Лекция

Вспом. A и B (событ.) незав.

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

A и B независ. и $P(B)>0$, тогда

$$\underbrace{P(A|B)}_{\parallel} = P(A)$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Опр* СВ X и Y независимы, если:

любые события вида

$A = \{X \in M_A\}$, $B = \{Y \in M_B\}$ — независимы

$\{X=3\}$ $\{Y\geqslant 15\}$ независимые

Проверять грустно !!

X и Y независимые

<u>Теорема</u>

X и Y независимы, если и только если независимы $\forall$ событие вида

$$A=\{X\le\alpha\} \quad B=\{Y\le\beta\} \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

<u>Упр.</u>

	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
$X=1$	$\frac{7}{30}$	$\frac{14}{30}$

Зависимы или нет?

$A=\{X\le -3\}=\varnothing$ $\qquad P(A)=0$

$\alpha=-3$ $\qquad P(A\cap B)=0$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$B=\{Y\le\beta\}$

Пусть $\alpha=0{,}5$ $\beta=1{,}5$

$P(X\le\alpha)=\frac{3}{10}$

$P(Y\le\beta)=\frac{10}{30}$

$P(X \le \alpha \cap Y \le \beta) = \frac{1}{10} = P(A) \cdot P(B)$

и проверить: $\alpha = 0,5 \quad \beta = 2,5$

$\alpha = 1,5 \quad \beta = 1,5$

$\alpha = 1,5 \quad \beta = 2,5$

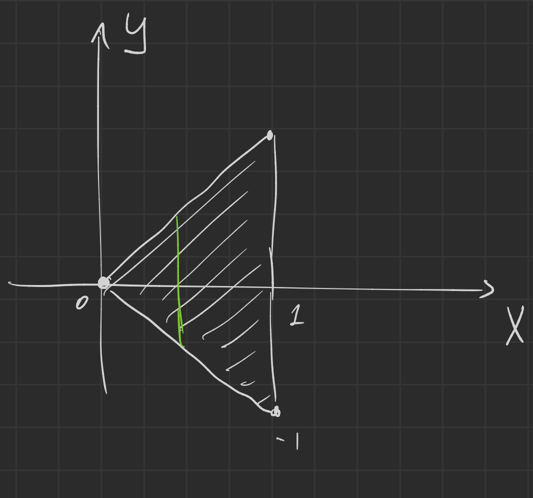
Упр. $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim Unif[\text{внутри } \triangle ABC]$

$\triangle ABC \quad A = (0,0)$

$B = (1,1)$

$C = (1,-1)$

X и Y незав-мы?



$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = 0$

$P(X \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$P(Y \le 0) = \frac{1}{2}$

$P(X \le \frac{1}{2}, Y \le 0) = \frac{1}{8}$

Выполн., тогда:

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$ $P(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ $P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$

$$P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = P(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \leq \frac{1}{2}) \cdot P(Y \leq \frac{1}{2}) \neq P(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ X и Y зависимые.

Опр. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) =$

$$= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

X_1, X_2 – незав. одинаков. распр. с X

Y_1, Y_2 – незав. один. распр с Y

$$= \frac{1}{2} E\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)\right]$$

Теорема.

СВ величины независимы, если и только если для любых функций g, h

$$\mathrm{Cov}(g(X), h(Y)) = 0$$

X и Y незав. $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X^3, \cos Y) = 0$

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{X}, \sin(Y^2)\right) = 0$$

Теор. Если X и Y принимают конечное или счётное число значений

X и Y независимы, если и только если независимы любые события вида

$$A = \{X = \alpha\},\ B = \{Y = \beta\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Упр

	$Y=4$	$Y=7$
$X=2$	0,1	0,2
$X=3$	0,3	0,4

$P(X=2) = 0{,}3$ $\qquad$ $P(X=2, Y=4) = 0{,}1$

$P(Y=4) = 0{,}4$

$$P(X=2 \cap Y=4) \neq P(X=2)\, P(Y=4)$$

$\Rightarrow$ зависимы.

