

Формат

В контрольной работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор.

Демо «Хонсю»

- Даниел Негреану извлекает из стандартной колоды в 52 карты 5 карт случайным образом.
 - Найдите вероятность комбинации фул-хаус (две карты одного достоинства и три карты — другого достоинства).
 - Найдите вероятность комбинации фул-хаус, если у Негреану более одного туза.
 - Найдите ожидаемое количество дам.
 - Найдите дисперсию количества пиковых карт.
- Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.
 - Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?
 - Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?
 - Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?
 - Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?
- В корзине лежат 10 не отличимых на ощупь яблок: 2 красных и 8 зелёных. Я наугад равновероятно на ощупь достаю одно из яблок. Красное я сразу съедаю, а зелёное — возвращаю обратно в корзину. Затем я снова и снова достаю яблоки по данным правилам до тех пор, пока не съем оба красных. Обозначим с помощью N количество извлечений яблок. Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\mathbb{E}(N^2)$.
- Илон Маск подбрасывает правильную монетку 30 раз. За каждые две решки подряд он получает выигрыш 100 рублей. Найдите математическое ожидание суммарного выигрыша Илона.
- Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = x/2$ на отрезке $[0; 2]$.
 - Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ и $\mathbb{E}(X \mid X < 1)$.
 - Найдите функцию распределения величины $Y = 2X$.
 - Найдите функцию плотности величины $W = X^2$.
- На плоскости отмечены четыре точки, $A = (1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (-2, 2)$ и $D = (2, -2)$. Я случайно выбираю одну из точек, координаты выбранной точки обозначим вектором (X, Y) . Вероятности выбора равны $p_A = p_B = 0.4$, $p_C = p_D = 0.1$.

- а) Найдите $\mathbb{E}(Y | X)$, $\mathbb{E}(Y^2 | X)$.
- б) Найдите $\mathbb{E}(XY^2)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Cov}(X, Y)$.
- в) Найдите $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$, $\mathbb{P}(\mathbb{E}(Y | X) = Y)$.

Демо «Сикоку»

1. У каждого из трёх друзей своя шляпа. В темноте шкафа по очереди каждый из них случайно выбирает шляпу и надевает на себя. Обозначим X — количество шляп, оказавшихся надетыми на своём хозяине.
 - а) Составьте табличку возможных значений X и их вероятностей.
 - б) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и дисперсию $\text{Var}(X)$.
2. На первом шаге я подбрасываю правильную монетку 3 раза. Количество выпадающих орлов — случайная величина X . На втором шаге я равновероятно выбираю целое число от 0 до X включительно, назовём его Y .
 - а) Составьте двумерную табличку совместного распределения вектора (X, Y) .
 - б) Найдите $\mathbb{P}(Y = 2 | X = 3)$ и $\mathbb{P}(Y = 2 | X)$.
 - в) Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y | X)$, $\mathbb{E}(Y | X \geq 2)$.
 - г) Найдите наилучшее линейное приближение X с помощью Y .
3. На побережье одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0; 1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше своих соседа. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i\text{-я волна была большой}\}$ и $R_i = \{i\text{-я волна была рекордной}\}$.
 - а) Найдите $\mathbb{P}(B_1 | B_2)$, $\mathbb{P}(B_1 | B_3)$.
 - б) Найдите $\mathbb{P}(R_{2024} | R_{2025})$, $\mathbb{P}(R_{2024} | B_{2024})$.
 - в) Укажите любую функцию $a(n)$ такую, что $a(n) = O(\mathbb{E}(X_n))$, где X_n — количество рекордных волн среди n волн.
4. Глеб Жеглов каждый день ловит одного преступника. Однако с вероятностью 0.05 вместо одного пойманного на преступный путь встают w новых граждан. Изначально в городе живёт n преступников. Сколько дней в среднем пройдёт до полного искоренения преступности в городе?
 - а) Решите задачу при $n = 1$ и $w = 1$.
 - б) Решите задачу при произвольных n и w .
5. На единичной окружности с центром в начале координат (не внутри!) в случайные точки приползли три муравья. Три точки независимы и равномерно распределены по окружности. Два муравья могут общаться друг с другом, если центральный угол между ними меньше прямого.
 - а) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом (возможно через посредника)?

- б) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом через посредника, если центральный угол между муравьём один и муравьём два больше прямого?
- в) Найдите функцию плотности координат первого муравья.
6. У Маши и Саши по хорошо перемешанной колоде в 52 карты. Они одновременно открывают колоду по карте, одну за одной. За каждое совпадение карт они получают по рублю.
- Чему равен ожидаемый выигрыш Саши и Маши?
 - Как изменится ответ, если за каждое совпадение, перед которым тоже было совпадение, каждый игрок получает дополнительный бонусный рубль помимо рубля за само совпадение?