МА процессы

Стационарные процессы

Стационарные процессы: план

- Определение стационарного процесса.
- Автоковариационная функция.
- Случайное блуждание и независимые величины.

Стационарный процесс

Случайный процесс с постоянными характеристиками.

Стационарность в широком смысле

Процесс (y_t) стационарен в широком смысле, если для любых t и k:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(y_t) = \mu \\ \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k \end{cases}$$

Стационарность в узком смысле

Процесс (y_t) стационарен в узком смысле, если для любого k закон распределения вектора $(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_{t+k})$ не зависит от t.

Стационарность: много уравнений

У стационарного процесса (y_t):

$$\mathbb{E}(y_5) = \mathbb{E}(y_7) = \mathbb{E}(y_{100}) = \mathbb{E}(y_{135}) = \ldots = \mu$$

$$\mathrm{Var}(y_5) = \mathrm{Var}(y_7) = \mathrm{Var}(y_{100}) = \mathrm{Var}(y_{135}) = \ldots = \gamma_0$$

$$\mathrm{Cov}(y_5, y_7) = \mathrm{Cov}(y_8, y_{10}) = \mathrm{Cov}(y_8, y_6) = \ldots = \gamma_2$$

$$\mathrm{Cov}(y_1, y_5) = \mathrm{Cov}(y_8, y_{12}) = \mathrm{Cov}(y_8, y_4) = \ldots = \gamma_4$$

Стационарный процесс: пример

Независимые наблюдения

Величины (y_t) независимы и одинаково распределены с конечным ожиданием μ_y и конечной дисперсией σ_y^2.

$$\mu_y = \mathbb{E}(y_t)$$

$$\gamma_0 = \mathrm{Cov}(y_t, y_t) = \mathrm{Var}(y_t) = \sigma_y^2.$$

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = 0, \text{ при } k \geq 1.$$

Нестационарный процесс: пример

Случайное блуждание

$$\begin{cases} y_0 = \mu \\ y_t = y_{t-1} + u_t, \text{ при } t \geq 1 \end{cases},$$

где u_t — белый шум.

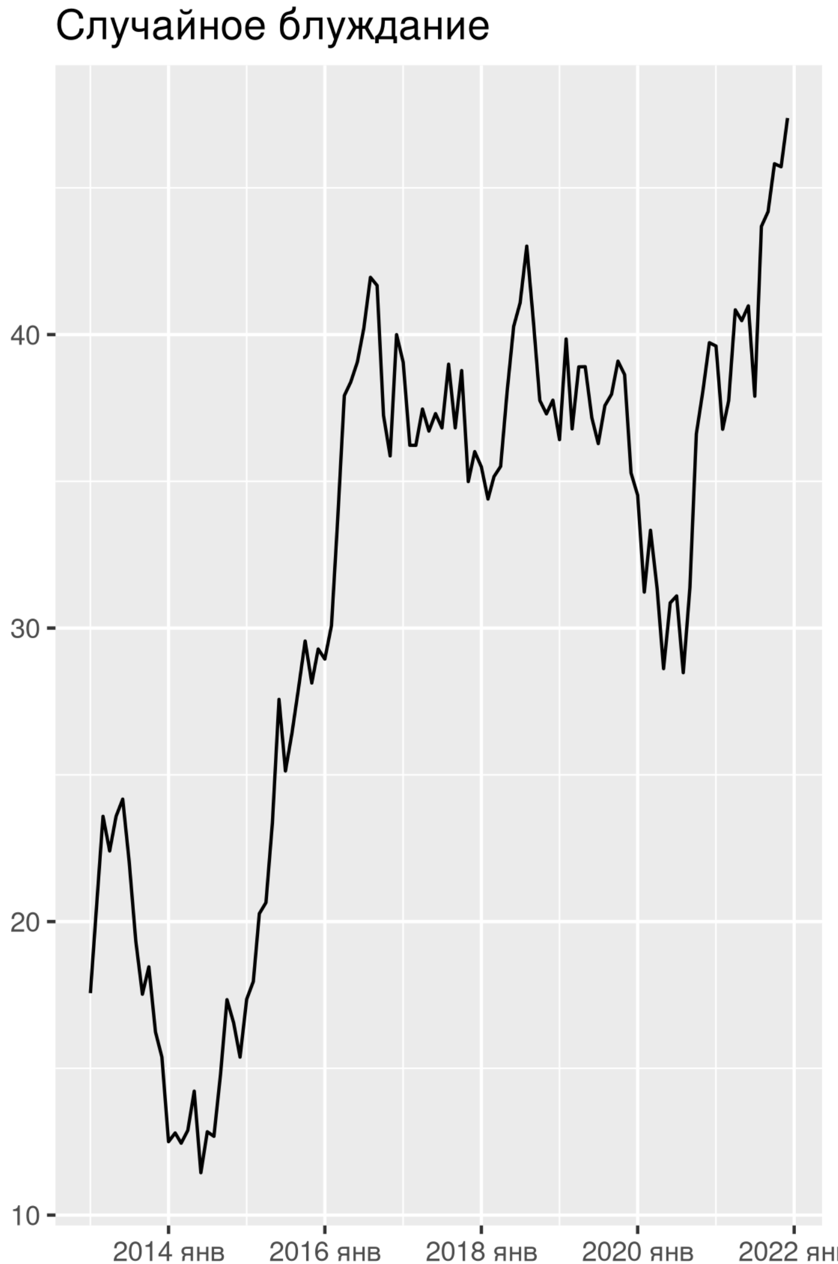
В явном виде: $y_t = \mu + u_1 + u_2 + \ldots + u_t$.

