• Консультация !! 10 июня

Q1:

- кр-2 120 мин : 6 зад
- перерыв
- экз. 120 мин 6 зад.

} очно

Q2:

показ 17 июня – 24 июня !!

Q3: очно? да

Q4: Сх-сть по распр-нию.

A4:

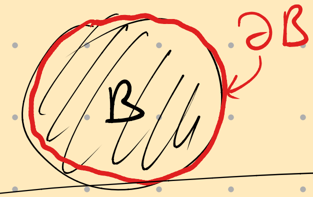
Опр Граница мн-ва A ∂A

Пример.

$$A=[5;7)\subseteq\mathbb{R} \qquad \partial A=\{5,7\}$$

$$\mathbb{R}^2 \qquad B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 7\}$$

$$\partial B \overset{?}{=} \{(x,y)\mid x^2+y^2=7\}$$



Опр. $R_n \xrightarrow{dist} R$ если

для $\forall$ мн-ва A такого, что $P(R\in\partial A)=0$

$$\lim P(R_n\in A)=P(R\in A)$$

$\Updownarrow$

В учебниках

$R_n \xrightarrow{dist} R$ если

$\forall x$ т.что $P(R=x)=0$

$$\lim P(R_n \le x) = P(R \le x)$$

$$\lim F_{R_n}(x) = F_R(x)$$

Пример

$$X_n \sim Bin\left(n,\ p = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)$$

сказка: n яблок купили

$\forall$  $\to$ червивое с $p = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$

$\to$ хорошее с $(1-p)$

X_n - кол-во червивых яблок.

$$X_n \xrightarrow{dist} ?$$

$X_2 \in \{0, 1, 2\}$

$X_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\vdots$

$X_{100} \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots 100\}$

$$P(X_n = 0)? = (1-p)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1/2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^t$$

$$\left(1 + \frac{(-1/2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$P(X_n = 1) = n \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = n \cdot \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} e^{-1/2}$$

$$P(X_n = 2) = C_n^2\, p^2 (1-p)^{n-2} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-2}$$

$$\frac{1}{2!} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad e^{-1/2}$$

$$P(X_n = 2) \to \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{-1/2}$$

по аналогии:

$$P(X_n = k) \to \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{-1/2}$$

$$X_n \xrightarrow{dist} X \, ?$$

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{-1/2}$$

$$\underbrace{X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}}$$

расп Пуассона с $\lambda = \frac{1}{2}$

$$X_2 \sim Bin\left(2, \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2}\right)$$

$$X_2 \in \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Центр. пред. ая теорема.

если $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

X_i ~ незав. один-во распр-ные с конечными $\mu = E(X_i)$ и $\sigma^2 = Var(X_i)$

то:

$$\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \xrightarrow[n \to \infty]{dist} N(0, 1)$$

Упр. Вася решает 1000 задач.

на одну задачу $X_i \sim Expo\left(\lambda = \frac{1}{10}\right)$ $\quad X_i$ [мин]

затраты независимы. $\quad S = X_1 + \ldots + X_{1000}$

$$P(S \geq 15000)?$$

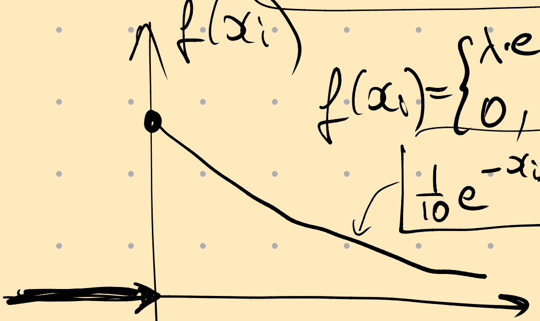
шаг 1

$\boxed{\text{отдельное } X_i}$

1. в виде интеграла
- с помощью F для $N(0,1)$
- по таблицам
- код написать

$$f(x_i) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} & x_i \geq 0 \\ 0, & x_i < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{10} e^{-x_i/10}}$$



как вывести?

$$EX_i = \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx$$

$$\text{Var}\, X_i = \frac{1}{\lambda^2} = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 =$$

$$= \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx - \left(\int_0^\infty x f(x)\,dx\right)^2$$

$EX_i = 10$ мин $\quad \text{Var}\, X_i = 100$ мин^2.

