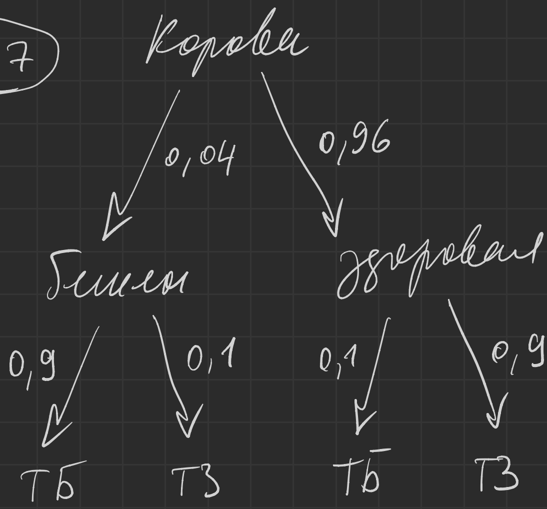
7.7



$$P(\text{бол} \mid \text{ТБ}) = \frac{P(\text{бол}, \text{ТБ})}{P(\text{ТБ})} = \frac{0,9 \cdot 0,04}{0,9 \cdot 0,04 + 0,96 \cdot 0,1} =$$

$$= \frac{3}{11}$$

Лекция 5.

A < О : 0,3 ; Р : 0,7

B < О : 0,4 ; Р : 0,6

P_n – вер-ть орла на n-ом шаге

$P_n = 0,3A_n + 0,4B_n$ $\quad$ $A_n = P_{n-1}$

$B_n = 1 - P_{n-1}$

$P_n = 0,4 - 0,1P_{n-1}$

A_n – вер-ть что на n-ом шаге подбр. монетку A.

$A_n + B_n = 1$

$$P_0 = 1 \xrightarrow{-0,7} P_1 = 0,3 \xrightarrow{+0,07} P_2 = 0,37 \xrightarrow{-0,007} P_3 = 0,363$$

$$(P_n - P_{n-1}) = -0,1(P_{n-1} - P_{n-2})$$

$$P_n = 1 + 7\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 10^{-k} =$$

$$= 1 - 0,7 + 0,07 - 0,007 + \dots =$$

$$= (-1)^n 10^{-n} \cdot 0,7 =$$

$$= 1 - \frac{0,7(1 - (-0,1)^n)}{1+0,1} =$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{100} \left(1 + 7\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 10^{-k}\right)$$

$$= \frac{4}{11} + \frac{7}{11}\cdot(0,1)^n$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{100} E(I_n) = \sum_{n=1}^{100} P_n = 100\cdot\frac{4}{11} + \frac{\frac{7}{11}\cdot(-0,1)(1-(0,1)^{100})}{1-(-0,1)}$$

$\alpha = A$ A_n - бросок A на n-ом броске

$\beta = B$ B_n - бросок B на n-ом броске

$P(M_n)$ - вер-ть орла на n-ом шаге.

$$P(B_n \cap M_n) = P(M_n | B_n) P(B_n) = 0,4\cdot(1 - P(A_n)) =$$

$$= 0,4\cdot(1 - P M_{n-1}) = 0,4\cdot\left(100 - \sum_{n=1}^{99} P_n\right) = 40 - 0,1 E(X) + P_{100}\cdot 0,4 =$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{100} I(H_n) \cdot \sum_{m=1}^{100} I(H_m \cap B_m)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{100} \sum_{m=1}^{100} \left(I(H_n) \cdot I(H_m \cap B_m)\right)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{100} \sum_{m=1}^{100} I(H_n \cap H_m \cap B_m)\right) = \sum_{m=1}^{100} \sum_{n=1}^{100} P(H_n \cap H_m \cap B_m) =$$

I) $n=m$: $P(H_n \cap H_m \cap B_m) = P(H_n \cap B_n)$

$$\sum_{n=m}^{100} P(H_n \cap H_m \cap B_m) = \mathbb{E}(Y)$$

II) $n<m$: $P(H_n \cap H_m \cap B_m) = P(H_m \cap B_m \mid H_n) \cdot P(H_n)$

Счетное множество.

	x_1	x_2	....
	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	....

