Временные ряды: компоненты и наивные модели

Данные и задачи

Данные и задачи: план

- Временные ряды — тип данных.
- Задачи для одного ряда.
- Задачи для множества рядов.

Заговор рептилоидов

Математический анализ:

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Временные ряды — не ряды!

Что такое временной ряд?

Временной ряд

Последовательность наблюдений, упорядоченных во времени.

$$0, 0, 5, 7, 102, 53, 23.$$

Временной ряд

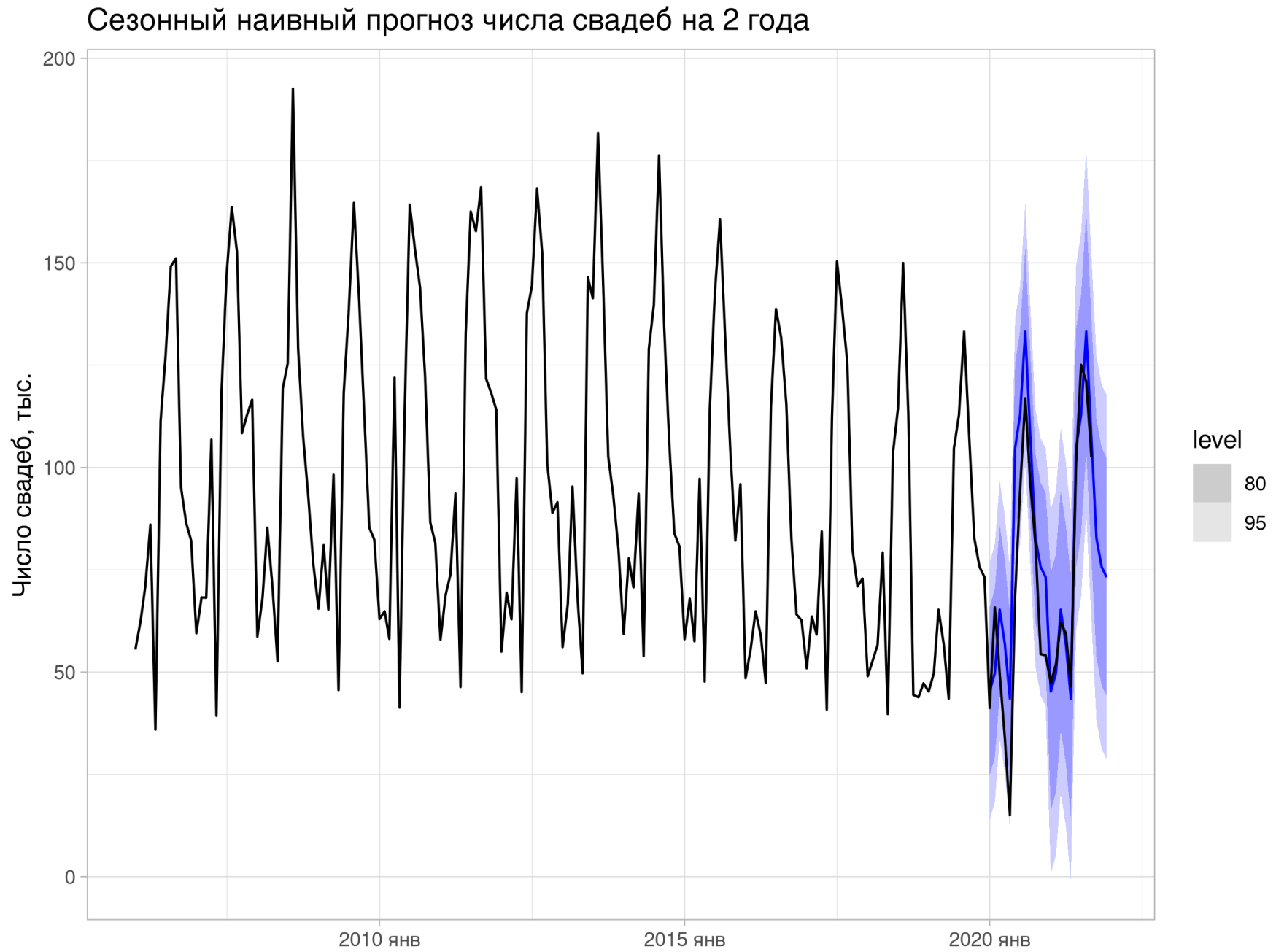
Последовательность случайных величин, упорядоченных во времени.

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_T.$$

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.
- Восстановить отдельные наблюдения по агрегированным.
- Обнаружить момент разладки.
- Выделить составляющие ряда.
- …

Прогнозируем



Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.
- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.
- …

Измеряем близость рядов

Модели и алгоритмы

Модели

- Явные предположения про величины $y_1, y_2, \ldots, y_T$.
- Метод оценивания: максимальное правдоподобие, байесовский подход.
- Точечные и интервальные прогнозы, проверка гипотез.

ETS, ARIMA, ORBIT, PROPHET, …

Модели и алгоритмы

Алгоритмы

- Размытые предположения про величины $y_1, y_2, \ldots, y_T$.
- Особая инструкция.
- Точечные результаты без доверительных интервалов.

STL, градиентный бустинг, случайный лес, …

Фокус курса

Прогнозирование одномерных рядов с помощью моделей.

Компоненты ряда

Компоненты ряда: план

- Тренд, цикличность и сезонность.
- Аддитивное и мультипликативное разложение.
- Откуда взять формальное определение?

