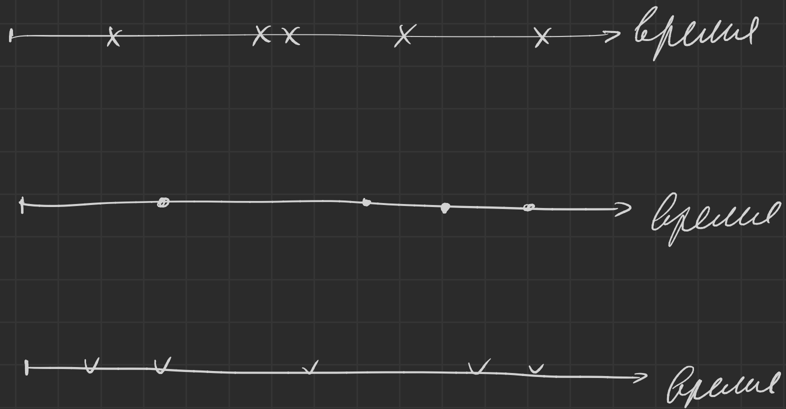
Лекция

Пуассоновский поток / процесс



N_t — кол-во „происшествий" за отрезок $[0,t]$

$N[0,t]$ $\quad N_t = \{0,1,2,3,\dots\}$

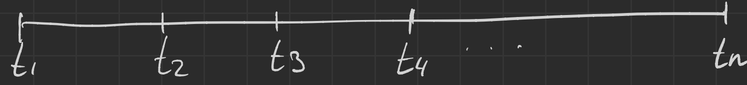
1. $N_0 = 0$

2. постоянная интенсивность (стационарность приращений)

$$\mathbb{P}(N_{[a;b]}=k) = \mathbb{P}(N_{[a+h;b+h]}=k) \quad \forall a,b,h,k$$

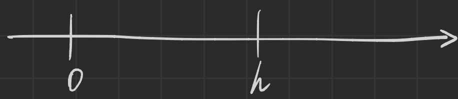
$$N_{a+h} - N_a \sim N_h$$

3. Независимость приращений



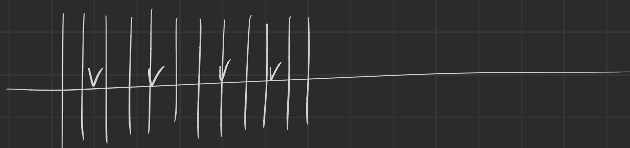
$N[t_1, t_2]$, $N[t_2, t_3]$, $N[t_3, t_4]$, … $N[t_{n-1}, t_n]$ независ-е. в совокуп-ти.

4. N_h



интуитивно: вер-ть $P(N_h \geq 2)$ пренебрежимо мала по сравнению с $P(N_h = 1)$ при $h \to 0$

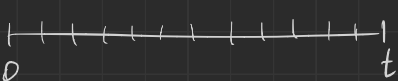
$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h \geq 2)}{\mathbb{P}(N_h = 1)} = 0 \qquad N_h = N[0, h]$$



Что из этого следует?

<u>Задача.</u> какой вид имеет $\mathbb{E}(N_t) \stackrel{?}{=}$

$t - N$



$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}) + \mathbb{E}(N_{[1,2]}) + \mathbb{E}(N_{[2,3]}) + \dots + \mathbb{E}(N_{[t-1,t]}) =$$

Все мат. ожид. одинак. по 2-ой предпосылке

$$= \lambda \cdot t$$

$\mathbb{E}(N_{[0,1]})$

λ - среднее кол-во происшествий за ед. времени

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_{[0,\frac{1}{n}]}) + \mathbb{E}(N_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}) + \dots + \mathbb{E}(N_{[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}]}) =$$

$t = \frac{657}{37} = \frac{m}{n}$ $\quad \lambda = \mathbb{E}(N_{[0,1]}) = \mathbb{E}(N_{[0,\frac{1}{n}]}) + \dots + \mathbb{E}(N_{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}]}) =$

$$= n \cdot \mathbb{E}(N_{\frac{1}{n}})$$

$$= m \cdot \mathbb{E}(N_{\frac{1}{n}}) = t \cdot \lambda$$

$\mathbb{E}(N_{\frac{1}{37}}) =$ (по 2-ой акс.) $= \frac{\lambda}{37}$

$$\mathbb{E}(N_{\frac{657}{37}}) = 657 \cdot \frac{\lambda}{37}$$

Задача. $\mathbb{P}(N_t = 0)$

Большая сила о-малых!

