

Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор, продолжительность: 120 минут.

1. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2, & \text{если } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) [3] Найдите функцию плотности $f_X(x)$ и условную функцию плотности $f(y | x)$.
- б) [5] Найдите $\text{Corr}(X, Y)$ и $\mathbb{E}(Y | X)$.
- в) [2] Найдите значение функции распределения $F(0.5, 0.5)$.

2. Величина X имеет функцию плотности $f(x) = 2x$ на отрезке $[0, 1]$.

- а) [4] Найдите энтропию величины X .
- б) [4] Сколько в среднем вопросов нужно задать, чтобы угадать X с точностью до 10^{-6} , при использовании оптимальной стратегии?
- в) [2] Как примерно выглядит первый вопрос для стратегии из пункта (б)?

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(3, 16)$.

- а) [5] Найдите $\mathbb{E}(X^2)$, $\text{Cov}(X, X^2)$.
- б) [5] Найдите вероятности $\mathbb{P}(X > 3)$, $\mathbb{P}(X > 7)$.

Уточнение: выразите все вероятности из пункта (б) с помощью стандартной нормальной функции распределения и найдите их, используя таблицы.

4. Вектор $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеет многомерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, C)$, где $\mu = (1, 2, 3)$ и $C = \begin{pmatrix} 40 & 1 & -1 \\ & 20 & 0 \\ & & 30 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим вектор $Y = (Y_1, Y_2) = (X_1 - X_2, X_2 - X_3)$.

- а) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}Y$ и ковариационную матрицу $\text{Var} Y$. Как распределён вектор Y ?
- б) [6] Найдите $\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3)$ и $\text{Cov}(X_1^2, X_3)$.

5. Мимо комиссара Жиберы независимыми пуассоновскими потоками проезжают такси белого и жёлтого цвета.

Белые — с интенсивностью $\lambda_W = 2$ за 10 минут, жёлтые — с интенсивностью $\lambda_Y = 3$ за 10 минут.

- а) [2] Сколько в среднем ждать первое приехавшее такси (любого цвета)?
- б) [4] Какова вероятность того, что первое жёлтое такси приедет раньше первого белого?
- в) [4] Какова вероятность того, что до первого белого приедет ровно два жёлтых такси?

6. Оставшееся количество правильного мёда X имеет функцию плотности $f(x) = 2x$ на отрезке $[0, 1]$ (кг). У Винни-Пуха в голове опилки и он не может запомнить числа больше, чем 0.5. Если $X > 0.5$, то вместо точного значения X Винни-Пух запоминает равновероятно либо 0.1, либо 0.2. Обозначим с помощью Y значение, которое запомнил Винни-Пух.

- а) [4] Найдите функцию распределения Y .
- б) [6] Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\text{Var}(Y)$.