Умение видеть единорогов

Аддитивное разложение ряда:

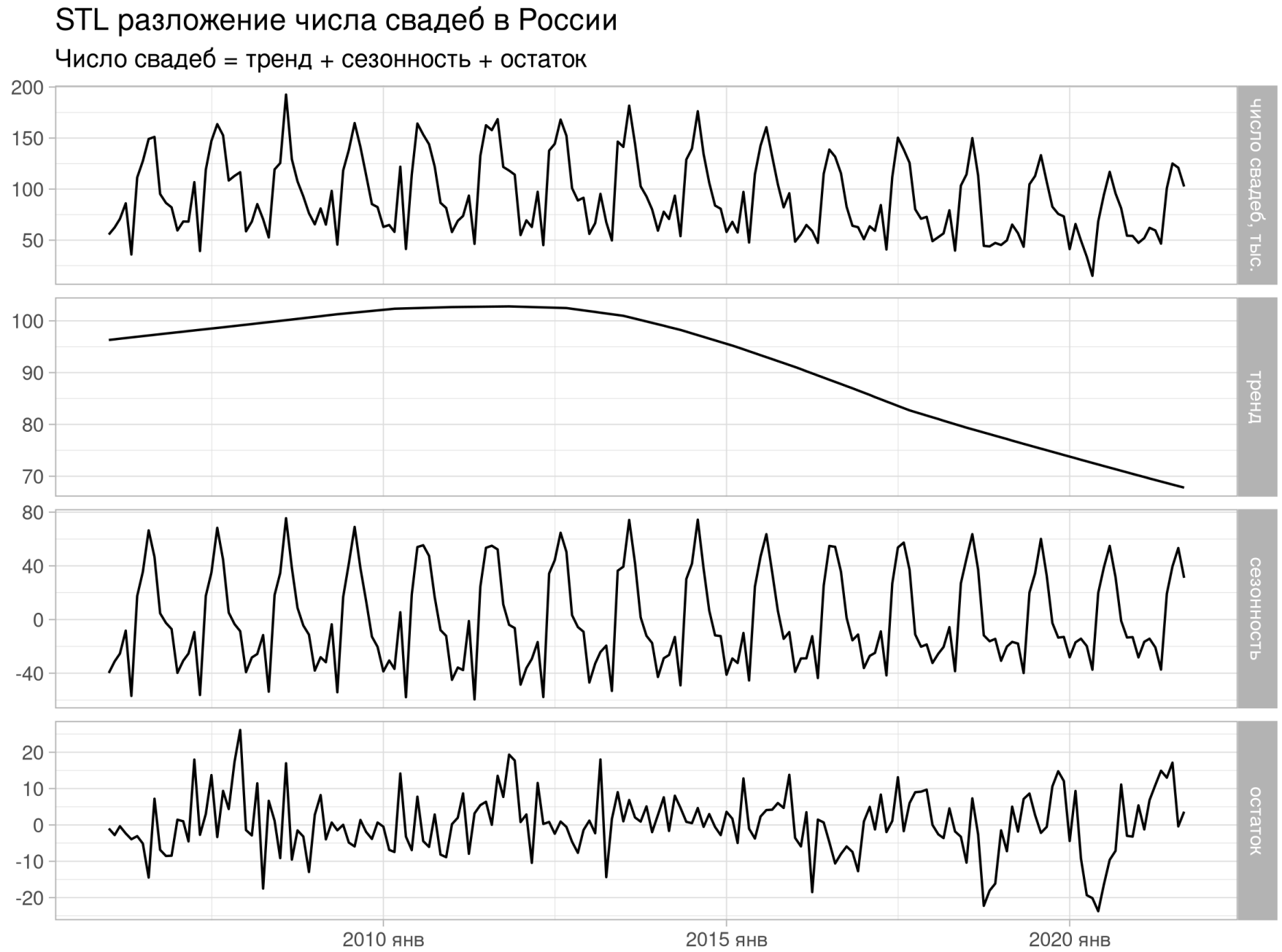
$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Тренд — плавно изменяющаяся составляющая ряда.

Сезонная составляющая — составляющая с чёткой периодичностью и стабильной интенсивностью.

Случайная компонента (остаток) — всё остальное.

Тренд, сезонность и остаток



Строгое определение?

Единого строгого определения не будет!

Некоторые модели и алгоритмы формально определяют данные составляющие.

Циклическая составляющая

Иногда ряд раскладывают дальше

$$y_t = trend_t + cycle_t + seas_t + remainder_t$$

Циклическая составляющая — составляющая с плавающей периодичностью и нестабильной интенсивностью.

Тренд (в узком смысле) — плавно изменяющаяся монотонная составляющая ряда.

Аддитивное и мультипликативное разложение

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Мультипликативное разложение ряда:

$$y_t = trend_t \cdot seas_t \cdot remainder_t.$$

Превращаем одно в другое:

$$\ln y_t = \ln trend_t + \ln seas_t + \ln remainder_t.$$

Какие единороги лучше?

Формальное определение составляющих зависит от модели.

Алгоритм STL: одно разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Модель ETS(AAA): другое разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Важно понимать цель построения разложения.

А зачем разложение?

- Интересно само по себе.
- Для прогнозирования ряда с помощью прогнозирования составляющих.
- Для получения характеристик ряда.

А характеристики зачем?

- Чтобы классифицировать новый ряд в один из заданных классов.
- Чтобы выявить в рядах неизвестные кластеры.

