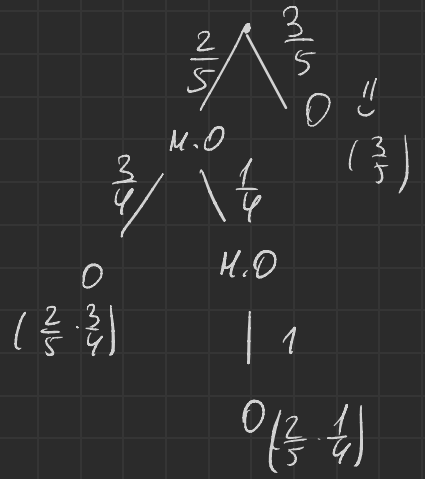
№1.1.

x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$
	$=$	$=$	$=$

Проверка: $\frac{6}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=1$.

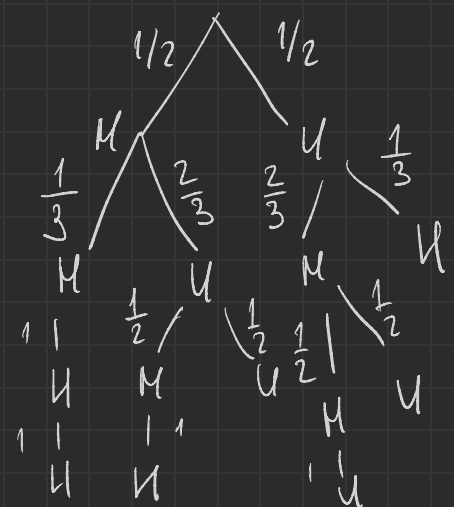


а) $P(X>1)=\frac{2}{5}$

в) $E(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=0{,}6+0{,}6+0{,}3=1{,}5$.

(Если он ест каждый день)

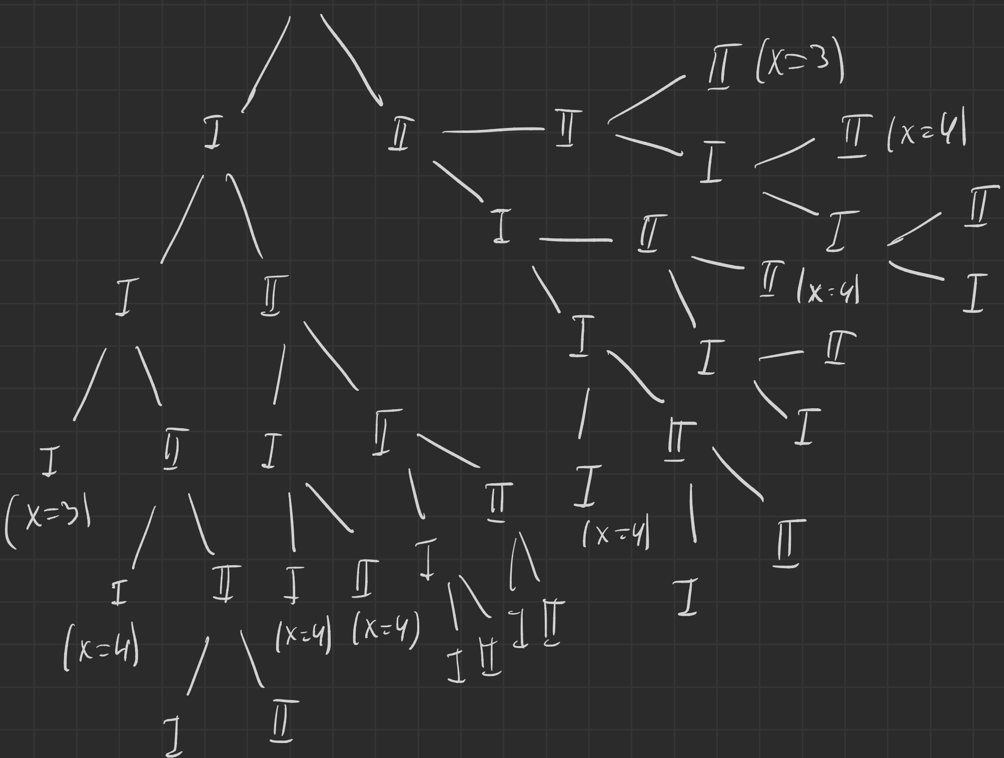
№1.2.



