Это банан?

$\frac{1}{8}$ → С, $N=1$

$\frac{7}{8}$ → хумус?

$$E(N) = 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + \ldots$$

$$CE(p\|q) = -\sum_{x} \ln Q(X=x)\cdot P(X=x)$$

Свойства:

$$CE(p\|q) = H(p)$$

$$CE(p\|q) \geq H(p)$$

Лекция

Как описывать вер-ти для нескольких СВ?

- X скаляр

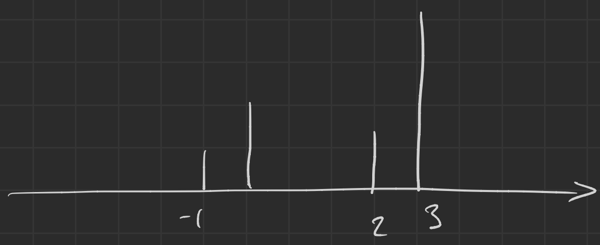
у X конечное/счётное множество значений

→ „таблицей"

→ pmf (probability mass function)

$$f(x) = P(X=x)$$

Знач.	−1	2	3
вер-ть	0,1	0,2	0,7

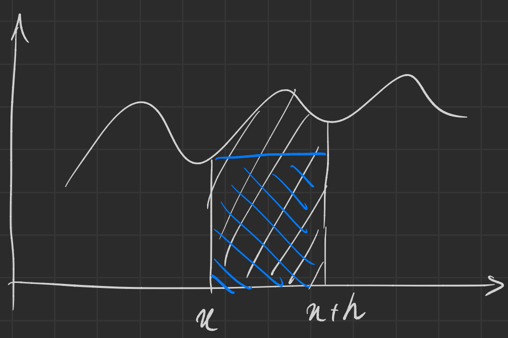


$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X=x)$$

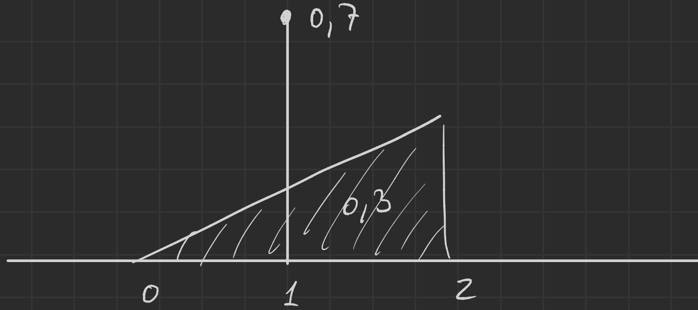
→ функция плотности [вероятности]

$$P(X \in [x, x+h]) = \boxed{f(x)\,h} + o(h) =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$



$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$



• СВ X имеет смешанное распределение с частичной плотностью $f(x)$ и частичной вероятностью $b(x)$

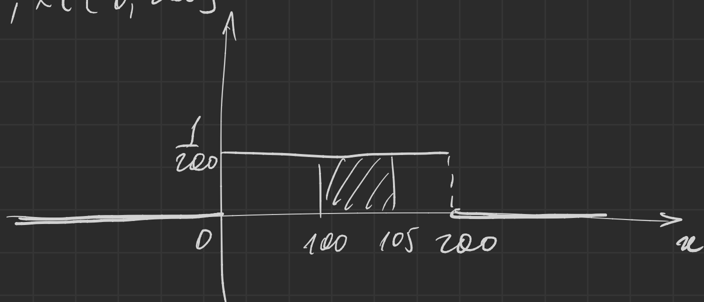
$$P(X\in[x;x+h]) = f(x)\cdot h + \sum_{t\in[x;x+h]} b(t) + o(h) =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt + \sum_{t\in[x;x+h]} b(t)$$

Упр. $X \sim Unif[0;200]$

$Y = \min\{X, 100\}$.

а) $f_X(x) = \frac{1}{200}$, $x\in[0,200]$



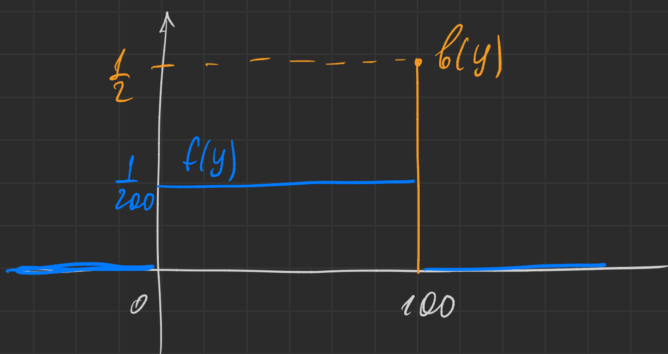
$$P(Y=100)=\frac{1}{2}$$

частичная ф-я вероятностей

$$b(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } y=100\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

частичная плотность Y:

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{200}, & y\in[0,100]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$



Теорема, если Y - случайн величина с частичной плотностью $f(y)$ (и частичной вер-тью $b(y)$), то

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\,dy+\sum_{y} y\,P(Y=y)$$

$$E(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f(y)\, dy + \sum_y h(y) P(Y=y)$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\, dy + \sum_y y^2 P(Y=y) =$$

$$= \int_0^{100} y^2 \cdot \frac{1}{200}\, dy + 100^2 \cdot \frac{1}{2}$$

(!) Есть еще более странные СВ, которые не описываются как смешанные

<u>Пример</u> K – мн-во Кантора

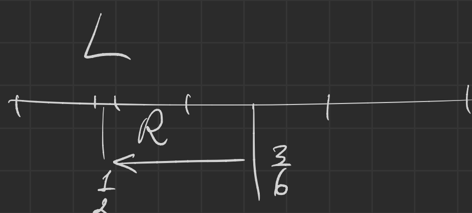
подбрас. монету (прав)

L L L R L R ...

