Тервер

20 февраля 2025 г. 14:01

Борис Борисович Демешев.

оценка = 0,1 · все ДЗ + 0,25 $КР_1$ + 0,25 $КР_2$ + 0,4 ЭКЗ

boris.demeshev@gmail.com.

Язык теории вероятностей [обозначения]

Ω - множество исходов. (не обязательно числовое)

(П) 1) 2 раза бросаем монетку

T – tails - орел
H – head – решка

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

2) до первого орла бросаем

$\Omega = \{T, HT, HHT, HHHT \dots\}$

3) случайно выбирается точка на ед. окружности ($x^2+y^2=1$)

$\Omega = \{(x;y) : x^2+y^2=1\}$

знач., что будет дополнено.

Опр.* событие A - подмножество Ω.

заглавная латинская буква начала алфавита

(П) 1) A = {результаты бросков одинаковые} = {HH, TT}

2) A = {"эксперимент окончился за четное число бросков"} = $\{HT, HHHT, H^5T \dots\}$

Опр.* случайная величина X – функция из Ω в ℝ.

2) X - число бросков.

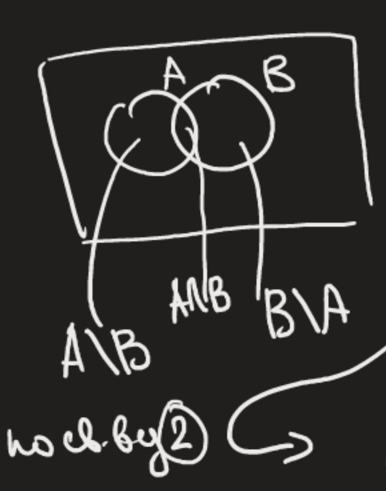
$X(T) = 1$

$X(HHT) = 3$

Английские буквы конца алфавита / Греч. буквы.

Опр.* вероятность (ℙ) функция, которая сопоставляет каждому событию число и удовлетворяет некоторым св-вам:

1. $\forall A \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A) \in [0;1]$.
2. Если $A_1 A_2 \dots$ события не пересекаются ($A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$)
   $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$



Св-ва:

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$P(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = P(A \cup B)$

$\underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$ ∎

$P(\varnothing) = 0$.

Опр.* Мат. ожидание сл. величины X. (для конечного/счетного кол-ва знач. X)

$\underbrace{E(X)}_{\text{лучше}} = M(X) = \sum_x x \, \mathbb{P}(X = x)$ ← по всем возможным x

интуиция: ср. знач по результатам большого (беск.) повторяющихся экс.

* - если результат не зависит от порядка сложения

2) $\Omega = \{T \ HT \ HHT \dots\}$

$P(T) = 0{,}3 \quad P(HT) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \quad P(HT) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 \dots \quad P(H^k T) = 0{,}7^k \cdot 0{,}3$

X - число бросков.

$1 \cdot P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) \dots =$

$= 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 + \dots =$

$= 0{,}3(1 + 2 \cdot 0{,}7 + 3 \cdot 0{,}7^2 + 4 \cdot 0{,}7^3 + \dots =$

Способ 1:

$$= 0{,}3 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}7^{k-1} = \begin{matrix} 0{,}3 + & 0{,}3 \cdot 0{,}7 + & 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 + & 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 \\ & 0{,}3 \cdot 0{,}7 & + 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 & + 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 \\ & & + 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 & + 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 \\ & & & + 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 \end{matrix}$$

Сложим по строкам: $\left(\frac{b_1}{1-q}\right)$

1. $\frac{0{,}3}{1-0{,}7} = 1$
2. $\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{1-0{,}7} = 0{,}7$
3. $\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7^2}{1-0{,}7} = 0{,}7^2$ ...

суммируем:

$E(X) = \frac{1}{1-0{,}7} = \frac{10}{3}$

Способ 2:

$$\begin{aligned} - \; S &= 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 + \dots \\ 0{,}7S &= 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 + \dots \end{aligned}$$

$0{,}3S = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 0{,}3 + 0{,}7^3 \cdot 0{,}3$

$S = 1 + 0{,}7 + 0{,}7^2 + \dots$

$0{,}7S = 0{,}7 + 0{,}7^2 + 0{,}7^3 + \dots$

$0{,}3S = 1 \Rightarrow S = 10/3$

Св-ва мат ожидания:

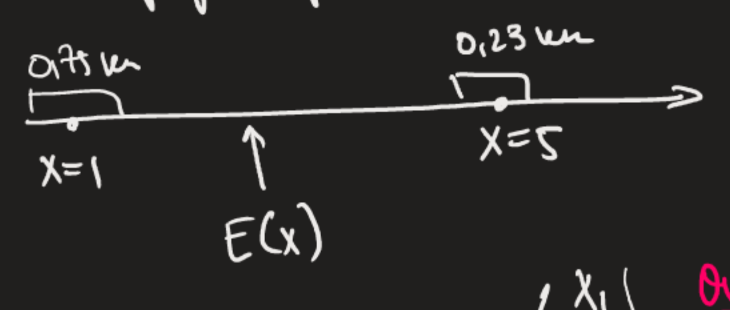
(П) Пример:

P(ω)	0,2	0,5	0,3
	a	b	c
X(ω)	50	0	0
Y(ω)	50	0	200
S(ω)	100	0	200

$E(X) + E(Y) = E(S)$

1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
2) $E(\lambda X) = \lambda E(X) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3) $E(\lambda) = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Интерпретация – E(x) центр масс.

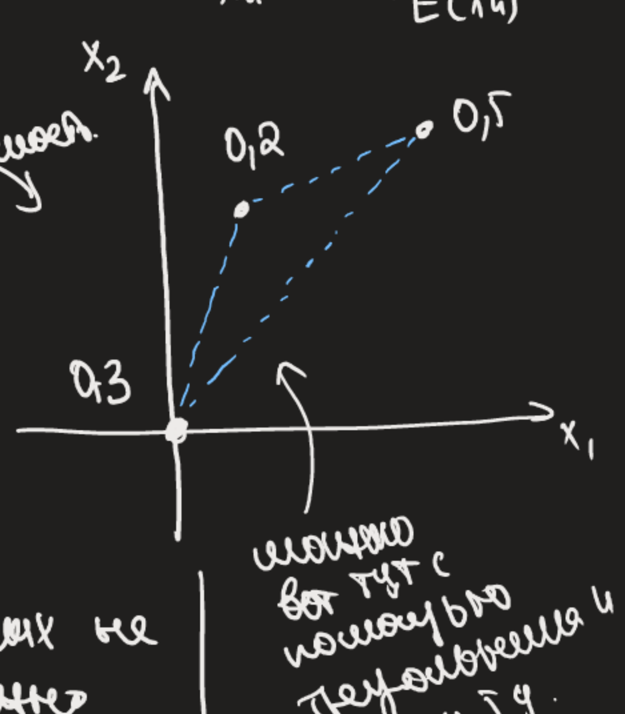


$E(X) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2$

Пусть X - вектор. $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ **Опр** $E\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \dots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$

x	$\binom{1}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{5}{6}$
$P(X=x)$	0,2	0,3	0,5

на плоскости



$E(x) = \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$

Мат. ожидание для компонент не сложно

можно вот тут с помощью переноса и масс и т.д.