x	2	3	4
$P(N=x)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$
	‖ $\frac{1}{6}$	‖ $\frac{1}{3}$	‖ $\frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(N) = 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + 1 + 2 = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

N 1.4.



x	3	4	5
$P(N=x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{16} \cdot 6$	$\frac{1}{32} \cdot 12$

2x.

Проверка: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

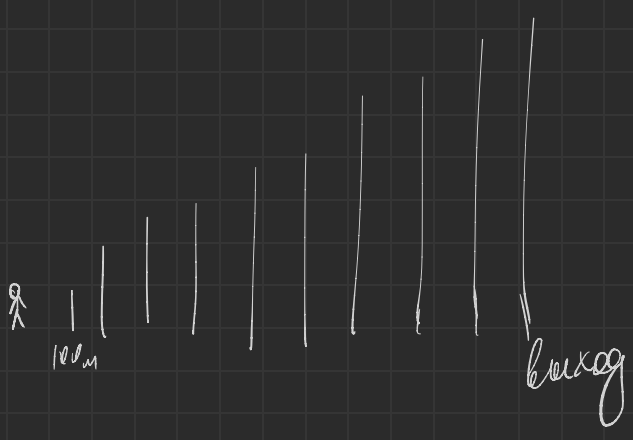
б) $P(N - \text{четное}) = \frac{3}{8}$

$E(N) =$

???? T

$\frac{2 \times C_4^2}{32}$

N12.1.



а) $P(\text{посетит штрек N1}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \ldots = \frac{1}{2}$

T_1 – время посещ. шт N 1

$T_1 = 1$

$T_1 = 2$

$T_1 = 3$

...

$T_1 = 9$

$T_1 = +\infty$

план посещения:

9, 8, 6, 3, 4, 10,	1, 5 ...

4, 5, (1), 3, 10,	6, 8 ...

T_{10} – число посещ. тун.

кол-во тупиков:

б) $E(T_{10}) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} +$

$+ 4 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} + \ldots = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{9}{10} + 1 =$

$= 4{,}5 + 1 = 5{,}5.$

Трюк: $T_{10} = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{10}$

Θ_1 → 1, если посетили штрих №1

→ 0, иначе

$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$

Θ_2 → 1 / 0

Θ_9 → 1 / 0

$\Theta_{10} = 1 \qquad E(\Theta_{10}) = 1$

$E(T_{10}) = E(\Theta_1) + E(\Theta_2) + \ldots + E(\Theta_{10}) =$

$= 0{,}5 \cdot 9 + 1 = 5{,}5.$

t	0	1
$P(\Theta_1 = t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(\Theta_1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$L = 200 \cdot \Theta_1 + 400 \cdot \Theta_2 + \ldots + 1800 \Theta_9 + 1000$$

$$E(L) = 200\, E(\Theta_1) + 400\, E(\Theta_2) + \ldots + 1000\, E(\Theta_{10}) =$$

↑ индикатор

$$= 100 + 200 + 300 + \ldots + 900 + 1000 = \frac{100 + 1000}{2} \cdot 10 =$$

$$= 5500.$$

№ 12.2

$X_1 R_1$ $L_2 R_2$ $L_3 R_3$ ... $L_{30} R_{30}$

$L_i R_i$

X – кол-во целых пар доставш-ся Маше

$$P(X=13) = \frac{C_{30}^{17} \cdot 2^{17}}{C_{60}^{17}}$$

← подходящие вар-ты

= всего вариантов

↑ сколько сл-в в Ω

$E(X)$

$X_{min} = 13$ Z_{min}

$X_{max} = 21$

$E(X) \stackrel{?}{=}$

$X \in [13, 21]$

$X = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_{30}$

$\mu_1 \begin{cases} \nearrow 0, \text{ другому пара} \\ \searrow 1, \text{ пара у Миши} \end{cases}$ (Миша не может иметь пару 1)

