

Формат

В экзамене будет 6 задач:

1. Условная вероятность.
2. Условное математическое ожидание.
3. Сходимость по вероятности и закон больших чисел.
4. Центральная предельная теорема.
5. Сюрприз!
6. Сюрприз!

Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно использовать чит-лист А4 и простой калькулятор.

Демо «Сцилла»

1. У меня два кубика: один правильный, а на втором — две двойки и четыре четвёрки. Сначала я равновероятно выбираю один из кубиков, а потом подкидываю его два раза. Обозначим результаты бросков как X_1 и X_2 .
 - а) Найдите $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2)$.
 - б) Правда ли, что величины X_1 и X_2 независимы?
 - в) Какова вероятность того, что был выбран правильный кубик, если оба раза выпала двойка?
2. Джеймс Бонд десантируется в случайную точку (X, Y) с совместной плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} cx + y, & \text{если } x \in [0, 1], y \in [0, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите константу c .
 - б) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 1)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid X = 1)$, $\text{Var}(Y \mid X = 1)$.
 - в) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$.
3. Величины (X_n) независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(5; 10)$.
 - а) Найдите предел по вероятности

$$\text{plim} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{7n}.$$

- б) Найдите предел по вероятности

$$\text{plim} \ln(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - \ln n.$$

4. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей.

- а) Найдите вероятность того, что через год акция будет стоить больше 1030 рублей.
- б) Найдите такой порог цены h , выше которого цена акции через год окажется с вероятностью 0.3.

Уточнение: в году 365 дней, в пунктах (а) и (б) запишите ответ тремя способами. Во-первых, с помощью определённого интеграла, во-вторых, в виде кода на любом языке программирования, в-третьих, получите ответ с помощью таблицы нормального распределения.

5.

6.

Демо «Харибда»

1. Илон Маск подбрасывает правильную монетку четыре раза.

- а) Правда ли, что число орлов в первых трёх бросках и число орлов в последних трёх бросках независимы?
- б) Какова вероятность того, что все четыре раза выпал орёл, если орёл выпал хотя бы два раза?
- в) Какова вероятность того, что все четыре раза выпал орёл, если орёл выпал хотя бы два раза в первых трёх бросках и хотя бы два раза в последних трёх бросках?

2. Колобок стартует в точке $(X_0 = 0, Y_0 = 0)$. За каждую минуту он откатывается на единицу вверх с вероятностью 0.2, вниз — с вероятностью 0.2, вправо — с вероятностью 0.3, влево — с вероятностью 0.3. Все перекачивания независимы. Обозначим координаты Колобка через t минут как (X_t, Y_t) .

- а) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2 = 1)$, $\mathbb{E}(Y_2^2 \mid X_2 = 1)$, $\text{Var}(Y_2 \mid X_2 = 1)$.
- б) Найдите $\mathbb{E}(Y_2 \mid X_2)$.

3. Величины (X_n) независимы и равномерно распределены $\text{Unif}[0, 1]$.

- а) Найдите предел по вероятности

$$\text{plim} \frac{nX_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n}{7n}.$$

- б) Найдите предел по вероятности

$$\text{plim} \sqrt[n]{X_1 X_2 X_3 \dots X_n}.$$

4. Истинная вероятность выпадения монетки «орлом» равна 0.63.

- а) Какова вероятность, что в 100 испытаниях выборочная доля выпадения орлов будет отличаться от истинной вероятности менее, чем на 0.07?
- б) Каким должно быть минимальное количество испытаний, чтобы вероятность отличия выборочной доли и истинной вероятности менее чем на 0.02 была больше 0.95?

5.

6.