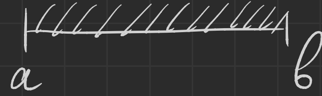
Очевидная теорема. Если $X \sim Unif\,[0,1]$, то

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Очев. теор. Если $X \sim Unif\,[a;b]$, то

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$



Лекция 3

Загадка школьной программы.

геом. прогрессия $\to$ $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \dots$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

poly(n) – полином
– многочлен

гипер-геометр. последов-ть $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{poly_A(n)}{poly_B(n)}$

пример: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n^2+3} \qquad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n}{(n-1)^2+3}$

$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{1}{2} \dots \quad b_3 = \dots$

T = Орёл = Успех

Н = Решка = Неуспех

подбр-м монету ∞ раз.

$p_T = p$

$p_Н = 1-p = q$

$X \sim Geom(p)$ → X – момент первого успеха (орла) V

$Y \sim Geom(p)$ → Y – кол-во неуспехов до 1-го успеха.

СВ. X имеет геом. распределение с пар-м p

Упр.

$X \sim Geom(p)$ [число бросков]

а) $P(X=k) = ? = (1-p)^{k-1} \cdot p$ $\quad P(\underbrace{НН\ldots Н}_{k-1}Т)$

б) $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = ? = \dfrac{(1-p)^k p}{(1-p)^{k-1} p} = (1-p) = q$

в) $E(X) = ?$

$Y \sim Geom(p)$ [число неудач до 1-ой удачи]

$p_т = p$

$p_м = q$

$E(X) = 1\cdot p + 2\cdot p^2 + 3\cdot p^3 + \dots$

$E(X) = 1\cdot p + (1-p)\big(E(X) + 1\big)$

$\cancel{EX} = \cancel{p} + \cancel{EX} + 1 - pEX - \cancel{p}$

$pEX = 1 \quad \Rightarrow \quad EX = \frac{1}{p}$

ммм Т мммммм Т ммм Т мммм Т мм Т м Т

10^9 бросков   примерно: $p\cdot 10^9$ успехов

кол-во партий

$E(X) = \frac{10^9}{p\cdot 10^9} = \frac{1}{p}$

$P(Y=k) = (1-p)^k \cdot p$

$E(Y) = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1$

$X = Y + 1$

Сказки про C_n^k

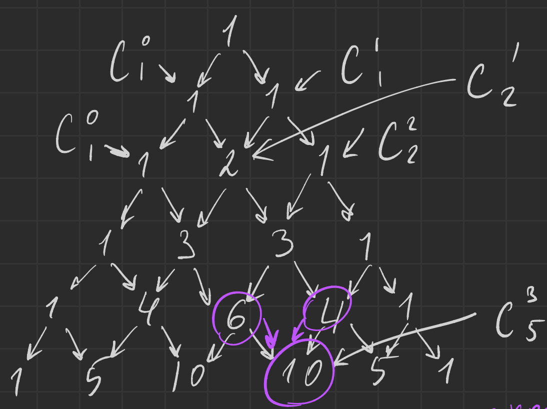
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ = число способов выбрать k предметов из n предметов без повторений, порядок не важен.

C_{10}^3 — исторически сложилось !!

$C_{3+7}^3 = \dfrac{(3+7)!}{3!\,7!}$ — так бы стоило обозначить

$C_{2+5+3} = \dfrac{(2+5+3)!}{2!\,5!\,3!}$

себе Диме Юле



C_5^3 ← число ходов вправо

RRLRL → $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$

C_5 ← общее число ходов

Слова

Буквы нельзя переставлять.

