

1. У меня в ящике три кубика: два — правильных, а на третьем — три двойки и три четвёрки. Я извлекаю из ящика равновероятно два кубика, а затем подбрасываю каждый из них по одному разу. Обозначим результаты бросков как X_1 и X_2 .
 - а) [3] Найдите $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2)$.
 - б) [3] Правда ли, что величины X_1 и X_2 независимы?
 - в) [4] Какова вероятность того, что оба выбранных кубика — правильные, если оба раза выпала двойка?
2. Джеймс Бонд десантируется в случайную точку (X, Y) равномерно выбираемую на периметре треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(4, 0)$.
 - а) [5] Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 0)$ и $\mathbb{E}(Y \mid X > 0)$.
 - б) [5] Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$ и $\text{Var}(Y \mid X)$.
3. Величины (X_n) независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью λ .
 - а) [5] Найдите предел $\text{plim}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)/(3n + 100)$.
 - б) [5] Найдите предел $\text{plim} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n$, где $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$.
4. Сейчас акция стоит 100 рублей. Каждый день цена может равновероятно и независимо от предыстории либо возрасти на 8%, либо упасть на 5%.
 - а) [5] Какова вероятность того, что через 64 дня цена будет больше 110 рублей?
 - б) [5] Какой порог цены акции через 64 дня будет превышен с вероятностью 0.1?

Уточнение: $\ln(1.08) = 0.077$, $\ln(0.95) = -0.051$, $\ln(1.1) = 0.095$, запишите ответы с использованием функции распределения и посчитайте их по таблице.
5. Величины X_1 и X_2 независимы, их плотности, соответственно, равны $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
 - а) [3] Найдите совместную функцию плотности вектора (X_1, X_2) . Запишите соответствующий элемент вероятности $\text{pe}(x_1, x_2)$.
 - б) [4] Найдите совместную функцию плотности вектора (X_1, S) , где $S = X_1 + X_2$. Запишите соответствующий элемент вероятности $\text{pe}(x_1, s)$.
 - в) [3] Запишите функцию плотности величины S в виде интеграла.

Уточнение: под элементом вероятности мы подразумеваем дифференциальную форму $\text{pe}(x, y) = f(x, y)dx \wedge dy$.
6. Кржемелик загадал два различных натуральных числа, написал их на бумажках и взял одну бумажку в левую руку, а другую — в правую. Вахмурка выбирает одну руку Кржемелика равновероятно наугад и узнает число, написанное на этой бумажке. Задача Вахмурки — отгадать, большее или меньшее из двух чисел он узнал.

У Вахмурки есть правильная монетка.

 - а) [2] Предложите Вахмурке стратегию, которая гарантирует вероятность угадывания ровно 0.5 вне зависимости от действий Кржемелика.
 - б) [8] Предложите Вахмурке стратегию, которая гарантирует вероятность угадывания строго больше 0.5 вне зависимости от действий Кржемелика.