Шаг 2

$$ES = E(X_1 + \ldots + X_{1000}) = 10 + 10 + \ldots + 10 = 10000$$

$$\text{Var}\, S = \text{Var}(X_1 + \ldots + X_{1000}) =$$

$$= \text{Var}\, X_1 + \text{Var}\, X_2 + \ldots + \text{Var}\, X_{1000} =$$

$$+ 2\,\text{Cov}(X_1, X_2) + \ldots + \ldots + 2\,\text{Cov}(X_{999}, X_{1000})$$

$0 =$ по условию

$$= 1000 \cdot 100 = 100000 \text{ мин}^2$$

Шаг 3

$$R = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}\, S}} = \frac{S - 10000}{\sqrt{10^5}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0;1)$$

ЦПТ

$$P(S \geq 15000) = P\left(\frac{S - 10000}{\sqrt{10^5}} \geq \frac{15000 - 10000}{\sqrt{10^5}}\right) \approx$$

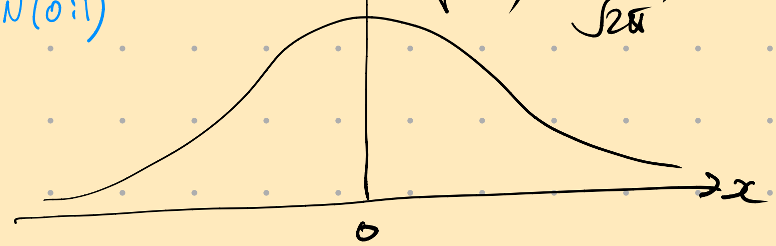
$$\approx P\left(N(0;1) \geq \frac{5000}{\sqrt{10^5}}\right) =$$

$$= P\left(N(0,1) \geq \frac{50}{\sqrt{10}}\right) = P(N(0,1) \geq 5\sqrt{10})$$

- $$\int_{5\sqrt{10}}^\infty f(x)\,dx = \int_{5\sqrt{10}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

$N(0;1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



- $P(N \geq 5\sqrt{10}) = 1 - P(N \leq 5\sqrt{10}) = 1 - F(5\sqrt{10})$

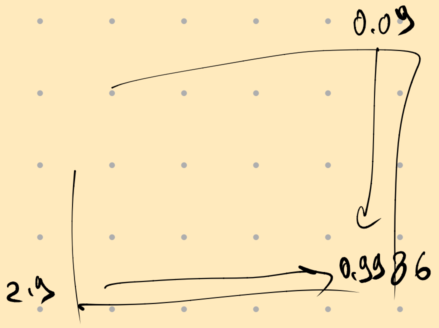
R:

```
1 - pnorm(5*sqrt(10))
```

- py:

```
from scipy.stats import norm
from numpy import sqrt
1 - norm.cdf(5*sqrt(10))
```

- $5\sqrt{10} \approx 15.8$ по таблицам.



$P(N \leq 2.99) = 0.9986$

по таблицу $P(N \geq 15.8) \approx 0$ < 0.001

Q5 Как из $f(x,y)$ вытащить $f_X(x)$ и $f_Y(y)$?

A. Вспоминаем дискретный случай

	$Y=0$	$Y=5$	$Y=9$
$X=1$	0.1	0.1	0.1
$X=2$	0.05	0.05	0.1
$X=3$	0.05	0.1	0.35

→ в непрерывном случае почти так же

$X=1$	$X=2$	$X=3$

$$\boxed{P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)}$$

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

лёгкий вариант

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & x \in [0,1],\ y \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Утив нуль

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=1} 4xy\,dy = \ldots$$

увидеть разложение на сомн-ли.

$$f(x,y) = \boxed{2x}\cdot\boxed{2y}$$

$\int_0^1 2x\,dx = 1$

$\int_0^1 2y\,dy = 1$

$f_X(x)$ $\quad$ $f_Y(y)$

X и Y независимы.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

не подходит

$$= 8x \cdot \frac{1}{2}y$$

$$\int_0^1 8x\,dx > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}y\,dy < 1$$

3a

$X_i \sim Unif[0,1]$ незав.

$$\operatorname{plim} \frac{nX_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{7n}$$

$$= \operatorname{plim} \frac{nX_1}{7n} + \operatorname{plim} \frac{X_2 + \ldots + X_n}{7n} =$$

от n не зависит!

