

Домашнее задание 1

Дедлайн: 2025-03-20, 21:00.

Оцениваемая часть:

1. В красном мешке у Деда Мороза 5 красных и 4 синих шара, а в синем мешке — 3 красных и 10 синих шаров. Сначала Дед Мороз выбирает один из мешков равновероятно. Затем Дед Мороз достаёт из выбранного мешка один шар. А затем Дед Мороз достаёт ещё два шара из *другого* мешка.

Обозначим R — общее число красных извлечённых шаров, и B — общее число синих шаров.

- (a) Составьте табличку распределения случайной величины R .
- (b) Найдите $\mathbb{P}(R - \text{чётное})$, $\mathbb{E}(R)$, $\mathbb{E}(2B + 7)$, $\mathbb{E}(R \cdot B)$.
- (c) Найдите $\mathbb{P}(R \geq 1, B \geq 1)$, $\mathbb{E}(R \cdot I(B \geq 1))$.

Напоминалочка: $I(A)$ — индикатор события A , случайная величина, равная 1, если событие A произошло и 0 — иначе.

2. У Илона Маска две монетки: A -монетка выпадает орлом с вероятностью 0.3, B -монетка выпадает орлом с вероятностью 0.4. Каждая из монеток выпадает либо решкой, либо орлом. Всего Илон делает 100 подбрасываний. Сначала Илон Маск подбрасывает монетку A . Затем он действует по простому правилу: если выпал орёл, то следующей будет подброшена монетка A , если выпала решка, то следующей будет подброшена монетка B . Обозначим X — общее число выпавших орлов, Y — общее число орлов выпавших на монетке B .

- (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(Y)$.
- (b) Найдите $\mathbb{E}(XY)$.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Маши две монетки: золотая и серебряная. Сначала Маша подкидывает золотую монетку. Если золотая монетка выпала орлом, то Маша подкидывает серебряную монетку один раз. Если золотая монетка выпала решкой — то подкидывает серебряную два раза.

Пусть X — общее количество выпавших орлов на золотой и серебряной монетках.

- (a) Найдите все возможные значения X и их вероятности.
- (b) Каково ожидаемое количество выпавших орлов?

4. Вспомним свойство аддитивности вероятности. A : Если задан набор несовместных событий $A_1, A_2, \dots, (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j)$, то $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

Докажите, что свойство аддитивности эквивалентно свойству B и свойству C .

B : Если задан набор вложенных событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \dots$, то $\lim_i \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(\lim_i B_i)$.

C : Если задан набор вложенных событий $\dots C_3 \subseteq C_2 \subseteq C_1$, то $\lim_i \mathbb{P}(C_i) = \mathbb{P}(\lim_i C_i)$.

5. В шкатулке у Маши 100 пар серёжек. Каждый день утром она выбирает одну пару наугад, носит ее, а вечером возвращает в шкатулку. Проходит год.

- (a) Сколько в среднем пар окажутся ни разу не надетыми?
 - (b) Сколько в среднем пар окажутся надетыми не менее двух раз?
6. Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников один раз стреляет в случайно выбираемую им утку. Охотники целятся одновременно, поэтому несколько охотников могут выбрать одну и ту же утку. Величина Y — количество выживших уток, X — количество попавших в цель охотников.
- (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, если охотники стреляют без промаха.
 - (b) Как изменятся ответы, если вероятность попадания равна 0.7?

Домашнее задание 2

Дедлайн: 2025-03-27, 21:00.

Оцениваемая часть:

1. Аллея из десяти каштанов скоро вся зацветёт! Завтра каждый каштан может либо цвести, либо — нет, независимо от других. Вероятность того, что k -й по счёту каштан цветёт равна $1/k$.
- (a) Найдите ожидаемое количество цветущих каштанов.
 - (b) Если два каштана, стоящих рядом, цветут, то проходящий аллею Хосе де Рибас улыбается и говорит «Très bien!» Сколько раз Хосе в среднем скажет «Très bien»?
2. Мы подбрасываем правильную монетку до тех пор, пока впервые не выпадет последовательность $ННТ$ или $ТНТ$.
- (a) Сколько бросков в среднем потребуется?
 - (b) Какова вероятность того, что эксперимент окончится последовательностью $ННТ$?
 - (c) Сколько в среднем выпадет решек?

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Пети есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0; 1)$. У Васи есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $1/2$. Они одновременно подбрасывают свои монетки до тех пор, пока у них не окажется набранным одинаковое количество орлов. В частности, они останавливаются после первого подбрасывания, если оно дало одинаковые результаты.
- Сколько в среднем раз им придётся подбросить монетку?
4. Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет.
- (a) Како вероятность того, что Илья Муромец будет исключительно мимо спящих Змеев Горынычей, если каждый раз будет выбирать случайную дорогу на развилке?

- (b) Какова вероятность того, что Василиса Премудрая *сможет найти на карте* бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?
5. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других движется по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.
- (a) Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.
- (b) Как изменятся ответы, если вероятность движения по часовой стрелке равна p ?
6. Маша и Даша играют в следующую игру. Правильный кубик подкидывают неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Маша получает сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается и Даша получает сумму, лежащую на кону. Изначально на кону лежит ноль рублей.
- (a) Какова вероятность того, что игра рано или поздно закончится выпадением 6-ки?
- (b) Какова ожидаемая продолжительность игры?
- (c) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши и ожидаемый выигрыш Даши?
- (d) Чему равны ожидаемые расходы организаторов игры?
- (e) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши, если изначально на кону лежит 100 рублей?
- (f) Изменим изначальное условие: если выпадает 5, то сумма на кону сгорает, а игра продолжается. Чему будет равен средний выигрыш Маши и средний выигрыш Даши в новую игру?
-