$\mu_2 \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{cases}$

t	0
$P(\mu_1 = t)$	

$$P(\mu_1 = 1) = \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}} = \frac{\frac{58!}{17!\,41!}}{\frac{60!}{17!\,43!}} = \frac{58! \cdot 43!}{41!\,60!} =$$

$$= \frac{42 \cdot 43}{59 \cdot 60}$$

$$E(\mu_1) = \frac{42 \cdot 43}{59 \cdot 60}$$

$$E(X) = \frac{30 \cdot 42 \cdot 43}{59 \cdot 60} = \frac{42 \cdot 43}{59 \cdot 2}$$

Y – кол-во полных пар у Марины.

$Y \in [0, 8]$

ξ_1 → 1, досталось Марине полных пар

ξ_1 → 0, не досталось Марине

ξ_{30} → 1

ξ_{30} → 0

$$Y = \sum_{i=1}^{30} \xi_i$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{30} 1 \cdot P(\xi_i = 1)$$

корректно

$E(\xi_i)$ +

$P(\xi_i = 1)$ +

X – случ. велич.

$E(X)$

A – событие

$P(A)$

$$P(\xi_1 = 1) = \frac{C_{58}^{15}}{C_{30}^{27}} =$$

$$E(y) = \frac{30 \cdot C_{58}^{15}}{C_{60}^{17}}$$

$$E(x) + E(y) + E(z) = 30$$

$$EX + EY \leq 30$$

	6	1,5
$A_1 = [0; 1+1]$	0	1
$A_2 = [0; 1+\frac{1}{2}]$	0	1
$A_3 = [0; 1+\frac{1}{3}]$	0	0

$A_4 = [0; 1+\frac{1}{4}]$, $A_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} A_n = [0; 1]$

$\ldots$

$6 \notin A_\infty$

$B_1 = [0; 1]$

$B_2 = [0, 2]$

$B_3 = [0, 1]$

$\ldots$

$\lim\limits_{n \to \infty} B_n$ – не существует.

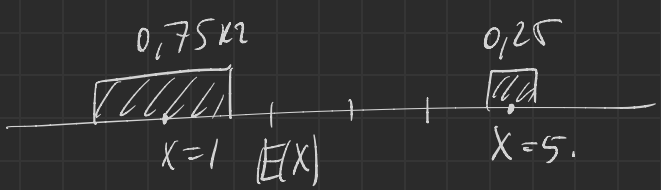
а)

е) 0.

интерпретация

$\mathbb{E}(X)$ – центр масс.

x	1	5
$P(X=x)$	3/4	1/4



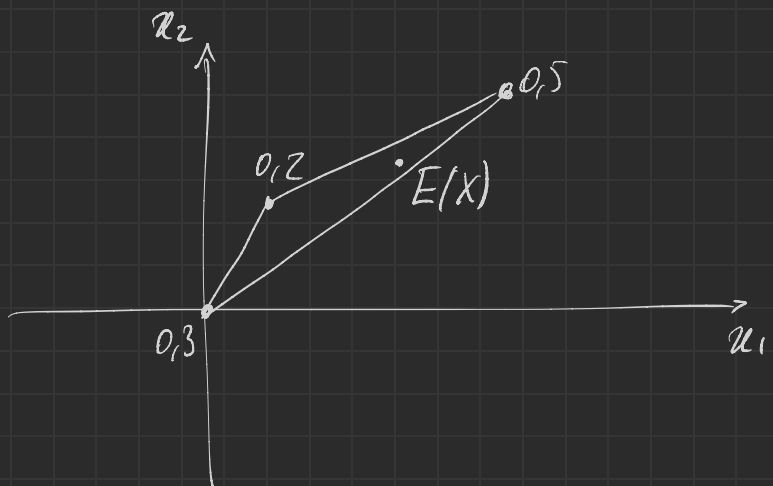
$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

