

# Вопросы и ответы

**Много сезонных составляющих**

# Много сезонных составляющих: план

- Наложение **нескольких частот**.

# Много сезонных составляющих: план

- Наложение **нескольких частот**.
- Краткое напоминание STL.

# Много сезонных составляющих: план

- Наложение **нескольких частот**.
- Краткое напоминание STL.
- MSTL = STL **много раз**.

# Картинка

Дневные данные, много частот

# Что делать со сложной сезонностью?

- Использовать **подходящую** модель:  
ARIMA + предикторы Фурье, PROPHET, TBATS, ...

# Что делать со сложной сезонностью?

- Использовать **подходящую** модель:  
ARIMA + предикторы Фурье, PROPHET, TBATS, ...
- Разложить ряд на **много** составляющих:

$$y_t = trend_t + seas_t^{(1)} + seas_t^{(2)} + remainder_t$$



# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

- $n_p$  — периодичность сезонности, например,  $n_p = 12$ .

# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

- $n_p$  — периодичность сезонности, например,  $n_p = 12$ .
- $n_l$  — сила сглаживания низкочастотного фильтра.

# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

- $n_p$  — периодичность сезонности, например,  $n_p = 12$ .
- $n_l$  — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- $n_s$  — сила сглаживания сезонных подрядов.

# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

- $n_p$  — периодичность сезонности, например,  $n_p = 12$ .
- $n_l$  — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- $n_s$  — сила сглаживания сезонных подрядов.
- $n_t$  — сила сглаживания при выделении тренда.

# Вспоминаем STL

На входе:

Ряд  $y_t$ .

- $n_p$  — периодичность сезонности, например,  $n_p = 12$ .
- $n_l$  — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- $n_s$  — сила сглаживания сезонных подрядов.
- $n_t$  — сила сглаживания при выделении тренда.

На выходе:

Разложение  $y_t = trend_t + seas_t + remainder_t$ .

# Применим STL последовательно!

1. **Первичное** выделение сезонных компонент.

# Применим STL последовательно!

1. **Первичное** выделение сезонных компонент.
2. **Корректировка** сезонных компонент.



# Применим STL последовательно!

1. **Первичное** выделение сезонных компонент.
2. **Корректировка** сезонных компонент.
3. Добываем тренд и остаток.

# MSTL = STL много раз!

Шаг 1. Первичное выделение сезонных компонент.

1. Запустим STL для выделения сезонности **высокой частоты**.

Запомним выделенную компоненту  $seas_t^{(1)}$  и удалим её из ряда,  $y_t^{(-1)} = y_t - seas_t^{(1)}$ .

# MSTL = STL много раз!

Шаг 1. Первичное выделение сезонных компонент.

1. Запустим STL для выделения сезонности **высокой частоты**.

Запомним выделенную компоненту  $seas_t^{(1)}$  и удалим её из ряда,  $y_t^{(-1)} = y_t - seas_t^{(1)}$ .

2. Запустим STL для выделения сезонности **средней частоты**.

Запомним выделенную компоненту  $seas_t^{(2)}$  и удалим её из ряда,  $y_t^{(-1,2)} = y_t^{(-1)} - seas_t^{(2)}$ .

# MSTL = STL много раз!

Шаг 1. Первичное выделение сезонных компонент.

1. Запустим STL для выделения сезонности **высокой частоты**.

Запомним выделенную компоненту  $seas_t^{(1)}$  и удалим её из ряда,  $y_t^{(-1)} = y_t - seas_t^{(1)}$ .

2. Запустим STL для выделения сезонности **средней частоты**.

Запомним выделенную компоненту  $seas_t^{(2)}$  и удалим её из ряда,  $y_t^{(-1,2)} = y_t^{(-1)} - seas_t^{(2)}$ .

3. ...

# Уточняем сезонные компоненты

Шаг 2. Корректировка сезонных компонент.

1. Временно **возвращаем** в полностью очищенный ряд найденную **сезонность** высокой частоты.  
Запускаем STL и получаем **уточнённую компоненту**  $seas_t^{(1)}$ , удаляем её из ряда и получаем **уточнённый очищенный ряд**.

# Уточняем сезонные компоненты

Шаг 2. Корректировка сезонных компонент.

