

**Бутстрэп**

# Наивный бутстрэп

# Краткий план:

- Общая идея бутстрэпа;

# Краткий план:

- Общая идея бутстрэпа;
- Наивный бутстрэп.

# Спасение утопающих

Бутстрэп позволяет не думать о том, как распределены статистики!

# Спасение утопающих

Бутстрэп позволяет не думать о том, как распределены статистики!

Вы всё ещё выбираете степени свободы?

# Спасение утопающих

Бутстрэп позволяет не думать о том, как распределены статистики!

Вы всё ещё выбираете степени свободы?

Тогда мы идёт к вам!

# Общая логика проверки гипотез

1. Теорема. При верной  $H_0$ , **идеальных условиях** и  $n \rightarrow \infty$  статистика  $S \rightarrow \chi^2$ .

$$S = \{\text{Ужасная формула пугающая студентов}\}$$



# Общая логика проверки гипотез

1. Теорема. При верной  $H_0$ , **идеальных условиях** и  $n \rightarrow \infty$  статистика  $S \rightarrow \chi^2$ .

$$S = \{\text{Ужасная формула пугающая студентов}\}$$

2. По имеющимся данным рассчитываем значение  $S_{obs}$ .

# Общая логика проверки гипотез

1. Теорема. При верной  $H_0$ , **идеальных условиях** и  $n \rightarrow \infty$  статистика  $S \rightarrow \chi^2$ .

$$S = \{\text{Ужасная формула пугающая студентов}\}$$

2. По имеющимся данным рассчитываем значение  $S_{obs}$ .
3. Рассчитываем  $P$ -значение — вероятность  $\mathbb{P}(S > S_{obs})$ .

# Общая логика проверки гипотез

1. Теорема. При верной  $H_0$ , **идеальных условиях** и  $n \rightarrow \infty$  статистика  $S \rightarrow \chi^2$ .

$$S = \{\text{Ужасная формула пугающая студентов}\}$$

2. По имеющимся данным рассчитываем значение  $S_{obs}$ .
3. Рассчитываем  $P$ -значение — вероятность  $\mathbb{P}(S > S_{obs})$ .
4. Если  $P$ -значение мало, то отвергаем гипотезу  $H_0$ .

# А что если...

1. Идеальные условия нарушены.

Вместо  $\chi^2$  распределения нужно использовать верное распределение статистики  $S$ .

# А что если...

1. Идеальные условия нарушены.
2. Количество наблюдений ещё слишком мало, чтобы считать  $S \sim \chi^2$ .

Вместо  $\chi^2$  распределения нужно использовать верное распределение статистики  $S$ .

# Идея бутстрэпа

При больших  $n$  можно оценить закон распределения статистики  $S$ !

# Идея бутстрэпа

При больших  $n$  можно оценить закон распределения статистики  $S$ !

И вместо обещанного теоремой  $\chi^2$ -распределения использовать оценку распределения.

# Идея бутстрэпа

При больших  $n$  можно оценить закон распределения статистики  $S$ !

И вместо обещанного теоремой  $\chi^2$ -распределения использовать оценку распределения.

## **Предупреждение**

Бутстрэп является асимптотическим методом и формально требует  $n \rightarrow \infty$ .



# Идея бутстрэпа

При больших  $n$  можно оценить закон распределения статистики  $S$ !

И вместо обещанного теоремой  $\chi^2$ -распределения использовать оценку распределения.

## Предупреждение

Бутстрэп является асимптотическим методом и формально требует  $n \rightarrow \infty$ .

Часто оказывается, что для хорошей оценки закона распределения  $S$  нужно меньшее  $n$ , чем для теоремы с идеальными условиями.

# Наивный бутстрэп

## Доверительный интервал для медианы

Есть случайная выборка  $y_1, \dots, y_n$  из непрерывного распределение,  $n$  велико.

Посчитали выборочную медиану  $\hat{m}$ . Хотим построить доверительный интервал для медианы  $m$ .

