Формат

В контрольной работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор.

Демо «Хонсю»

1. Даниел Негреану извлекает из стандартной колоды в 52 карты 5 карт случайным образом.

   а) Найдите вероятность комбинации фул-хаус (две карты одного достоинства и три карты — другого достоинства).

   б) Найдите вероятность комбинации фул-хаус, если у Негреану более одного туза.

   в) Найдите ожидаемое количество дам.

   г) Найдите дисперсию количества пиковых карт.

2. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

   а) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?

   б) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?

   в) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?

   г) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

3. В корзине лежат 10 не отличимых на ощупь яблок: 2 красных и 8 зелёных. Я наугад равновероятно на ощупь достаю одно из яблок. Красное я сразу съедаю, а зелёное — возвращаю обратно в корзину. Затем я снова и снова достаю яблоки по данным правилам до тех пор, пока не съем оба красных.

   Обозначим с помощью N количество извлечений яблок.

   Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\mathbb{E}(N^2)$.

4. Илон Маск подбрасывает правильную монетку 30 раз. За каждые две решки подряд он получает выигрыш 100 рублей.

   Найдите математическое ожидание суммарного выигрыша Илона.

5. Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = x/2$ на отрезке $[0; 2]$.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ и $\mathbb{E}(X \mid X < 1)$.

   б) Найдите функцию распределения величины $Y = 2X$.

   в) Найдите функцию плотности величины $W = X^2$.

6. На плоскости отмечены четыре точки, $A = (1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (-2, 2)$ и $D = (2, -2)$. Я случайно выбираю одну из точек, координаты выбранной точки обозначим вектором (X, Y). Вероятности выбора равны $p_A = p_B = 0.4$, $p_C = p_D = 0.1$.

а) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X)$.

б) Найдите $\mathbb{E}(XY^2)$, $\mathbb{V}\text{ar}(X)$, $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$.

в) Найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X))$, $\mathbb{P}(\mathbb{E}(Y \mid X) = Y)$.

Демо «Сикоку»

1. У каждого из трёх друзей своя шляпа. В темноте шкафа по очереди каждый из них случайно выбирает шляпу и надевает на себя. Обозначим X — количество шляп, оказавшихся надетыми на своём хозяине.

   а) Составьте табличку возможных значений X и их вероятностей.

   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и дисперсию $\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

2. На первом шаге я подбрасываю правильную монетку 3 раза. Количество выпадающих орлов — случайная величина X. На втором шаге я равновероятно выбираю целое число от 0 до X включительно, назовём его Y.

   а) Составьте двумерную табличку совместного распределения вектора (X, Y).

   б) Найдите $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 3)$ и $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X)$.

   в) Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{E}(Y \mid X \geq 2)$.

   г) Найдите наилучшее линейное приближение X с помощью Y.

3. На побережье одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0; 1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше своих соседок. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i\text{—я волна была большой}\}$ и $R_i = \{i\text{—я волна была рекорд}$

   а) Найдите $\mathbb{P}(B_1 \mid B_2)$, $\mathbb{P}(B_1 \mid B_3)$.

   б) Найдите $\mathbb{P}(R_{2024} \mid R_{2025})$, $\mathbb{P}(R_{2024} \mid B_{2024})$.

   в) Укажите любую функцию $a(n)$ такую, что $a(n) = O(\mathbb{E}(X_n))$, где X_n — количество рекордных волн среди n волн.

4. Глеб Жеглов каждый день ловит одного преступника. Однако с вероятностью 0.05 вместо одного пойманного на преступный путь встают w новых граждан. Изначально в городе живёт n преступников. Сколько дней в среднем пройдёт до полного искоренения преступности в городе?

   а) Решите задачу при $n = 1$ и $w = 1$.

   б) Решите задачу при произвольных n и w.

5. На единичной окружности с центром в начале координат (не внутри!) в случайные точки приползли три муравья. Три точки независимы и равномерно распределены по окружности. Два муравья могут общаться друг с другом, если центральный угол между ними меньше прямого.

   а) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом (возможно через посредника)?

б) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом через посредника, если центральный угол между муравьём один и муравьём два больше прямого?

в) Найдите функцию плотности координат первого муравья.

6. У Маши и Саши по хорошо перемешанной колоде в 52 карты. Они одновременно открывают колоду по карте, одну за одной. За каждое совпадение карт они получают по рублю.

   а) Чему равен ожидаемый выигрыш Саши и Маши?

   б) Как изменится ответ, если за каждое совпадение, перед которым тоже было совпадение, каждый игрок получает дополнительный бонусный рубль помимо рубля за само совпадение?