X – случайный вектор

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Опр.}}\ \mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \dots \\ \mathbb{E}(X_d) \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^2$

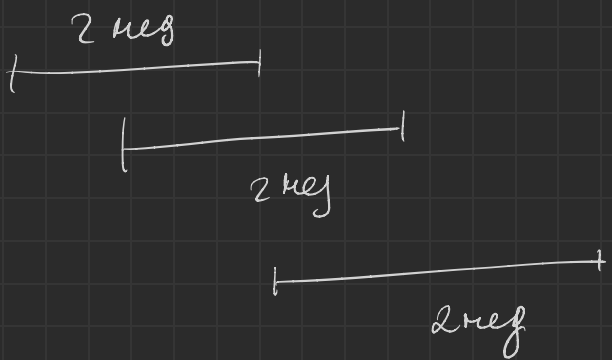
u	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$
$P(X=u)$	0,2	0,3	0,5



$$\mathbb{E}(X) = \sum_u u \cdot P(X=u) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot 0,2 + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \cdot 0,3 + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \cdot 0,5 = \begin{pmatrix}2,7\\3,4\end{pmatrix}$$

x	$2+i$	$3-7i$	$6+2i$
$P(X=x)$	$0,25$	$0,25$	$0,5$

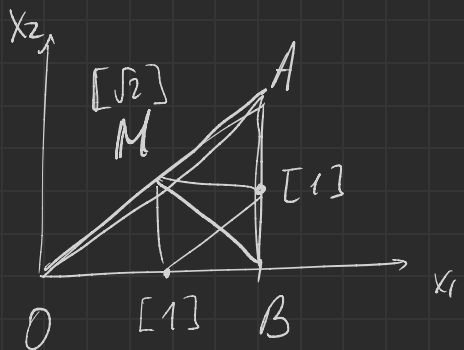
$$\mathbb{E}(X) \begin{cases} \mathbb{E}(\mathrm{Re}\,X) + \mathbb{E}(\mathrm{Im}\,X) = 2\cdot 0,25 + 3\cdot 0,25 + 6\cdot 0,5 + \\ \qquad + 0,25i - 7\cdot 0,25i + 2\cdot 0,5i \\ \sum\limits_{x} x \cdot P(X=x) = (2+i)\cdot 0,25 + \\ \qquad + (3-7i)\cdot 0,25 + (6+2i)\cdot 0,5 \end{cases}$$



Семинар 2

Упр.

Треуг $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,0)$



Выберем $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – равном. распределён на границе $\triangle ABC$.

$EX \in BM$ (по симметрии)

$$E(X)=\begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \end{pmatrix}=$$

$$M\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

вес: $\sqrt{2}$ 1 1

$$EX=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot 1+1/2\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot 1+0\cdot 1 \end{pmatrix} : (\sqrt{2}+2)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+3}{2(\sqrt{2}+2)} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+4} \end{pmatrix}$$

$[3\times 2]$ $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$[2\times 1]$ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$EX = \frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} =$$

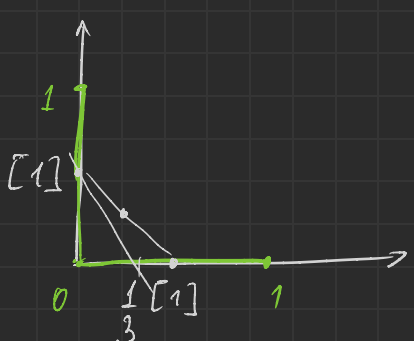
$$= \frac{2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}3}{5}$$

Упр: Ломаная $(1,0)-(0,0)-(0,1)$

$X = \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ – случайная равномерно расп. точка на ломаной L $\quad X \sim Unif(L)$

а) $E(X) = ?$

б) $P(3X_1 + 2X_2 > 1)$?



$$E(X) = \begin{pmatrix}1/4\\1/4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0,5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0,5\\0\end{pmatrix}$$

$$X_2 > \frac{1-3X_1}{2}$$

$$P(3X_1 + 2X_2 > 1) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2} = \frac{7}{12}$$