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

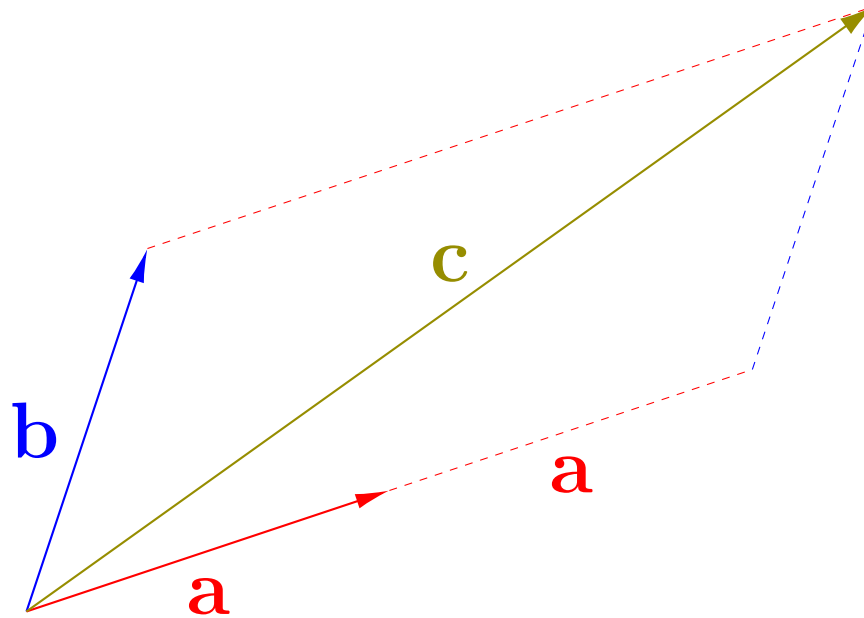
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  — это линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Линейная комбинация: геометрия

$$c = 2 \cdot a + 1 \cdot b$$



# Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  — линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  — линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Линейная зависимость

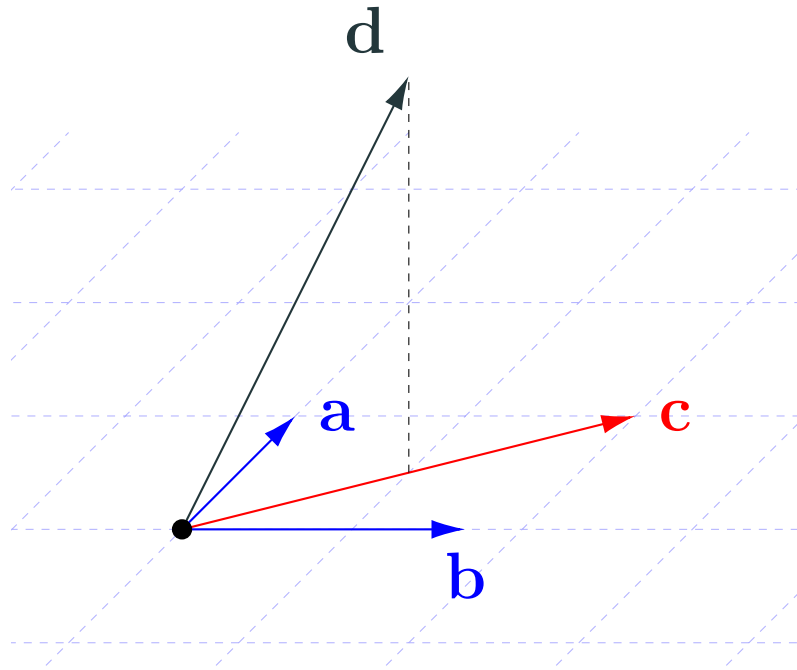
## Определение

Набор  $A$  из двух и более векторов называется **линейно зависимым**, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор  $A = \{0\}$  из одного нулевого вектора также называется **линейно зависимым**.



# Линейная зависимость: геометрия



Набор  $\{a, b, c\}$  — линейно зависим.

Набор  $\{a, b, d\}$  — линейно независим.

# Линейная зависимость: примеры

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно независимый.

# Линейная зависимость: примеры

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно независимый.

Набор  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

## Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом  $\alpha_i$  перед ним можно выразить через остальные.

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

## Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом  $\alpha_i$  перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор  $\mathbf{v}_2$  выражен через  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$ , то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (-1) \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

# Линейная оболочка

# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;



# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

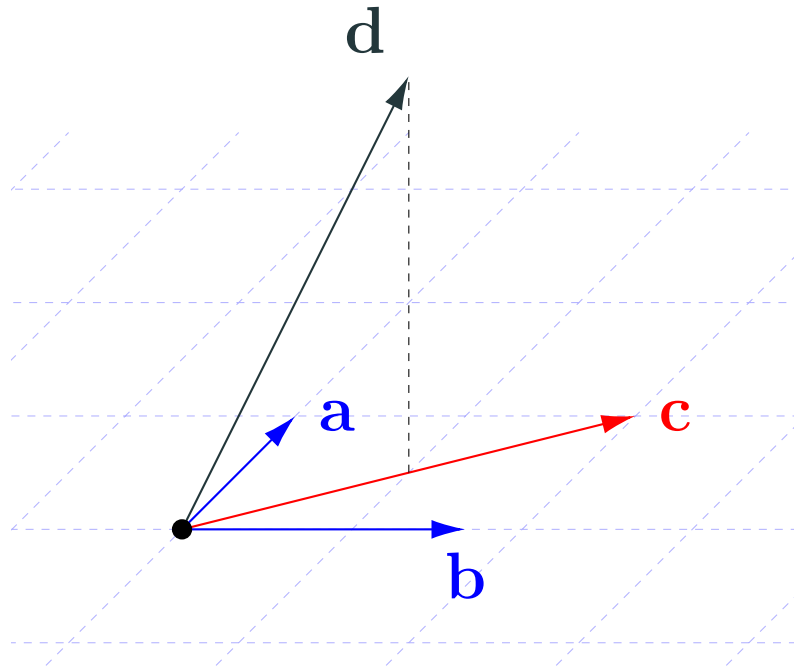
# Линейная оболочка

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

# Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор **c** лежит в плоскости  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

Вектор **d** не лежит в плоскости  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

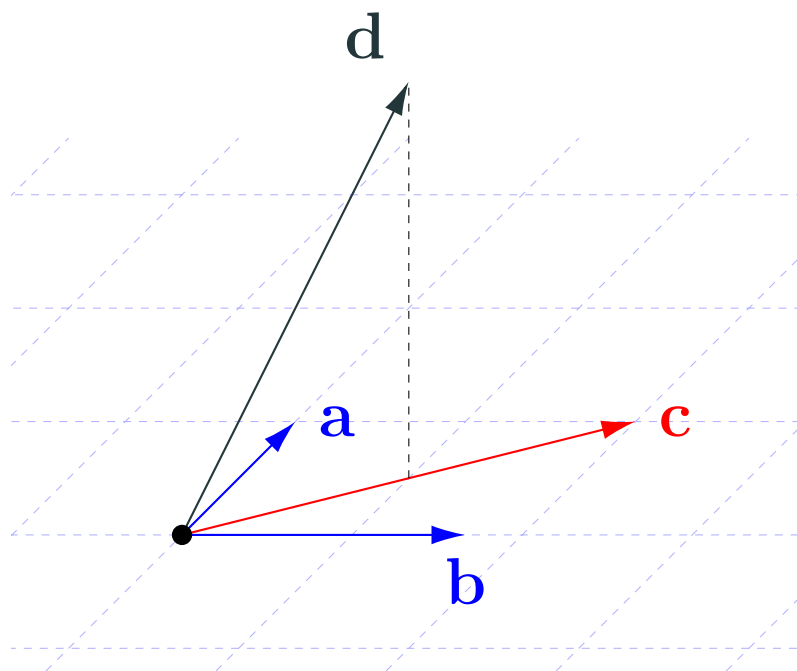
# Базис линейной оболочки

## Определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  называется **базисом линейной оболочки**  $\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ , если:

- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ ;
- Набор векторов  $A$  линейно независим.

# Базис линейной оболочки: картинка



Для линейной оболочки  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  базисами будут  $A_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ,  $A_2 = \{\mathbf{b}, 2\mathbf{c}\}$ ,  $A_3 = \{3\mathbf{a}, 5\mathbf{c}\}$ .

# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — базис для  $M$ .



# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Набор } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис для } M.$$

$$\text{Набор } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис для } M.$$

# Зачем нужен базис?

## Утверждение

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  — базис линейной оболочки  $M$ , то любой вектор  $\mathbf{x} \in M$  **единственным** образом представим в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d$$

# Зачем нужен базис?

## Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с  $M$ , значит любой вектор из  $M$  представим как линейная комбинация элементов базиса.

# Зачем нужен базис?

## Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с  $M$ , значит любой вектор из  $M$  представим как линейная комбинация элементов базиса.

Если бы для некоторого  $x$  нашлось два различных представления

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d = \alpha'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha'_d \mathbf{v}_d,$$

то была бы зависимость между элементами базиса, что невозможно.

# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .

# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ .

## Утверждение

Если наборы векторов  $A$  и  $B$  — являются базисами для линейной оболочки  $M$ , то наборы  $A$  и  $B$  содержат одинаковое количество векторов.

# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ .

## Утверждение

Если наборы векторов  $A$  и  $B$  — являются базисами для линейной оболочки  $M$ , то наборы  $A$  и  $B$  содержат одинаковое количество векторов.

## Утверждение

Если набор  $A$  содержит  $k$  векторов, то базис линейной оболочки  $\text{Span } A$  содержит  $k$  элементов или меньше.

