

Временные ряды: компоненты и наивные модели

Данные и задачи

Данные и задачи: план

- Временные ряды — тип данных.

Данные и задачи: план

- Временные ряды — тип данных.
- Задачи для одного ряда.

Данные и задачи: план

- Временные ряды — тип данных.
- Задачи для одного ряда.
- Задачи для множества рядов.

Заговор рептилоидов

Математический анализ:

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Заговор рептилоидов

Математический анализ:

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Заговор рептилоидов

Математический анализ:

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Временные ряды — не ряды!

Что такое временной ряд?

Временной ряд

Последовательность наблюдений, упорядоченных во времени.

0, 0, 5, 7, 102, 53, 23.

Что такое временной ряд?

Временной ряд

Последовательность наблюдений, упорядоченных во времени.

$0, 0, 5, 7, 102, 53, 23.$

Временной ряд

Последовательность случайных величин, упорядоченных во времени.

$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_T.$

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.
- Восстановить отдельные наблюдения по агрегированным.

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.
- Восстановить отдельные наблюдения по агрегированным.
- Обнаружить момент разладки.

Задачи для одного ряда

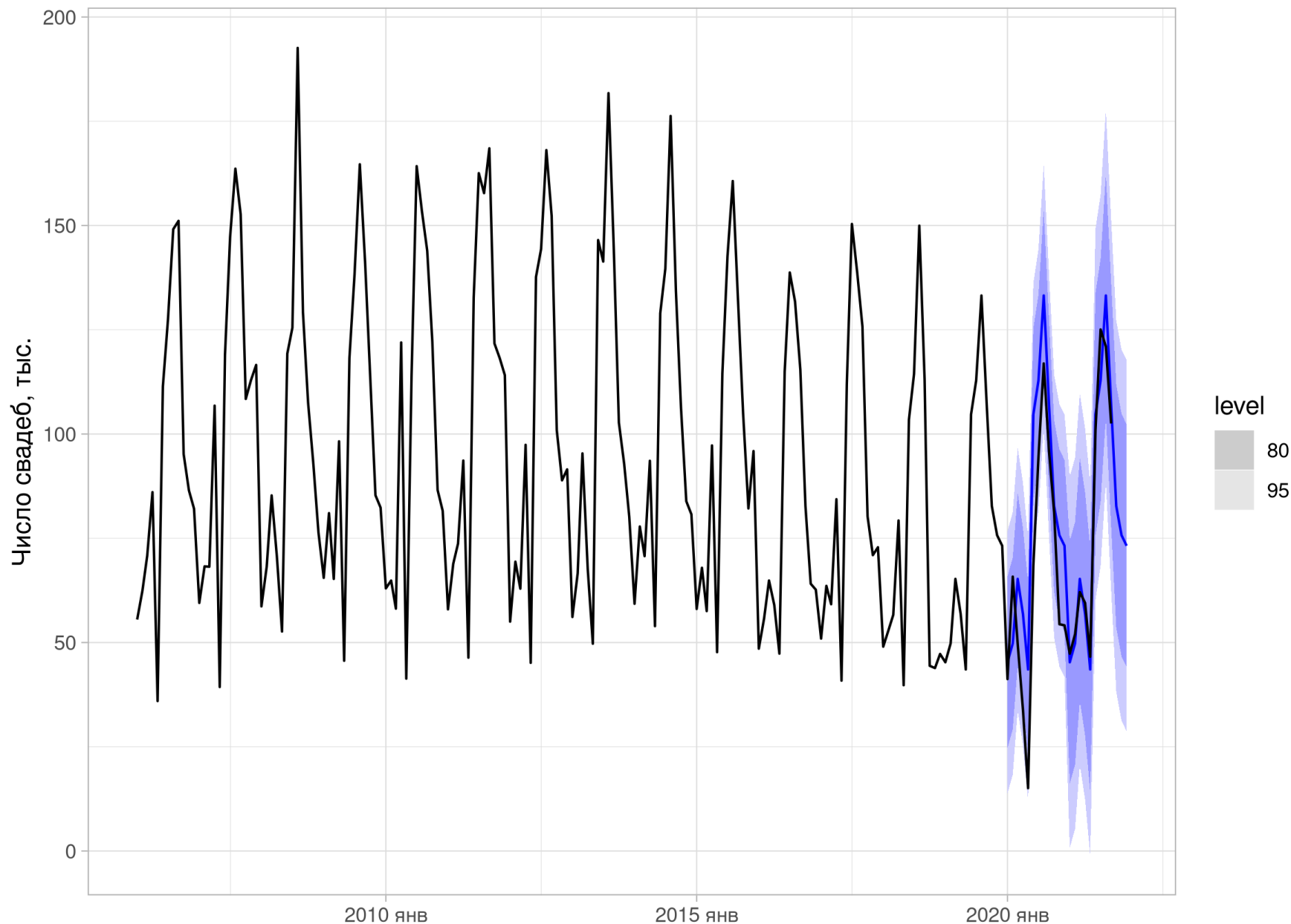
- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.
- Восстановить отдельные наблюдения по агрегированным.
- Обнаружить момент разладки.
- Выделить составляющие ряда.