Компоненты ряда: итоги

- Тренд плавно меняется и включает цикличную составляющую.
- Сезонная составляющаю имеет чёткую периодичность и стабильную амплитуду.
- Точная формализация компонент зависит от модели.

Алгоритм STL

Алгоритм STL: план

- Локальная регрессия.
- Внешний цикл STL.
- Внутренний цикл STL.
- Параметры STL.

STL

STL — Seasonal Trend decompositon with Loess.

STL — разложение на сезонность и тренд с использованием LOESS.

LOESS — LOcal regrESSion.

LOESS — локальная линейная регрессия.

STL как чёрный ящик

На входе:

Ряд Y_t.

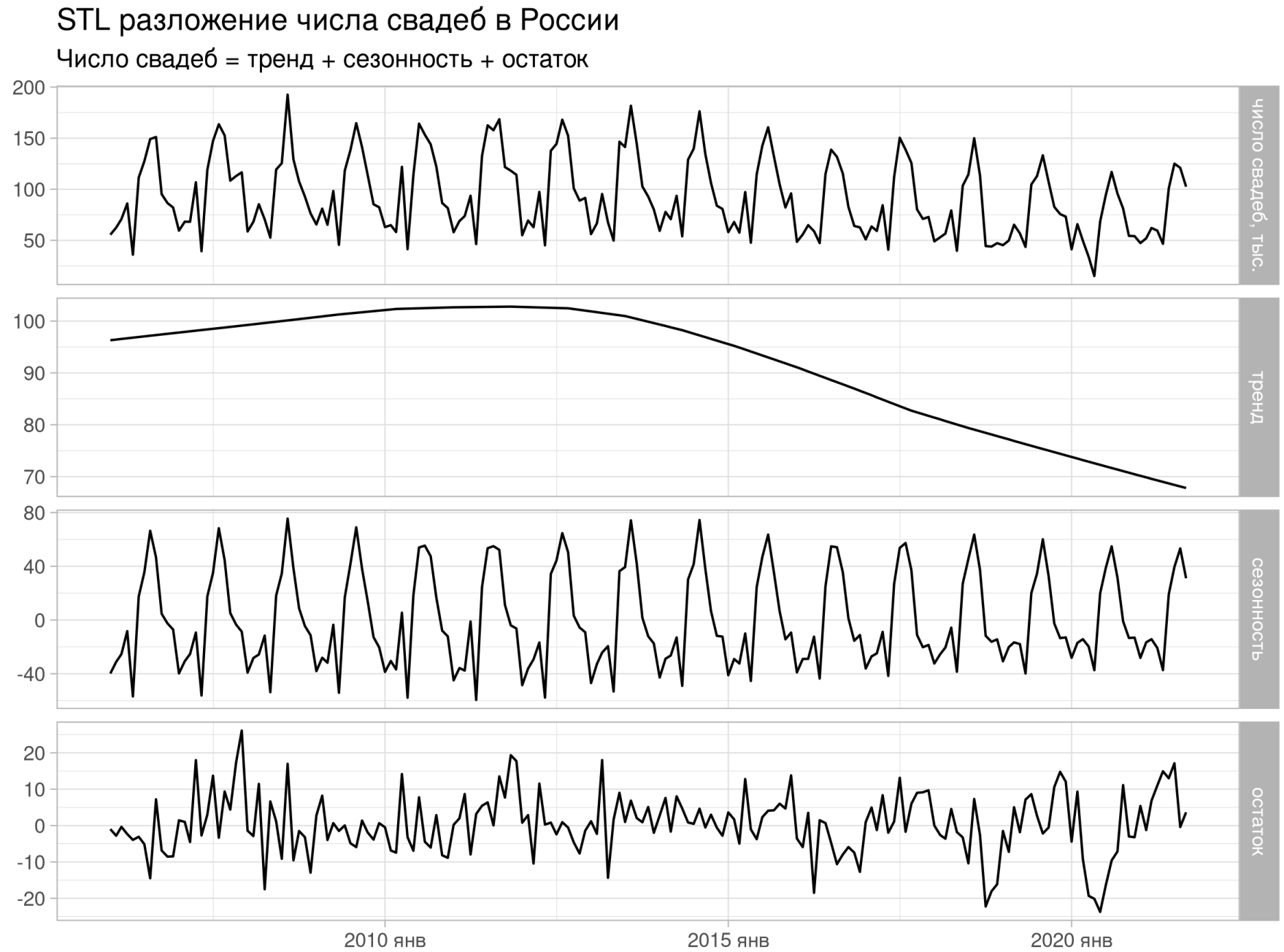
Параметры алгоритма n_p, n_i, n_o, n_l, n_s, n_t.

На выходе:

Разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Чёрный ящик долго настраивали.

STL: результат



LOESS

- Хотим построить прогноз для точки x.
- Находим локальные оценки $\hat{\beta}_1(x)$, $\hat{\beta}_2(x)$.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x)(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i)^2$$

- Прогнозируем:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1(x) + \hat{\beta}_2(x)x.$$

Ядерная функция

- Функция $K_h(x_i - x)$ убывает с увеличением расстояния $|x_i - x|$;
- Параметр h отвечает за ширину окна сглаживания.

Например, h — количество точек x_i рядом с x, которые мы учитываем.

Нюансы локальной регрессии

- Выбор степени полинома.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x)(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i - \hat{\beta}_3 x_i^2)^2$$

- Выбор ядерной функции.

$$K_h(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left(-d^2/2h^2\right)$$

- Выбор ширины окна h.