Континуум. $x \in [0,1]$

$$P(X \in [a,b])$$

Пример:

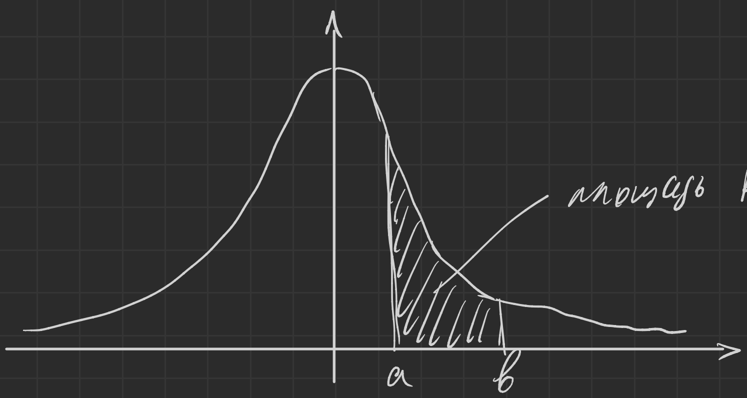
$$P(X \in [a,b]) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)+1} - \frac{\exp(a)}{\exp(a)+1}$$
$$a \le b$$

a) $P(X \in [0,2]) = \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^2 - e^2 - 1}{2(e^2+1)}$

$P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$

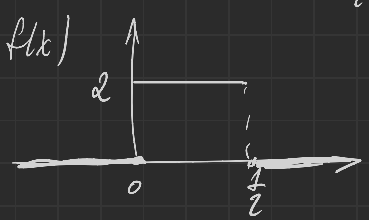
$P(X \leq 1 \mid X \geq 0) = \frac{P(X \in [0,1])}{P(X \geq 0)} = \frac{\frac{e}{1+e} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{e-1}{e+1}$

$$P(X \in [a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$



<u>Опр.</u> Функция $f(x)$ наз-ся функцией плотности СВ X, если $P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$ $(\forall a \leq b)$

<u>Пример:</u> $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$



$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$P(X \geqslant 0{,}4) = \int_{0{,}4}^{0{,}5} 2\,dx + \int_{0{,}5}^{+\infty} 0\,dx = 0{,}2$$

$$P(X \geqslant 3) = 0$$

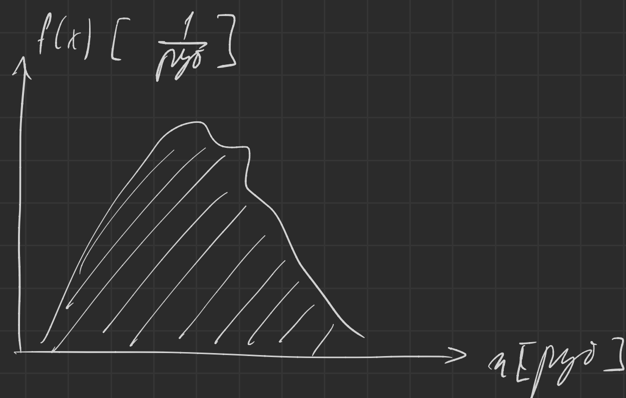
$$P(X \in [0{,}2]) = 1$$

<u>Теорема</u> Функция $f(x)$ может быть функцией плотности, если и только если:

1. $f(x) \geqslant 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

X [рублях]

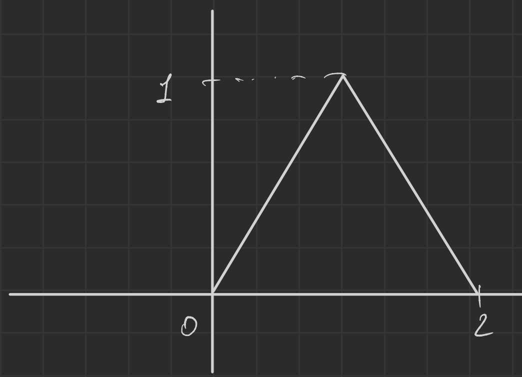
f(x) [1/рубль]