Задачи для одного ряда

- Спрогнозировать следующие значения.
- Восстановить пропущенные значения в середине ряда.
- Восстановить отдельные наблюдения по агрегированным.
- Обнаружить момент разладки.
- Выделить составляющие ряда.
- ...

Прогнозируем

Сезонный наивный прогноз числа свадеб на 2 года



Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.

Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.

Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.

Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.
- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.

Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.
- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.

Задачи для множества ряда

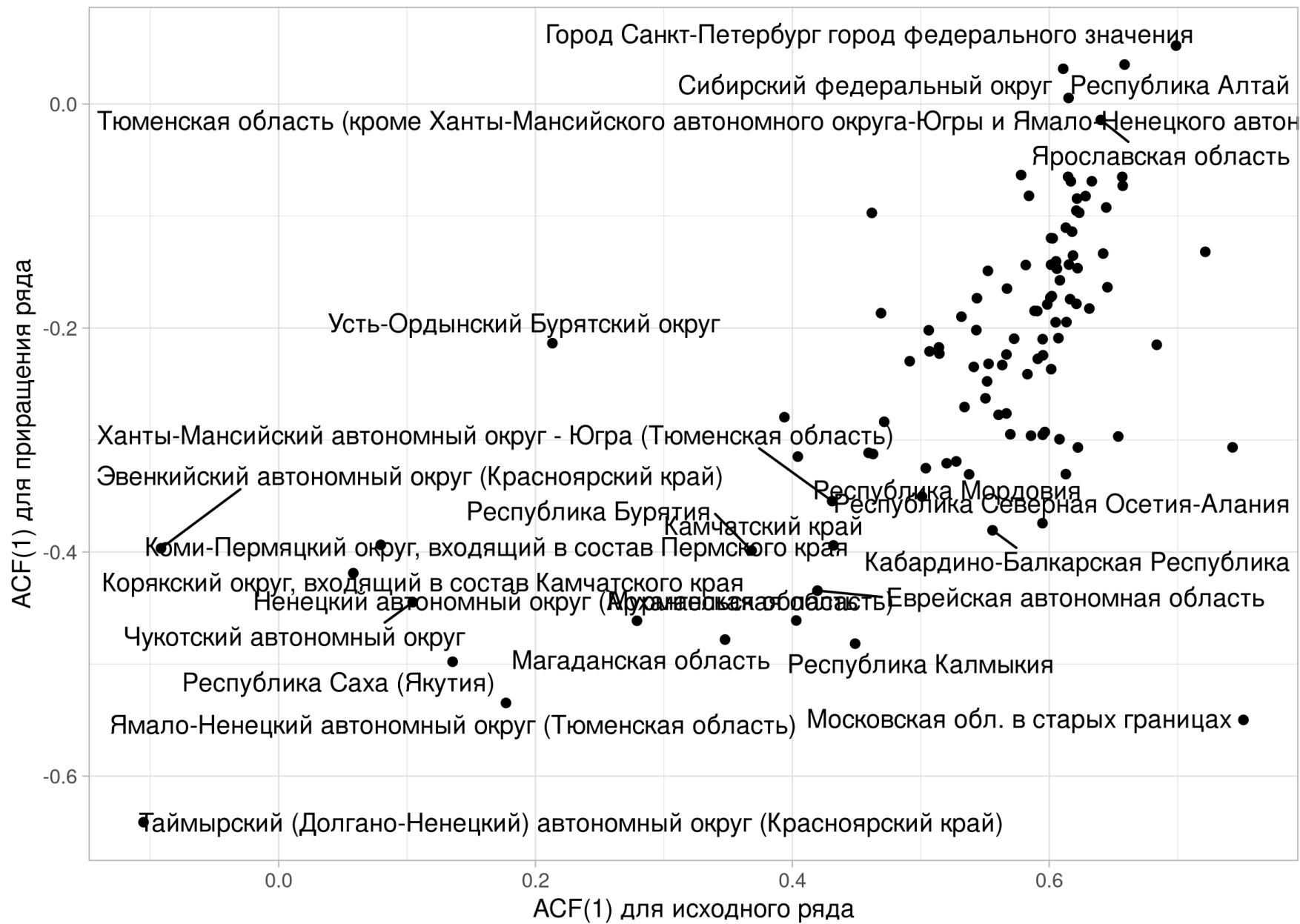
- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.
- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Задачи для множества ряда

