Лекция

опр. СВ X – „простая", если у СВ X конечное кол-во значений

Определение

1) Индикаторы

$$I(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } A \\ 0, \text{ если } \overline{A} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(I(A)) := P(A)$$

2) Простые СВ

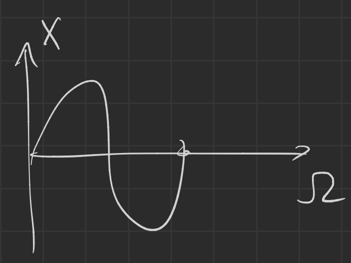
$$\mathbb{E}(X) := \sum_x x P(X = x)$$

3) X – любая СВ $(X \geqslant 0)$

$$\mathbb{E}(X) = \sup_S \left\{ \mathbb{E}(S) \;\middle|\; \begin{matrix} S - \text{простая} \\ S \leq X \end{matrix} \right\}$$ нюанс: $E(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

4) X – любая СВ

$$X = X^+ - X^-$$



$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$

не всегда определено

Если $\mathbb{E}(X^+) = +\infty$

$\mathbb{E}(X^-) = +\infty$, то $E(X)$ не определено.

Может быть $\mathbb{R}$, $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$, не опр.

5) X - вектор СВ

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}(X) := \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

X - комплекс СВ.

$X = X_1 + X_2 i$

$\mathbb{E}(X) = E(X_1) + i\,E(X_2)$

Обозн:

$$E_P(X) = E(X) = \int_\Omega X \, dP$$

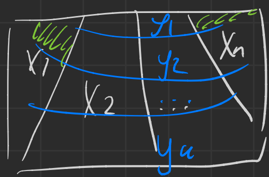
Теорема.

① $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

② Если $X \le Y$, то $E(X) \le E(Y)$

Док-во ② - ③ - ④ - ⑤

2) Ω



$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + \ldots + x_n P(X=x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{k} P(X=x_i; Y=y_j)$$

$$\mathbb{E}(Y) = y_1 P(Y=y_1) + \ldots + y_k P(Y=y_k) = \sum_{j=1}^{k} y_j \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i; Y=y_j)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i \sum_j x_i P_{ij} \\ \quad\;\; \wedge \\ \sum_i \sum_j y_j P_{ij} \end{array}\right\} \Rightarrow E(Y) \geq E(X)$$

3) $E(X) := \sup_S \{ E(S) \mid S\text{-прост}, S \le X \}$

$E(Y) := \sup_R \{ E(R) \mid R\text{-прост}, R \le Y \}$.

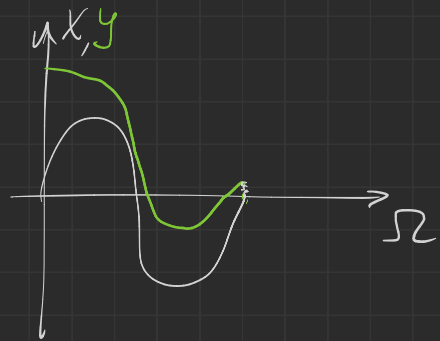
$\{ S\text{-прост}, S \le X \} \subseteq \{ R\text{-прост.}, R \le Y \}$.

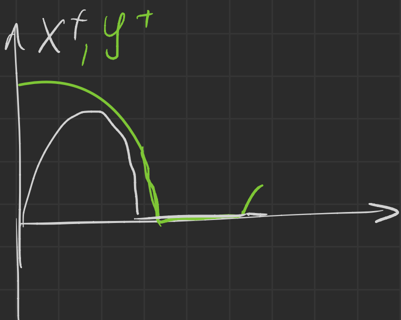
$\Rightarrow E(y) \geq E(x)$

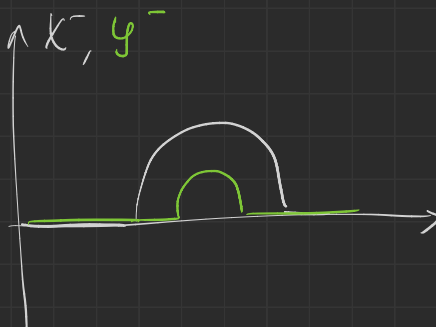
4) $x = x^+ - x^-$

$y = y^+ - y^-$

$y \geq x$







и $y \geq x$ след: $y^+ \geq x^+$

$x^- \geq y^-$

$$\left.\begin{aligned} E(y^+) &\geq E(x^+) \\ E(x^-) &\geq E(y^-) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(y) \geq E(x)$$

5) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ поэлементно.