STL с высоты птичьего полёта

Цель: разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Алгоритм содержит два цикла: внешний и внутренний.

1. Инициализируем $T_t = 0$, $R_t = 0$.
   Внешний цикл:
2. Посчитаем вес каждого наблюдения, ρ_t.
   На первом проходе $\rho_t = 1$ у каждого наблюдения.
   На последующих проходах ρ_t отрицательно зависит от свежей величины R_t.
3. Обновим текущее разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$ с учётом весов ρ_t.

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

2. Разобъём детрендированный ряд на 12 подрядов.
3. Сгладим каждый подряд по отдельности с помощью LOESS:

$$C^{jan} = LOESS_\rho(Y_{jan}^{det}), C^{feb} = LOESS_\rho(Y_{feb}^{det}), \dots$$

4. Выделяем низкочастотную составляющую (дважды скользящее среднее + LOESS):

$$L_t = LOESS(MA(MA(C_t)))$$

5-6. Получаем новые S_t^{new} и T_t^{new}.

STL: внутренний цикл

1-3. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд, разобъём на подряды и сгладим каждый подряд с помощью LOESS.

4. Выделяем низкочастотную составляющую.
5. Удаляем низкочастотную составляющую, получаем новую сезонную компоненту:

$$S_t^{new} = C_t - L_t.$$

6. Удаляем новую сезонность из исходного ряда и сглаживаем с помощью LOESS:

$$T_t^{new} = LOESS_\rho(Y_t - S_t^{new}).$$

Уф!

Параметры STL

- n_p — периодичность сезонности, например, $n_p = 12$.
- n_o — число проходов внешнего цикла.
  Чем больше число n_o, тем слабее влияние выбросов.
  Значение $n_o = 1$ часто достаточно.
- n_i — число проходов внутреннего цикла.
  Значение $n_i = 2$ часто достаточно для достижения сходимости.

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- n_s — сила сглаживания сезонных подрядов.
- n_t — сила сглаживания при выделении тренда на последнем шаге.

Что настроить?

1. Обязательно указать периодичность n_p.
2. Возможно, поиграться с n_s.

STL: итоги

- LOESS — локальная регрессия.
- STL — хорошо проверенный временем алгоритм без модели.
- При желании можно поиграться с силами сглаживания.

Характеристики рядов

Характеристики рядов: план

- Выборочная автокорреляция.
- Выборочная частная автокорреляция.
- STL-характеристики.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Как решить?

1. Для каждого ряда сгенерировать признаки.
2. К полученным признакам применить алгоритм для перекрестных данных.

Классифицировать: с помощью случайного леса.

Измерить расстояние с помощью метрики Махаланобиса.

Кластеризовать с помощью иерархической кластеризации.

Создаём признаки

Два множества признаков:

- Выборочная ACF (автокорреляционная функция, AutoCorrelation Function).
- Выборочная PACF (частная автокорреляционная функция, Partial ACF).

Из одного ряд получим:

$ACF_1, ACF_2, ACF_3, \ldots$

$PACF_1, PACF_2, PACF_3, \ldots$

ACF

Выборочная ACF

Оценим множество парных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}, \quad ACF_1 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad ACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-k}, \quad ACF_k = \hat{\beta}_2;$$

Смысл ACF_2: на сколько единиц в среднем y_t выше среднего, если y_{t-2} выше среднего на одну единицу.