- Использовать дополнительные ряды при изучении целевого ряда.
- Понять, связаны ли ряды между собой.
- Измерить причинно-следственные связи.
- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.
- ...

Измеряем близость рядов

Близость регионов России по динамике числа свадеб



Модели и алгоритмы

Модели

- Явные предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .

ETS, ARIMA, ORBIT, PROPHET, ...

Модели и алгоритмы

Модели

- Явные предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .
- Метод оценивания: максимальное правдоподобие, байесовский подход.

ETS, ARIMA, ORBIT, PROPHET, ...

Модели и алгоритмы

Модели

- Явные предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .
- Метод оценивания: максимальное правдоподобие, байесовский подход.
- Точечные и интервальные прогнозы, проверка гипотез.

ETS, ARIMA, ORBIT, PROPHET, ...

Модели и алгоритмы

Алгоритмы

- Размытые предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .

STL, градиентный бустинг, случайный лес, ...

Модели и алгоритмы

Алгоритмы

- Размытые предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .
- Особая инструкция.

STL, градиентный бустинг, случайный лес, ...

Модели и алгоритмы

Алгоритмы

- Размытые предположения про величины y_1, y_2, \dots, y_T .
- Особая инструкция.
- Точечные результаты без доверительных интервалов.

STL, градиентный бустинг, случайный лес, ...

Фокус курса

Прогнозирование одномерных рядов с помощью моделей.

Компоненты ряда

Компоненты ряда: план

- Тренд, цикличность и сезонность.

Компоненты ряда: план

- Тренд, цикличность и сезонность.
- Аддитивное и мультипликативное разложение.

Компоненты ряда: план

- Тренд, цикличность и сезонность.
- Аддитивное и мультипликативное разложение.
- Откуда взять формальное определение?

Умение видеть единорогов

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Умение видеть единорогов

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Тренд — плавно изменяющаяся составляющая ряда.

Умение видеть единорогов

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Тренд — плавно изменяющаяся составляющая ряда.

Сезонная составляющая — составляющая с чёткой периодичностью и стабильной интенсивностью.

Умение видеть единорогов

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Тренд — плавно изменяющаяся составляющая ряда.