$x_1 = [RUB]$ $\quad x_3 = [XMR]$

$x_2 = [LTC]$ $\quad x_4 = [RMB]$

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \dots \\ E(X_n) \end{pmatrix} \qquad E(Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ \dots \\ E(Y_n) \end{pmatrix}$$

$Y \geq X$ по усл. (или вектор)

$$Y_1 \geq X_1 \Rightarrow E(Y_1) \geq E(X_1)$$

$$Y_2 \geq X_2 \Rightarrow E(Y_2) \geq E(X_2) \quad \text{и т.д.}$$

$$\Rightarrow E(Y) \geq E(X)$$

<u>Теорема</u> [о монотонной сходим-ти MCT = monotone convergence teorem].

Если $X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots$

$P(\lim X_n = X) = 1$

$E(X_1) \neq -\infty$, то $E(X_n) \to E(X)$

<u>почему теорема</u>?

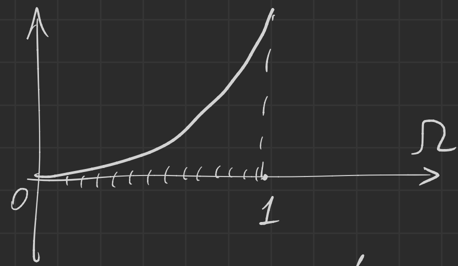
- чтобы найти $E(X)$ достаточно одной подходящей посл-ти X_1, X_2

Пример: $\Omega = [0,1]$

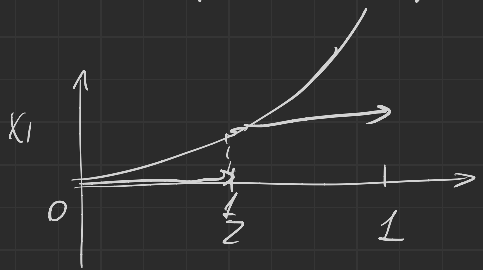
выбираем точку равн-но

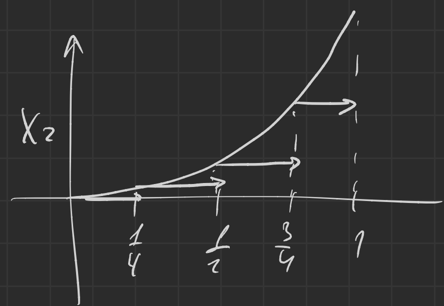
$X = \omega^2$

$E(X) = ?$



разобьем гор. ось на ячейки $\Delta = \frac{1}{2^n}$





$$X_n = \frac{\lfloor 2^n X \rfloor}{2^n}$$ ← округление вниз

$$X_n = \min\left\{ n, \frac{\lfloor 2^n x^n \rfloor}{2^n} \right\}.$$

$$\frac{\lfloor 3{,}789 \cdot 100 \rfloor}{100} = 3{,}78$$

$$X_n = \min\left\{ n, \frac{\lfloor 10^n x^n \rfloor}{10^n} \right\}.$$

Задача.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E(x^2) = C_{xx} = 10$$

$$E(y^2) = C_{yy} = 20$$

$$E(xy) = C_{xy} = -1$$

Построить наилучший линейный прогноз

$$\hat{y} = \beta_1 + \beta_2 x$$

$$\min_{\beta_1, \beta_2} E((y-\hat{y})^2)$$

$$R = y - \hat{y} = y - \beta_1 - \beta_2 x$$

$$R^2 = (y-\hat{y})^2 = y^2 + (\beta_1 + \beta_2 x)^2 = y^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 x + \beta_2^2 x^2 -$$
$$- 2y\hat{y}$$

$$-2y(y - \beta_1 - \beta_2 x) = y^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 x + \beta_2^2 x^2 - 2y^2 + 2y\beta_1 +$$

$$+ 2\beta_2 y x = y^2 - 2y\beta_1 + \beta_1^2 - 2y\beta_2 x + 2\beta_1\beta_2 x + \beta_2^2 x^2$$

$$E(R^2) = E(y^2) - 2\beta_1 E(y) + 2\beta_1\beta_2 E(x) + \beta_2^2 E(x^2) +$$
$$+ \beta_1^2 - 2\beta_2 E(y) \quad =$$