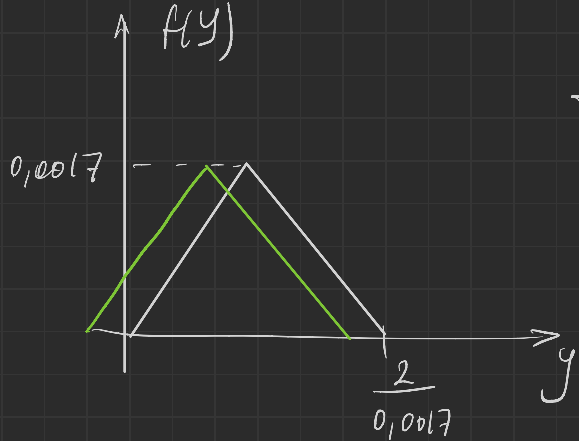


Упр. X – СВ (руб) $\quad f_X(x)$ – ф. плот. у X

1 IRR = 0,0017 RuB

$$y = \frac{X}{0{,}0017}$$





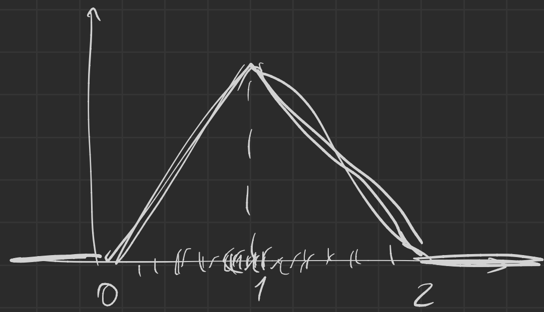
$$f_y(y) = 0{,}0017\, f\left(\frac{X}{0{,}0017}\right)$$

$$y = \frac{X}{0{,}0017} - 1$$

$$f(y) = 0{,}0017\, f(x)$$

$$y = kx + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{k}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{k} f_x\left(\frac{y-b}{k}\right)$$

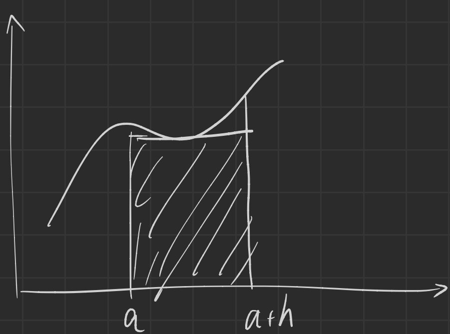


$$f_X(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$y = x^2$ $\qquad$ $f_Y(y) = ?$

2 определение $f(x)$

$$P(X \in [a, a+h]) = f(a) \cdot h + o(h) \quad \forall a, \forall h \geq 0$$



$$\sin h \doteq h \iff \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Второе опр. $f(x)$

$$P(X \in [a, a+h]) \doteq f(a)\cdot h$$

$$P(X \in [x, x+dx]) \doteq f_X(x)\,dx = f_X(\sqrt{y})\,d(\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{dy}{2\sqrt{y}} =$$