ЗБЧ. Если $Y_1, \ldots, Y_n$ незав. и одинак. распр. то $\operatorname{plim} \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} = EY_1$

$$= \frac{X_1}{7} + \operatorname{plim} \frac{X_2 + \ldots + X_n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{7n} =$$

ЗБЧ $\to EX_1$

$\operatorname{plim} \frac{n-1}{7n} = \lim \frac{n-1}{7n} = \frac{1}{7}$

$X_2 \sim Unif[0,1]$

$$= \frac{X_1}{7} + EX_2 \cdot \frac{1}{7} =$$

$EX_2 = \frac{1}{2}$

$$= \frac{X_1}{7} + \frac{1}{14}$$

$X_i \sim$ rozkł $U[0;1]$

35) $\quad \operatorname{plim} \sqrt[2n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = R$

$$\ln \operatorname{plim} \sqrt[2n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} = \ln R$$

$$\operatorname{plim} \ln (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/2n} = \ln R$$

$$\operatorname{plim} \frac{1}{2n} \cdot (\ln X_1 + \ln X_2 + \ldots + \ln X_n) = \ln R$$

$$\operatorname{plim} \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{\underbrace{\ln X_1}_{Y_1} + \underbrace{\ln X_2}_{Y_2} + \ldots + \underbrace{\ln X_n}_{Y_n}}{n}} = \ln R$$

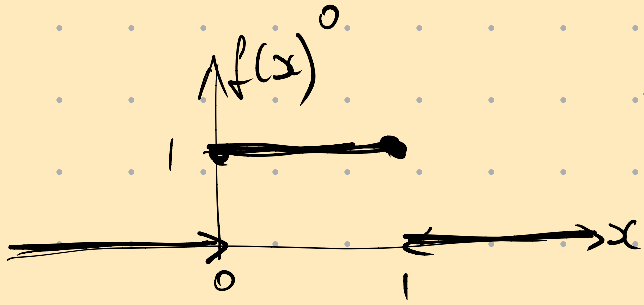
$$\operatorname{plim} \boxed{\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}} = EY_1$$

$$Y_1 = \ln X_1$$

$$\frac{1}{2} E(\ln X_1) = \ln R$$

$X_1 \sim Unif\,[0,1]$

$$E(\ln X_1) = \int_0^1 \ln x \cdot f(x)\, dx =$$



$$= \int_0^1 \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \cdot dx =$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = x$$

$$= uv - \int u'v\, dx = x \ln x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x\, dx =$$

$$= 0 - 1 = -1 \quad !!$$

$X_1 \in [0;1] \qquad \ln X_1 \in (-\infty; 0]$

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) = \ln R \qquad R = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{plim} \sqrt[2n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

3а $\quad X_i \sim N(5; 10)$ незав

$$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{7n} = \operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \cdot \frac{n}{7n} =$$

$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \to E(X_1^2)$, $\quad \frac{n}{7n} \to \frac{1}{7}$

$Y_i = X_i^2$

$$= E(X_1^2) \cdot \frac{1}{7} = 35 \cdot \frac{1}{7} = 5$$

$$\operatorname{Var} X_1 = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2$$

$\operatorname{Var} X_1 = 10$, $\quad E(X_1) = 5$

$$10 = E(X_1^2) - 25$$

$$E(X_1^2) = 35$$

3б

$$\operatorname{plim}\left(\ln(X_1^2 + \ldots + X_n^2) - \ln n\right) =$$

$$= \operatorname{plim} \ln \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} = \ln\left(\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}\right) =$$

$$= \ln E(X_1^2) =$$

$$= \ln 35$$

преди 10:00

~ 120 [мин]

~ 30

~ 120