X и Y независимы

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \{X \in M_A\} \\ B = \{Y \in M_B\} \\ \forall A, B \text{ - незав.} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ A = \{X \le \alpha\} \\ B = \{Y \le \beta\} \\ \forall A, B \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} Cov(g(X), h(Y)) = 0 \\ \forall g, h \end{array}} \begin{array}{c} \Leftarrow \\ \Rightarrow \\ \text{для} \\ \text{дискр} \end{array} \boxed{\begin{array}{l} A = \{X \in M_A\} \\ B = \{Y \in M_B\} \\ \forall A, B \ P(A \cap B) = P(A) P(B) \end{array}}$$

$$E(X|Y) = E(Y)$$

Теор. Если X и Y незав, то $E(Y|X) = E(Y)$

$$E(X|Y) = E(X)$$

Пример:

вер	1/3	1/3	1/3
Y	1	0	-1
X	1	0	1

$$E(Y) = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y|X) = E(Y|X=1)\,I(X=1) + E(Y|X=0)\,I(X=0) =$$

$$= \left(1\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} - 1\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right) I(X=1) + 0 = 0$$

$$E(X|Y) = 1\cdot I(Y=1) + 0 + 1\cdot I(Y=-1)$$

$$E(X|Y) = E(X)$$

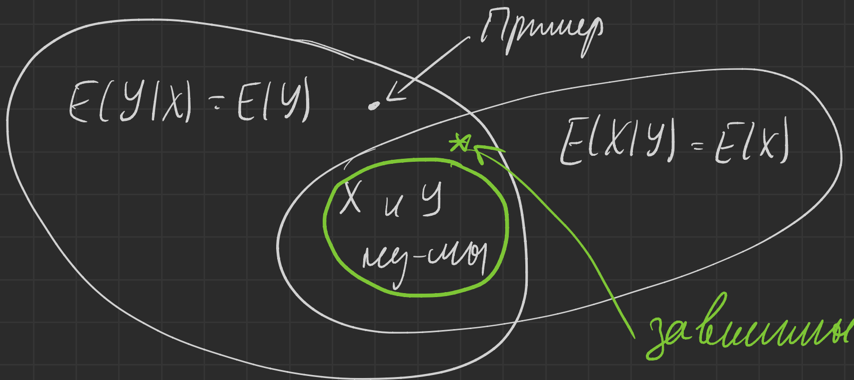
$$E(Y|X) = E(Y)$$

По идее: $P(X=1) = \frac{2}{3}$ $\quad P(Y=-1) = \frac{1}{3}$

$$P(X=1 \cap Y=-1) = \frac{1}{3}$$

X и Y зав $\not\Leftarrow$ $E(Y|X) = E(Y) = 0$

$$E(X|Y) = |Y| \neq 0$$



но оба $E(Y|X) = E(Y)$ и $E(X|Y) = E(X)$

не гарантир. незав-ть.

Пример

	1/4	1/4	1/4	1/4
X	1	0	-1	0
Y	0	1	0	-1

$$E(Y|X) = \begin{cases} 0, & x=-1 \\ 0, & x=1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$E(X|Y) = 0$$

$E(X|Y) = E(X)$

$E(Y|X) = E(Y)$, но они зависимы.

Опр. Наилучш. приближ.

$$\mathrm{Best\,lin}(Y|X) = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\min_{\beta_1,\beta_2} E\left((Y - (\beta_1 + \beta_2 X))^2\right) =$$