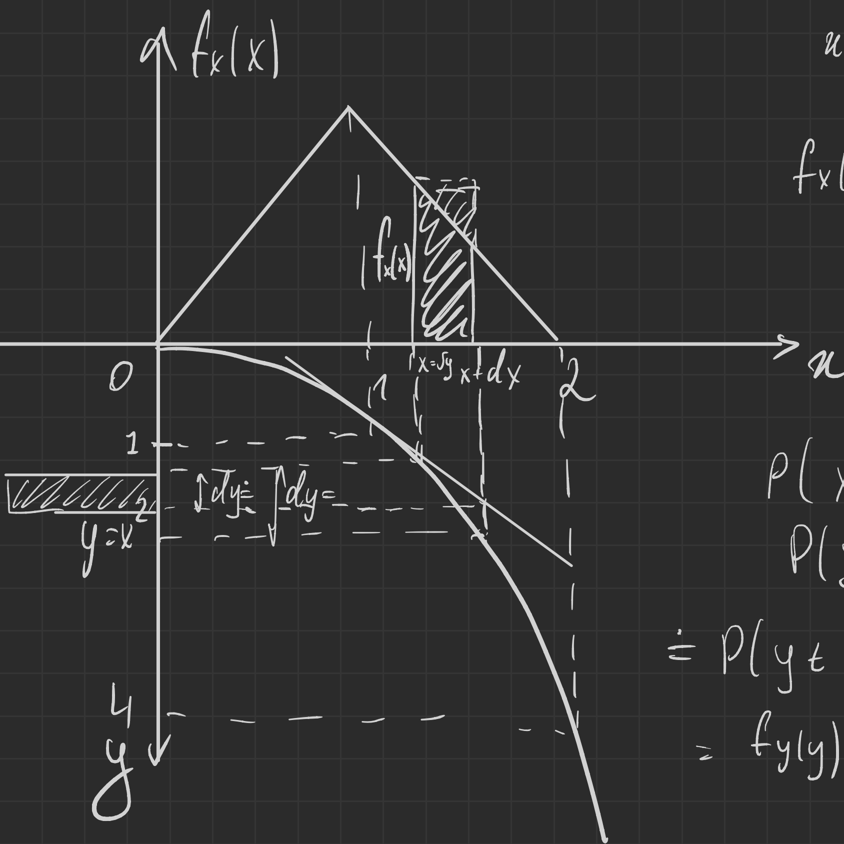
$$P(Y \in [y; y+dy]) \doteq f_Y(y)\,dy$$

$$y = x^2 \quad x \in [0, 2]$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = f_Y(y)$$

$$dx \doteq x'_y\,dy$$



$$P(X \in [1, 1+dx])$$

$$P(Y \in [1, 1+2dx+dx^2]) \doteq$$

$$\doteq P(Y \in [1, 1+2dx]) =$$

$$= f_Y(y)\,2dx$$

$$P(y \in [1, 1+dy]) = P\left(X \in \left[1, 1+\frac{dy}{2}\right]\right) =$$

$$= f_X(1) \cdot \frac{1}{2} dy$$

<u>Полезная теорема.</u>-рецепт

Если у СВ функция плотности $f_X(X)$ и $y = g(X)$ монотонно возрастающ. ф-я, то чтобы посчитать $f_Y(y)$ нужно:

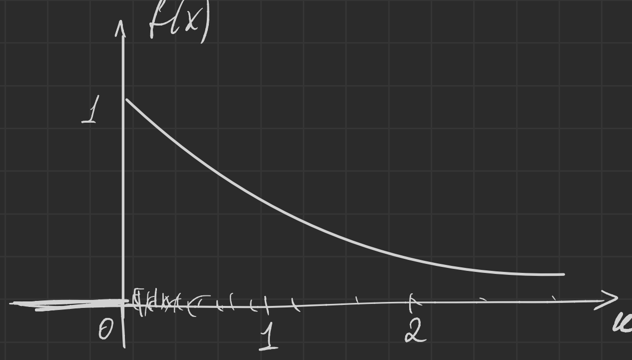
1. выразить x через y: $x = g^{-1}(y)$
2. Подставить x в $f(x)dx$ и привести к виду $f_Y(y)dy$.