$\{МАША, КОЛЯ\} \leftarrow \underline{МАША + КОЛЯ}$

множество

производящая функция множества

$$МАМА + ПАПА = \underbrace{(МА)^2 + (ПА)^2}_{f(М,\, П,\, А)}$$

$W_{a,b}$ = производящая ф-я для множества слов, в которых a букв „A", b букв „B"

$$W_{2,1} = \underset{1}{AAB} + \underset{1}{ABA} + \underset{1}{BAA}$$

$$W_{1,1} = AB + BA \quad \text{(кол-во слов)}$$

$$W_{5,17}(A=1, B=1) = C_{22}^{17} = C_{22}^{5}$$

$$W_{5,6} \cdot A + W_{6,5} \cdot B = W_{6,6}$$

(последним шагом)

$W_{6,1}(0,3;\, 0,7) = P$ (из 7 бросков будет ровно 6 орлов)

$p = 0,3$

$$W_{5,3} = \underset{}{\overset{0,3^5 \cdot 0,7^3}{\overset{\shortparallel}{AAAAABBB}}} + \ldots + \overset{0,3^5 \cdot 0,7^3}{\overset{\shortparallel}{BBBAAAAA}}$$

$A = 0,3;\ B = 0,7$

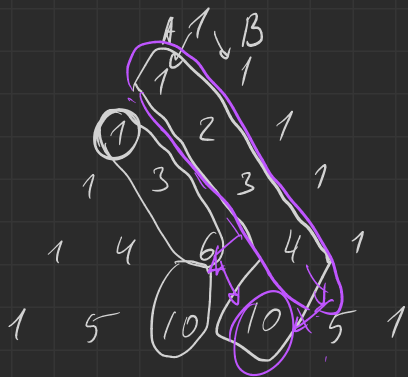
$W_{5,3}(0{,}3; 0{,}7) = C_8^5 \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^3$

P(из 8 бросков будет ровно 5 орлов и 3 решки)

$P_T = 0{,}3$

$P_H = 0{,}7.$

Тождество хоккейной клюшки.



клюк

$1+2+3+4=10$

$A=1$

$B=1$

$C_{2,0}+C_{2,1}+C_{2,2}+C_{2,3}=C_{3,3}$

$W_{2,0}\,ABBB + W_{2,1}\,ABB + W_{2,2}\cdot AB + W_{2,3}\cdot A = W_{3,3}$

$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$

Упр.

$$W_{n,0}\cdot ABBB + W_{n,1}\cdot ABB + W_{n,2}\cdot AB + W_{n,3}\cdot A = W_{n+1,3}$$

$A=1$
$B=1$

$$C^0_{n+0} \quad C^1_{n+1} \quad C^2_{n+2} \quad C^3_{n+3} \quad C^3_{n+4}$$

Опр. Подбрасываем монетку n раз.

Т = Орёл = Успех p – успех

Н = Решка = Неуспех $q = 1-p$ – неуспех

X – кол-во успехов.

X имеет биномиальное распределение с числом попыток n и вероятностью успеха p.

$$X \sim Bin(n, p) \qquad \boxed{W_{k,n-k}(p, 1-p)}$$

Упр. а) $P(X=k) = ? = C^k_n \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

б) $E(X) = ? = pn$

$$X \sim Bin(n=4, p=0{,}7)$$

$$P(X=3) = P(TTTH) + P(TTHT) + P(THTT) + P(HTTT) =$$

$= C_4^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^1 + \dots$

$X = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

$R_1 = \begin{cases} 1, & \text{если бросок №1 Т (успех)} \\ 0, & \text{если бросок №1 Н (неуспех)} \end{cases}$

$E(X) = E(R_1) + E(R_2) + \dots = np$

r	0	1
$P(R=r)$	0,3	0,7

$E(R_1) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7$

<u>Упр.</u> $(Н+Т)^n \leftarrow$ это все слова из букв Н и Т длиной n

$(Н+Т)^2 = НН + ТН + ТТ + НТ$

<u>Упр.</u> $\frac{1}{1-Н}Т =$ это все слова, в которых 1 Т и на неё оканчивается

формула беск. геом. пр-и.