$h = \frac{t}{n}$

разбили на $n >> 0$ участков.

интуитивное решение:

если $h \approx 0$, то $\mathbb{P}(N_h \geq 2)$ пренебрежимо мало

$$\mathbb{P}(N_t = 0) \doteq (1-p)^n \qquad = (1-p+o(p))^n$$

	инт	аккур.
$\to 1$	p	$p + o(p)$
$\to 0$	$1-p$	$1-p+o(p)$
$\to 2, 3, \ldots$	0	$o(p)$

$$\mathbb{E}(N_t) = t \cdot \lambda \doteq n \cdot \mathbb{E}(N_h) = n \cdot p \qquad p \doteq \frac{t \cdot \lambda}{n}$$

$$\lambda = \mathbb{E}(N_1)$$

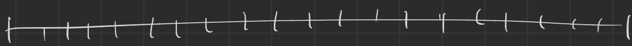
$$\mathbb{E}(N_h) \doteq p \cdot 1 + 0(1-p)$$

$$\mathbb{P}(N_t = 0) \doteq (1-p)^n \doteq \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^n \doteq e^{-t\lambda}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}}$$

Задача:

$$\mathbb{P}(N_t = 1) =$$



$$\mathbb{P}(N_t = 1) \doteq C_n^1 \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} =$$

$$p \doteq \frac{t\lambda}{n}$$

$$= n \cdot \frac{t\lambda}{n} \cdot \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{n-1} = t\lambda e^{-t\lambda}$$

$$\mathbb{P}(N_t = 2) \doteq C_n^2 \cdot p^2 (1-p)^{n-2} \doteq \frac{n!}{(n-2)!\,2} \cdot \frac{t^2\lambda^2}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{n-2} \doteq$$

$$\doteq \frac{\overset{\overset{n}{\sim}}{(n-1)}\, t^2 \lambda^2}{2n} e^{-t\lambda} \doteq \frac{t^2\lambda^2}{2} e^{-t\lambda}$$

$$\mathbb{P}(N_t = k) \doteq C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \doteq$$

$$\doteq \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)(k-2)\cdots 1} \cdot \frac{(t\lambda)^k}{n^k} \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{n-k} \doteq$$

$$\doteq \frac{(t\lambda)^k \cdot e^{-t\lambda}}{k!}$$

$$C^3_{3/4} = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

<u>Упр.</u> $t=1$, $\lambda = \mathbb{E}(N_1)$

$$P(N_1=0) = e^{-\lambda}$$

$$P(N_1=1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$P(N_1=2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

$$P(N_k=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(N_1=k) = e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots\right) = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

$$\mathbb{E}(N_1) \overset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{}} = 0\cdot e^{-\lambda} + 1\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda} + 2\cdot\frac{\lambda^2}{2}\cdot e^{-\lambda} + \frac{3\cdot\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} + \dots =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots\right) = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

<u>Упр.</u> $t=1$

$$Var(N_1) = \mathbb{E}(N_1^2) - (\mathbb{E}N_1)^2 = \mathbb{E}(N_1)^2 - \lambda^2$$

$$\mathbb{E}(N_1^2) = 0\cdot e^{-\lambda} + 1\cdot \lambda e^{-\lambda} + 2^2\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{3^2\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \dots$$

$$\mathbb{E}(N_1(N_1-1)) = 0\cdot(-1)e^{-\lambda} + 1\cdot 0\cdot \lambda e^{-\lambda} + \frac{2\cdot 1\,\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} +$$

$$+ \frac{3\cdot 2\cdot \lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \frac{4\cdot 3\,\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!} + \dots = e^{-\lambda}\lambda^2\left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda} = \lambda^2 = \mathbb{E}(N_1^2 - N_1)$$

Тогда $\mathbb{E}(N_1^2) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow Var(N_1) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

