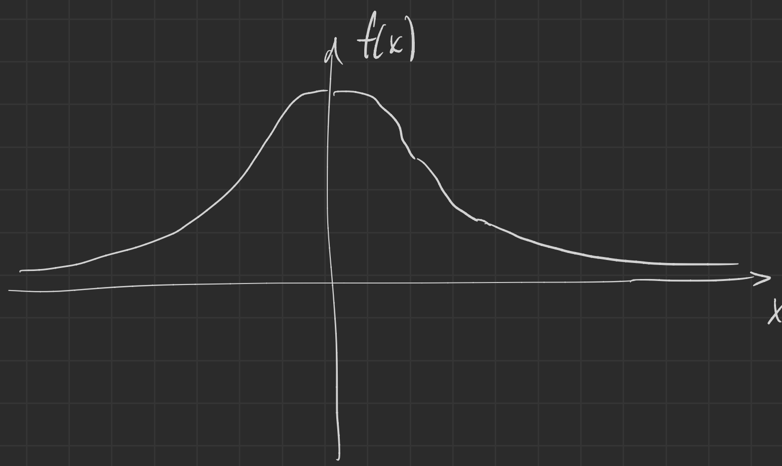
Опр. X — одномерная СВ.

X имеет стандартное нормальное распределение.

$$X \sim N(0, 1)$$

$EX = 0$ $\quad$ $Var(X) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



Опр. $\quad X \sim N(0, 1)$

Утв. $\quad Y = \mu + \sigma X$

а) $E(Y) = \mathbb{E}(\mu) + \sigma \cancelto{0}{\mathbb{E}(X)} = \mu$

б) $Var(Y) = Var(\mu + \sigma X) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2$

$$\boxed{Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var X}$$

в) $f_Y(y) = ?$

probability element
элемент вер-ти

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$P(X \in [x; x+dx]) + o(dx)$$

$$x = \frac{y-\mu}{\sigma}$$

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right) d\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx = P(X \in [a,b]) \\ &\int_{-\infty}^t f(x)\,dx = P(X \le t) = F(t) \end{aligned}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

<u>Упр.</u> $X \sim ?$

$$f(x) = const \cdot \exp(-x^2 + 6x)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(y^2\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) + y\frac{\mu}{\sigma^2} + const\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} = 1 \\ \frac{\mu}{\sigma^2} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^2 = \frac{1}{2} \\ \mu = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \sim N\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

Упр. (Лемма Стейна)

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

Выразите $E(X \cdot q(x))$ через $E(q'(x))$

$q(x)$ — полином

$$\mathbb{E}(X q(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x}_{} \cdot q(x) \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{u'} =$$

$$= q(x)\left(-f(x)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} q'(x) \cdot (-f(x)) \, dx \ominus$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ominus\ 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} q'(x) \cdot f(x) \, dx = \sigma^2 \mathbb{E}(q'(x))$$

т.е. $\mathbb{E}(X q(x)) = \sigma^2 \mathbb{E}(q'(x))$

Упр. $X \sim N(0, 8)$

$$\mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X \cdot X^2) = 8 \cdot \mathbb{E}(2X) = 16\,\mathbb{E}(X) = 0$$

$$\mathbb{E}(X^4) = \mathbb{E}(X \cdot X^3) = 8\,\mathbb{E}(3X^2) = 24\,\mathbb{E}(X \cdot X) = 24 \cdot 8\,\mathbb{E}(1) =$$

$$= 192$$

$$\mathbb{E}(X^{2026}) = \mathbb{E}(X \cdot X^{2025}) = \sigma \cdot \mathbb{E}(2025 \cdot X^{2024}) =$$

$$= \sigma \cdot 2025\,\mathbb{E}(X^{2024}) = \ldots = \sigma^{1013} \cdot 2025 \cdot 2023 \cdot 2021 \cdot \ldots \cdot 1 =$$

$$= \sigma^{1013}\, 2025!!$$