Упр: подор. монетку (прив)

Шаг 1 Если T, то $X \sim Unif([A;B])$

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

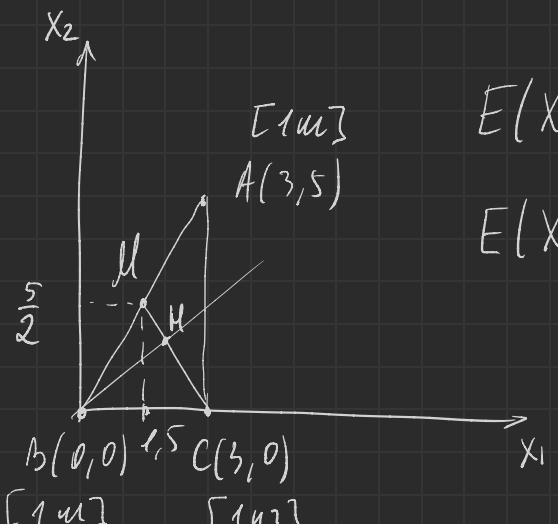
Шаг 2 Если M, то $X \sim Unif(\text{внутри } \triangle ABC)$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

а) $E(X) = ?$

б) $P(X_1 > X_2) = ?$

а)



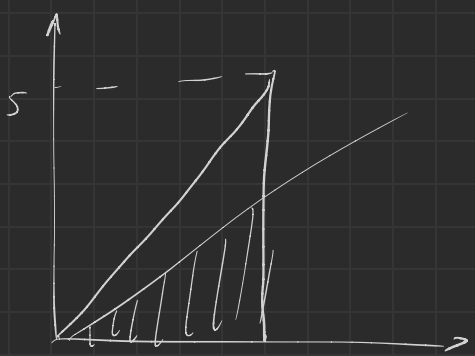
$$E(X|T) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \frac{9}{3}$$

$$E(X|M) = M = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2}+3)\cdot\frac{1}{3} \\ (0+\frac{5}{2})\cdot\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$E(X|H) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

1) $P(X_1 > X_2 | T) = 0$

2)



$S_{АЛК} \frac{2}{5} \cdot S_{АЛС} = 6$

Упр Монетка (прав) ∞ раз.

X – момент времени, когда впервые выпал-ся ИТИ, Y – момент впервые ИИТ

а) $P(X > Y) = ?$ $E(X) = 10$ $E(\max\{X,Y\})$

б) $P(X = Y) ? = 0$ $E(Y) = ?$

$E(\min\{X,Y\})$

в) Ришат получает +1 рубль за 1 решку
Омар получает +1 руб за 1 орла.