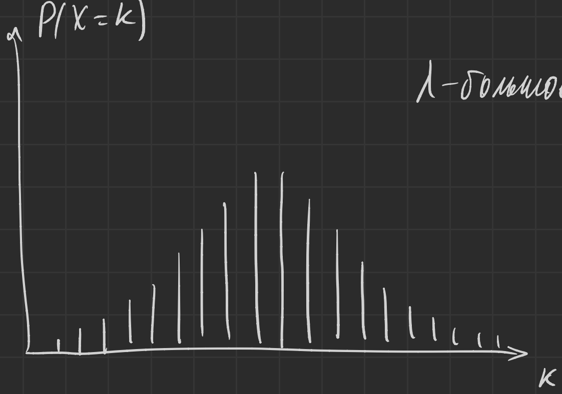
<u>Опр.</u> СВ величина X имеет распределение Пуассона с интенсивностью λ, если

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \qquad X \sim Pois(\lambda)$$

<u>Теорема</u> Если $X \sim Pois(\lambda)$, то

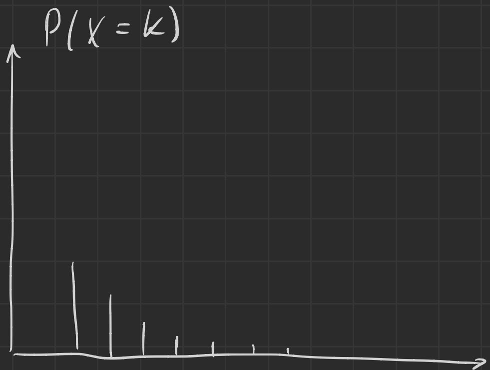
$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$



λ-большое

$\lambda \approx 6$



$\lambda \approx 0{,}1$

Связь

$X \sim Bin(n,p)$

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$X \sim Bin(n,p)$

$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

$E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = np(1-p)$

$Y \sim Pois(\lambda)$

$Y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$P(Y=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$E(Y) = \lambda$

$Var\,Y = \lambda$

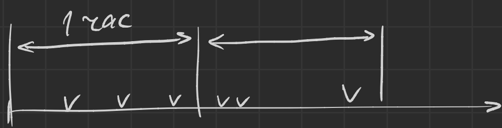
Задача.

$X \sim Pois(\lambda_x)$

независимы

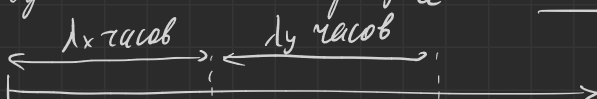
$Y \sim Pois(\lambda_y)$

$X + Y \sim ?$ → технич
→ идейное



$\lambda = \lambda_x \qquad P(N_t = k) = \frac{(t\lambda_x)^k}{k!} e^{-t\lambda_x}$

Пуассоновский процесс с $\lambda = 1$:



$$P(N[0, \lambda_x] = k) = \frac{1 \cdot \lambda_x^k}{k!} e^{-1 \cdot \lambda_x}$$

$$P(N[\lambda_x, \lambda_x + \lambda_y] = k) = \frac{1 \cdot \lambda_y^k}{k!} e^{-1 \cdot \lambda_y}$$

$$P(N[0; \lambda_x + \lambda_y] = k) = \frac{1\,(\lambda_x + \lambda_y)^k}{k!} e^{-1 \cdot (\lambda_x + \lambda_y)}$$

$$Pois(\lambda_x + \lambda_y) \sim X + Y$$

Теперь:

$$P(X+Y=k) = P(X=0, Y=k) + P(X=1, Y=k-1) + P(X=2, Y=k-2) + \ldots$$

$$+ P(X=k, Y=0) =$$

т.к. независимы, то:

$$= P(X=0)\cdot P(Y=k) + \ldots + P(X=k)\cdot P(Y=0) =$$

$$= \underbrace{e^{-\lambda_x}}_{X=0} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_y^{k}}{k!} e^{-\lambda_y}}_{Y=k} + \underbrace{\frac{\lambda_x}{1!} e^{-\lambda_x}}_{X=1} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_y^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_y}}_{Y=k-1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\lambda_x^{k}}{k!} e^{-\lambda_x}}_{X=k} \cdot \underbrace{e^{-\lambda_y}}_{Y=0} = \frac{e^{-(\lambda_x+\lambda_y)}}{k!}\left[\frac{k!\,\lambda_x^{0}}{0!}\cdot\frac{\lambda_y^{k}}{k!} + \frac{k!\,\lambda_x^{1}}{1!}\cdot\frac{\lambda_y^{k-1}}{(k-1)!} +\right.$$