Ряд и его ACF

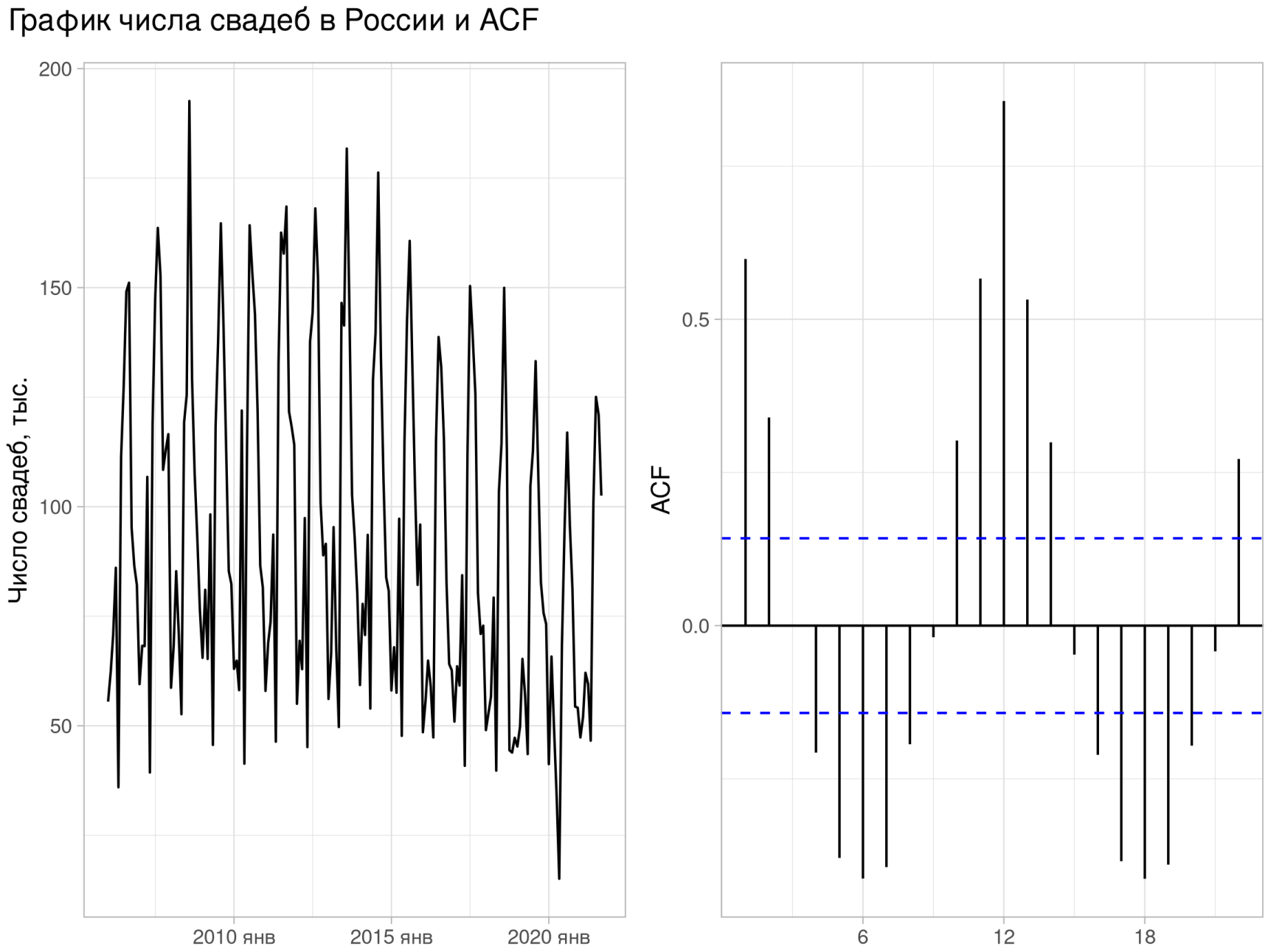


График числа свадеб в России и ACF
Число свадеб, тыс.
200
150
100
50
2010 янв
2015 янв
2020 янв
ACF
0.5
0.0
6
12
18

Почему ACF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная ACF

ACF_k — выборочная корреляция между рядом y_t и рядом y_{t-k}.

Различие между определениями мало.

PACF

Выборочная PACF

Оценим множество множественных регрессий:

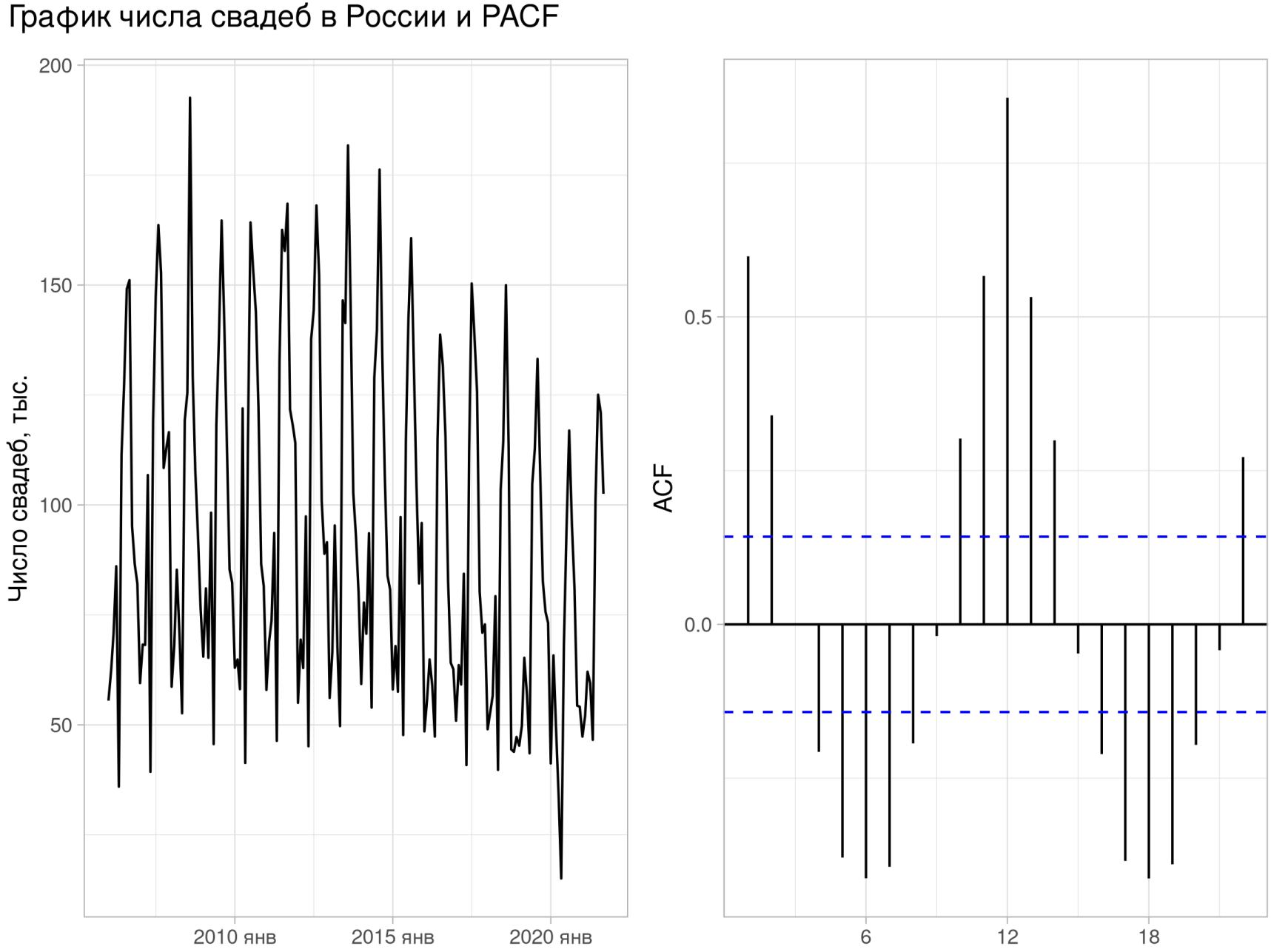
$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1}, \quad PACF_1 = \hat{\beta}_1;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad PACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \ldots + \hat{\beta}_k y_{t-k}, \quad PACF_k = \hat{\beta}_k;$$