1. Временно **возвращаем** в полностью очищенный ряд найденную **сезонность** высокой частоты.  
Запускаем STL и получаем **уточнённую компоненту**  $seas_t^{(1)}$ , удаляем её из ряда и получаем **уточнённый очищенный ряд**.
2. Временно **возвращаем** в полностью очищенный ряд найденную **сезонность** средней частоты.  
Запускаем STL и получаем **уточнённую компоненту**  $seas_t^{(2)}$ , удаляем её из ряда и получаем **уточнённый очищенный ряд**.

# Уточняем сезонные компоненты

Шаг 2. Корректировка сезонных компонент.

1. Временно **возвращаем** в полностью очищенный ряд найденную **сезонность** высокой частоты.  
Запускаем STL и получаем **уточнённую компоненту**  $seas_t^{(1)}$ , удаляем её из ряда и получаем **уточнённый очищенный ряд**.
2. Временно **возвращаем** в полностью очищенный ряд найденную **сезонность** средней частоты.  
Запускаем STL и получаем **уточнённую компоненту**  $seas_t^{(2)}$ , удаляем её из ряда и получаем **уточнённый очищенный ряд**.
3. ...

# Завершаем алгоритм

Шаг 3. Добываем тренд и остаток.

Тренд и остаток берем из самого последнего STL разложения, уточнявшего сезонные компоненты.



# Много сезонных составляющих: итоги

- **MSTL** — быстрый и устойчивый алгоритм разложения ряда.

# Много сезонных составляющих: итоги

- **MSTL** — быстрый и устойчивый алгоритм разложения ряда.
- Теоретически **MSTL** может работать с пропусками.

# Много сезонных составляющих: итоги

- **MSTL** — быстрый и устойчивый алгоритм разложения ряда.
- Теоретически **MSTL** может работать с пропусками.
- Есть другие алгоритмы: ARIMA + предикторы Фурье, TBATS, PROPHET, ...

**Данные прерывающиеся нулями**

# Данные прерывающиеся нулями: план

- Нули в данных.

# Данные прерывающиеся нулями: план

- Нули в данных.
- Алгоритм Кростона.

# Откуда нули в данных?

Счётные данные с **небольшим** ожиданием:

- Ежедневное количество пожаров в небольшом городе.

# Откуда нули в данных?

Счётные данные с **небольшим** ожиданием:

- Ежедневное количество пожаров в небольшом городе.
- Ежедневное количество завершённых писателем романов.



# Откуда нули в данных?

Счётные данные с **небольшим** ожиданием:

- Ежедневное количество пожаров в небольшом городе.
- Еженедельное количество завершённых писателем романов.
- ...

# Как моделировать?

- Специальные модели для счётных данных.  
Используют распределение Пуассона, отрицательное биномиальное, ...

# Как моделировать?

- Специальные модели для счётных данных.  
Используют распределение Пуассона, отрицательное биномиальное, ...
- Простой алгоритм Кростона.  
Подходит для несезонных данных, основан на экспоненциальном сглаживании.

# Напоминание про ETS(ANN)

Уравнения модели:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t \end{cases}$$

# Напоминание про ETS(ANN)

Уравнения модели:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t \end{cases}$$

$$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$$

# Напоминание про ETS(ANN)

Уравнения модели:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t \end{cases}$$

$$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t.$$

# Алгоритм Кростона

Шаг 1. Разобъём исходный ряд  $(y_t)$

3, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 3, 0, 1, \dots

# Алгоритм Кростона

Шаг 1. Разобьём исходный ряд  $(y_t)$

3, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 3, 0, 1, ...

на ряд **положительных** значений  $(q_t)$

3, 2, 4, 3, 1, ...

и **длины нулевых промежутков**  $(a_t)$ :

1, 2, 3, 1, ...



# Алгоритм Кростона

Шаг 1. Разобьём исходный ряд  $(y_t)$

3, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 3, 0, 1, ...

на ряд **положительных** значений  $(q_t)$

3, 2, 4, 3, 1, ...

и **длины нулевых промежутков**  $(a_t)$ :

1, 2, 3, 1, ...

Шаг 2. Применим простое экспоненциальное сглаживание.

$$\begin{cases} \hat{q}_{t+1} = \alpha_q q_t + (1 - \alpha_q) \hat{q}_t \\ \hat{a}_{t+1} = \alpha_a a_t + (1 - \alpha_a) \hat{a}_t \end{cases}$$

# Алгоритм Кростона

Шаг 1. Разобьём исходный ряд  $(y_t)$

3, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 3, 0, 1, ...

