Домашнее задание 1

Дедлайн: 2025-03-20, 21:00.
Оцениваемая часть:

1. В красном мешке у Деда Мороза 5 красных и 4 синих шара, а в синем мешке — 3 красных и 10 синих шаров. Сначала Дед Мороз выбирает один из мешков равновероятно. Затем Дед Мороз достаёт из выбранного мешка один шар. А затем Дед Мороз достаёт ещё два шара из *другого* мешка.

   Обозначим R — общее число красных извлечённых шаров, и B — общее число синих шаров.

   (a) Составьте табличку распределения случайной величины R.
   (b) Найдите $\mathbb{P}(R - \text{чётное})$, $\mathbb{E}(R)$, $\mathbb{E}(2B+7)$, $\mathbb{E}(R \cdot B)$.
   (c) Найдите $\mathbb{P}(R \geq 1, B \geq 1)$, $\mathbb{E}(R \cdot I(B \geq 1))$.

   Напоминалочка: $I(A)$ — индикатор события A, случайная величина, равная 1, если событие A произошло и 0 — иначе.

2. У Илона Маска две монетки: A-монетка выпадает орлом с вероятностью 0.3, B-монетка выпадает орлом с вероятностью 0.4. Каждая из монеток выпадает либо решкой, либо орлом. Всего Илон делает 100 подбрасываний. Сначала Илон Маск подбрасывает монетку A. Затем он действует по простому правилу: если выпал орёл, то следующей будет подброшена монетка A, если выпала решка, то следующией будет подброшена монетка B. Обозначим X — общее число выпавших орлов, Y — общее число орлов выпавших на монетке B.

   (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(Y)$.
   (b) Найдите $\mathbb{E}(XY)$.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Маши две монетки: золотая и серебряная. Сначала Маша подкидывает золотую монетку. Если золотая монетка выпала орлом, то Маша подкидывает серебряную монетку один раз. Если золотая монетка выпала решкой — то подкидывает серебряную два раза.

   Пусть X — общее количество выпавших орлов на золотой и серебряной монетках.

   (a) Найдите все возможные значения X и их вероятности.
   (b) Каково ожидаемое количество выпавших орлов?

4. Вспомним свойство аддитивности вероятности. A: Если задан набор несовместных событий A_1, A_2, ..., ($A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

   Докажите, что свойство аддитивности эквивалентно свойству B и свойству C.

   B: Если задан набор вложенных событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \ldots$, то $\lim_i \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(\lim_i B_i)$.

   C: Если задан набор вложенных событий $\ldots C_3 \subseteq C_2 \subseteq C_1$, то $\lim_i \mathbb{P}(C_i) = \mathbb{P}(\lim_i C_i)$.

5. В шкатулке у Маши 100 пар серёжек. Каждый день утром она выбирает одну пару наугад, носит ее, а вечером возвращает в шкатулку. Проходит год.

(a) Сколько в среднем пар окажутся ни разу не надетыми?
(b) Сколько в среднем пар окажутся надетыми не менее двух раз?

6. Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников один раз стреляет в случайно выбираемую им утку. Охотники целятся одновременно, поэтому несколько охотников могут выбрать одну и ту же утку. Величина Y — количество выживших уток, X — количество попавших в цель охотников.

   (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, если охотники стреляют без промаха.
   (b) Как изменятся ответы, если вероятность попадания равна 0.7?

Домашнее задание 2

Дедлайн: 2025-03-27, 21:00.
Оцениваемая часть:

1. Аллея из десяти каштанов скоро вся зацветёт! Завтра каждый каштан может либо цвести, либо — нет, независимо от других. Вероятность того, что k-й по счёту каштан цветёт равна $1/k$.

   (a) Найдите ожидаемое количество цветущих каштанов.
   (b) Если два каштана, стоящих рядом, цветут, то проходящий аллею Хосе де Рибас улыбается и говорит «Très bien!» Сколько раз Хосе в среднем скажет «Très bien»?

2. Мы подбрасываем правильную монетку до тех пор, пока впервые не выпадет последовательность HHT или THT.

   (a) Сколько бросков в среднем потребуется?
   (b) Какова вероятность того, что эксперимент окончится последовательностью HHT?
   (c) Сколько в среднем выпадет решек?

