Формат

В экзамене будет 6 задач:

1. Условная вероятность.
2. Условное математическое ожидание.
3. Сходимость по вероятности и закон больших чисел.
4. Центральная предельная теорема.
5. Сюрприз!
6. Сюрприз!

Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор.

Демо «Сцилла»

1. У меня два кубика: один правильный, а на втором — две двойки и четыре четвёрки. Сначала я равновероятно выбираю один из кубиков, а потом подкидываю его два раза. Обозначим результаты бросков как X_1 и X_2.
   а) Найдите $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2)$.
   б) Правда ли, что величины X_1 и X_2 независимы?
   в) Какова вероятность того, что был выбран правильный кубик, если оба раза выпала двойка?
2. Джеймс Бонд десантируется в случайную точку (X, Y) с совместной плотностью
$$f(x,y) = \begin{cases} cx + y, & \text{если } x \in [0,1], y \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
   а) Найдите константу c.
   б) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 1)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X = 1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y \mid X = 1)$.
   в) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$.
3. Величины (X_n) независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(5; 10)$.
   а) Найдите предел по вероятности
$$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{7n}.$$
   б) Найдите предел по вероятности
$$\operatorname{plim} \ln(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - \ln n.$$

4. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей.

   а) Найдите вероятность того, что через год акция будет стоить больше 1030 рублей.

   б) Найдите такой порог цены h, выше которого цена акции через год окажется с вероятностью 0.3.

   Уточнение: в году 365 дней, в пунктах (а) и (б) запишите ответ тремя способами. Во-первых, с помощью определённого интеграла, во-вторых, в виде кода на любом языке программирования, в-третьих, получите ответ с помощью таблицы нормального распределения.

5. Капли дождя падают согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью 5 капель в минуту на 1 квадратный сантиметр. Площадь дна моей кастрюли равна 10 см^2. Обозначим количество капель, попавших в кастрюлю за t минут как N_t.

   а) Какова вероятность того, что за полминуты в кастрюлю попадёт больше двух капель?

   б) Найдите ожидаемое количество капель, попадающих в кастрюлю за час.

   в) Найдите $\mathbb{P}(N_3 = 4 \mid N_2 = 2)$.

6. Величины X_1 и X_2 независимы и имеют функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \in [0, 1], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   а) Найдите совместную функцию плотности вектора (X_1, X_2). Запишите соответствующий элемент вероятности pe(x_1, x_2).

   б) Найдите совместную функцию плотности вектора (X_1, S), где $S = X_1 + X_2$. Запишите соответсвующий элемент вероятности pe(x_1, s).

   в) Найдите функцию плотности S и нарисуйте её.

   Уточнение: под элементом вероятности мы подразумеваем дифференциальную форму pe$(x, y) = f(x, y)dx \wedge dy$.

Демо «Харибда»

1. Илон Маск подбрасывает правильную монетку четыре раза.

   а) Правда ли, что число орлов в первых трёх бросках и число орлов в последних трёх бросках независимы?

   б) Какова вероятность того, что все четыре раза выпал орёл, если орёл выпал хотя бы два раза?

   в) Какова вероятность того, что все четыре раза выпал орёл, если орёл выпал хотя бы два раза в первых трёх бросках и хотя бы два раза в последних трёх бросках?

2. Колобок стартует в точке $(X_0 = 0, Y_0 = 0)$. За каждую минуту он откатывается на единицу вверх с вероятностью 0.2, вниз — с вероятностью 0.2, вправо — с вероятностью 0.3, влево — с вероятностью 0.3. Все перекатывания независимы. Обозначим координаты Колобка через t минут как (X_t, Y_t).

а) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2 = 1)$, $\mathbb{E}(Y_2^2 \mid X_2 = 1)$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y_2 \mid X_2 = 1)$.

б) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2)$.

3. Величины (X_n) независимы и равномерно распределены $\text{Unif}[0, 1]$.

   а) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \frac{nX_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n}{7n}.$$

   б) Найдите предел по вероятности

$$\operatorname{plim} \sqrt[2n]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_n}.$$

4. Истинная вероятность выпадения монетки «орлом» равна 0.63.

   а) Какова вероятность, что в 100 испытаниях выборочная доля выпадения орлов будет отличаться от истинной вероятности менее, чем на 0.07?

   б) Каким должно быть минимальное количество испытаний, чтобы вероятность отличия выборочной доли и истинной вероятности менее чем на 0.02 была больше 0.95?

5. Годовые доходности двух ценных бумаг представлены случайным вектором $R = (R_1, R_2)$ с $\mathbb{E}\,R = (0.1, 0.15)$ и $\mathbb{V}\text{ar}\,R = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ & 0.9 \end{pmatrix}$.

   Доли бумаг в портфеле Кота Матроскина равны $\gamma = (\alpha, 1 - \alpha)$. Кот Матроскин не занимается продажами с коротких позиций, поэтому $\alpha \in [0, 1]$.

   Доходность портфеля Кота Матроскина равна $V = \alpha R_1 + (1 - \alpha) R_2$.

   а) Найдите $\mathbb{E}\,V$ и $\mathbb{V}\text{ar}\,V$. Запишите формулы для вычисления $\mathbb{E}\,V$ и $\mathbb{V}\text{ar}\,V$ в общем виде с помощью вектора γ и матрицы $\mathbb{V}\text{ar}\,R$.

   б) Постройте кривую допустимых портфелей в осях $(\mathbb{E}\,V, \mathbb{V}\text{ar}\,V)$.

6. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью λ.

   а) Найдите совместную функцию плотности вектора (X_1, X_2, X_3). Запишите соответствующий элемент вероятности $\text{pe}(x_1, x_2, x_3)$.

   Рассмотрим новый вектор, $(R_1 = X_1/(X_1 + X_2), R_2 = (X_1 + X_2)/(X_1 + X_2 + X_3), S_3 = X_1 + X_2 + X_3)$.

   б) Найдите элемент вероятности $\text{pe}(r_1, r_2, s_3)$.

   в) Правда ли, что величины R_1, R_2 и S независимы?

   г) С точностью до постоянного сомножителя выпишите функции плотности $f_{R_1}(t)$, $f_{R_2}(t)$, $f_{S_3}(t)$.