Смысл $PACF_2$: на сколько единиц в среднем y_t выше среднего, если y_{t-2} выше среднего на одну единицу, а y_{t-1} на среднем уровне.

Ряд и его PACF



Почему PACF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная PACF

$PACF_4$ — выборочная корреляция между остатками a_t и остатками b_t.

a_t — остатки из регрессии

$$y_t \text{ на } 1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}.$$

b_t — остатки из регрессии

$$y_{t-4} \text{ на } 1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}.$$

Различие между определениями мало.

STL-характеристики

На выходе:

$$y_t = T_t + S_t + R_t.$$

Измерим:

- Выраженность тренда F_{trend}.
- Выраженность сезонности F_{seas}.

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Идея определения: При идеальном разложении с некоррелированными компонентами:

$$F_{trend} = \frac{\mathrm{sVar}(trend)}{\mathrm{sVar}(trend) + \mathrm{sVar}(remainder)},$$

$$F_{seas} = \frac{\mathrm{sVar}(seas)}{\mathrm{sVar}(seas) + \mathrm{sVar}(remainder)},$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

На практике:

- Выраженность тренда:

$$F_{trend} = \max\left\{1 - \frac{\mathrm{sVar}(remainder)}{\mathrm{sVar}(trend + remainder)}, 0\right\}.$$

- Выраженность сезонности:

$$F_{seas} = \max\left\{1 - \frac{\mathrm{sVar}(remainder)}{\mathrm{sVar}(seas + remainder)}, 0\right\}.$$

Выраженность тренда и сезонности

Характеристики рядов: итоги

- ACF — коэффициенты в парных регрессиях или корреляции.
- PACF — коэффициенты во множественных регрессиях или корреляции.
- STL позволяет измерить выраженность тренда и сезонности по сравнению с остаточной компонентой.

Простейшие модели

Простейшие модели: план

- Белый шум.
- Независимые наблюдения.
- Случайное блуждание.

Белый шум

Белый шум

Временной ряд u_t — белый шум, если:

- $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
- $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$;
- $\mathrm{Cov}(u_s, u_t) = 0$ при $s \neq t$.

- Составная часть всех моделей. Чаще всего белый шум — это, что отказались моделировать.
- Часто дополнительно предполагают независимость и нормальность.
- В белом шуме черти водятся.
  ARCH, GARCH модели волатильности основаны на том, что u_t и u_s могут быть зависимы!

Независимые наблюдения

Модель

$$y_t = \mu + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Оценки:

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{y}, \quad \hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{T}.$$

Интервальный прогноз на h шагов вперёд:

$$[\bar{y} - 1.96\hat{\sigma}; \bar{y} + 1.96\hat{\sigma}]$$

Случайное блуждание

Наивная модель

$$y_t = y_{t-1} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, задано стартовое y_1.