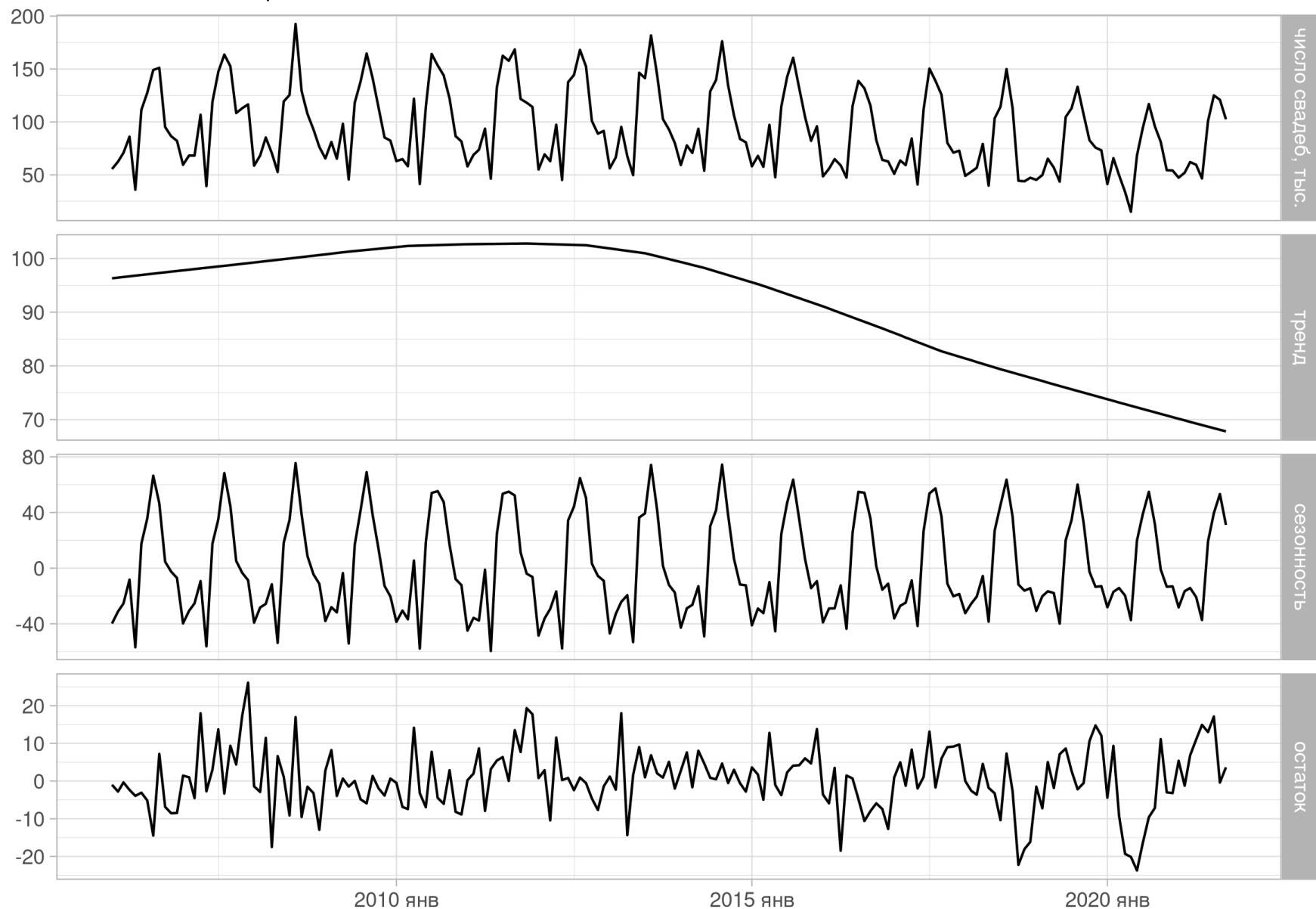
Сезонная составляющая — составляющая с чёткой периодичностью и стабильной интенсивностью.

Случайная компонента (остаток) — всё остальное.

Тренд, сезонность и остаток

STL разложение числа свадеб в России

Число свадеб = тренд + сезонность + остаток



Строгое определение?

Строгое определение?

Единого строгого определения **не** будет!

Строгое определение?

Единого строгого определения **не** будет!

Некоторые модели и алгоритмы формально **определяют** данные составляющие.

Циклическая составляющая

Иногда ряд раскладывают дальше

$$y_t = trend_t + cycle_t + seas_t + remainder_t$$

Циклическая составляющая

Иногда ряд раскладывают дальше

$$y_t = trend_t + cycle_t + seas_t + remainder_t$$

Циклическая составляющая — составляющая с плавающей периодичностью и нестабильной интенсивностью.

Циклическая составляющая

Иногда ряд раскладывают дальше

$$y_t = trend_t + cycle_t + seas_t + remainder_t$$

Циклическая составляющая — составляющая с плавающей периодичностью и нестабильной интенсивностью.

Тренд (в узком смысле) — плавно изменяющаяся монотонная составляющая ряда.