$M = \min(X, Y)$

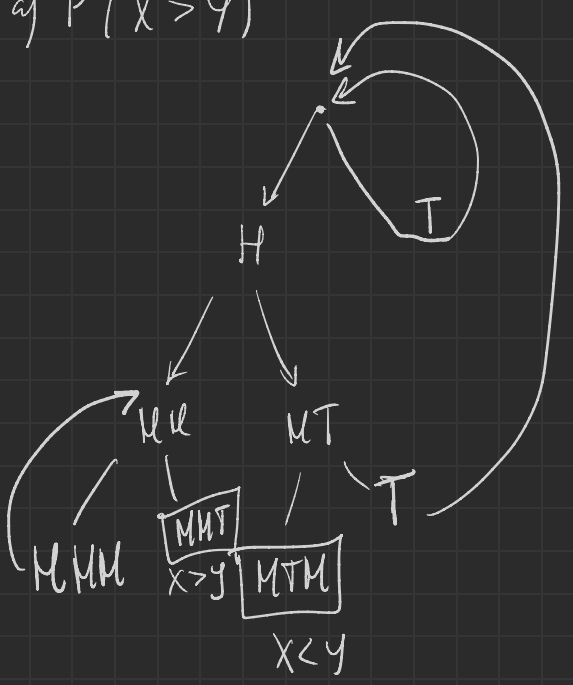
$S_н$ - выигрыш Ришата, до момента M

$E(S_н)$

$S_т$ - выигрыш Омара в момент M

$E(S_т)$

а) $P(X > Y)$



$P(X > Y) > 1$

$\pi_S = P(X > Y | S)$

$\pi_н = P(X > Y | н)$

$\pi_{нт} = P(X > Y | нт)$

$$\begin{cases} \Pi_{нг} = \frac{1}{2} \cdot \Pi_S + \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \Pi_S = \Pi_н \cdot \frac{1}{2} + \Pi_S \cdot \frac{1}{2} \\ \Pi_н = \Pi_{нн} \cdot \frac{1}{2} + \Pi_{нг} \cdot \frac{1}{2} \\ \Pi_{нн} = \frac{1}{2} \cdot \Pi_{нн} + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{cases}$$

и

$$\Pi_н = \Pi_S$$

$$\Pi_{нн} = 1$$

$$\Pi_{нг} = 1/3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Pi_S = \frac{2}{3}}$$

б) $E(\min(X, Y))$

$$\mu_S = E(M \mid S)$$

$$\mu_н = E(M \mid н)$$

...

$$\begin{cases} \mu_S = \frac{1}{2} \cdot (\mu_н + 1) + \frac{1}{2} \cdot (\mu_S + 1) \\ \mu_н = \frac{1}{2} \cdot (\mu_{нн} + 1) + \frac{1}{2} (\mu_{нг} + 1) \\ \mu_{нн} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \mu_{нн}) + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \mu_{нг} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \mu_S) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_S = 1 + \frac{1}{2}\mu_M + \frac{1}{2}\mu_S \\ \mu_M = 1 + \frac{1}{2}\mu_{MT} + \frac{1}{2}\mu_{MM} \\ \mu_{MM} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{MM} \Rightarrow \mu_{MM} = 2 \\ \mu_{MT} = 1 + \frac{1}{2}\mu_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu_S = 2 + \mu_M + \mu_S \\ 2\mu_M = 2 + \mu_{MT} + 2 \\ 2\mu_{MT} = 2 + \mu_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_S = 2 + \mu_M \\ 2\mu_M = 4 + \mu_{MT} \\ 2\mu_{MT} = 2 + \mu_S \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_S - \mu_M = 2 \\ 2\mu_M - \mu_{MT} = 4 \\ 2\mu_{MT} - \mu_S = 2 \end{cases}$$

$\mu_S \quad \mu_M \quad \mu_{MT}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

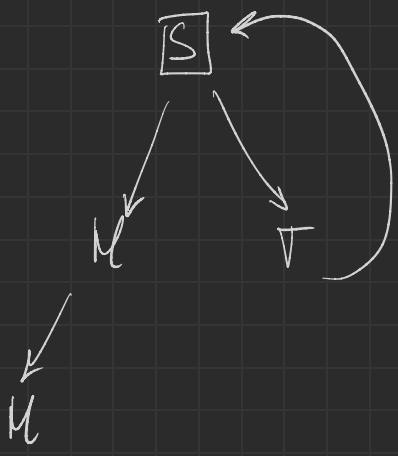
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \textcircled{+1} & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} M_S = 6 \\ M_М = 4 \\ M_{МТ} = 4 \end{cases}$$

$E(Y) =$

МИТ



$$X + Y = \min(X,Y) + \max(X,Y)$$

$$E(X) + E(Y) = E(\min(X,Y)) + E(\max(X,Y))$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$10 \qquad\qquad\qquad\qquad 6$$

6) $r_S = E(R|S)$

$r_H = E(R|H)$

. . . .

$$\begin{cases} r_S = \frac{1}{2}(r_H + 1) + \frac{1}{2} \cdot r_S \\ r_H = \frac{1}{2} \cdot (r_{HH} + 1) + \frac{1}{2} \cdot r_{HT} \\ r_{HT} = \frac{1}{2} \cdot r_S + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ r_{HH} = \frac{1}{2} \cdot (r_H + 1) + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow r_S = 3$