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. У Пети есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0; 1)$. У Васи есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $1/2$. Они одновременно подбрасывают свои монетки до тех пор, пока у них не окажется набранным одинаковое количество орлов. В частности, они останавливаются после первого подбрасывания, если оно дало одинаковые результаты.

   Сколько в среднем раз им придётся подбросить монетку?

4. Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет.

   (a) Како вероятность того, что Илья Муромец будет исключительно мимо спящих Змеев Горынычей, если каждый раз будет выбирать случайную дорогу на развилке?

(b) Какова вероятность того, что Василиса Премудрая *сможет найти на карте* бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?

5. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.

   (a) Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

   (b) Как изменятся ответы, если вероятность движения по часовой стрелке равна p?

6. Маша и Даша играют в следующую игру. Правильный кубик подкидывают неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Маша получает сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается и Даша получает сумму, лежащую на кону. Изначально на кону лежит ноль рублей.

   (a) Какова вероятность того, что игра рано или поздно закончится выпадением 6-ки?

   (b) Какова ожидаемая продолжительность игры?

   (c) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши и ожидаемый выигрыш Даши?

   (d) Чему равны ожидаемые расходы организаторов игры?

   (e) Чему равен ожидаемый выигрыш Маши, если изначально на кону лежит 100 рублей?

   (f) Изменим изначальное условие: если выпадает 5, то сумма на кону сгорает, а игра продолжается. Чему будет равен средний выигрыш Маши и средний выигрыш Даши в новую игру?

Домашнее задание 3

Дедлайн: 2025-04-05, 21:00.
Оцениваемая часть:

1. Таблица совместного распределения пары величин X и Y имеет вид

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0.1	0.2	0.3
$Y=1$	0.2	0.1	0.1

   (a) Найдите $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X \geq 0)$, $\mathbb{E}(Y \mid X \geq 0)$.

   (b) Найдите $\mathbb{P}(X \geq 0 \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

   (c) Найдите $\mathbb{E}(1/(X + 2) \mid Y = 0)$, $\mathbb{E}(1/(X + 2) \mid Y)$.

2. Дональд Трамп подкидывает монетку бесконечное число раз. Монетка выпадает орлом с вероятность 0.4 и решкой — с вероятностью 0.6. Обозначим X — номер броска, когда впервые выпал орёл, а Y — индикатор того, что орёл был в третьем броске.

   (a) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathbb{E}(X)$.

   (b) Найдите $\mathbb{P}(X \geq 5 \mid Y = 1)$ и $\mathbb{P}(X \geq 5 \mid Y)$.

(c) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 5)$, $\mathbb{E}(X \mid Y = 1)$.

(d) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. Ген карих глаз доминирует ген синих. Следовательно, у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb — карие. У диплоидных организмов (а мы такие :)) одна аллель наследуется от папы, а одна — от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына — кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке.

   Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?

4. У Ивана Грозного n бояр. Каждый боярин берёт мзду независимо от других с вероятностью $1/2$.

   (a) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если случайно выбранный боярин берёт мзду?

   (b) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если хотя бы один из бояр берёт мзду?

5. На праздник ровно 5% жён итальянских мафиози получили в подарок цветы. Цветы получают в подарок только от мужа. Также известно, что 0.5% жён получили в подарок пирожные, причём половина жён получила их от мужа, а половина — от брата. Среди жён, получивших пирожные от мужа, 90% получили в подарок цветы. Среди жён, получивших пирожные от брата, 5% получили в подарок цветы.

   (a) Кармела получила в подарок цветы. Какова условная вероятность того, что она получила пирожные в подарок от мужа?

   (b) Талия получила в подарок цветы и пирожные. Какова условная вероятность того, что она получила пирожные в подарок от мужа?

6. Задача Эльханана Мосселя.

   Ты подбрасываешь кубик до первой шестерки.

   (a) Чему равно ожидаемое общее количество сделанных за игру бросков?

   (b) Чему равно ожидаемое общее количество сделанных за игру бросков, если за время игры ни разу не выпало нечётное число?

   (c) Как изменится ответ, если за время игры было a нечётных бросков?

Домашнее задание 4

Дедлайн: 2025-04-19, 21:00.
Оцениваемая часть:

1. Завтрашняя цена акции — случайная величина с функцией плотности $f(x) = \frac{3}{4}\max\{x(2-x), 0\}$.