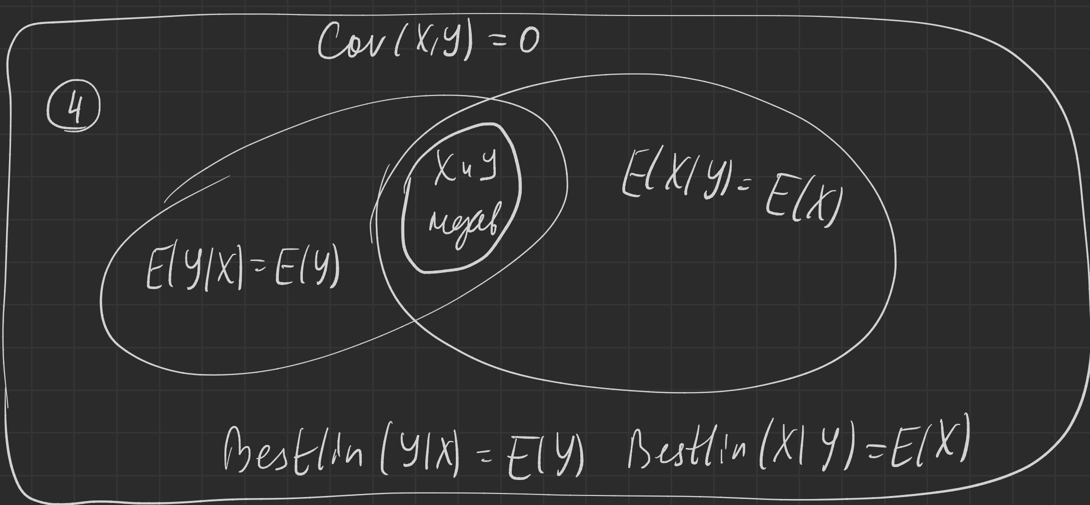
$$\beta_2 = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - E(X)E(X)} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

$$\beta_1 = E(Y) - \beta_2 E(X)$$

Теор. Если $E(Y|X) = E(Y)$ или $E(X|Y) = E(X)$, то:

$\mathrm{Best\,lin}(Y|X) = E(Y)$ $\qquad Cov(X,Y) = 0$

$\mathrm{Best\,lin}(X|Y) = E(X)$



$$\text{Bestlin}(X|Y) = \gamma_1 + \gamma_2 Y$$

$$\gamma_2 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$$

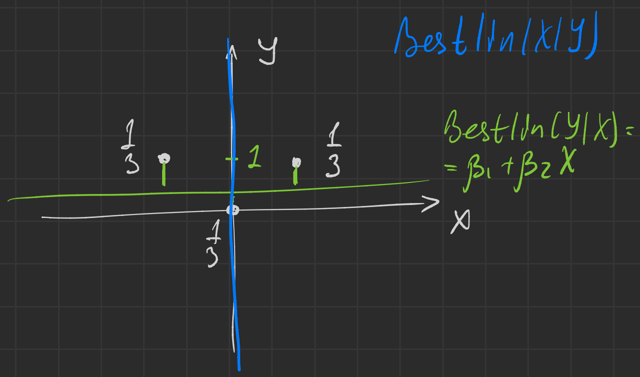
Теорема. Если X и Y независимы, то $Cov(X,Y)=0$

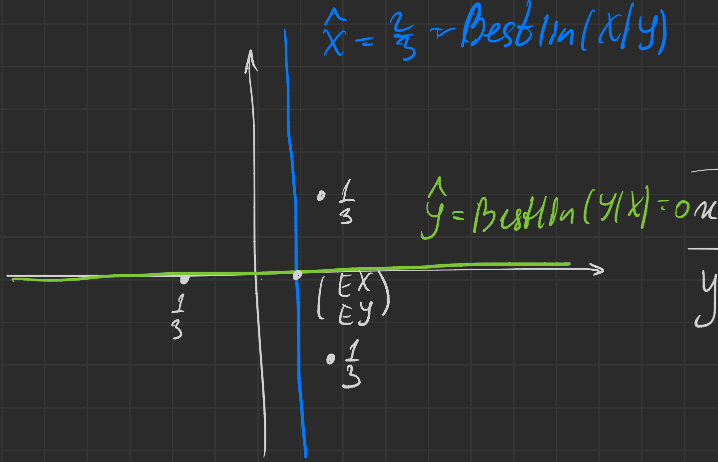
(4) $$\begin{cases} Cov(X,Y) = 0 \\ E(Y|X) \neq const \\ E(X|Y) \neq const \end{cases}$$

$$E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$E(Y|X) \neq const$ $\quad$ $\text{Bestlin}(Y|X) = const$