$= (1+Н+НН+ННН+\dots)\cdot Т = Т+НТ+ННТ+\dots$

$X \sim Geom(p)$ $\quad E(X) = \frac{1}{p}$, $p > 0$

[число попыток]

$Y \sim Geom(p)$

[число неудач] $E(Y) = \frac{1}{p} - 1$, $p > 0$

$Z \sim Bin(n, p)$ $E(Z) = np.$

$g(H, T) = (H + T)^n$

$Z \sim Bin(5; 0{,}3)$

H и T некоммутативны $\quad g(H, T) = (H + T)^5 = HHHHH + HHHHT + THTTH + \ldots$

h и t коммут.-ны $\quad E(Z) = 0 \cdot 0{,}7^5 + \quad 1 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 \quad\quad 3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2$

$$E(Z) = \frac{\partial g(h, t)}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=0{,}3 \\ h=0{,}7}} \cdot \overset{0{,}3}{t} = \underline{n(h+t)^{n-1} \cdot t}_{\substack{h=0{,}7 \\ t=0{,}3}} = 0{,}3n$$

(возвращ. степень)

$\frac{1}{1-H} \cdot T$

$\shortparallel$

$g(H, T) = T + HT + \overset{2ht}{H^2T} + \overset{3h^2t}{H^3T} + \ldots$

$E(Y) = 0 + 1 \cdot (1-p) \cdot p + 2 \cdot (1-p)^2 \cdot p + 3(1-p)^3 p$

$$\frac{\partial g}{\partial h} \cdot h \Bigg|_{\substack{h=1-p \\ t=p}} = \frac{\partial\left(\frac{1}{1-h} t\right)}{\partial h} \cdot h = \frac{t}{(1-h)^2} \cdot h \Bigg|_{\substack{h=1-p \\ t=p}} =$$

$$= \frac{(1-p)}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

кол-во сомнож. сверху и снизу.

$$C_4^{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$$

$$C_{0,5}^{2} = \frac{0,5!}{2!} = \frac{0,5\cdot(-0,5)}{2\cdot 1}$$

$$C_{-11}^{3} = \frac{-11\cdot(-12)\cdot(-13)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\boxed{C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}}$$

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(1+x)^3 = C_3^0\cdot x^0 + C_3^1\cdot x^1 + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = C_{\frac{1}{2}}^0 x^0 + C_{\frac{1}{2}}^1 x^1 + C_{\frac{1}{2}}^2 x^2 + \ldots$$

Отрицательное биномиальное распр.

Экспер. подбрас. монетку ∞ раз

ждём r успехов (не обязат. подряд)

$$P(T) = P(\text{Успеха}) = p$$

$$P(M) = P(\text{Неуспеха}) = q = 1-p$$

X — кол-во неуспехов до r-го успеха

$$X \sim NBin(r, p)$$
$\downarrow$
negative

<u>Упр.</u> а) $P(X=k) = ?$

а') почему распр. так называется?

б) $E(X) = ?$

в) производящая функция всех исходов.

а) $r = 2$, $p = 0{,}3$ $\quad P(X=7)$

$$(p\, q^7 C_8^1)\, p = p^2 q^7 C_8^1$$

а) $P(X=k) = p^r q^k C^k_{k+(r-1)}$

$$\underbrace{\text{Н Н Н} \ldots \text{Т} \ldots \text{Т Н Н} \ldots \text{Н}}_{\text{всего } r+k-1} \mid \text{Т}$$

неуспех — k

успехов — $(r-1)$

а') $C^k_{k+r-1} = \dfrac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots r}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$

$$C_{-r}^{k} = \frac{-r\cdot(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-k+1)}{k\cdot(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

$$C_{-5}^{3} = \frac{-5(-6)(-7)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$C_{5+3-1}^{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$C_{k+r-1}^{k} = (-1)^k\cdot C_{-r}^{k}$$

Тогда $p^r\cdot q^k C_{k+(r-1)}^{k} = \boxed{(-1)^k\cdot C_{-r}^{k}\cdot p^r\cdot q^k}$

б) $E(X)$ → метод 1 шага + разлож. в сумму
→ производн. производ. ф-и.