$= C_{yy} - 2\mu_y\beta_1 + \beta_1^2 - 2C_{xy}\beta_2 + 2\beta_1\beta_2\mu_x + \beta_2^2 C_{xx}$

Верш. параб. по β_1:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2\mu_y - 2\beta_2\mu_x}{2} = \mu_y - \beta_2\mu_x$$

Верш. пар. по β_2.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2C_{xy} - 2\beta_1\mu_x}{2C_{xx}} = C_{xy} - \beta_1\mu_x$$

$$\beta_2 = C_{xy} - (\mu_y - \beta_2\mu_x) = C_{xy} - \mu_y\mu_x + \beta_2\mu_x\mu_x$$

$$\beta_2 = \frac{C_{xy} - \mu_y\mu_x}{C_{xx} - \mu_x^2}$$

Наилучший лин. прогноз имеет вид

$\hat{y} = \beta_1 + \beta_2 x$, где $\quad \beta_2 = \dfrac{C_{xy} - \mu_x\mu_y}{C_{xx} - \mu_x^2} = \dfrac{-1-2}{10-1} = -\dfrac{3}{9} =$

$= -\dfrac{1}{3}$

$\beta_1 = \mu_y - \beta_2\mu_x = \dfrac{7}{3}$

$$\hat{y} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$$

<u>Опр.</u> Дисперсия X (variance)

$$var(X) := E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= C_{xx} - \mu_x \mu_x$$

ковариация X и Y (covariance)

$$cov(X, Y) := E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= C_{xx} - \mu_x \mu_y$$

<u>свойства:</u>

1. $cov(X, X) = var(X)$

X [см]	$var(X)$	[см^2]
Y [кг]	$cov(X, Y)$	[кг·см]

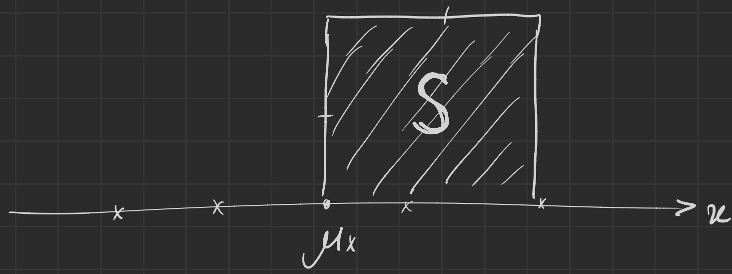
2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\, cov(X, Y)$$

$$var(\alpha X) = \alpha^2 var(X)$$

Обозн. $D(X) = var(X)$

Смысл Var



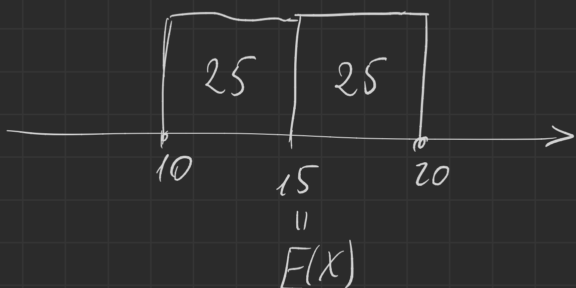
$\mu_x = E(X)$

$Var(X) = E(S)$

пример:

x	10	20
$P(X=x)$	1/2	1/2

$E(X) = 15$



$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 250 - 225 = 25$$

$$E(X^2) = \frac{100}{2} + \frac{400}{2} = 250$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$S = (X - E(X))^2 = \underset{\text{СВ}}{X^2} - 2\underset{\text{СВ}}{X}\underset{\text{const}}{E(X)} + \underset{\text{const}}{(E(X))^2}$$

$$E(S) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

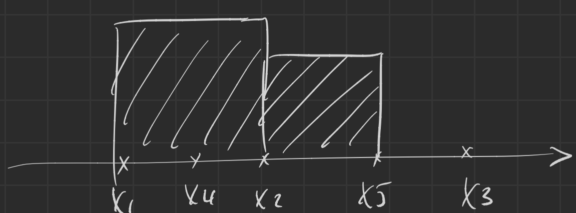
4.

$$Var(X) \to E(X^2) - (E(X))^2$$

$$Var(X) \to E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$Var(X) \to \frac{1}{2}E\left((X_1 - X_2)^2\right)$$, где X_1, X_2 – незав. копии X.