# Размерность линейной оболочки

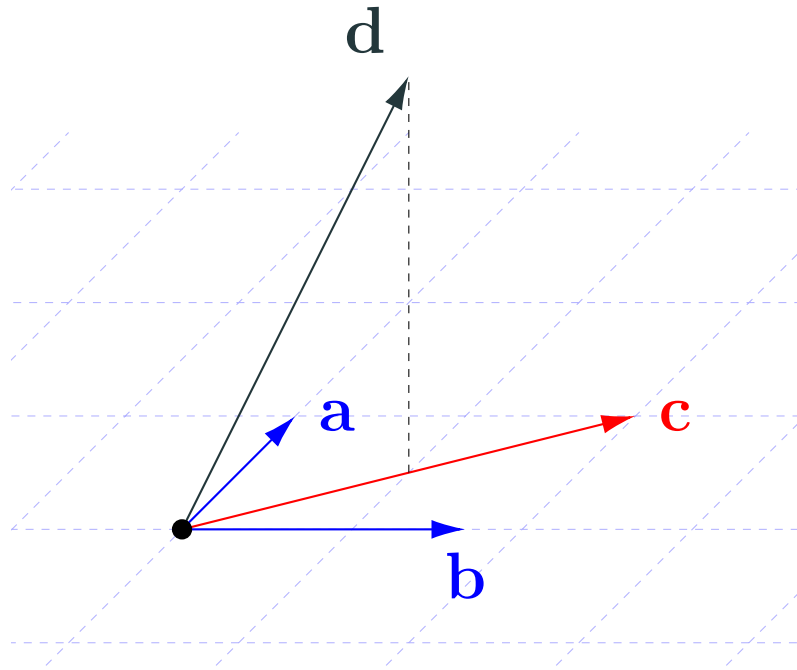
## Определение

Если базис линейной оболочки  $M$  содержит  $d$  элементов, то число  $d$  называется **размерностью линейной оболочки  $M$** .

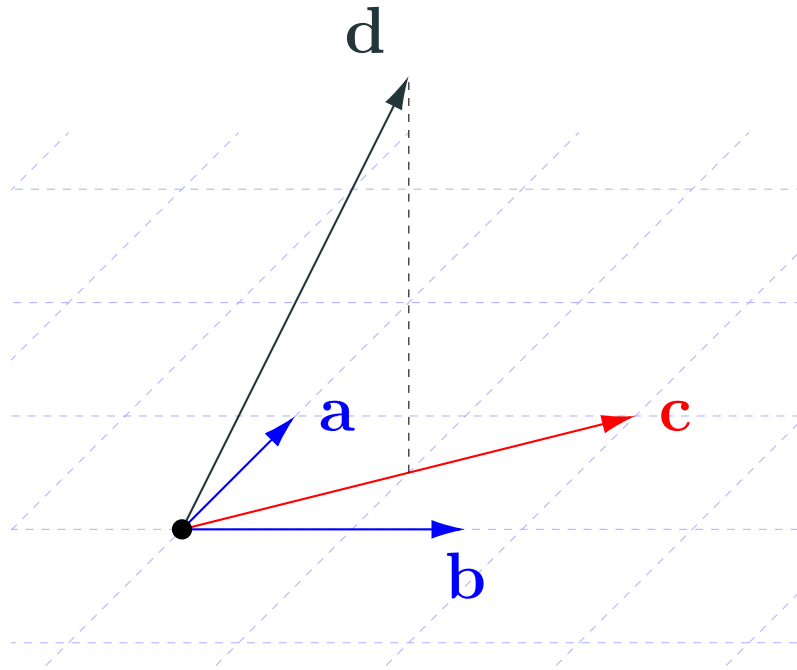
$$d = \dim M$$



# Размерность линейной оболочки: картинка

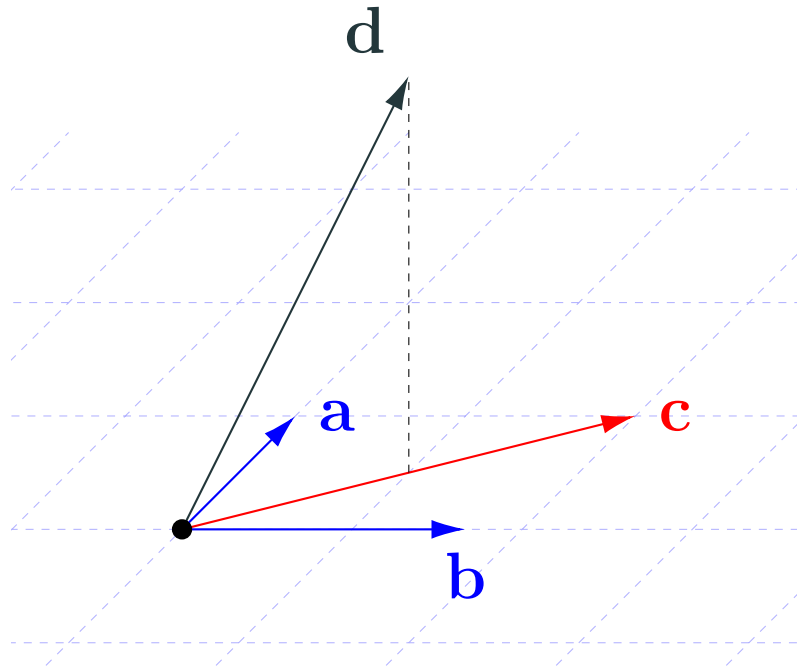


# Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  равна 2.

# Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  равна 2.

Размерность  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$  равна 3.

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Размерность  $\mathbb{R}^n$  равна  $n$ .

# Векторное пространство

# Краткий план:

- Векторное пространство;



# Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;

# Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;
- Размерность векторного пространства.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.  
Векторное пространство также называют **линейным**.

# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$



# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Сложение двух многочленов и умножение многочлена на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

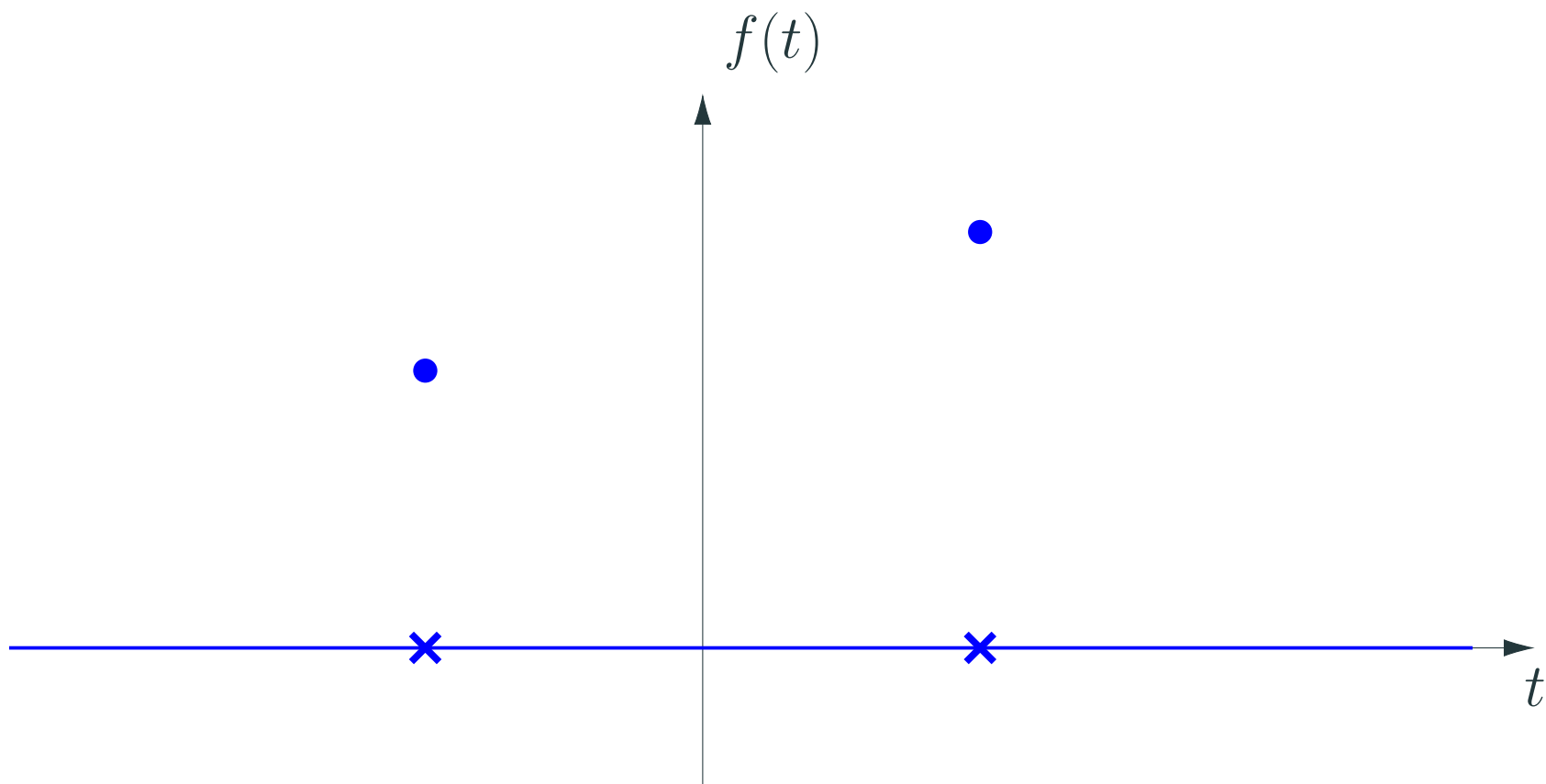
$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Сложение двух таких функций и умножение на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

# Типичный элемент $V$



# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$



# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Полностью аналогично определяются линейно зависимые и независимые наборы векторов.

