Формат

В экзамене будет 6 задач:

1. Условная вероятность.
2. Условное математическое ожидание.
3. Сходимость по вероятности и закон больших чисел.
4. Центральная предельная теорема.
5. Сюрприз!
6. Сюрприз!

Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор.

Демо «Сцилла»

1. aaa
2. Джеймс Бонд десантируется в случайную точку (X, Y) с совместной плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} cx + y, & \text{если } x \in [0,1], y \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   а) Найдите константу c.
   б) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 1)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X = 1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y \mid X = 1)$.
   в) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

3. Величины (X_n) независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(5; 10)$.

   а) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{7n}.$$

   б) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \ln(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - \ln n.$$

4. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей.

   а) Найдите вероятность того, что через год акция будет стоить больше 1030 рублей.
   б) Найдите такой порог цены h, выше которого цена акции через год окажется с вероятностью 0.3.

Уточнение: в году 365 дней, в пунктах (а) и (б) запишите ответ тремя способами. Во-первых, с помощью определённого интеграла, во-вторых, в виде кода на любом языке программирования, в-третьих, получите ответ с помощью таблицы нормального распределения.

5.

6.

Демо «Харибда»

1.

2. Колобок стартует в точке $(X_0 = 0, Y_0 = 0)$. За каждую минуту он откатывается на единицу вверх с вероятностью 0.2, вниз — с вероятностью 0.2, вправо — с вероятностью 0.3, влево — с вероятностью 0.3. Все перекатывания независимы. Обозначим координаты Колобка через t минут как (X_t, Y_t).

   а) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2 = 1)$, $\mathbb{E}(Y_2^2 \mid X_2 = 1)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_2 \mid X_2 = 1)$.

   б) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2)$.

3. Величины (X_n) независимы и равномерно распределены Unif$[0, 1]$.

   а) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \frac{nX_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n}{7n}.$$

   б) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \sqrt[2n]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_n}.$$

4. Истинная вероятность выпадения монетки «орлом» равна 0.63.

   а) Какова вероятность, что в 100 испытаниях выборочная доля выпадения орлов будет отличаться от истинной вероятности менее, чем на 0.07?

   б) Каким должно быть минимальное количество испытаний, чтобы вероятность отличия выборочной доли и истинной вероятности менее чем на 0.02 была больше 0.95?

5.

6.