X_1, X_2 – СВ



$$cov(X, Y) \to E(XY) - E(X)E(Y)$$

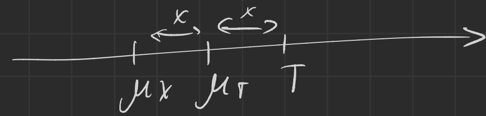
$$cov(X, Y) \to E\left[(X - EX)(Y - EY)\right]$$

$$cov(X, Y) \to \frac{1}{2}E\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)\right]$$

Свойства:

$$var(X+\alpha) = var(X)$$

$$T = X + \alpha$$

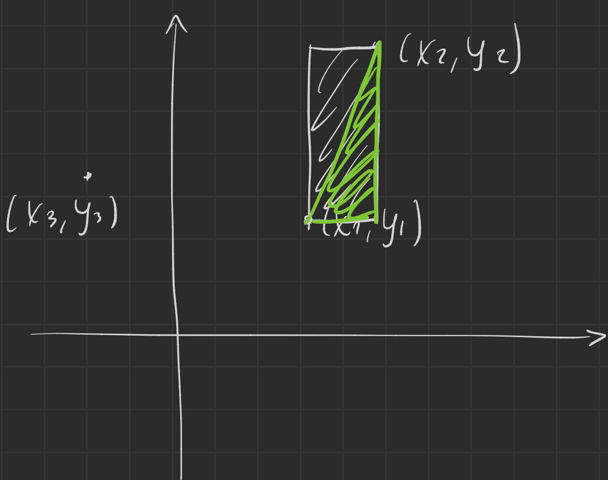


$$var(X+\alpha) = E((X+\alpha)^2) - (E(X+\alpha))^2 =$$

$$= E(X^2+2X\alpha+\alpha^2) - (E(X)+\alpha)^2 = E(X^2) + \cancel{2E(X)\alpha} + \cancel{\alpha^2} -$$

$$-(E(X))^2 - \cancel{\alpha^2} - \cancel{2E(X)\alpha} = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$cov(\alpha+X, \beta+Y) = cov(X,Y) = \frac{1}{2} E\left[(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)\right]$$



def

СВ X и Y независимы, если соб-я $\{X \in M_X\}$ и $\{Y \in M_Y\}$ независимы

X и Y незав.

$\{X \leq 2\}$ и $\{Y \geq 11\}$

$\{X \in [0, 17]\}$ и $\{Y \in \mathbb{N}\}$.

<u>def A и B незав.</u>

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Теорема.</u>

Если величины X и Y независимы, то

① наилучш. лин. приближение $\hat{Y} = E(Y)$

$$\beta_1 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\beta_2}} X$$

$$\beta_1 = E(Y) - \beta_2 E(X)$$

② $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

③ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

④ $E(Y | X) = E(Y)$

Упр 1 $\cos(\sin^3(3x^2+6x))$ в окр $x=0$ до x^7

Ряд Тейлора?

Sympy : команды diff Eq
limit
series
integrate.

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

дифф по a

Трюк Фейнмана:

$$\int x\cos(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax - \frac{1}{a}\cdot(-\sin ax)\cdot x + C$$

$$a=1: \int x\cos x\, dx = \cos x + \sin x\, x + C$$

Упр. Подбрас. монету до HTH.

$$p_H = \frac{1}{2}$$

X – кол-во H

Y – кол-во T

HHTH $\quad X = 3,\ Y = 1$

HTTTHTH $\quad X = 3,\ Y = 4$

$\Omega = \{HTH,\ HHTH,\ THTH,\ \dots\}$

sgh = HTH + HHTH + THTH