<u>Упр.</u> X ф-я плотность $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \exp(-x), & x \geq 0 \end{cases}$

а) $y = -\ln x$ $\quad f_Y(y) = ?$ $\quad$ и нарисовать

б) $w = \exp(-x)$ $\quad f_W(w) = ?$ $\quad$ и нарисовать

а)



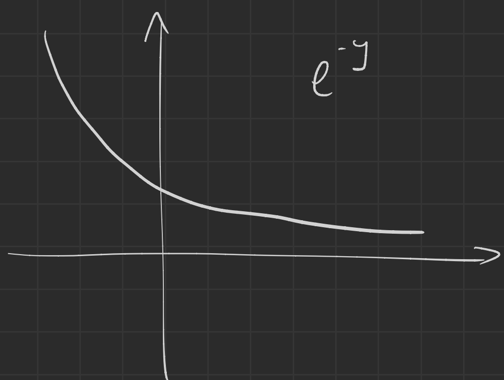
$$x = e^{-y}$$

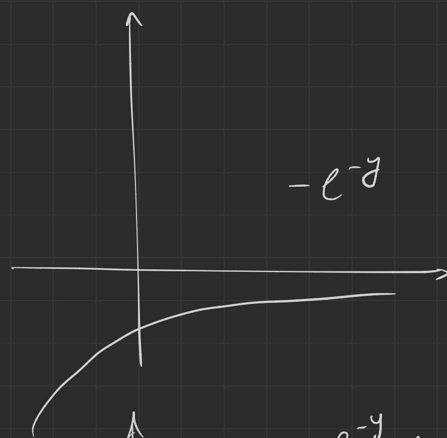
$$dx = -e^{-y} dy$$

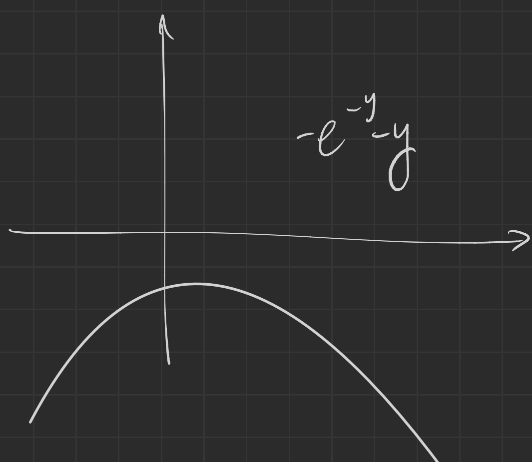
$$f_X(x)\,\underset{\vee\,0}{dx} = \underbrace{e^{(-e^{-y})}(-e^{-y})}\,\overset{<0}{dy}$$

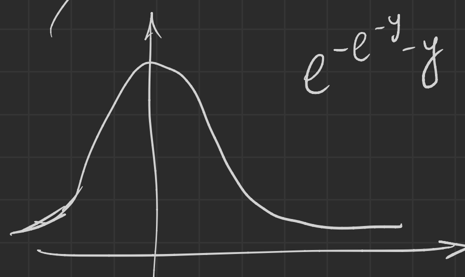
$$f_Y(y) = \left|e^{(-e^{-y})}(-e^{-y})\right| = e^{(-e^{-y}-y)} \qquad y \in \mathbb{R}$$

Рисуем $e^{-e^{-y}-y}$:









$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{-y}-y}\,dy = 1$$

Теор Вер

$y = x^2 \quad x = \sqrt{y}$

$y = 1 \quad x = \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1$

$$f_Y(1)dy \overset{\cdot}{=} P(Y \in [1, 1+dy]) = P(X \in [1, 1+\sqrt{1+dy}]) \overset{\cdot}{=}$$

можно считать с точностью до $o(dy)$

$$\overset{\cdot}{=} P(X \in [1; 1+\tfrac{1}{2}dy]) \overset{\cdot}{=} f_X(1) \cdot \tfrac{1}{2} dy = \underbrace{f_X(1)\,dx}_{\text{дано}}$$