Аддитивное и мультипликативное разложение

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Аддитивное и мультипликативное разложение

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Мультипликативное разложение ряда:

$$y_t = trend_t \cdot seas_t \cdot remainder_t.$$

Аддитивное и мультипликативное разложение

Аддитивное разложение ряда:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Мультипликативное разложение ряда:

$$y_t = trend_t \cdot seas_t \cdot remainder_t.$$

Превращаем одно в другое:

$$\ln y_t = \ln trend_t + \ln seas_t + \ln remainder_t.$$

Какие единороги лучше?

Формальное определение составляющих **зависит от модели.**

Какие единороги лучше?

Формальное определение составляющих **зависит от модели**.

Алгоритм STL: одно разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Какие единороги лучше?

Формальное определение составляющих **зависит от модели**.

Алгоритм STL: одно разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Модель ETS(AAA): другое разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Какие единороги лучше?

Формальное определение составляющих **зависит от модели**.

Алгоритм STL: одно разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Модель ETS(AAA): другое разложение

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Важно понимать **цель построения** разложения.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.
- Для **прогнозирования** ряда с помощью прогнозирования составляющих.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.
- Для **прогнозирования** ряда с помощью прогнозирования составляющих.
- Для получения **характеристик ряда**.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.
- Для **прогнозирования** ряда с помощью прогнозирования составляющих.
- Для получения **характеристик ряда**.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.
- Для **прогнозирования** ряда с помощью прогнозирования составляющих.
- Для получения **характеристик ряда**.

А характеристики зачем?

- Чтобы классифицировать новый ряд в один из заданных классов.

А зачем разложение?

- Интересно **само по себе**.
- Для **прогнозирования** ряда с помощью прогнозирования составляющих.
- Для получения **характеристик ряда**.

А характеристики зачем?

- Чтобы классифицировать новый ряд в один из заданных классов.
- Чтобы выявить в рядах неизвестные кластеры.

Компоненты ряда: итоги

- Тренд **плавно меняется** и включает циклическую составляющую.

Компоненты ряда: итоги

- Тренд **плавно меняется** и включает циклическую составляющую.
- Сезонная составляющая имеет **чёткую периодичность** и **стабильную амплитуду**.

Компоненты ряда: итоги

- Тренд **плавно меняется** и включает циклическую составляющую.
- Сезонная составляющая имеет **чёткую периодичность** и **стабильную амплитуду**.
- Точная формализация компонент **зависит от модели**.

Алгоритм STL

Алгоритм STL: план

- Локальная регрессия.

Алгоритм STL: план

- Локальная регрессия.
- Внешний цикл STL.

Алгоритм STL: план

- Локальная регрессия.
- Внешний цикл STL.
- Внутренний цикл STL.

Алгоритм STL: план

- Локальная регрессия.
- Внешний цикл STL.
- Внутренний цикл STL.
- Параметры STL.

STL

STL — Seasonal Trend decomposition with Loess.

STL — разложение на сезонность и тренд с использованием LOESS.

STL

STL — Seasonal Trend decomposition with Loess.

STL — разложение на сезонность и тренд с использованием LOESS.

LOESS — LOcal regrESSion.

LOESS — локальная линейная регрессия.

STL как чёрный ящик

На входе:

Ряд Y_t .

Параметры алгоритма $n_p, n_i, n_o, n_l, n_s, n_t$.

STL как чёрный ящик

На входе:

Ряд Y_t .

Параметры алгоритма $n_p, n_i, n_o, n_l, n_s, n_t$.

На выходе:

Разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

STL как чёрный ящик

На входе:

Ряд Y_t .

Параметры алгоритма $n_p, n_i, n_o, n_l, n_s, n_t$.

На выходе:

