Модели экспоненциального сглаживания

Модель ETS(ANN)

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.
- ETS(ANN) как модель.

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.
- ETS(ANN) как модель.
- Формулы для прогнозов.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.
- 2017: PROPHET

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.
- 2017: PROPHET
- 2020: ORBIT

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

$$u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.}$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

$$u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.}$$

Параметры: α, σ^2, ℓ_0.

Смысл сокращения

ETS — Error, Trend, Seasonality (ошибка, тренд, сезонность).

Смысл сокращения

ETS — Error, Trend, Seasonality (ошибка, тренд, сезонность).

ANN — аддитивная ошибка, нет тренда, нет сезонности.

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Подставим $\alpha = 1$:

$$y_t = \ell_t = \ell_{t-1} + u_t.$$

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Основная идея: разложить правдоподобие в сумму.

$$\begin{aligned}\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots +\\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),\end{aligned}$$

где $\theta = (\alpha, \ell_0, \sigma^2)$.

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Основная идея: разложить правдоподобие в сумму.

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \ell_0, \sigma^2)$.

К сожалению, явных формул для оценок нет.

Прогнозируем

картинка с прогнозами ANN модели

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + u_{T+1}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + u_{T+1}$$

$$(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2)$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + u_{T+2} = \ell_T + \alpha u_{T+1} + u_{T+2}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + u_{T+2} = \ell_T + \alpha u_{T+1} + u_{T+2}$$

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

Предиктивный интервал

Закон распределения

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

превращается в

Предиктивный интервал

Закон распределения

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

превращается в предиктивный интервал

$$[\hat{\ell}_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{\hat{\alpha}^2 + 1}; \hat{\ell}_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{\hat{\alpha}^2 + 1}].$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

$$\hat{\ell}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{\ell}_{t-1}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

$$\hat{\ell}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{\ell}_{t-1}$$

$$\min_{\alpha} \sum (y_t - \hat{\ell}_t)^2;$$

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.
- Обобщение случайного блуждания.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.
- Обобщение случайного блуждания.
- Зёрнышко огромного класса современных моделей.

ETS(AAN)

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!
- Формулы для прогнозов.

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!
- Формулы для прогнозов.
- Немного подробностей о правдоподобии.

Настоящий тренд!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

u_t — случайная ошибка.

Настоящий тренд!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

u_t — случайная ошибка.

ETS(AAN):

A — аддитивная ошибка;

A — аддитивный тренд;

N — нет сезонности.

ETS(AAN): уравнения

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0;
\end{cases}
$$

ETS(AAN): уравнения

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Параметры: α, β, σ^2, ℓ_0, b_0.

ETS(AAN): прогнозируем

Картинка с прогнозами на 2 шага вперед

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0;
\end{cases}
$$

$$y_{T+1} = \ell_T + b_T + u_{T+1}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + b_T + u_{T+1}$$

$$(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + b_T; \sigma^2)$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + \\ + (b_T + \beta u_{T+1}) + u_{T+2}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_{t-1}, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + \\ + (b_T + \beta u_{T+1}) + u_{T+2} \end{aligned}$$

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + 2b_T; \sigma^2((\alpha+\beta)^2 + 1))$$

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

$$(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\ell_{t-1} + b_{t-1}; \sigma^2)$$

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

$$(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\ell_{t-1} + b_{t-1}; \sigma^2)$$

$$\ln L(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2}(y_t - (\ell_{t-1} + b_{t-1}))^2$$

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.
- Наклон линии тренда может меняться.

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.
- Наклон линии тренда может меняться.
- Устройство функции правдоподобия.