$E(X|Y) \neq const$ $\quad$ $\text{Bestlin}(X|Y) = const.$





	1/3	1/3	1/3
	1	1	0
y	-1	1	0

$$E(X \cdot Y) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = 0$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{Bestlin}(X|Y) = \beta_1 + \beta_2 X = 0$$

$$\text{Bestlin}(Y|X) = \gamma_1 + \gamma_2 Y = \frac{2}{3}$$

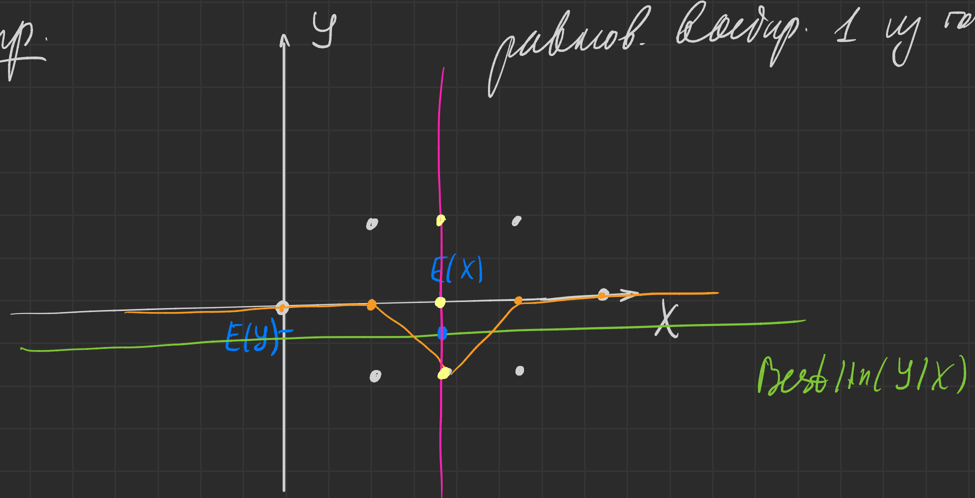
$$\beta_2 = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)} = 0 \qquad \gamma_2 = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)} = 0$$

$$\beta_1 = E(Y) - \beta_2 E(X) = 0 \qquad \gamma_1 = E(X) - \gamma_1 E(Y)$$

$E(Y) = \beta_1 + \beta_2 E(X)$

Bestlin $\quad \min\limits_{\beta_1, \beta_2} E\left(\left(Y - (\beta_1 + \beta_2 X)\right)^2\right)$

Упр. равнов. выбир. 1 из точек.