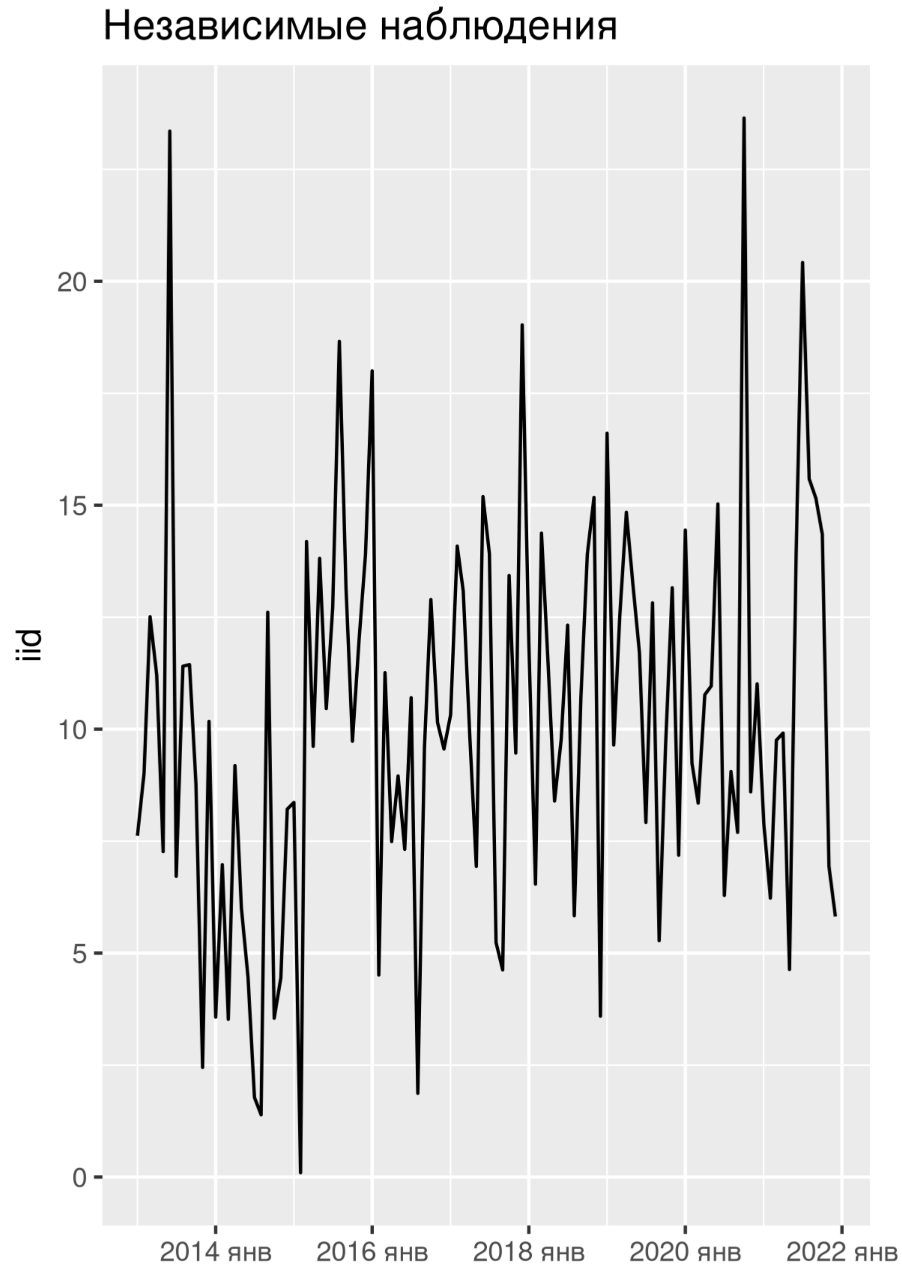
$$\mu_y = \mathbb{E}(y_t)$$

$$\gamma_0 = \mathrm{Cov}(y_t, y_t) = \mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(\mu + u_1 + \ldots + u_t) = t\sigma_u^2.$$

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \mathrm{Cov}(y_t, y_t + u_{t+1} + \ldots + u_{t+k}) = \mathrm{Var}(y_t).$$

Случайное блуждание и случайная выборка





Автоковариационная функция

Определение

Для стационарного процесса (y_t) функцию $\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k})$ называют автоковариационной.

Определение

Для стационарного процесса (y_t) функцию $\rho_k = \mathrm{Corr}(y_t, y_{t+k})$ называют автокорреляционной.

Связь функций

$$\rho_k = \operatorname{Corr}(y_t, y_{y+j}) = \frac{\operatorname{Cov}(y_t, y_{y+j})}{\sqrt{\operatorname{Var}(y_t)\operatorname{Var}(y_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Автоковариационная функция — наше всё!

Теоремка

Если вектор $(y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+k})$ имеет многомерное нормальное распределение при любом количестве компонент, то константа $\mu = \mathbb{E}(y_t)$ и функция $\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k})$ полностью определяют конечномерные распределения случайного процесса (y_t).