на ряд **положительных** значений  $(q_t)$

3, 2, 4, 3, 1, ...

и **длины нулевых промежутков**  $(a_t)$ :

1, 2, 3, 1, ...

Шаг 2. Применим простое экспоненциальное сглаживание.

$$\begin{cases} \hat{q}_{t+1} = \alpha_q q_t + (1 - \alpha_q) \hat{q}_t \\ \hat{a}_{t+1} = \alpha_a a_t + (1 - \alpha_a) \hat{a}_t \end{cases}$$

Параметры:  $\alpha_a, \alpha_q, \hat{a}_0, \hat{q}_0$ .

# Прогнозирование

Из алгоритма Кростона можно извлечь:

- $\hat{q}_{T+1}$  — прогноз следующего ненулевого числа.

# Прогнозирование

Из алгоритма Кростона можно извлечь:

- $\hat{q}_{T+1}$  — прогноз следующего ненулевого числа.
- $\hat{a}_{T+1}$  — прогноз длины нулевого промежутка.

# Прогнозирование

Из алгоритма Кростона можно извлечь:

- $\hat{q}_{T+1}$  — прогноз следующего ненулевого числа.
- $\hat{a}_{T+1}$  — прогноз длины нулевого промежутка.
- $\hat{y}_{T+1} = \hat{q}_{T+1} / \hat{a}_{T+1}$  — прогноз для исходного ряда.

# Сравнение прогнозов

Используйте **MASE**:

$$MASE = \frac{|q_{T+1}| + |q_{T+2}| + \dots + |q_{T+H}|}{H},$$

где

- $e_t$  — ошибка прогноза;
- $q_t = \frac{e_t}{MAE^{naive}}$  — ошибка прогноза, отмасштабированная на среднюю абсолютную ошибку наивного прогноза.

# Данные прерывающиеся нулями: итоги

- Как правило, много нулей в **счётных** данных.

# Данные прерывающиеся нулями: итоги

- Как правило, много нулей в **счётных** данных.
- Алгоритм Кростона подойдёт для **несезонных** данных.



# Данные прерывающиеся нулями: итоги

- Как правило, много нулей в **счётных** данных.
- Алгоритм Кростона подойдёт для **несезонных** данных.
- Алгоритм Кростона **нестатический**: нет прогнозных интервалов.

# **Сравнение двух прогнозов**

# Сравнение прогнозов: план

- Тест Диболда-Мариано.

# Сравнение прогнозов: план

- Тест Диболда-Мариано.
- Предпосылки теста.

# Сравнение прогнозов: план

- Тест Диболда-Мариано.
- Предпосылки теста.
- Реализация теста.

# Тест Диболда-Мариано

- Предназначен для сравнения **двух** прогнозов.

# Тест Диболда-Мариано

- Предназначен для сравнения **двух** прогнозов.
- Сравнивает прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .

# Тест Диболда-Мариано

- Предназначен для сравнения **двух** прогнозов.
- Сравнивает прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .
- Не является оптимальным для **сравнения моделей**.



# Тест Диболда-Мариано

- Предназначен для сравнения **двух** прогнозов.
- Сравнивает прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .
- Не является оптимальным для **сравнения моделей**.
- Не подходит для **парного** сравнения множества прогнозов.

# Предпосылки DM-теста

Рассмотрим **разницу потерь** двух прогнозов:

$$d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2, \quad e_{\text{Model},t} = \hat{y}_{\text{Model},t} - y_t;$$

# Предпосылки DM-теста

Рассмотрим **разницу потерь** двух прогнозов:

$$d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2, \quad e_{\text{Model},t} = \hat{y}_{\text{Model},t} - y_t;$$

Разница  $d_t$  предполагается **стационарной**:

# Предпосылки DM-теста

Рассмотрим **разницу потерь** двух прогнозов:

$$d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2, \quad e_{\text{Model},t} = \hat{y}_{\text{Model},t} - y_t;$$

Разница  $d_t$  предполагается **стационарной**:

$$\mathbb{E}(d_t) = \mu_d,$$

# Предпосылки DM-теста

Рассмотрим **разницу потерь** двух прогнозов:

$$d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2, \quad e_{\text{Model},t} = \hat{y}_{\text{Model},t} - y_t;$$

