

Краткие правила: 120 минут, без прокторинга, можно использовать любые материалы. Благородные доны и доньи решают самостоятельно.

1. Вспомним $ETS(AAN)$ модель, которая описывается системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2). \end{cases}$$

Для $\ell_{100} = 30$, $b_{100} = 1$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$, $\sigma^2 = 16$ постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

2. Рассмотрим $ETS(AAN)$ модель с $\ell_0 = 30$, $b_0 = 1$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$, $\sigma^2 = 16$. Известно, что $y_1 = 32$, $y_2 = 35$ и $y_3 = 37$.

Найдите сглаженные значения ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 .

3. Для $ETS(ANN)$ модели найдите $E(y_t)$ и $\text{Var}(y_t)$. Найдите пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(y_t), \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(y_t).$$

4. Рассмотрим $MA(2)$ процесс $y_t = 5 + u_t + 0.3u_{t-1} + 0.5u_{t-2}$, где (u_t) — белый шум с дисперсией 16.

- (а) Является ли данный процесс стационарным?
- (б) Найдите автокорреляционную функцию данного процесса.
- (с) Найдите $E(y_{t+1} \mid y_t, y_{t-1})$.

5. Рассмотрим стационарный $AR(1)$ процесс относительно белого шума (u_t) с уравнением

$$y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + u_t.$$

Величины u_t независимы и имеют нормальное распределение $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

- (а) Найдите автокорреляционную и частную автокорреляционную функции.
- (б) Найдите $E(y_{t+1} \mid y_t, y_{t-1})$.
- (с) Приведите пример нестационарного процесса, также являющегося решением упомянутого уравнения.

6. Рассмотрим уравнение $y_t = 3 + 0.5y_{t-1} - 0.06y_{t-2} + u_t - 0.2u_{t-1}$, где (u_t) — белый шум.

Величины u_t независимы и имеют нормальное распределение $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

- (а) Запишите уравнение с помощью лаговых полиномов и разложите полиномы на сомножители.
- (б) Присмотревшись пристальным взглядом к корням явно выпишите хотя бы одно стационарное решение этого уравнения. Является ли стационарное решение единственным?
- (с) Найдите $\text{Corr}(y_t, y_{t-k})$ для всех стационарных решений.