На глаз

а) нарисовать $\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$

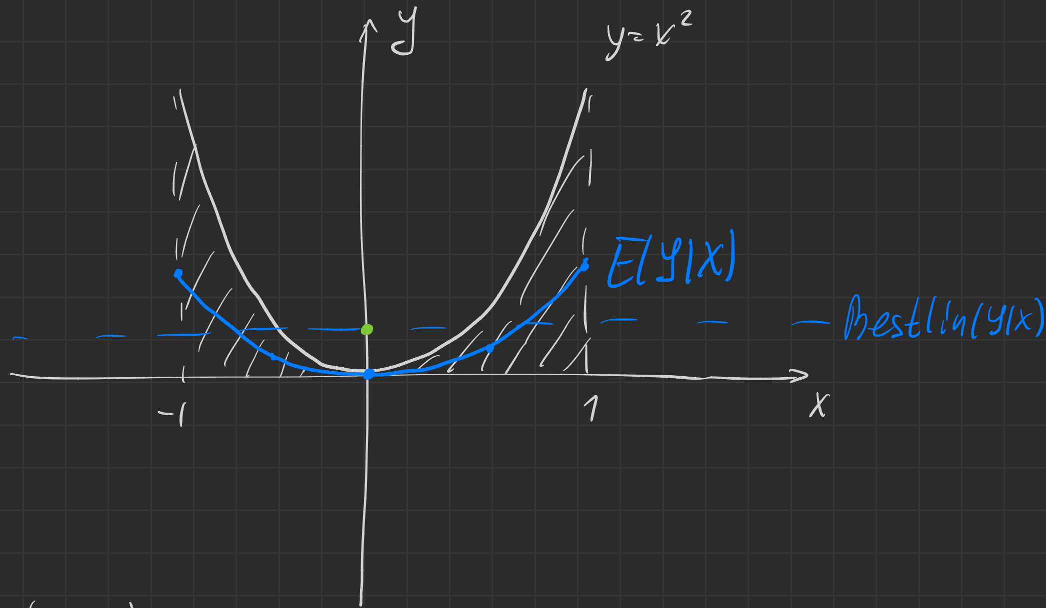
б) $E(Y|X)$

в) Bestlin$(Y|X)$

г) $E(X|Y)$

д) Bestlin$(X|Y)$

точка $\binom{x}{y}$ равном выб-ся в мн-ве M



а) $\begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix}$

б) $E(Y|X) = \frac{x^2}{2}$

в) Bestlin$(Y|X) = E(Y) + 0 \cdot X$

г) $Cov(X, Y) = 0$

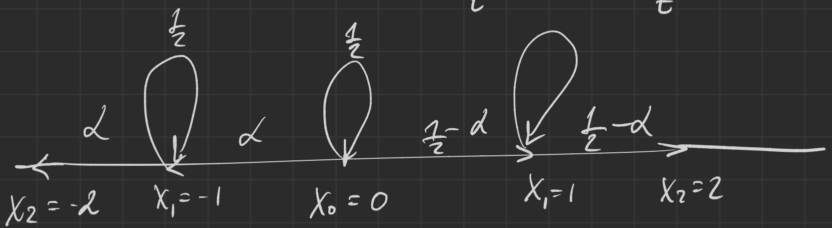
№3 из Д/з.

$p_н \in (0,1) \quad p_т = 1 - p_н$

$q_н = q_т = \frac{1}{2}$

стоп: один. кол-во н

$$X_t = N_t^{н, Pyotr} - N_t^{н, Vasya}$$



Mome

$X_0 = 0$

$X_1 = -1$	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$
$p_т \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$p_н \cdot \frac{1}{2}$
α	$1-\alpha-\beta$	$\frac{1}{2}-\alpha$

R = момент возвр. домой

$E(R)$

$r_0 = E(R \mid X_0 = 0) \qquad r_1 = E(R \mid X_0 = 1) \; \ldots$

$$\tau_2 = \alpha(1+\tau_1) + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(1+\tau_3) + \frac{1}{2}(1+\tau_2)$$

$$\tau_2 = \alpha\tau_1 + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau_3 + \frac{1}{2}\cdot\tau_2 + 1$$

$$\boxed{\tau_2 = 2\alpha\tau_1 + (1-2\alpha)\tau_3 + 2} \qquad \tau_1 = \alpha \cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(1+\tau_1) + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\tau_2+1)$$

$$\tau_5 = 2\alpha\tau_4 + (1-2\alpha)\tau_6 + 2$$

$$\tau_{-10} = 2\alpha\tau_{-11} + (1-2\alpha)\tau_{-9} + 2$$

$$\tau_0 = \alpha(1+\tau_{-1}) + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(1+\tau_1) + \frac{1}{2}$$

$$\tau_0 = \alpha\tau_{-1} + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\tau_1 + 1$$

Угадать реш-е:

$\alpha = 0$

$\tau_2 = \tau_3 + 2 \qquad \tau_2 \geqslant 2$

$\tau_3 = \tau_4 + 2 \qquad \tau_3 \geqslant 2$

$\tau_4 = \tau_5 + 2 \qquad \tau_4 \geqslant 2$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \ldots = +\infty$$

$$\tau_0 = \tau_1 = +\infty$$

$\tau_{-1} = \frac{1}{2}(\tau_{-1}+1) + \frac{1}{2}\cdot 1$

$\tau_{-1} = 2$

$\tau_{-2} = \frac{1}{2}\tau_{-2} + \frac{1}{2}\tau_{-1} + 1$

$\tau_{-2} = 4$

$\tau_{-3} = 6$

$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = +\infty$

$\tau_{-1} = 2 \qquad \tau_{-2} = 6$

α - мало $\qquad \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \dots = +\infty$

$\tau_{-1} = E(Q_{-1} \to \dots \to 0)$

$\tau_{-2} = E(Q_{-2} \to \dots \to 0) = E(Q_{-2} \to \dots \to -1 + Q_{-1} \to \dots \to 0)$