$$\left. + \frac{k!\,\lambda_x^{2}}{2!}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \frac{k!\,\lambda_x^{k}}{k!}\cdot\frac{\lambda_y^{0}}{0!}\right] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda_x^j \lambda_y^{k-j} =$$

$$C_k^0 = \frac{k!}{0!\,k!} \qquad C_k^1 = \frac{k!}{(k-1)!\,1!} \qquad C_k^2 = \frac{k!}{2!\,(k-2)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_x+\lambda_y)}}{k!}(\lambda_x+\lambda_y)^k$$

<u>Упр</u> $(N_t) \sim$ Пуассон. процесс с $\lambda = 2$ происшеств. в час.

а) $P(N_3 = 4) \overset{?}{=} e^{-2\cdot 3}\frac{(3\cdot 2)^4}{4!} \approx 0{,}13$

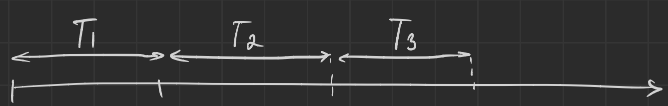
б) $P(N_3 = 4, N_5 = 8) \overset{?}{=} P(N[0,3] = 4)\cdot P(N[3,5] = 4) =$

$$= \frac{(3\cdot 2)^4}{4!}\cdot e^{-2\cdot 3}\cdot\frac{(2\cdot 2)^4}{4!}e^{-2\cdot 2} = e^{-10}\cdot\frac{24^4}{4!\,4!} = 0{,}026$$

в) $E(N_{10}) = 10\lambda = 10\cdot 2 = 20$

г) $Var(N_{20}) = 20\cdot\lambda = 40$

<u>Задача.</u> $(N_t) \sim$ Пуассон. поток с интен-ю $\lambda\left[\frac{\text{происш}}{\text{час}}\right]$



СВ: T_1 – время от старта до 1-го происш-я

СВ: T_2 – время от 1-го до 2-го происш-я

. . .

б) $F(x)$ ф-я распредел-я для T_1 — λ - параметр

$$F(x) = P(T_1 \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

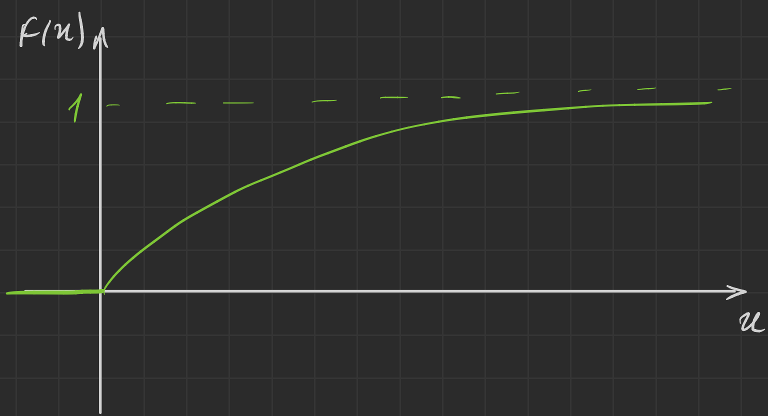
случай $x > 0$

за время x никого не поймали

$$P(T_1 \le x) = 1 - P(T_1 > x) = 1 - P(N_x = 0) =$$

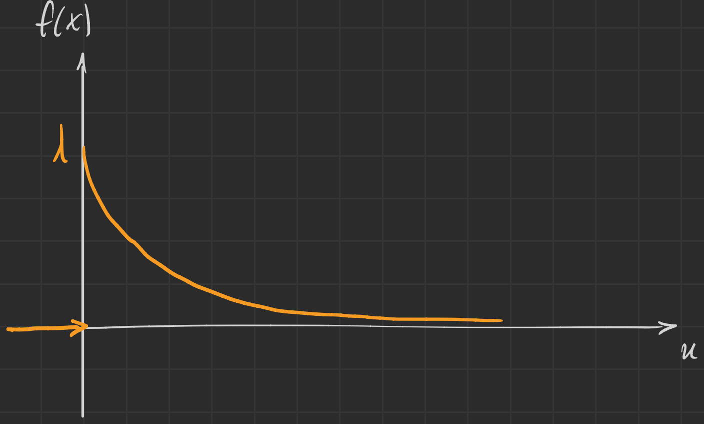
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = P(T_1 \le x)$$