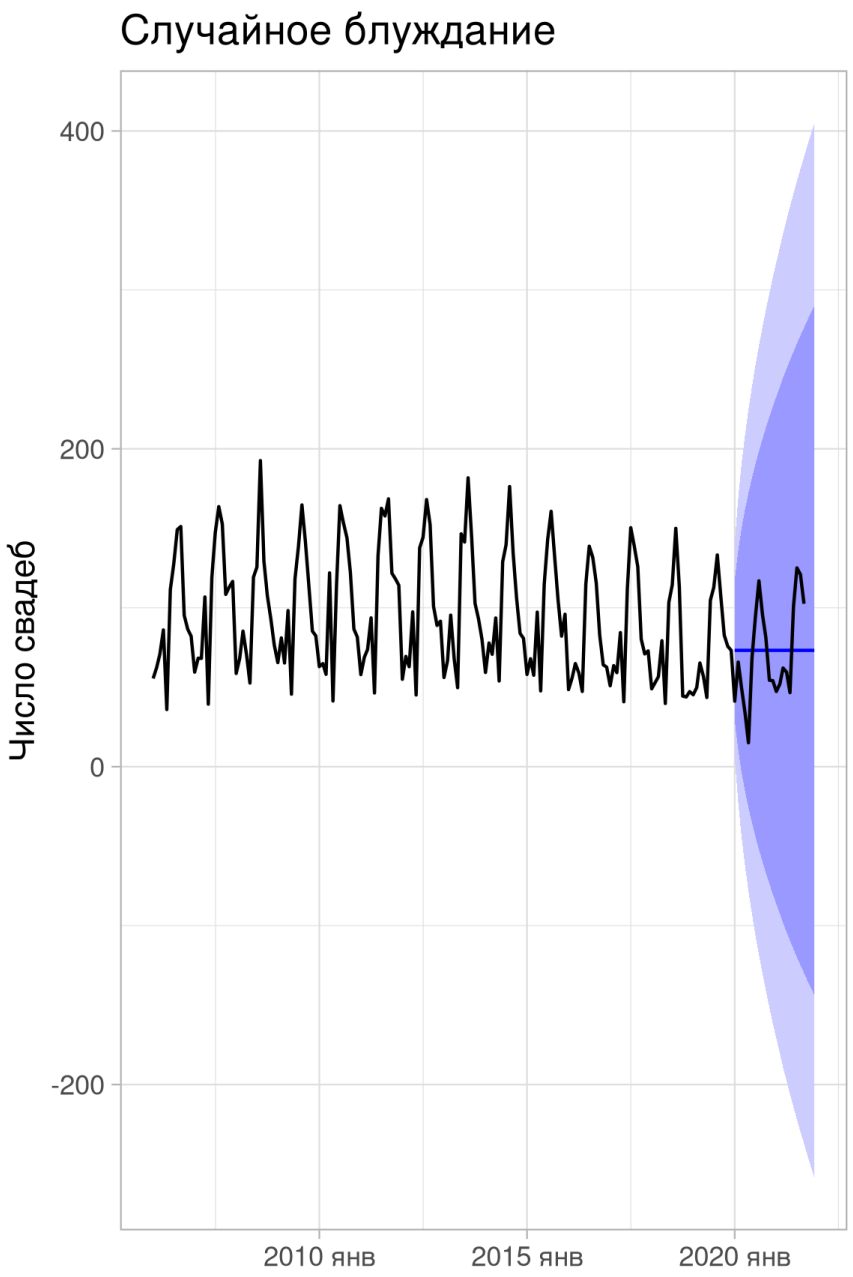
Переформулируем: $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = u_t$. Оценки:

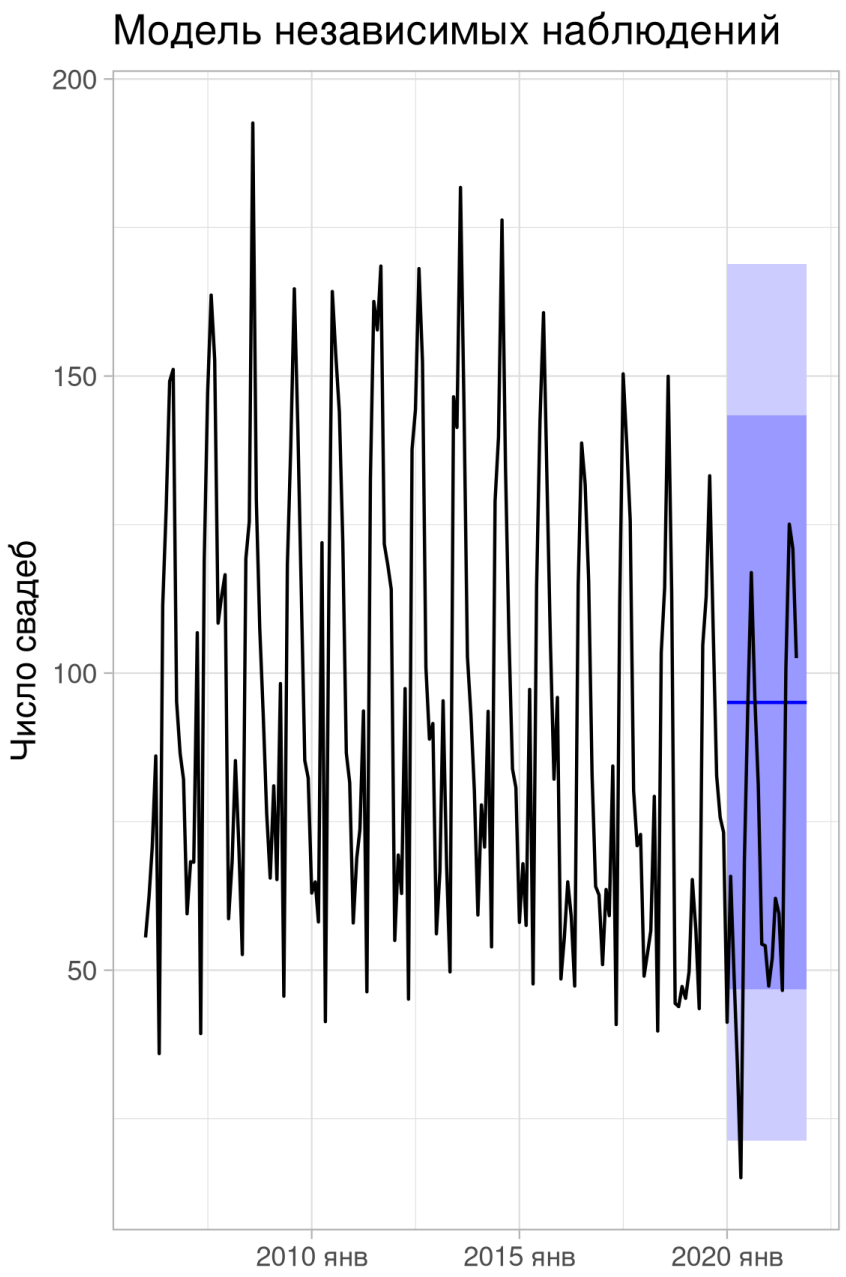
$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum(\Delta y_i - \overline{\Delta y})^2}{T-1}.$$

Интервальный прогноз на h шагов вперёд:

$$[y_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}; y_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}]$$

Первые прогнозы!