$\tau_{-2} = 2\tau_{-1}$

$\tau_{-3} = 3\tau_{-1}$

$\tau_4 = 4\tau_{-1}$

$\tau_{-1} = 1 + \alpha\cdot\tau_{-2} + \frac{1}{2}\tau_{-1} + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\cdot 0$

$\tau_{-2} = 2\tau_{-1}$

$\tau_{-1} = 1 + \alpha 2 \tau_{-1} + \frac{1}{2}\tau_{-1} + (\frac{1}{2} - \alpha)\cdot 0$

$$\boxed{\tau_{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2\alpha}}$$

$\tau_0 = \alpha \tau_{-1} + (\frac{1}{2} - \alpha)\tau_1 + 1$

$\alpha \in (0, \frac{1}{4})$

$\tau_2 = 2\tau_1$

$E(Q_2 \to \ldots \to 0) = E(Q_1 \to \ldots \to 1)$

если $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, то $\tau_{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2\alpha}$

если $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, то $\tau_{-1} = +\infty$

если $\alpha \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$ $\tau_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2} - \alpha)}$

$\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ $\tau_1 = +\infty$

$\tau_0 = +\infty$ при $\forall \alpha$

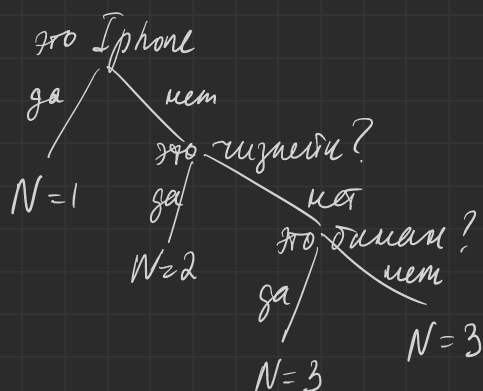
Ответ: $+\infty$

энтропия. H(X)

H(X) - ожидаемое кол-во бинарных вопросов, дост-х, чтобы узнать X при исп-и стратегии минимизирующей ожидаемое кол-во вопросов.

x	Iphone	Чизкейк	Банан	Хумус
вер	1/2	1/4	1/8	1/8

$H(X) = ?$



$H(X) = \frac{7}{4}$ [бит]

$E(N) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}75$

$\max N = 3$

Iphone или банан?

Это Iphone? Это нужели

$N=2$ $N=2$ $N=2$ $N=2$

$E(N)=2$

$\max N = 2$

$$H(X) = \sum_x \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} P(X=x) \cdot P(X=x) \quad [\text{бит}]$$

$$H(X) = -\sum_x \log_2 P(X=x) \cdot P(X=x) \quad [\text{бит}]$$

$$H(x) = -\frac{1}{8}\sum_x \log_2 P(X=x) \cdot P(X=x) \quad [\text{байт}]$$

$$H(x) = -\sum_x \log_{(2^8)} P(X=x) \cdot P(X=x) \quad [\text{байт}]$$

$$H(X) = -\sum_x \ln P(X=x) \cdot P(X=x) \quad [\text{нат}]$$

NAtural BiT

Упр. Сколько бит в нате? $\frac{1}{\ln 2} = 1{,}45$

Сколько нат в байте $= \ln 2 \cdot 8 = 5{,}6.$

x	Iphone	Чизкейк	Банан	Хрумус
истин. $p(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$
Модель $q(x)$	$1/8$	$1/8$	$1/2$	$1/4$

def Intuit:

Cross Entropia

$CE(p\|q)$ — это среднее кол-во вопросов, чтобы узнать X, если минимизировать ожидаемое кол-во вопросов, предполагая что вер-ти равны q, а истинные вер-ти равны p.

кросс-энтропия из q в p

$P(X=x)=p(x)$

$$H(x) = H(p) = -\sum_x \ln p(x)\cdot p(x) = -\sum_x \ln P(X=x)\cdot P(X=x)$$

Это ананас?

$\frac{1}{8}$ — С, $N = 1$

$\frac{7}{8}$ — хумус?

$$E(N) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \dots$$

$$CE(p\|q) = -\sum_{x} \ln Q(X=x) \cdot P(X=x)$$

<u>свойства:</u>

$$CE(p\|q) = H(p)$$

$$CE(p\|q) \geq H(p)$$