Стационарность: итоги

- Постоянные $\mathbb{E}(y_t)$, $\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k})$.
- Автоковариационная функция.
- Случайное блуждание нестационарно.
- Случайная выборка стационарна.

Частные корреляции

Частные корреляции: план

- Проекция для случайных величин.
- Общее определение.
- Частная автокорреляционная функция.

Геометрия случайных величин

Длина и угол

Дисперсия $\mathrm{Var}(R)$ — квадрат длины случайной величины.

Корреляция $\mathrm{Corr}(L, R)$ — косинус угла между случайными величинами.

Ортогональность

Величины L и R ортогональны, если $\mathrm{Cov}(L, R) = 0$.

Проекция

Обозначение

$Best(L; R_1, R_2, \ldots R_n)$ — линейная комбинация 1 и R_1, …, R_n, наиболее похожая на L.

$\hat{L} = Best(L; R_1, R_2, \ldots R_n)$ если:

- $\hat{L} = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 R_1 + \ldots + \alpha_n R_n$;
- Ожидание $\mathbb{E}((L - \hat{L})^2)$ минимально.

Как найти проекцию?

Хотим найти $\hat{L} = Best(L; R_1, R_2, \ldots R_n)$:

$$\hat{L} = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 R_1 + \ldots + \alpha_n R_n.$$

Как найти коэффициенты?