# Базис и размерность пространства

## Определение

**Базисом** векторного пространства  $V$  называется любой набор  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ;
- векторы  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  линейно независимы.

# Базис и размерность пространства

## Определение

**Базисом** векторного пространства  $V$  называется любой набор  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ;
- векторы  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  линейно независимы.

## Определение

Число векторов в базисе,  $n$ , называют **размерностью** пространства  $V$ ,  $\dim V = n$ .

# Продолжаем аналогию

Пространство  $V$  взаимнооднозначно сопоставлено с  $\mathbb{R}^n$  и при этом сложение в  $V$  соответствует сложению в  $\mathbb{R}^n$ , а умножение на число в  $V$  соответствует умножению на число в  $\mathbb{R}^n$ .

## Утверждение

Линейная независимость в  $V$  соответствует линейной независимости в  $\mathbb{R}^n$ .

Базис в  $V$  соответствует базису в  $\mathbb{R}^n$ .

Размерность  $V$  равна размерности  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

# Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

# Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

## Эквивалентное определение

Множество  $V$  называется **векторным пространством**, если выполнено восемь свойств...

# Восемь аксиом: сложение

1. При сложении можно расставлять скобки как хочешь (ассоциативность):

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. При сложении можно путать лево и право (коммутативность):

$$a + b = b + a$$

3. Существует нулевой вектор 0:

$$a + 0 = a$$

4. Для любого вектора  $a$  найдется противоположный вектор  $-a$ :

$$a + (-a) = 0$$

# Восемь аксиом: умножение

5. Умножение вектора на число **совместимо** с умножением чисел:

$$\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{a}$$

6. Умножение на **единицу** не меняет вектор:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

7. Раскрывать скобки вокруг векторов можно (**дистрибутивность умножения**):

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

8. Раскрывать скобки вокруг чисел можно (**дистрибутивность умножения**):

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}$$



# Матрица линейного оператора

# Краткий план:

- Матрица линейного оператора;

# Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;

# Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;
- Обобщение на векторное пространство.

# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$L \mathbf{v} = L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$L \mathbf{v} = L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Достаточно понять, что оператор  $L$  делает с векторами, содержащими одну единицу и нули на остальных местах.

# Запишем оператор по столбцам!

Обозначим  $e_i$  — вектор, у которого на  $i$ -м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Запишем оператор по столбцам!

Обозначим  $e_i$  — вектор, у которого на  $i$ -м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Определение

**Матрицей линейного оператора**  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  назовём прямоугольную табличку чисел, в которой  $i$ -ый столбец равен  $L e_i$ .

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Матрица оператора, } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$



# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $R$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $R$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $R = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$ .

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $I$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$I : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $I$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$I : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, **единичная матрица**,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Матрица размера  $3 \times 2$  соответствует оператору  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Матрица размера  $2 \times 3$  соответствует оператору  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 3$  и  $a_{12} = -2$ .

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 3$  и  $a_{12} = -2$ .

Элемент матрицы  $A$ , лежащий в строке  $i$  в столбце  $j$ , обозначают  $a_{ij}$ .

Матрица имеет размер  $n \times k$ , если в ней  $n$  строк и  $k$  столбцов.

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .



# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей**  $L_{ef}$  **линейного оператора**  $L$  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

3. Помещаем числа  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}$  в столбец  $j$  таблички.

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

3. Помещаем числа  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}$  в столбец  $j$  таблички.
4. Повторяем шаги 1, 2 и 3 для всех столбцов.

# Ранг оператора

# Краткий план:

- Множество значений оператора;

# Краткий план:

- Множество значений оператора;
- Ранг оператора.

# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$$

# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$L \mathbf{v} = v_1 L \mathbf{e}_1 + v_2 L \mathbf{e}_2 + \dots + v_n L \mathbf{e}_n$$



# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$L \mathbf{v} = v_1 L \mathbf{e}_1 + v_2 L \mathbf{e}_2 + \dots + v_n L \mathbf{e}_n$$

## Утверждение

Множество значений оператора  $L$  можно записать в виде линейной оболочки:

$$\text{Image } L = \text{Span}\{L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2, \dots, L \mathbf{e}_n\}$$

# Ранг оператора

## Определение

**Рангом** линейного оператора  $L$  называют размерность его образа:

$$\text{rank } L = \dim \text{Image } L = \dim \text{Span}\{L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2, \dots, L \mathbf{e}_n\}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Image } L = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1, e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Image } L = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Базис для Image } L: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{rank } L = \dim \text{Image } L = 2$$

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .



# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .

Ранг оператора проецирования  $H$  равен размерности того множества, на которое проецируют.

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .

Ранг оператора проецирования  $H$  равен размерности того множества, на которое проецируют.

## Определение

Ранг оператора проецирования  $H$  также называют **следом оператора проецирования**,  $\text{tr } H = \text{rank } H$ .

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

Поворачивая различные векторы, можно получить любой вектор на плоскости,  $\text{Image } R = \mathbb{R}^2$ .

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

Поворачивая различные векторы, можно получить любой вектор на плоскости,  $\text{Image } R = \mathbb{R}^2$ .

Базис образа:  $\{e_1, e_2\}$ , значит  $\text{rank } R = 2$ .

# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .

# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .

## Доказательство

Базис во всём  $\mathbb{R}^k$  содержит  $k$  элементов, значит базис образа не больше.

# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .

## Доказательство

Базис во всём  $\mathbb{R}^k$  содержит  $k$  элементов, значит базис образа не больше.

Образ получается как  $\text{Span}\{L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2, \dots, L \mathbf{e}_n\}$ .



# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}.$

# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}.$

## Доказательство

$$\text{Image}(L_2 L_1) \subset \text{Image}(L_2)$$

# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}.$

## Доказательство

$$\text{Image}(L_2 L_1) \subset \text{Image}(L_2)$$

Если  $\text{Image } L_1 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ , то

$$\text{Image}(L_2 L_1) = \text{Span}\{L_2 \mathbf{v}_1, L_2 \mathbf{v}_2, \dots, L_2 \mathbf{v}_p\}.$$

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

## Утверждение

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы.

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

## Утверждение

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы.

## Доказательство

Именно эти линейно-независимые столбцы и будут базисом в линейной оболочке  $\text{Image } L$ .

**Парный бутстрэп**

# Краткий план:

- Парный бутстрэп;



# Краткий план:

- Парный бутстрэп;
- Плюсы и минусы.

# Парный бутстрэп — это просто!

На примере модели  $y_i = \beta_1 + \beta_x x_i + \beta_w w_i + u_i$ .

Есть исходные наблюдения  $(x_i, w_i, y_i)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

1. Сгенерируем первую бутстрэп-выборку  $(x_i^*, w_i^*, y_i^*)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

Просто выберем  $n$  наблюдений из исходной выборки с повторениями.

# Парный бутстрэп — это просто!

На примере модели  $y_i = \beta_1 + \beta_x x_i + \beta_w w_i + u_i$ .

Есть исходные наблюдения  $(x_i, w_i, y_i)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

1. Сгенерируем первую бутстрэп-выборку  $(x_i^*, w_i^*, y_i^*)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

Просто выберем  $n$  наблюдений из исходной выборки с повторениями.

2. Посчитаем очередное значение интересующей нас статистики  $\hat{m}_j^*$  или  $t_j^*$ .

# Парный бутстрэп — это просто!

На примере модели  $y_i = \beta_1 + \beta_x x_i + \beta_w w_i + u_i$ .

Есть исходные наблюдения  $(x_i, w_i, y_i)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

1. Сгенерируем первую бутстрэп-выборку  $(x_i^*, w_i^*, y_i^*)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$

Просто выберем  $n$  наблюдений из исходной выборки с повторениями.

2. Посчитаем очередное значение интересующей нас статистики  $\hat{m}_j^*$  или  $t_j^*$ .
3. Повторим первые два шага много раз:  $j = 1, \dots, 10000$ .

# Доверительный интервал

## Наивный вариант

$$q_L(\hat{m}^*) \leq m \leq q_R(\hat{m}^*)$$

## Вариант с $t$ -статистикой

Решаем неравенство

$$q_{\text{left}}(\hat{t}^*) \leq \frac{\hat{m} - m}{se(\hat{m})} \leq q_{\text{right}}(\hat{t}^*)$$

Получаем

$$\hat{m} - se(\hat{m})q_{\text{right}}(\hat{t}^*) \leq m \leq \hat{m} - se(\hat{m})q_{\text{left}}(\hat{t}^*)$$

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

Однородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

Однородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Неоднородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



# Ядро оператора

## Определение

**Ядром** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется множество векторов, которые под действием  $L$  превращаются в  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ :

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

# Ядро оператора

## Определение

**Ядром** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется множество векторов, которые под действием  $L$  превращаются в  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ :

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Чтобы найти ядро  $L$  нужно решить однородную систему  $L \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

В финальной системе в каждом следующем уравнении меньше неизвестных, чем в предыдущем.