Сезонное случайное блуждание

Сезонная наивная модель

$$y_t = y_{t-12} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, заданы $y_1, \ldots, y_{11}$.

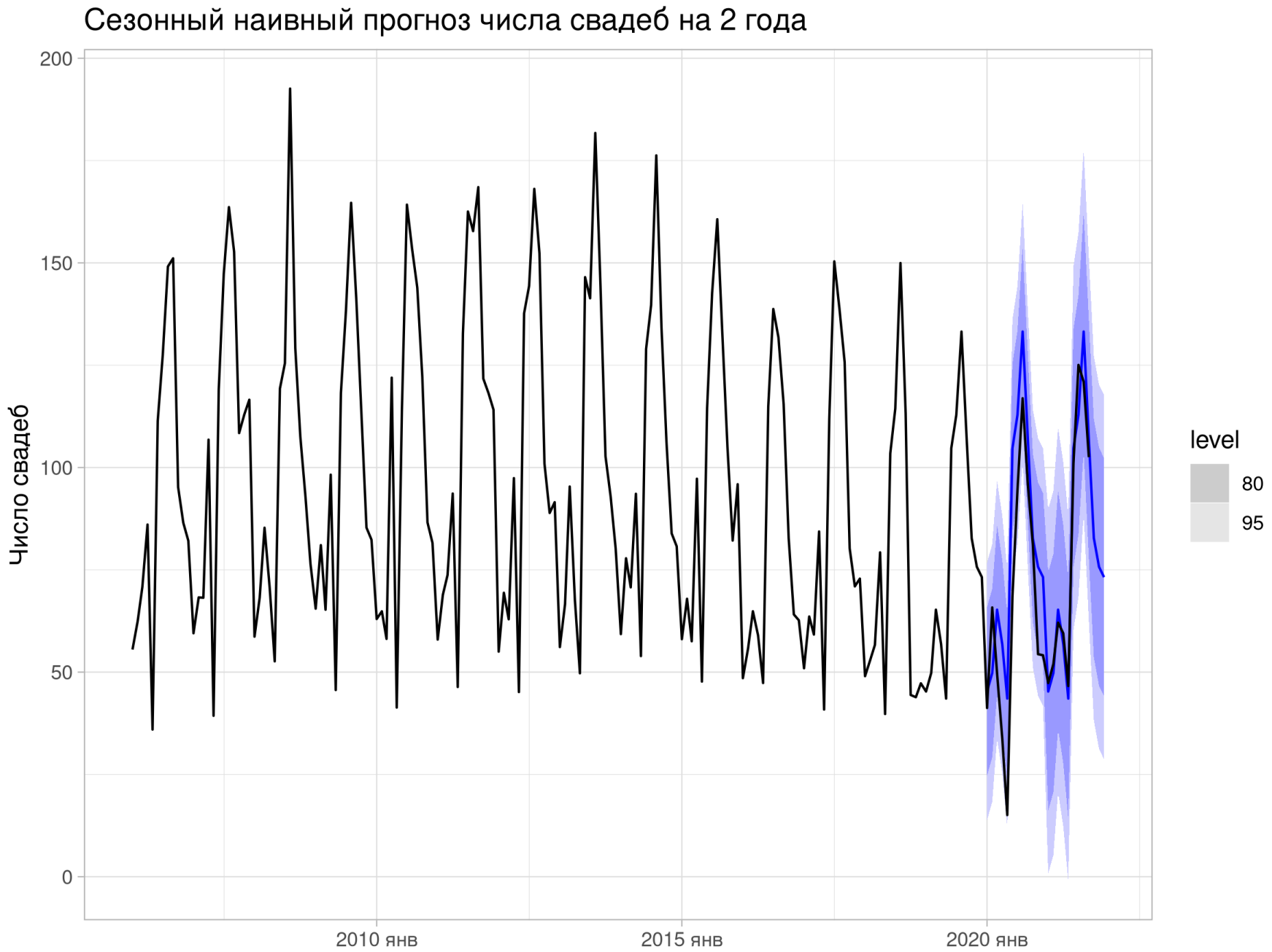
Переформулируем: $y_t - y_{t-12} = \Delta_{12} y_t = u_t$. Оценки:

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum(\Delta_{12} y_i - \overline{\Delta_{12} y})^2}{T - 12}.$$

Интервальный прогноз на h сезонов вперёд:

$$[y_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}; y_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}]$$

Уже неплохо!


Сезонный наивный прогноз числа свадеб на 2 года
Число свадеб
200
150
100
50
0
2010 янв
2015 янв
2020 янв
level
80
95

Зачем нужны наивные модели?

- Идеи для сложных моделей.
  Модели стационарных рядов похожи на модель независимых наблюдений.
  Модели нестационарных рядов похожи на случайное блуждание.
- База для сравнения.
  При оценке сложной модели очень важно иметь базу сравнения.
- Помощники других моделей.
  Можно усреднить прогнозы сложной модели и наивной сезонной!

Наивные модели: итоги

- Белый шум — то, что не охота моделировать.
- Независимые наблюдения и случайное блуждание.
- Идеи, составные части и помощники других моделей.
- База для сравнения.