- Минимизация:

$$\mathbb{E}((L - \hat{L})^2) \to \min$$

- Решение системы:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(L) = \mathbb{E}(\hat{L}); \\ \operatorname{Cov}(L, R_i) = \operatorname{Cov}(\hat{L}, R_i) \text{ при всех } i; \end{cases}$$

Частная корреляция

Определение

$$\mathrm{pCorr}(U, D; R_1, R_2, \ldots, R_n) = \mathrm{Corr}(U^*, D^*), \text{ где}$$

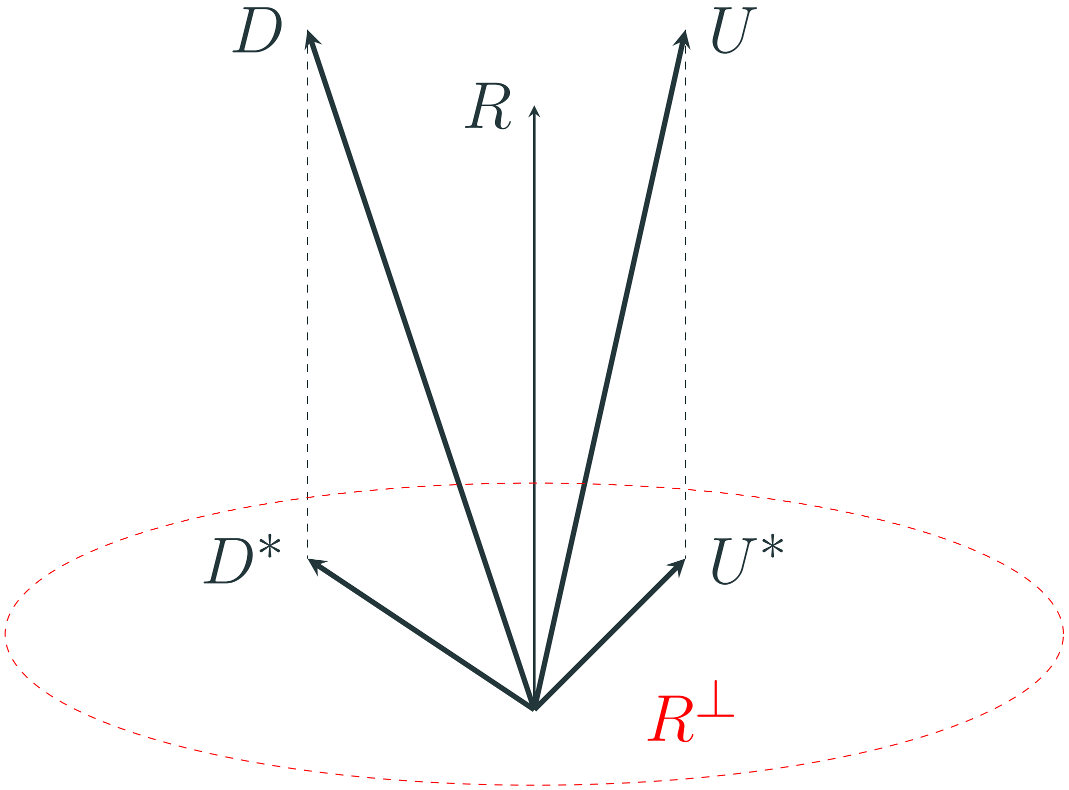
$$U^* = U - Best(U; R_1, R_2, \ldots, R_n),$$

$$D^* = D - Best(D; R_1, R_2, \ldots, R_n).$$

Величины U^* и D^* — это очищенные версии U и D.

$$\mathrm{Cov}(U^*, R_i) = 0, \quad \mathrm{Cov}(D^*, R_i) = 0.$$

Два угла на графике



$$\cos \measuredangle U D = \operatorname{Corr}(U, D), \quad \cos \measuredangle U^* D^* = \operatorname{pCorr}(U, D; R)$$

PACF

Определение

Для стационарного процесса (y_t) функцию

$$\varphi_{kk} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+k}; y_{t+1}, \ldots, y_{t+k-1}).$$

называют частной автокорреляционной.

ACF и PACF: интуиция

Для стационарного процесса!

- ACF:

$$\rho_k = \mathrm{Corr}(y_t, y_{t+k}).$$

  Общая сила связи y_t и y_{t+k}.