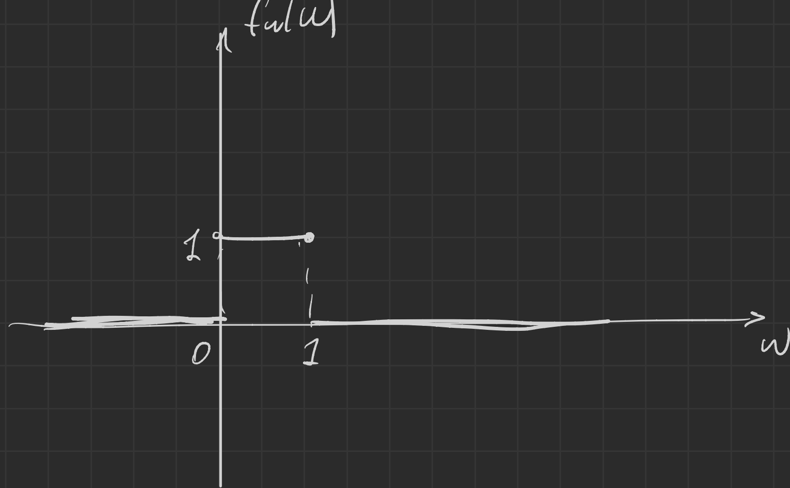
Рецепт:
возьмите $f_X(x)dx$ и подставьте x.

б) $w = \exp(-x) \quad f_W(w) \quad x = -\ln w$

$$\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\exp(-x)dx} = \exp(\ln w)(-1)\frac{1}{w}dw =$$

$$= \frac{w}{-w}dw = \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{-dw} = 1\underset{\substack{\vee \\ 0}}{(-dw)}$$

Ответ: $f_W(w) = \begin{cases} 1, & w \in [0,1] \\ 0, & w \notin [0,1] \end{cases}$



$$P(\omega \in [a, b]) = \int_a^b f(\omega)\,d\omega$$

$$P(w \in [\omega, \omega+h]) \doteq f(\omega)h$$

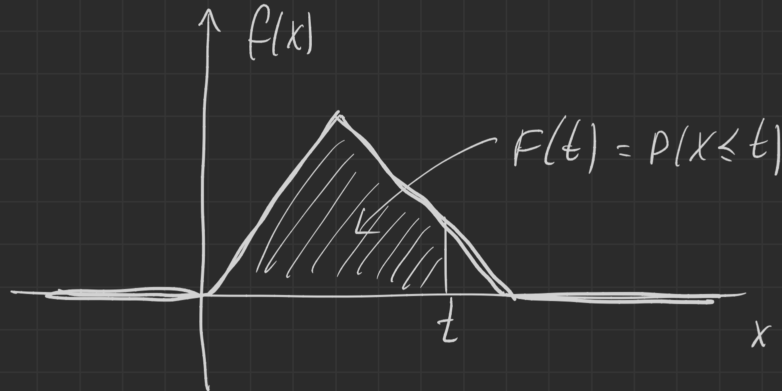
<u>Упр.</u> у СВ X есть ф-я плотности $f(x)$

$$P(X=52) \overset{?}{=} \int_{52}^{52} f(x)\,dx = 0.$$

<u>Опр</u> у СВ X – ф. плотн $= f(x)$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = P(X \leq t) = F(t)$$

функция распределения СВ X.



<u>Теорема</u> $F(t) \in [0,1]$

$F(t)$ не убывает по t

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = P(X \le +\infty) = 1$$

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$$

$$F'(t) = f(t)$$

pdf $f(x)$ ф. плотности.

(probability density function)

cdf $F(x)$ ф. распределения

(cumulative distribution function)