X – точка в K

$E(X) = \frac{1}{2}$

$E(X^2) \stackrel{?}{=}$



$$X = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} D_1 + \frac{1}{9} D_2 + \ldots$$

$$D_1 \begin{cases} \nearrow 1 & \text{с вер } \frac{1}{2} \\ \searrow -1 & \text{с вер } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \cdot E\left(\left(\frac{1}{3}X\right)^2\right) + \frac{1}{2} E\left(\left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right)^2\right)$$

$$2E(X^2) = E\left(\frac{1}{9}X^2\right) + E\left(\frac{1}{9}X^2 + \frac{4}{9}X + \frac{4}{9}\right)$$

$$2E(X^2) = \frac{1}{9}E(X^2) + \frac{1}{9}E(X^2) + \frac{4}{9}\underbrace{E(X)}_{=\frac{1}{2}} + \frac{4}{9}$$

$$18E(X^2) = 2E(X^2) + 2 + 4$$

$$16E(X^2) = 6$$

$$E(X^2) = \frac{3}{8}$$

- Двумерные СВ $\quad v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ дискретные — конечное / счётное множ-во значений

$$P(X = x, Y = y)$$

$$E(XY^2) = \sum_{x,y} x y^2 P(X = x) P(Y = y)$$

Пример:

	$0,1$	$0,2$	$0,7$
x	2	3	8
y	5	-1	6

$\to$ двумерное распределение с функцией плотности $f(x,y)$

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in B\right) = \iint\limits_{B} f(x,y)\,dx\,dy$$

Пример:

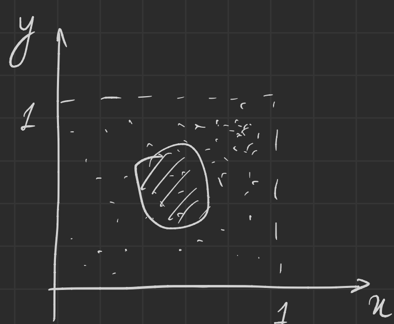
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \in [0,1],\ y \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\overset{\frac{1}{2}}{\wedge}$

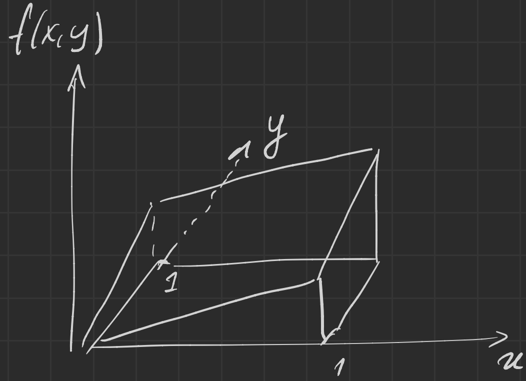
a) $P(X > \frac{1}{2})$

$\overset{\frac{1}{2}}{\wedge}$

$E(X)$



$P(X > Y) = \frac{1}{2}$

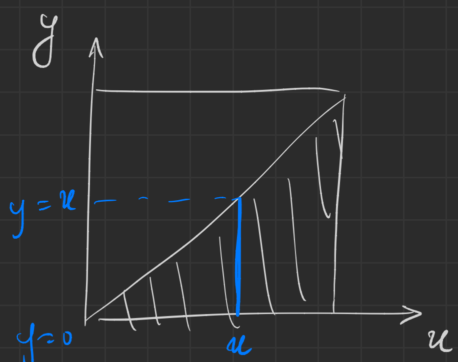


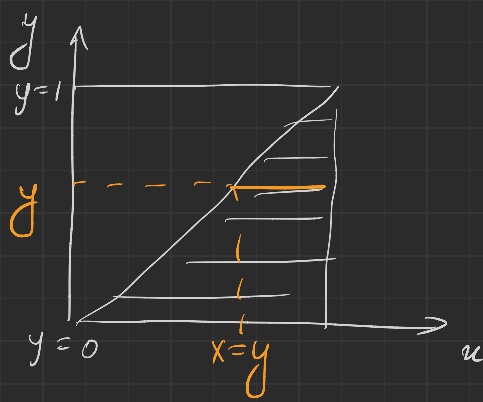
$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{1}(x+y)\,dy\,dx=\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=$$

$$=1-\frac{1}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(X>Y)=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{y=x}(x+y)\,dy\,dx=$$





$$P(X>y) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} (x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\, f(x)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (x^2+yx)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^2 x}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{1} dx = \int_{x=0}^{1} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E(y^2) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} y^2(x+y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (y^2x+y^3)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{y^3}{3}x + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{1} dx = \int_{x=0}^{1} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{6} + \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)}_{\frac{7}{12}}\underbrace{E(Y)}_{\frac{7}{12}} =$$

$$E(XY) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} xy\,(x+y)\,dy\,dx =$$

$$=$$