- PACF:

$$\varphi_{kk} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+k}; y_{t+1}, \ldots, y_{t+k-1}).$$

  Сила связи y_t и y_{t+k} при разорванных связях через промежуточные наблюдения.

Почему двойной индекс?

$$\varphi_{33} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+3}; y_{t+1}, y_{t+2}).$$

$$\varphi_{23} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+2}; y_{t+1}, y_{t+3}).$$

$$\varphi_{13} = \mathrm{pCorr}(y_t, y_{t+1}; y_{t+2}, y_{t+3}).$$

Выборочная PACF через остатки

Корреляция остатков

$PACF_4$ — выборочная корреляция между остатками a_t и остатками b_t.

a_t — остатки из регрессии

$$y_t \text{ на } 1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}.$$

b_t — остатки из регрессии

$$y_{t-4} \text{ на } 1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}.$$

Выборочная PACF через коэффициент

Оценка коэффициента

$PACF_4$ — оценка последнего коэффициента в множественной регрессии:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \ldots + \hat{\beta}_4 y_{t-4}, \quad PACF_4 = \hat{\beta}_4.$$

Выборочная и истинная PACF

- Истинная PACF есть только у стационарного процесса.
- Выборочную PACF можно посчитать у любого процесса.
- По выборочной PACF иногда можно судить о стационарности.
- Оба способа дают состоятельные оценки для стационарного процесса.
- Способ с выборочной корреляцией остатков гарантирует числа из отрезка $[-1; 1]$.

Частная корреляция: итоги

- Ковариация задаёт геометрию.
- Частная корреляция — корреляция очищенных величин.
- Во временных рядах очищаем два наблюдения от промежуточных.
- Оцениваем частную корреляцию.

МА процессы

MA процессы: план

- Определение и запись с лагами.
- Стационарность.
- ACF и PACF.
- Неединственность записи.

Лаговый оператор

Определение

Для процесса (y_t), определённого при $t \in \mathbb{Z}$, лагированным процессом Ly_t называют ту же последовательность величин со сдвинутым индексом,

$$Ly_t = y_{t-1}.$$

$$L^2 y_t = L \cdot L \cdot y_t = L \cdot y_{t-1} = y_{t-2}.$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L) y_t.$$

$$\Delta_{12} y_t = y_t - y_{t-12} = (1 - L^{12}) y_t.$$

MA процесс

Определение

Процесс (y_t), который можно представить в виде

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_q u_{t-q},$$

где $\alpha_q \neq 0$ и (u_t) — белый шум, называют $MA(q)$ процессом.

MA — Moving Average — скользящее среднее.

Пример $MA(1)$ процесса:

$$y_t = 5 + u_t + 0.3 u_{t-1},$$

где (u_t) — некоторый белый шум.

Нормировка коэффициента при u_t к единице.

Запись с лагами

MA с лаговым полиномом

Процесс (y_t), который можно представить в виде

$$y_t = \mu + P(L)u_t,$$

где $P(L)$ — многочлен степени q от лага L с $P(0) = 1$, а (u_t) — белый шум, называют $MA(q)$ процессом.

Пример $MA(2)$ процесса:

$$y_t = 5 + (1 - 0.2L + 0.3L^2)u_t,$$

где (u_t) — белый шум.

Стационарность MA

Теорема

Любой $MA(q)$ процесс стационарен.

Доказательство на примере

$$\mathbb{E}(5 + u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2}) = 5$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(5 + u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2}, \\ 5 + u_{t+k} + 0.6u_{t+k-1} + 0.2u_{t+k-2}) = \gamma_k\end{aligned}$$

Ковариация для (u_t) определяется совпадающими индексами.

При изменении t совпадающие индексами пары те же.

ACF

Теорема

У $MA(q)$ процесса теоретическая автокорреляция ρ_k равна нулю при $k > q$

Доказательство

Считаем $\gamma_3 = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+3})$ для $MA(2)$:

$$\gamma_3 = \mathrm{Cov}(5+u_t+0.6u_{t-1}+0.2u_{t-2}, 5+u_{t+3}+0.6u_{t+3-1}+0.2u_{t+3-2})$$

Нет совпадающих индексов у белого шума!

