Краткие правила: 120 минут, без прокторинга, можно использовать любые материалы. Благородные доны и доньи решают самостоятельно.

1. Вспомним $ETS(AAN)$ модель, которая описывается системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2). \end{cases}$$

   Для $\ell_{100} = 70$, $b_{100} = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $\sigma^2 = 9$ постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

2. В рамках $ETS(AAN)$ модели с произвольными параметрами и $b_t = 555$ выведите выражения для $\mathrm{E}(b_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$ и $\mathrm{Var}(b_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$, где $\mathcal{F}_t$ — информация обо всех игреках, $\mathcal{F}_t = \sigma(y_1, y_2, \ldots, y_t)$.

3. Рассмотрим $ETS(ANN)$ модель для двух наблюдений, y_1 и y_2. Известно, что $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 1/4$.

   Выпишите лог-функцию правдоподобия этой модели как функцию от ℓ_0.

4. Рассмотрим $MA(2)$ процесс $y_t = +u_t + u_{t-1} + 2u_{t-2}$, где (u_t) — белый шум с дисперсией 4.

   (a) Является ли данный процесс стационарным?

   (b) Найдите автокорреляционную функцию данного процесса.

   (c) Найдите частную автокорреляционную функцию данного процесса.

5. Известно, что (u_t) — белый шум, а (y_t) равен

$$y_t = \frac{1 + 2L}{1 - 0.5L}(4 + u_t).$$

   (a) Запишите рекуррентное уравнение на y_t, u_t и их лаги, решением которого является данный процесс.

   (b) Найдите $\mathrm{E}(y_t)$, $\mathrm{Var}(y_t)$, $\mathrm{Cov}(y_t, y_s)$.

   (c) Стационарен ли процесс (y_t)?

6. Величины x_t независимы и равновероятно принимают значения 0 или 1 каждая. Рассмотрим процесс $r_t = x_t \cdot x_{t-1} - 0.5$.

   (a) Стационарен ли процесс (r_t)?

   (b) Илон Маск утверждает, что это типичный $MA(1)$ процесс, а потому он представим в виде $r_t = u_t + \alpha u_{t-1}$.

      Прав ли Илон Маск? Если прав, то явно запишите u_t через x_t и его лаги.