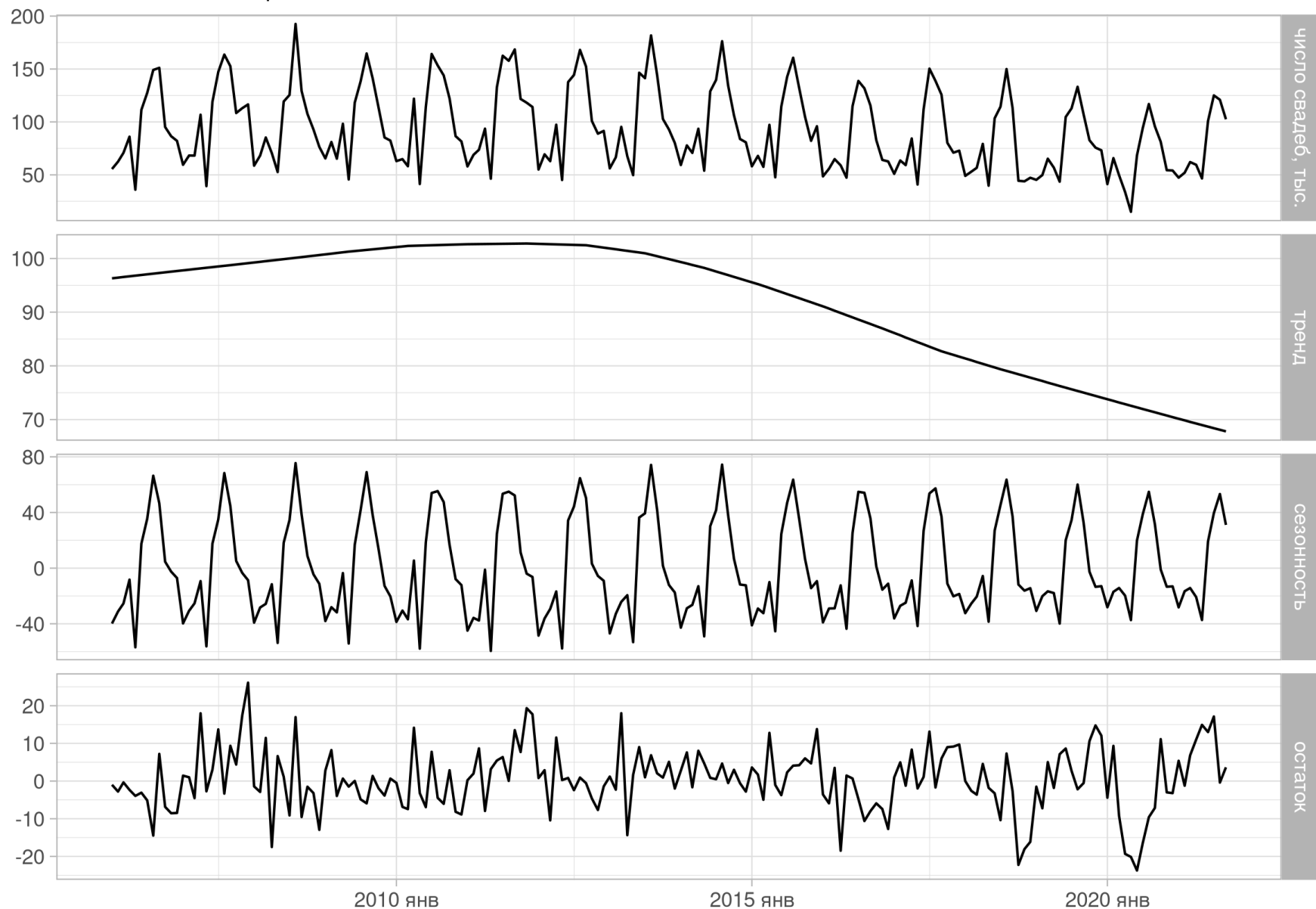
Разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Чёрный ящик **долго** настраивали.

STL: результат

STL разложение числа свадеб в России

Число свадеб = тренд + сезонность + остаток



LOESS

- Хотим построить прогноз для точки x .
- Находим **локальные оценки** $\hat{\beta}_1(x), \hat{\beta}_2(x)$.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x) (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i)^2$$

- Прогнозируем:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1(x) + \hat{\beta}_2(x)x.$$

LOESS

- Хотим построить прогноз для точки x .
- Находим **локальные оценки** $\hat{\beta}_1(x), \hat{\beta}_2(x)$.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x)(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i)^2$$

- Прогнозируем:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1(x) + \hat{\beta}_2(x)x.$$

Ядерная функция

- Функция $K_h(x_i - x)$ убывает с увеличением расстояния $|x_i - x|$;
- Параметр h отвечает за ширину окна сглаживания.