Побочный результат: для $MA(q)$ процесса $\rho_q \neq 0$.

PACF

Теорема

У $MA(q)$ процесса теоретическая частная автокорреляция φ_{kk} экспоненциально быстро сходится к нулю.

$$|\varphi_{kk}| < b_0 \cdot r^k, \text{ где } r \in (0;1).$$

ACF и прогнозы

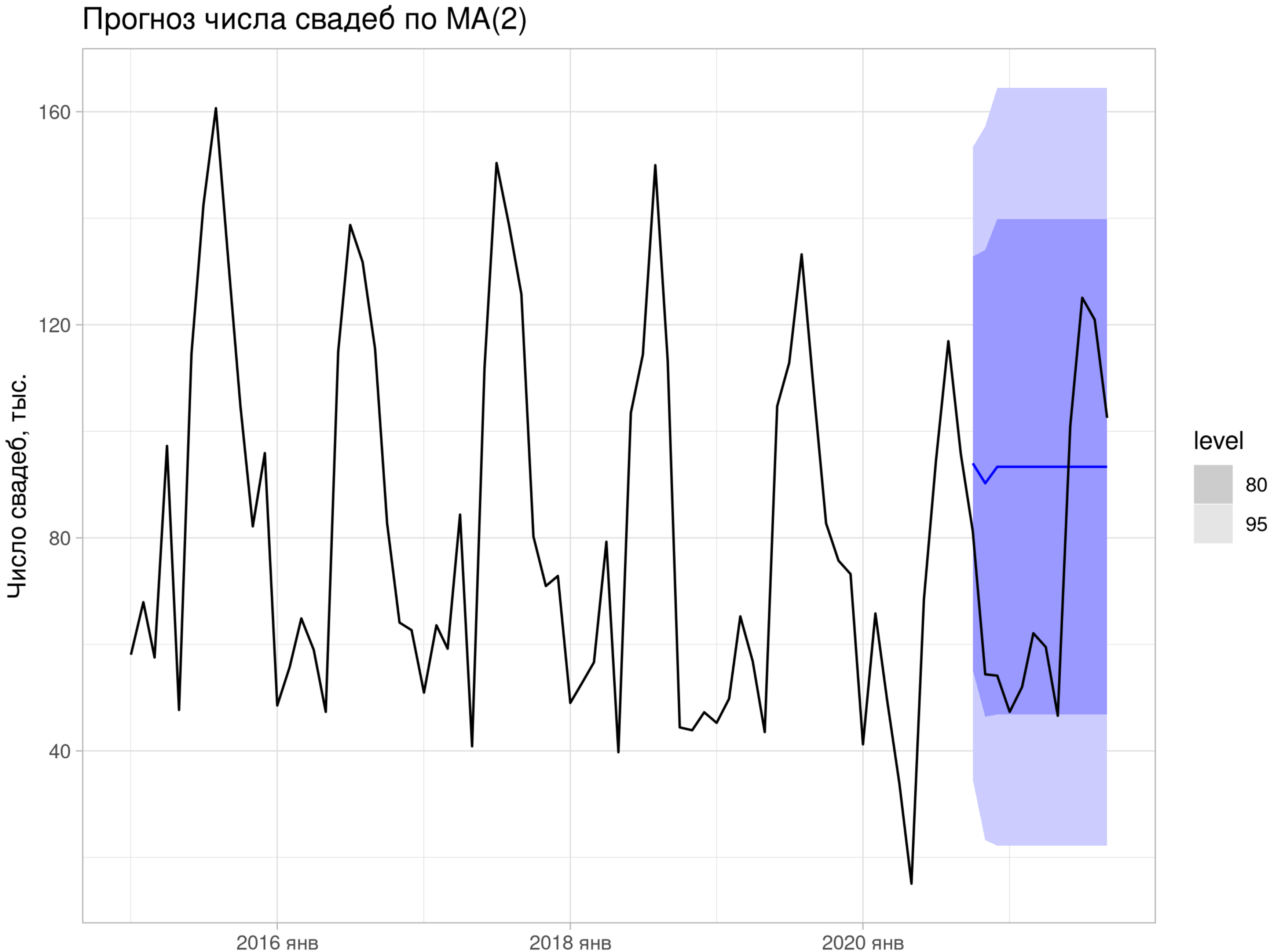
Традиционно $MA(q)$ процесс оценивают предполагая совместную нормальность (y_t).

