

Краткие правила: 120 минут, без прокторинга, можно использовать любые материалы. Благородные доны и доньи решают самостоятельно.

1. Вспомним  $ETS(AAN)$  модель, которая описывается системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2). \end{cases}$$

Для  $\ell_{100} = 50$ ,  $b_{100} = 2$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 16$  постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

2. В рамках  $ETS(AAN)$  модели с произвольными параметрами и  $b_t = 777$  выведите выражения для  $E(b_{t+h} | \mathcal{F}_t)$  и  $\text{Var}(b_{t+h} | \mathcal{F}_t)$ , где  $\mathcal{F}_t$  — информация обо всех играках,  $\mathcal{F}_t = \sigma(y_1, y_2, \dots, y_t)$ .
3. Рассмотрим  $ETS(ANN)$  модель для двух наблюдений,  $y_1$  и  $y_2$ . Известно, что  $\sigma^2 = 1$ ,  $\alpha = 1/2$ . Выпишите лог-функцию правдоподобия этой модели как функцию от  $\ell_0$ .
4. Рассмотрим  $MA(2)$  процесс  $y_t = 4 + u_t + u_{t-1} + 2u_{t-2}$ , где  $(u_t)$  — белый шум с дисперсией 16.
- (а) Является ли данный процесс стационарным?
- (б) Найдите автокорреляционную функцию данного процесса.
- (с) Какой  $ARIMA(p, d, q)$  моделью описывается процесс  $d_t = \Delta y_t$ ? Укажите число параметров  $p$ ,  $d$  и  $q$ .
5. Известно, что  $(u_t)$  — белый шум, а  $(y_t)$  равен

$$y_t = \frac{1 + 3L}{1 - 0.2L}(5 + u_t).$$

- (а) Запишите рекуррентное уравнение на  $y_t$ ,  $u_t$  и их лаги, решением которого является данный процесс.
- (б) Найдите  $E(y_t)$ ,  $\text{Var}(y_t)$ ,  $\text{Cov}(y_t, y_s)$ .
- (с) Стационарен ли процесс  $(y_t)$ ?
6. Величины  $x_t$  независимы и равновероятно принимают значения 0 или 1 каждая. Рассмотрим процесс  $r_t = x_t \cdot x_{t-1} - 0.25$ .
- (а) Стационарен ли процесс  $(r_t)$ ?
- (б) Илон Маск утверждает, что это типичный  $MA(1)$  процесс, а потому он представим в виде  $r_t = u_t + \alpha u_{t-1}$ .  
Прав ли Илон Маск? Если прав, то явно запишите  $u_t$  через  $x_t$  и его лаги.