ММММТ/ММТ

$X = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$

$\alpha_1 \sim Geom(p)$

$E(X) = E(\alpha_1) + E(\alpha_2) + \ldots + E(\alpha_r) \ominus$

$$\ominus \sum_{i=1}^{r} E(\alpha_i)$$

$$E(\alpha_1) = \frac{1}{p} - 1$$ ← геом. закон $Geom(p)$
кол-во неуспехов до 1 успеха.

$$E(X) = r \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

в) Производ. ф-я всех исходов

$$g(M,T) = TT + MTT + TMT + MMTT + MTMT +$$
$r = 2$

$$+ TMMT = \frac{1}{1-M} \cdot T \cdot \frac{1}{1-M} \cdot T = \left(\frac{1}{1-M} \cdot T\right)^2$$

M ... M T M ... M T

сколько угодно

$$g(M,T) = \left(\frac{1}{1-M} \cdot T\right)^r$$

$$E(X) =$$

$$+ MMT \cdot MMMT +$$
$$\downarrow$$
$$5 \cdot p^2 \cdot q^5$$

$$E(X) = \left.\frac{\partial g(u = qh,\ T = p)}{\partial h}\right|_{h=1}$$

$$q^5 \cdot p^2 \cdot h^5$$

$$u = (1-p)h \qquad T = p$$

$$h^5 \cdot (1-p)^5 \cdot p^2 \longrightarrow 5(1-p)^5 \cdot p^2$$

$$g = \left(\frac{p}{1-qh}\right)^r = r\left(\frac{p}{1-qh}\right)^{r-1} \cdot p \cdot (1-qh)^{-2} \cdot (-1) \cdot (-q) \Big|_{h=1} =$$

$$= r\left(\frac{p}{1-q}\right)^{r-1} \cdot p \cdot (1-q)^{-2} \cdot q = r \cdot \frac{q}{p} = r\,\frac{(1-p)}{p}$$

$X \sim Geom(p)$ [два похожих распр]

$X \sim Bin(n,p)$

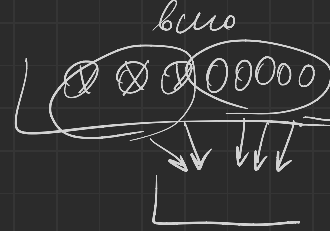
$X \sim NBin(n,p)$

Опр. $X \sim HGeom(N, K, n)$

Мы провели всего N испытаний, из них K успехов.

выбираем случайно равновероятно n испытаний

X – число попавшихся успехов



а) $N=10$

$K=7$

$n=5$

$$P(X=3) = ? = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5}$$

б) $X \sim HGeom(N, K, n)$

$P(X=k)$

в) Экстремум? $\dfrac{p(X=k+1)}{p(X=k)}$

б) N – всего яблок

K – всего хороших яблок

n – берем яблок

$$P(X=k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

в)

$$P(X=k+1)=\frac{C_K^{k+1}\,C_{N-K}^{n-k-1}}{C_N^n}$$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{k!\,(K-k)!\,(n-k)!\,(N-K-n+k)!}{(k+1)!\,(K-k-1)!\,(n-k-1)!\,(N-K-n+k+1)!}$$

$$=\frac{(K-k)(n-k)}{(k+1)(N-K-n+k+1)}=\frac{poly(k)}{poly(k)}\quad degree(2,2)$$

$N=10\quad K=7\quad n=5$

$E(X)=$

$X=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5$

R_1 - случайная величина $=\begin{cases}1, \text{ если хорошее на 1-м шаге}\\ 0, \text{ если плохое на 1-м шаге}\end{cases}$

$R_2\ \ldots$

$\vdots$

R_5

r	0	1
$P(R_1 = r)$	$3/10$	$7/10$

$$E(R_1) = \frac{7}{10}$$

$$E(X) = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

r	0	1
$P(R_2 = r)$	$3/10$	$7/10$

	$R_2 = 0$	$R_2 = 1$
$R_1 = 0$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$
$R_1 = 1$	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$

$P(R_1 = 1)$

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$ (2 распр)

$X \sim \mathrm{NBin}(r,p)$

$X \sim \mathrm{MGeom}(N,K,n)$