# Ступенчатый вид

После применения метода Гаусса система примет ступенчатый вид:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right]$$



# Ступенчатый вид

После применения метода Гаусса система примет ступенчатый вид:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Неизвестные, лежащие в начале «ступеньки», называются **главными**, а остальные — **свободными**.

Главные переменные можно выразить через свободные.

# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

## Доказательство

После применения метода Гаусса последнее уравнение, в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля, окажется одного из трёх видов:

$A : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$ , нет решений.

$B : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 7$ , хотя бы одно решение.

$C : 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$ , бесконечное количество.

# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

## Доказательство

После применения метода Гаусса последнее уравнение, в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля, окажется одного из трёх видов:

$A : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$ , нет решений.

$B : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 7$ , хотя бы одно решение.

$C : 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$ , бесконечное количество.

В случае  $C$  мы получаем в последнем уравнении свободу выбора  $x_3$  и  $x_4$ .

# Структура множества решений

## Утверждение

Если решений бесконечное множество, то ответ можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  — конкретные векторы, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — произвольные числа.

# Структура множества решений

## Утверждение

Если решений бесконечное множество, то ответ можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  — конкретные векторы, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — произвольные числа.

Для однородной системы  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , а число  $k$  является размерностью множества решений,  $k = \dim \ker A$ .

# Источники мудрости

1. Tim Hestenberg, What Teachers Should Know about the Bootstrap.

# Источники мудрости

1. Tim Hestenberg, What Teachers Should Know about the Bootstrap.
2. James MacKinnon, Bootstrap Methods in Econometrics.



# Резюме: бутстрэп до регрессии

- Бутстрэп: оценка распределения вместо теорем.

# Резюме: бутстрэп до регрессии

- Бутстрэп: оценка распределения вместо теорем.
- Наивный бутстрэп: сгенерируем много значений величины  $\hat{m}_j^*$ .

# Резюме: бутстрэп до регрессии

- Бутстрэп: оценка распределения вместо теорем.
- Наивный бутстрэп: сгенерируем много значений величины  $\hat{m}_j^*$ .
- Бутстрэп  $t$ -статистики: сгенерируем много значений

$$t_j^* = \frac{\hat{m}_j^* - \hat{m}}{se(m_j^*)}$$

# Резюме: бутстрэп до регрессии

- Бутстрэп: оценка распределения вместо теорем.
- Наивный бутстрэп: сгенерируем много значений величины  $\hat{m}_j^*$ .
- Бутстрэп  $t$ -статистики: сгенерируем много значений

$$t_j^* = \frac{\hat{m}_j^* - \hat{m}}{se(m_j^*)}$$

- Бутстрэп в бутстрэпе: способ получить  $se(m_j^*)$ , если нет явной формулы.

# Резюме: бутстрэп и регрессия

- Параметрический бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + u_i^*, \quad u_i^* \sim \mathcal{N}(0; \hat{\sigma}^2)$$

# Резюме: бутстрэп и регрессия

- Параметрический бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + u_i^*, \quad u_i^* \sim \mathcal{N}(0; \hat{\sigma}^2)$$

- Дикий бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{u}_i^{sc} v_i^*, \quad v_i^* \in \{-1, +1\}$$

# Резюме: бутстрэп и регрессия

- Параметрический бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + u_i^*, \quad u_i^* \sim \mathcal{N}(0; \hat{\sigma}^2)$$

- Дикий бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{u}_i^{sc} v_i^*, \quad v_i^* \in \{-1, +1\}$$

- Парный бутстрэп: выбираем случайные наблюдения с повторениями.

# Резюме: бутстрэп и регрессия

- Параметрический бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + u_i^*, \quad u_i^* \sim \mathcal{N}(0; \hat{\sigma}^2)$$

- Дикий бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{u}_i^{sc} v_i^*, \quad v_i^* \in \{-1, +1\}$$

- Парный бутстрэп: выбираем случайные наблюдения с повторениями.



# Резюме: бутстрэп и регрессия

- Параметрический бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + u_i^*, \quad u_i^* \sim \mathcal{N}(0; \hat{\sigma}^2)$$

- Дикий бутстрэп:

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{u}_i^{sc} v_i^*, \quad v_i^* \in \{-1, +1\}$$

- Парный бутстрэп: выбираем случайные наблюдения с повторениями.

Следующая лекция: причинно-следственные связи.

# Умножение матрицы на вектор

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)