   (a) Постройте график функции плотности;

   (b) Обозначим Васино благосостояние завтра величиной Y. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ и функцию распределения Y в каждой из ситуаций:

A: У Васи есть 10 акций;

B: У Васи нет акций, но есть один опцион-пут на завтра со страйком 1.2 рубля.

Опцион-пут — это право продать одну акцию по страйк-цене. Если страйк-цена опциона-пут ниже фактической цены акции, то опцион-пут бесполезен, нет смысла пользоваться правом. Однако, если страйк-цена опциона-пут выше фактической цены акции, то опцион позволяет его владельцу получить прибыль: можно купить акцию по рыночной цене и моментально воспользоваться правом. Опцион-колл — это право купить одну акцию по страйк-цене.

2. Алиса и Боб снова подкидывают монетку неограниченное число раз. Монетка выпадает стороной H с вероятностью 0.4 и стороной T с вероятностью 0.6. Алиса выигрывает, если последовательность HHT выпадет раньше, а Боб — если раньше выпадет HTH.

   Рассмотрим множество исходов этого эксперимента с конечным числом букв

   $$F = \{HHT, HTH, HHHT, THTH, THHT, \ldots\}$$

   и производящую функцию этого множества

   $$s(H, T) = HHT + HTH + HHHT + THTH + THHT + \ldots$$

   Здесь аргументы H и T некоммутативны. Обозначим N_H — количество выпавших H в эксперименте, N_T — количество выпавших T.

   (a) Укажите, как с помощью производных и подстановок раздобыть из функции $s(H, T)$ величины $\mathbb{P}(N_H = 10)$, $\mathbb{P}(N_H = 5, N_Y = 5)$, $\mathbb{E}(N_H)$, $\mathbb{E}(N_H^3)$, $\mathbb{E}(N_H^2 N_T^3)$.

   (b) С помощью метода первого шага составьте систему линейных уравнений, из которой можно найти $s(H, T)$.

   (c) Решите эту систему, предполагая коммутативность H и T.

   (d) Завершите вычисление $\mathbb{P}(N_H = 10)$, $\mathbb{P}(N_H = 5, N_T = 5)$, $\mathbb{E}(N_H)$, $\mathbb{E}(N_H^3)$, $\mathbb{E}(N_H^2 N_T^3)$.

   (e) Убедите проверяющего, что вероятность того, что Боб и Алиса будут бесконечно долго подбрасывать монетку, равна нулю.

   Эту задачу можно решать с помощью любого языка программирования с открытым исходным кодом (python, julia, R, ...). При этом требуется привести не только и код, и свои рассуждения.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. Величина X распределена на отрезке $[0; 1]$ и на нём имеет функцию плотности $f(t) = 3t^2$.

   (a) Постройте график её функции плотности.

   (b) Найдите функцию распределения X и постройте её график.

   (c) Найдите функции плотности и функции распределения величины $Y = \ln X$.

   (d) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X^2)$.

4. Функция плотности случайной величины X имеет вид

   $$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{16}t^2, t \in [-2; 2] \\ 0, t \notin [-2; 2] \end{cases}$$

(a) Постройте график функции плотности.

(b) Найдите $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ и стандартное отклонение σ_X.

(c) Найдите $\mathbb{E}(X \mid X > 0)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid X > 0)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid X > 0)$.

(d) Найдите функции $F^L(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $F^R(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ и $u(x) = \mathbb{P}(X = x)$ и нарисуйте их график.

(e) Найдите медиану величины X, 40%-ю квантиль величины X.

5. Прямой убыток от пожара в миллионах рублей равномерно распределен на $[0, 1]$. Если убыток оказывается больше 0.7, то страховая компания выплачивает компенсацию 0.7.

   (a) Найдите функцию распределения потерь от пожара.

   (b) Чему равны ожидаемые потери?

6. В письме своему издателю Фивегу 16 января 1797 года Гёте пишет: «Я намерен предложить господину Фивегу из Берлина эпическую поэму «Герман и Доротея» в 2000 гексаметров… С гонораром мы поступим следующим образом: я передам господину Бёттигеру запечатанный конверт с запрашиваемой мной суммой и буду ожидать суммы, предлагаемой господином Фивегом за мой труд. Если его предложение окажется ниже запрашиваемой мной суммы, то я отзываю свой конверт нераспечатанным, а сделка считается несостоявшейся. Если же, напротив, его предложение выше, тогда я не буду запрашивать больше суммы, написанной в моём конверте, который вскроет господин Бёттигер».