Из нулевой $\rho_k = 0$ при $k > q$ следует независимость y_t и y_{t+k}.

Прогнозы больше, чем на q шагов вперёд, совершенно одинаковые.

$$(y_{T+q+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim (y_{T+q+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim (y_{T+q+3} \mid \mathcal{F}_T) \sim \ldots$$

Прогнозы для $MA(2)$



А корректно ли определение?

Нюанс: (y_t) — наблюдаемый ряд, (u_t) — единорог.

Машенька: этот y_t — $MA(1)$ процесс.

Вовочка: этот y_t — $MA(2)$ процесс.

Так не бывает!

Однако!

Машенька: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + u_t + 0.5u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 4.$$

Вовочка: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 1.$$

Здесь нет противоречия: (u_t) — единорог!

Противоречия нет

Машенька: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + \nu_t + 0.5\nu_{t-1}, \quad \sigma^2_\nu = 4.$$

Вовочка: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}, \quad \sigma^2_u = 1.$$

Связь (u_t) и (ν_t):

$$(1 + 0.5L)\nu_t = (1 + 2L)u_t.$$

MA процессы: итоги

- $MA(q)$ — взвешивание нескольких белых шумов.
- $MA(q)$ — стационарный процесс.
- ACF резко зануляется, $PACF$ стремится к нулю.
- Неединственность записи.

$MA(\infty)$

$MA(\infty)$: план

- Определение.
- Существование бесконечных сумм.
- Стационарность.

$MA(\infty)$

Определение

Процесс (y_t), который можно представить в виде

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots,$$

где (u_t) — белый шум, бесконечное количество $\alpha_i \neq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$, называется $MA(\infty)$ процессом.

$MA(\infty)$:

$$y_t = 5 + u_t + 0.5u_{t-1} + 0.5^2 u_{t-2} + 0.5^3 u_{t-3} + \ldots$$

А так нельзя:

$$y_t = 5 + u_t + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{t-1} + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{t-2} + \frac{1}{\sqrt{4}} u_{t-3} + \ldots$$

Сходимости

Теорема

Если $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$ и (u_t) — стационарный процесс с нулевым ожиданием, то последовательность частичных сумм y_t^q вида

$$y_t^q = \mu + \sum_{i=0}^{q} \alpha_i u_{t-i}$$

сходится при $q \to \infty$ в среднеквадратичном, по вероятности и по распределению.

Нюанс: сходимость взвешенной суммы гарантирована для стационарного (u_t).

Бонус

…и получающийся процесс (y_t) стационарен.

Виды сходимости: $q \to \infty$

$y_t^q \to y_t$ в среднеквадратичном

$$\mathbb{E}((y_t - y_t^q)^2) \to 0.$$

$y_t^q \to y_t$ по вероятности

$$\mathbb{P}(|y_t - y_t^q| > \varepsilon) \to 0 \text{ для любого числа } \varepsilon > 0.$$

$y_t^q \to y_t$ по распределению

$$\mathbb{P}(y_t^q \leq c) \to \mathbb{P}(y_t \leq c)$$

в точках непрерывности функции $F(c) = \mathbb{P}(y_t \leq c)$.

Теорема Вольда

Теорема

Если (y_t) — стационарный процесс, то он представим в виде:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_{t-i} + r_t,$$

где

- (u_t) — белый шум,
- $\sum \alpha_i^2 < \infty$,
- r_t — линейно предсказуемый случайный процесс,
- $\mathrm{Cov}(u_t, r_t) = 0$.

Ахтунг: deterministic часто ошибочно переводят как последовательность констант.