а) $f(x)$ ф-я плотности для T_1

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{б) } E(T_1) = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = P(T_1 \in [0; +\infty)) = 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$ | произв по λ

$$\int_0^{+\infty} -te^{-\lambda t}\,dt = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

в) $Var(T_1) = E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = E(T_1^2) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 =$

$$E(T_1^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \quad \Big| \text{ диф. по } \lambda$$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^3} \quad \Big| \cdot \lambda$$

$$\int_0^{+\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

г) Ф-я плотн., ф. распр. T_3

$$P(T_3 \leq x) = F(x)$$

$$P(T_3 \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$E(T_3) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(T_3) = \frac{1}{\lambda^2}$$

<u>Опр.</u> СВ T имеет <u>экспоненциальное</u> (<u>показательное</u>) распределение с интенсивностью λ, если

ф-я плотности $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

ф-я распред. $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var T = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(N_h = 1) = \underbrace{\frac{\lambda h}{1!}}_{} e^{-h\lambda} = \lambda h + o(h), \ h \to 0$$

$$1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \dots$$

$$P(N_h = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \dots = 1 - \lambda h + o(h), \ h \to 0$$

$$P(N_h \geq 2) \to 1 - e^{-\lambda h} \cdot \lambda h - e^{-\lambda h}$$
$$P(N_h \geq 2) \to o(h)$$

	для задач	для chill guy
$P(N_h=0)$	$e^{-\lambda h}$	$1-\lambda h+o(h)$
$P(N_h=1)$	$e^{-\lambda h}\cdot\lambda h$	$\lambda h+o(h)$
$P(N_h=2)$	$1-e^{-\lambda h}(1+\lambda h)$	$o(h)$
$P(N_h=k)$, $k\geq 2$	$\dfrac{(\lambda h)^k}{k!}e^{-\lambda h}$	$o(h)$

$f(x)=?$

$$P(T_1\in[x,x+h]) = P(N[0,x]=0)\cdot P(N[x,x+h]=1) =$$

$$= \boxed{e^{-\lambda x}\cdot\lambda}\, h + o(h)$$

$$\boxed{f(x)\cdot h} + o(h)$$

<u>Упр.</u> (N_t) ~ пуассон. поток с λ $\left[\dfrac{\text{происш}}{\text{час}}\right]$

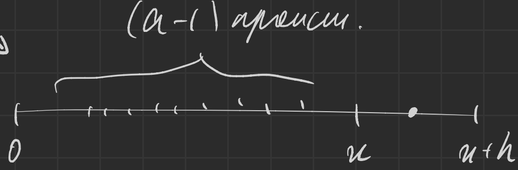
$T_1, T_2, T_3, \ldots$ – длины интервалов времени между происш-ями.

$$S_a = T_1+T_2+\ldots+T_a$$

а) $E(S_a) = E(T_1 + T_2 + \ldots + T_a) = E(T_1) + \ldots + E(T_a) = \dfrac{a}{\lambda}$

б) ф-я плотности $f(x)$ для S_a

$$P(S_a \in [x, x+h]) \to f(x)\cdot h + o(h) \; =$$



$$= P(N[0,x] = a-1) \cdot P(N[x; x+h] = 1) + o(h) =$$

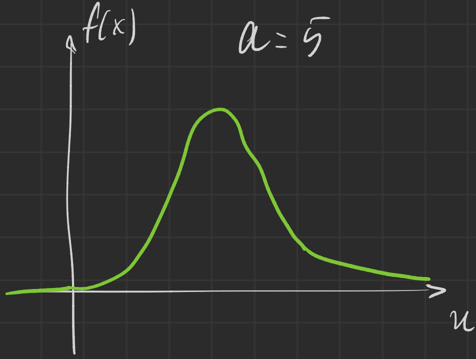
$$= \frac{\lambda x^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot h + o(h)$$