Разница  $d_t$  предполагается **стационарной**:

$$\mathbb{E}(d_t) = \mu_d,$$

$$\text{Cov}(d_t, d_{t-k}) = \gamma_k,$$

# Предпосылки DM-теста

Рассмотрим **разницу потерь** двух прогнозов:

$$d_t = e_{A,t}^2 - e_{B,t}^2, \quad e_{\text{Model},t} = \hat{y}_{\text{Model},t} - y_t;$$

Разница  $d_t$  предполагается **стационарной**:

$$\mathbb{E}(d_t) = \mu_d,$$

$$\text{Cov}(d_t, d_{t-k}) = \gamma_k,$$

в частности,

$$\text{Var}(d_t) = \gamma_0.$$

# Способ тестирования

При верной  $H_0 : \mu_d = 0$ :

$$DM = \frac{\bar{d}}{se(\bar{d})} \rightarrow \mathcal{N}(0; 1),$$

где  $se^2(\bar{d})$  — состоятельная оценка для  $\text{Var}(\bar{d})$ .

# Способ тестирования

При верной  $H_0 : \mu_d = 0$ :

$$DM = \frac{\bar{d}}{se(\bar{d})} \rightarrow \mathcal{N}(0; 1),$$

где  $se^2(\bar{d})$  — состоятельная оценка для  $\text{Var}(\bar{d})$ .

На практике оценивают регрессию на константу

$$\hat{d}_t = \hat{\beta}_1,$$



# Способ тестирования

При верной  $H_0 : \mu_d = 0$ :

$$DM = \frac{\bar{d}}{se(\bar{d})} \rightarrow \mathcal{N}(0; 1),$$

где  $se^2(\bar{d})$  — состоятельная оценка для  $\text{Var}(\bar{d})$ .

На практике оценивают регрессию на константу

$$\hat{d}_t = \hat{\beta}_1,$$

получают  $\hat{\beta}_1 = \bar{d}$  и используют готовые **робастные стандартные ошибки**,

$$DM = \frac{\hat{\beta}_1}{se_{HAC}(\hat{\beta}_1)}.$$

# Как устроена робастная оценка?

Сравниваем прогнозы по  $P$  точкам,

$$\text{Var}(\bar{d}) = \frac{(\text{Var}(d_1) + \text{Var}(d_2) + \dots + 2 \text{Cov}(d_1, d_2) + \dots)}{P^2}$$

# Как устроена робастная оценка?

Сравниваем прогнозы по  $P$  точкам,

$$\text{Var}(\bar{d}) = \frac{(\text{Var}(d_1) + \text{Var}(d_2) + \dots + 2 \text{Cov}(d_1, d_2) + \dots)}{P^2}$$

Из стационарности  $d_t$ :

$$\text{Var}(\bar{d}) = \frac{P\gamma_0 + 2(P-1)\gamma_1 + 2(P-2)\gamma_2 + \dots}{P^2}$$

# Как устроена робастная оценка?

Сравниваем прогнозы по  $P$  точкам,

$$\text{Var}(\bar{d}) = \frac{(\text{Var}(d_1) + \text{Var}(d_2) + \dots + 2 \text{Cov}(d_1, d_2) + \dots)}{P^2}$$

Из стационарности  $d_t$ :

$$\text{Var}(\bar{d}) = \frac{P\gamma_0 + 2(P-1)\gamma_1 + 2(P-2)\gamma_2 + \dots}{P^2}$$

Наивная оценка:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{d}) = \frac{P\hat{\gamma}_0 + 2(P-1)\hat{\gamma}_1 + 2(P-2)\hat{\gamma}_2 + \dots}{P^2}$$

# Почему сравнение прогнозов?

**Нюанс:** сравнение прогнозов и сравнение моделей — разные задачи.

# Почему сравнение прогнозов?

**Нюанс:** сравнение прогнозов и сравнение моделей — разные задачи.

Модель может сильно выигрывать **по простоте** и немного проигрывать по прогнозам.

# Почему сравнение прогнозов?

**Нюанс:** сравнение прогнозов и сравнение моделей — разные задачи.

Модель может сильно выигрывать **по простоте** и немного проигрывать по прогнозам.

На малой выборке **потеря информации** о качестве прогнозов на обучающей выборке существенна.