   Гёте оценивает поэму в G фридрихсдоров, а Фивег — в V фридрихсдоров. Величины G и V независимы и непрерывно распределены на отрезке $[0, 1]$. Для простоты можно считать, что оба закона распределения равномерны.

   Величину G Гёте передал Бёттигеру в запечатанном конверте.

   (a) Какую сумму b стоит написать Фивегу в письме Бёттигеру, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль?

   Рассмотрим альтернативную схему: Гёте явно объявляет Фивегу требуемую сумму G за поэму, а затем издатель соглашается или нет.

   (b) В какой схеме ожидаемый выигрыш издателя выше?

   (c) В какой схеме выше вероятность одобрения сделки?

   (d) В чём преимущество оригинальной схемы Гёте?

Домашнее задание 5

Дедлайн: 2025-05-18, 21:00.
Оцениваемая часть:

1. Аня верит, что величина Y имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью $\lambda = 1$. Боря верит, что величина Y имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью $\lambda = 5$.

(a) Найдите энтропию Y с точки зрения Ани. Сколько в среднем бинарных вопросов потребуется Ане, чтобы угадать Y с точностью до 10^{-6}? Предположим, что Аня верно знает закон распределения.

(b) Найдите кросс-энтропию $CE(f_a||f_b)$ и дивергенцию Кульбака-Ляйблера $KL(f_a||f_b)$ из распределения Бори в распределение Ани.

2. Величины X и Y имеют совместную функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0, \ \text{иначе} \ . \end{cases}$$

(a) Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$, $\mathbb{P}(X + Y > 0.5)$, $\mathbb{P}(X = Y + 0.2)$, $\mathbb{P}(X \leq Y)$, $\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid X > 0.5)$.

(b) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y)$.

(c) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X)$.

(d) Зависимы ли величины X и Y?

(e) Найдите совместную функцию распределения $F(x, y)$.

Обозначим сумму величин X и Y буквой S, $S = X + Y$.

(f) Найдите совместную плотность пары величин (X, S).

(g) Найдите плотность случайной величины S.

Прекрасная неоцениваемая часть в удовольствие:

3. Марсоход передаёт на Землю информацию о массе найденного камня, X.

Закон распределения массы X представлен в таблице

x	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = x)$	$1/2$	$1/8$	$1/8$	$1/4$

(a) Какое количество бит используется на передачу каждого значения X в оптимальной кодировке?

(b) Предложите одну из возможных оптимальных кодировок.

(c) Найдите ожидаемое количество бит, которое марсоход тратит на одно сообщение, энтропию величины X.

4. Оля и Юля пишут смс Маше. Эти два потока смс являются независимыми Пуассоновскими потоками. Оля отправляет Маше в среднем 5 смс в час. Юля отправляет Маше в среднем 2 смс в час.

(a) Какова вероятность того, что Маша получит ровно 6 смс за час?

(b) Сколько времени в среднем проходит между смс, получаемыми Машей от подруг?

5. Кузнечики на большой поляне распределены по пуассоновскому закону, в среднем 3 кузнечика на квадратный метр. Какой следует взять сторону квадрата, чтобы вероятность найти в нем хотя бы одного кузнечика была равна 0.8?

6. Найдите условный закон распределения $(Y \mid X)$ и условное ожидание $\mathbb{E}(Y \mid X)$ в двух случаях:

   (a) Точка (X, Y) выбирается равномерно внутри треугольника $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

   (b) Точка (X, Y) выбирается равномерно на периметре треугольника $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

7. На первом шаге значение X выбирается случайно равномерно на отрезке $[0; 1]$. На втором шаге значение Y выбирается случайно и равномерно от 0 до получившегося X.

   (a) Найдите функции плотности $f(y \mid x)$, $f(x)$, $f(x, y)$, $f(x \mid y)$, $f(y)$.

   (b) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$.

   (c) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(X)$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$, $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$, $\mathbb{C}\text{orr}(X, Y)$.

   (d) Найдите $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X)$.

   (e) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(Y \mid X)$, $\mathbb{V}\text{ar}(X \mid Y)$.

   (f) Найдите $\mathbb{P}(Y > 0.2 \mid X = 0.5)$, $\mathbb{P}(Y > 0.2 \mid X < 0.5)$.