Формат

В контрольной работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист A4 и простой калькулятор.

Демо «Хонсю»

1. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию плотности

$$f(x,y) = \begin{cases} cx + 3y, \text{ если } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   а) Найдите константу c.

   б) Найдите функцию плотности $f_X(x)$ и условную функцию плотности $f(y \mid x)$.

   в) Найдите $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y)$ и $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

2. Величина X имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью $\lambda = 1$.

   а) Найдите энтропию величины X.

   б) Сколько в среднем вопросов нужно задать, чтобы угадать X с точностью до 10^{-6}, при использовании оптимальной стратегии?

   в) А сколько в среднем вопросов придётся задать, чтобы угадать X с точностью до 10^{-6}, если ошибочно верить, что она распределена экспоненциально с интенсивностью $\lambda = 2$?

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(3, 10)$. Обозначим её функции распределения и плотности как F и f, соответственно.

   а) Найдите $F(5)$ и $f(0)$.

   б) Найдите точку экстремума f и точки перегиба f.

   в) Схематично постройте графики F и f на соседних графиках друг над другом.

   г) Найдите α и β, если известно, что $Y = (X - \alpha)/\beta \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

4. Вектор $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеет многомерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, C)$, где $\mu = (1, 2, 3)$ и $C = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ & 20 & 1 \\ & & 30 \end{pmatrix}$.

   Рассмотрим вектор $Y = (Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2 + X_3, 2X_2 - X_3)$.

   а) Найдите ожидание $\mathbb{E}\, Y$ и ковариационную матрицу $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, Y$. Как распределён вектор Y?

   б) Найдите $\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3)$ и $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1^2, X_3)$.

5. Такси прибывают на остановку пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda = 10$ в час. Пусть Y_t — количество такси, прибывших от начала наблюдения до момента времени t.

   а) Найдите функцию $\mathbb{E}(Y_5 - Y_t)$ и постройте её график.

   б) Найдите функцию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_5 - Y_t)$ и постройте её график.

в) Для вектора $X = (Y_1, Y_5, Y_{10})$ найдите $\mathbb{E}\, X$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, X$.

6. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ x/4, \text{ если } x \in [0, 1) \\ x/4 + 1/4, \text{ если } x \in [1, 3), \\ b, \text{ если } x \geq 3. \end{cases}$$

а) Найдите b.

б) Найдите $\mathbb{P}(X = 1)$ и $\mathbb{P}(X = 2)$.

в) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ и $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, X^2)$.

Демо «Сикоку»

1. Случайный вектор (X, Y) имеет функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, \text{ если } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

а) Найдите $\mathbb{P}(X + Y < 1)$, $\mathbb{P}(X + 2Y < 1 \mid X + Y < 1)$.

б) Найдите функцию плотности $f_X(x)$ и условную функцию плотности $f(y \mid x)$.

в) Найдите совместную функцию плотности $f_{UV}(u, v)$, где $U = 2X + 3Y$, $V = 2X - 4Y$. Зависимы ли величины U и V?

2. Величина X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(1, 4)$.

а) Найдите энтропию величины X.

б) Сколько в среднем вопросов нужно задать, чтобы угадать X с точностью до 10^{-6}, при использовании оптимальной стратегии?

в) А сколько в среднем вопросов придётся задать, чтобы угадать X с точностью до 10^{-6}, если ошибочно верить, что она распределена $\mathcal{N}(2, 4)$?

3. Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = c \cdot \exp(4x - x^2/32)$, где c — некоторая константа.

а) Как распределена случайная величина X?

б) Найдите константу c.

в) Найдите $\mathbb{E}(X^4)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X^3, X)$.

Подсказка: если представить X как $X = \mu + Y$, то $\mathbb{E}(Y) = 0$ и можно будет применить лемму Стейна $\mathbb{E}(Y g(Y)) = \sigma^2\, \mathbb{E}(g'(Y))$.

4. Вектор X имеет многомерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, C)$ с функцией плотности $f(x)$. Рассмотрим функцию $h(x) = \ln f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

а) В какой точке функция $h(x)$ достигает своего максимума?

б) Чему равна матрица Гессе функции $h(x)$?

У случайного вектора Y функция плотности равна $f(y_1, y_2) = c \cdot \exp(-4y_1^2 - 6y_2^2 + 2y_1 + 20y_2)$.

в) Найдите $\mathbb{E}\, Y$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, Y$. Как распределён вектор Y?

г) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{orr}(Y_1, Y_2)$.

5. Такси прибывают на остановку пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda = 10$ в час. Пусть Y_t — количество такси, прибывших от начала наблюдения до момента времени t.

   а) Найдите $\mathbb{P}(Y_{0.1} = 2)$, $\mathbb{P}(Y_{0.2} = 2 \mid Y_{0.1} = 1)$.

   б) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{orr}(Y_1, Y_7)$.

   в) Я только что пришёл на остановку. Какова вероятность того, что следующее такси я увижу раньше, чем за 5 минут?

6. Илон Маск подбрасывает правильную монетку два раза. Рассмотрим три индикатора: I_1 — индикатор того, что в первом броске выпал орёл, I_2 — индикатор того, что во втором броске выпал орёл, I_3 — индикатор того, что результаты двух бросков одинаковые.

   а) Найдите $\mathrm{BestLin}(I_3 \mid I_1)$.

   б) Найдите $\mathrm{BestLin}(I_3 \mid I_1, I_2)$.

   в) Найдите $\mathbb{E}(I_3 \mid I_1, I_2)$.

   Уточнение: конечно, функция $\mathrm{BestLin}(Y \mid X, Z)$ обязана иметь вид $\alpha + \beta X + \gamma Z$.