# Почему сравнение прогнозов?

**Нюанс:** сравнение прогнозов и сравнение моделей — разные задачи.

Модель может сильно выигрывать **по простоте** и немного проигрывать по прогнозам.

На малой выборке **потеря информации** о качестве прогнозов на обучающей выборке существенна.

На практике часто **говорят «моделей»**.



# Сравнение двух прогнозов: итоги

- Тест Диболда-Мариано подходит для сравнения **двух** прогнозов.

# Сравнение двух прогнозов: итоги

- Тест Диболда-Мариано подходит для сравнения **двух** прогнозов.
- Сравнение прогнозов и сравнение моделей — **немного разные** задачи.

# **Сравнение множества прогнозов**

# Сравнение множества прогнозов: план

- RC-теста Уайта.

# Сравнение множества прогнозов: план

- RC-теста Уайта.
- Стационарный бутстрэп.

# Сравнение множества прогнозов: план

- RC-теста Уайта.
- Стационарный бутстрэп.
- Уточнения SPA-теста.

# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

- Два похожих теста, предназначенных для сравнения **множества** прогнозов с эталонным.



# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

- Два похожих теста, предназначенных для сравнения **множества** прогнозов с эталонным.
- Сравнивают прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .

# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

- Два похожих теста, предназначенных для сравнения **множества** прогнозов с эталонным.
- Сравнивают прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .
- Не являются оптимальным для **сравнения моделей**.

# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

- Два похожих теста, предназначенных для сравнения **множества** прогнозов с эталонным.
- Сравнивают прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .
- Не являются оптимальным для **сравнения моделей**.
- SPA-тест — более **робастная** вариация RC-теста.

# RC-тест Уайта и SPA-тест Хансена

RC = Reality Check, проверка реальностью;

SPA = Superior Predictive Ability, превосходящее качество прогнозов.

- Два похожих теста, предназначенных для сравнения **множества** прогнозов с эталонным.
- Сравнивают прогнозы на **заданный горизонт** прогнозирования  $h$ .
- Не являются оптимальным для **сравнения моделей**.
- SPA-тест — более **робастная** вариация RC-теста.
- Предполагают **оптимальные** параметры всех алгоритмов.

# Обозначения

- $e_{jt} = \hat{y}_{jt} - y_t$  — ошибки прогноза алгоритма  $j$ ;

# Обозначения

- $e_{jt} = \hat{y}_{jt} - y_t$  — ошибки прогноза алгоритма  $j$ ;
- Превосходство алгоритмов над эталонным в момент  $t$ :

$$d_t = \begin{pmatrix} e_{\text{bench},t}^2 - e_{At}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Bt}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Ct}^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

# Обозначения

- $e_{jt} = \hat{y}_{jt} - y_t$  — ошибки прогноза алгоритма  $j$ ;
- Превосходство алгоритмов над эталонным в момент  $t$ :

$$d_t = \begin{pmatrix} e_{\text{bench},t}^2 - e_{At}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Bt}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Ct}^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

- $\bar{d} = \sum d_t / P$  — среднее превосходство алгоритмов,  $P$  — число наблюдений, по которым идёт сравнение.

# Обозначения

- $e_{jt} = \hat{y}_{jt} - y_t$  — ошибки прогноза алгоритма  $j$ ;
- Превосходство алгоритмов над эталонным в момент  $t$ :

$$d_t = \begin{pmatrix} e_{\text{bench},t}^2 - e_{At}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Bt}^2 \\ e_{\text{bench},t}^2 - e_{Ct}^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

- $\bar{d} = \sum d_t / P$  — среднее превосходство алгоритмов,  $P$  — число наблюдений, по которым идёт сравнение.

Гипотезы RC-теста:

$$H_0: \mathbb{E}(d_t) = 0.$$

$$H_a: \max(\mathbb{E}(d_t)) > 0.$$



# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  
 $RC = \max(\bar{d})$ .

# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  $RC = \max(\bar{d})$ .
2. Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  
 $RC = \max(\bar{d})$ .

2. Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

3. По бутстрэп-копии находим для каждого алгоритма  $j$

$$\Delta_j = \bar{d}_j^* - \bar{d}_j.$$

# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  $RC = \max(\bar{d})$ .

2. Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

3. По бутстрэп-копии находим для каждого алгоритма  $j$

$$\Delta_j = \bar{d}_j^* - \bar{d}_j.$$

4. Находим  $RC^* = \max(\Delta)$ .

# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  $RC = \max(\bar{d})$ .

2. Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

3. По бутстрэп-копии находим для каждого алгоритма  $j$

$$\Delta_j = \bar{d}_j^* - \bar{d}_j.$$

4. Находим  $RC^* = \max(\Delta)$ .

5. Повторяем (2-4) 10000 раз, получаем  $RC_1^*, \dots, RC_{10000}^*$ .

# Реализация RC-теста

1. Находим значение наилучшего среднего превосходства  $RC = \max(\bar{d})$ .
2. Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

3. По бутстрэп-копии находим для каждого алгоритма  $j$

$$\Delta_j = \bar{d}_j^* - \bar{d}_j.$$

4. Находим  $RC^* = \max(\Delta)$ .
5. Повторяем (2-4) 10000 раз, получаем  $RC_1^*, \dots, RC_{10000}^*$ .
6. Считаем Р-значение как долю  $RC^*$ , оказавшихся больше фактического  $RC$ .

# Бутстрэп-подделка

Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

# Бутстрэп-подделка

Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

- Бутстрэп-подделка имеет длину исходного ряда.



# Бутстрэп-подделка

Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

- Бутстрэп-подделка имеет длину исходного ряда.
- Состоит из случайных, возможно накладывающихся, **фрагментов** ряда.

# Бутстрэп-подделка

Генерируем **бутстрэп-копию** траектории  $d_t$ :

$$d_1, d_2, \dots, d_P \rightarrow d_1^*, d_2^*, \dots, d_P^*.$$

- Бутстрэп-подделка имеет длину исходного ряда.
- Состоит из случайных, возможно накладывающихся, **фрагментов** ряда.
- Длина каждого фрагмента имеет **геометрическое** распределение.

# Уточнения SPA-теста

Стьюдентизация (нормировка) среднего превосходства каждого алгоритма.

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_A \\ \bar{d}_B \\ \bar{d}_C \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow d_{stud} = \begin{pmatrix} \bar{d}_A / se(\bar{d}_A) \\ \bar{d}_B / se(\bar{d}_B) \\ \bar{d}_C / se(\bar{d}_C) \\ \dots \end{pmatrix}$$

# Уточнения SPA-теста

Стьюдентизация (нормировка) среднего превосходства каждого алгоритма.

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_A \\ \bar{d}_B \\ \bar{d}_C \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow d_{stud} = \begin{pmatrix} \bar{d}_A / se(\bar{d}_A) \\ \bar{d}_B / se(\bar{d}_B) \\ \bar{d}_C / se(\bar{d}_C) \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$SPA = \max(d_{stud})$$

# Уточнения SPA-теста

Предварительное деление алгоритмов на «хорошие» и «плохие».

# Уточнения SPA-теста

Предварительное деление алгоритмов на «хорошие» и «плохие».

По бустрэп-копии находим для каждого алгоритма  $j$

$$\Delta_j = \begin{cases} \bar{d}_j^* / se(\bar{d}_j) & \text{для плохого алгоритма } j \\ (\bar{d}_j^* - \bar{d}_j) / se(\bar{d}_j) & \text{для хорошего алгоритма } j. \end{cases}$$

# Сравнение множества прогнозов: итоги

- SPA-тест и RC-тест подходят для сравнения множества прогнозов.

# Сравнение множества прогнозов: итоги

- SPA-тест и RC-тест подходят для сравнения множества прогнозов.
- SPA-тест Хансена имеет большую мощность.



# Сравнение множества прогнозов: итоги

- SPA-тест и RC-тест подходят для сравнения множества прогнозов.
- SPA-тест Хансена имеет большую мощность.
- Иногда названия SPA и RC путают.

# Сравнение множества прогнозов: итоги

- SPA-тест и RC-тест подходят для сравнения множества прогнозов.
- SPA-тест Хансена имеет большую мощность.
- Иногда названия SPA и RC путают.
- SPA-тест используют, например, для сравнения торговых стратегий.

# Сравнение множества прогнозов: итоги

- SPA-тест и RC-тест подходят для сравнения множества прогнозов.
- SPA-тест Хансена имеет большую мощность.
- Иногда названия SPA и RC путают.
- SPA-тест используют, например, для сравнения торговых стратегий.
- Сравнение прогнозов и сравнение моделей — разные задачи.