Предсказуемый процесс

Правильное определение

Процесс (r_t) называется линейно предсказуемым, если

- (r_t) стационарен,
- $r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \beta_2 r_{t-2} + \ldots + \beta_p r_{t-p}$.

$MA(\infty)$: плюсы

- Стационарный процесс.
- Богатая структура корреляций ρ_k.
- Практически любой стационарный процесс.

$MA(\infty)$: проблема

Оценить невозможно: бесконечное число параметров α_i.

Решение: введём ограничения на α_i!

$MA(\infty)$: итоги

- Быстро стремящиеся к нулю коэффициенты.
- Стационарный процесс.
- Пока не ясно как оценивать.

Условие обратимости

Условие обратимости: план

- Два варианта условия.
- Единственность записи.
- Возможность поймать единорога.

Помним о проблеме!

Машенька: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + u_t + 0.5u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 4.$$

Вовочка: этот y_t — $MA(1)$ процесс с уравнением

$$y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 1.$$

Хотим единственной формы записи для одного $MA(q)$ процесса.

Лаговый полином $MA(q)$ части

Рассмотрим запись

$$y_t = 5 + u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2},$$

представим в виде

$$y_t = 5 + (1 + 0.6L + 0.2L^2)u_t.$$

Лаговый многочлен:

$$P(L) = 1 + 0.6L + 0.2L^2.$$

Характеристический полином $MA(q)$ части

Рассмотрим запись

$$y_t = 5 + u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2},$$

оставим только белый шум

$$u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2},$$

подставим геометрическую прогрессию $u_t = \lambda^t$ и сократим

$$\lambda^2 + 0.6\lambda + 0.2.$$

Характеристический многочлен:

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 0.6\lambda + 0.2.$$

Связь многочленов

$$y_t = 5 + u_t + 0.6u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$$

Теоремка

$$P(x) = x^q \cdot \phi(1/x)$$

Ахтунг: путаница в названиях!

$P(L) = 1 + 0.6L + 0.2L^2$ — лаговый многочлен,

$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 0.6\lambda + 0.2$ — характеристический.

Условие обратимости

Характеристический вариант

Уравнение $MA(q)$ процесса удовлетворяет условию обратимости, если у характеристического многочлена $\phi(\lambda)$ все корни $|\lambda_i| < 1$.

Лаговый вариант

Уравнение $MA(q)$ процесса удовлетворяет условию обратимости, если у лагового многочлена $P(L)$ все корни $|\ell_i| > 1$.

Пример обратимой записи $MA(1)$

$$y_t = 5 + u_t + 0.5u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 4.$$

$$\lambda^1 + 0.5 \cdot \lambda^0$$

$$\phi(\lambda) = \lambda + 0.5$$

$$\lambda_1 = -0.5.$$

Пример необратимой записи $MA(1)$

$$y_t = 5 + u_t + 2u_{t-1}, \quad \sigma_u^2 = 1.$$

$$\lambda^1 + 2 \cdot \lambda^0$$

$$\phi(\lambda) = \lambda + 2$$

$$\lambda_1 = -2.$$

Нюанс

Разница

Стационарность — это свойство самого процесса (y_t).

Обратимость — это свойство записи процесса (уравнения) для (y_t).

Один и тот же процесс (y_t) можно записать с помощью обратимого $MA(q)$ уравнения и с помощью необратимого $MA(q)$ уравнения.

В этих уравнениях будут фигурировать разные единороги (u_t).

Единственность записи

Теорема

$MA(q)$ процесс допускает единственную обратимую запись.

Теорема

$MA(\infty)$ процесс допускает единственную запись.

Попутный бонус

Теорема

Если запись $MA(q)$ процесса обратима, то u_t можно представить в

$$u_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i y_{t-i},$$

где $\sum |\pi_i| < \infty$.

Возможность примерно найти u_t иногда важна для интерпретации.

Условие обратимости: итоги

- Корни характеристического многочлена $|\lambda_i| < 1$.
- Корни лагового многочлена $|\ell_i| > 1$.
- $MA(\infty)$ имеет единственную запись.
- $MA(q)$ имеет единственную запись при обратимости.
- Возможность восстановить u_t.