$X \sim Bin(10, p = 0{,}3)$

$P(X \le 5) \overset{?}{=}$

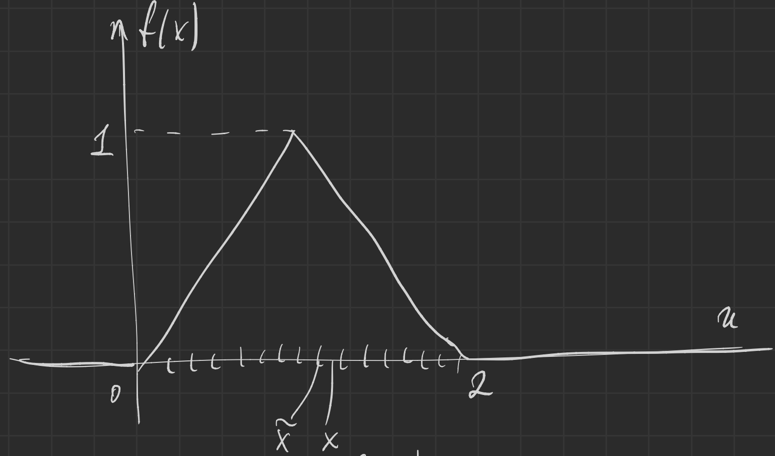
pdf не у всех СВ

cdf есть у всех СВ

$$P(X \le 5) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=5)$$

$$P(X=4) = 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^6 \cdot C_{10}^4$$

```
from scipy import stats
stats.bin.cdf(5, n=10, p=0,3)
```



X – с ф. плотн. $f(x)$

$\tilde{X} \approx X$

$$E(\tilde{X}) = \sum_{\tilde{x}} \tilde{x}\, P(\tilde{X} = \tilde{x}) = \sum_{x} \tilde{x}\, P(X \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h]) \approx$$

$$\approx \sum_{x} \tilde{x}\, f(\tilde{x})\, h \to \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Теорема. Если у СВ есть ф. плотности $f(x)$

и если $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ сходится, то

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

у X счётн. / конечное кол-во знач.

опр. $\mathbb{E}(X) = \sum_x x P(X=x)$

$P(X \in [x; x+dx])$

Теорема, часть В:

$$\mathbb{E}(X^3) \approx \mathbb{E}(\tilde{X}^3) = \sum_{\tilde{x}} \tilde{x}^3 \mathbb{P}(\tilde{X}=\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x}} \tilde{x}^3 P(x \in [\tilde{x}+h])$$

$$\approx \sum_{\tilde{x}} \tilde{x}^3 f(\tilde{x}) h \xrightarrow{h \to 0}$$

$$\mathbb{E}(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx \quad \text{(если инт. сходится)}$$

Упр. $\exists$ СВ X ф. плотности равна

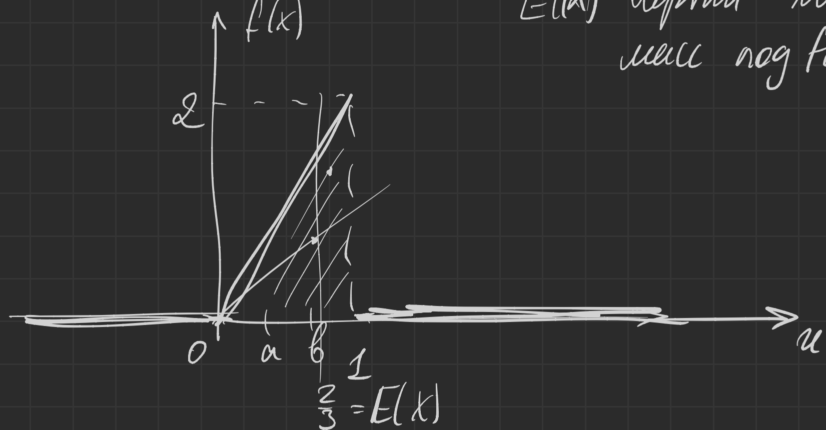
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

a) $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_0^1 x \cdot 2x\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) =$

Геометрия $E(X)$ и $f(x)$

$E(X)$ – вертик. линия центра масс под $f(x)$



<u>Эксперимент</u>

Выбираю точку $A \in \mathbb{R}^2$ равномерно под $f(x)$ (над осью)

$$A = \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}$$

$$P(X \in [a,b]) = \frac{S[a,b]}{S[0,1]} = S[a,b] = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int\limits_0^1 \frac{1}{x} \cdot 2x\,dx = 2 \qquad E(X^2) = \int\limits_0^1 x^2\, 2x\,dx = \frac{1}{2}.$$