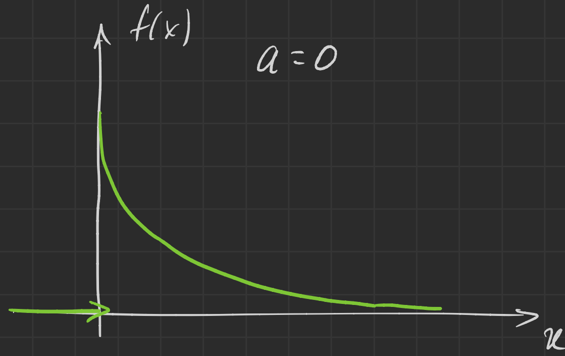
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \lambda, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при $a = 1$: $\lambda e^{-\lambda x}$

<u>Опр.</u> СВ S имеет Гамма распределение с пар-ми (a, λ), если:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\lambda x} \lambda, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$





Теорема. Если $S \sim Gamma(a, \lambda)$, то:

$$E(S) = \frac{a}{\lambda}$$

Упр. $S \sim Gamma(a, \lambda)$

$$Var(S) = E(S^2) - (ES)^2 =$$

$$E(S^2) = E\left((T_1 + T_2 + \ldots + T_a)^2\right) = a \overbrace{E((T_1)^2)}^{\frac{2}{\lambda^2}} +$$

$$+ a(a-1) \underbrace{E(T_1 T_2)}_{E(T_1)E(T_2) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

	$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_a$
T_1	$T_1^2 \quad T_1T_2 \quad \ldots$
$+ T_2$	$T_1T_2 \quad \ldots$
$+ T_3$	$\ldots$
$+ \vdots$	
$+ T_a$	

$$= \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{(a-1)a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{2a + a^2 - a - a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$$

<u>Упр.</u> (N_t) ~ пуассон. поток с $\lambda = 2$ $\left[\frac{\text{марш}}{\text{час}}\right]$

T_j - время от $(j-1)$ до (j)-го происш-я

происш. №0 = старт

а) $P(T_1 > 1) = P(N_1 = 0) = e^{-\lambda t} = e^{-2} \approx 0{,}14$

б) $\mathbb{P}(T_1 > 2 \mid T_1 > 1) = \dfrac{P(T_1 > 2, T_1 > 1)}{P(T_1 > 1)} = \dfrac{P(T_1 > 2)}{P(T_1 > 1)} =$

$$= \frac{P(N_2 = 0)}{P(N_1 = 0)} = \frac{e^{-4}}{e^{-2}} = e^{-2} \approx 0{,}14$$

в) $T_1 \sim Expo(\lambda = 2)$

$T_2 + T_3 \sim Gamma(a = 2, \lambda = 2)$

$$Var(T_2 + T_3) = \frac{a}{\lambda^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

4) $E(T_1 \mid T_1 > 1) = \dfrac{E(T_1 \cdot I(T_1>1))}{P(T_1>1)} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot e^{-2}}{e^{-2}} = \dfrac{3}{2}$

$$E(T_1 \cdot I(T_1>1)) = \int_1^{+\infty} t \cdot f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} t \cdot e^{-\lambda t}\lambda\,dt =$$

$$= \lambda \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t}\,t\,dt = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_1^{+\infty} t\,d\,e^{-\lambda t} = -te^{-\lambda t} + \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt =$$

$$= -te^{-\lambda t}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_1^{+\infty} = e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot e^{-2} = \frac{3}{2}\cdot 0{,}14 = 0{,}07\cdot 3 = 0{,}21$$

или $1 + \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2} = E(T_1) = \underbrace{E(T_1 \mid T_1 > 1)}_{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{P(T_1 > 1)}_{e^{-2}} + E(T_1 \mid T_1 < 1)\cdot P(\underbrace{T_1 < 1}_{1-e^{-2}})$$

$$E(T_1 | T_1 < 1) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

или $$E(T_1 | T_1 < 1) = \frac{E(T_1 I(T_1 < 1))}{P(T_1 < 1)} = \frac{\int_0^1 t f(t) dt}{P(T_1 < 1)}$$