LOESS

- Хотим построить прогноз для точки x .
- Находим **локальные оценки** $\hat{\beta}_1(x), \hat{\beta}_2(x)$.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x) (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i)^2$$

- Прогнозируем:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1(x) + \hat{\beta}_2(x)x.$$

Ядерная функция

- Функция $K_h(x_i - x)$ убывает с увеличением расстояния $|x_i - x|$;
- Параметр h отвечает за ширину окна сглаживания.

Например, h — количество точек x_i рядом с x , которые мы учитываем.

Нюансы локальной регрессии

- Выбор **степени полинома**.

$$\min \sum_i K_h(x_i - x)(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i - \hat{\beta}_3 x_i^2)^2$$

- Выбор **ядерной функции**.

$$K_h(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left(-d^2/2h^2\right)$$

- Выбор **ширины окна** h .

STL с высоты птичьего полёта

Цель: разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Алгоритм содержит два цикла: **внешний** и **внутренний**.

1. Инициализируем $T_t = 0, R_t = 0$.

Внешний цикл:

STL с высоты птичьего полёта

Цель: разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Алгоритм содержит два цикла: **внешний** и **внутренний**.

1. Инициализируем $T_t = 0, R_t = 0$.

Внешний цикл:

2. Посчитаем вес каждого наблюдения, ρ_t .

На первом проходе $\rho_t = 1$ у каждого наблюдения.

На последующих проходах ρ_t отрицательно зависит от свежей величины R_t .

STL с высоты птичьего полёта

Цель: разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

Алгоритм содержит два цикла: **внешний** и **внутренний**.

1. Инициализируем $T_t = 0, R_t = 0$.

Внешний цикл:

2. Посчитаем вес каждого наблюдения, ρ_t .

На первом проходе $\rho_t = 1$ у каждого наблюдения.

На последующих проходах ρ_t отрицательно зависит от свежей величины R_t .

3. Обновим текущее разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$ с учётом весов ρ_t .

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

2. Разобьём детрендированный ряд на 12 подрядов.

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

2. Разобьём детрендированный ряд на 12 подрядов.
3. Сгладим каждый подряд по отдельности с помощью LOESS:

$$C^{jan} = LOESS_{\rho}(Y_{jan}^{det}), C^{feb} = LOESS_{\rho}(Y_{feb}^{det}), \dots$$

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

2. Разобьём детрендрованный ряд на 12 подрядов.
3. Сгладим каждый подряд по отдельности с помощью LOESS:

$$C^{jan} = LOESS_{\rho}(Y_{jan}^{det}), C^{feb} = LOESS_{\rho}(Y_{feb}^{det}), \dots$$

4. Выделяем низкочастотную составляющую (дважды скользящее среднее + LOESS):

$$L_t = LOESS(MA(MA(C_t)))$$

STL: внутренний цикл

Цель: обновить разложение $Y_t = T_t + S_t + R_t$.

1. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд:

$$Y_t^{det} = Y_t - T_t.$$

2. Разобьём детрендрованный ряд на 12 подрядов.
3. Сгладим каждый подряд по отдельности с помощью LOESS:

$$C^{jan} = LOESS_{\rho}(Y_{jan}^{det}), C^{feb} = LOESS_{\rho}(Y_{feb}^{det}), \dots$$

4. Выделяем низкочастотную составляющую (дважды скользящее среднее + LOESS):

$$L_t = LOESS(MA(MA(C_t)))$$

- 5-6. Получаем новые S_t^{new} и T_t^{new} .

STL: внутренний цикл

1-3. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд, разобьём на подряды и сгладим каждый подряд с помощью LOESS.

STL: внутренний цикл

- 1-3. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд, разобьём на подряды и сгладим каждый подряд с помощью LOESS.
4. Выделяем низкочастотную составляющую.

STL: внутренний цикл

- 1-3. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд, разобьём на подряды и сгладим каждый подряд с помощью LOESS.
4. Выделяем низкочастотную составляющую.
5. Удаляем низкочастотную составляющую, получаем **новую** сезонную компоненту:

$$S_t^{new} = C_t - L_t.$$

STL: внутренний цикл

- 1-3. Удалим из ряда ранее посчитанный тренд, разобьём на подряды и сгладим каждый подряд с помощью LOESS.
4. Выделяем низкочастотную составляющую.
5. Удаляем низкочастотную составляющую, получаем **новую** сезонную компоненту:

$$S_t^{new} = C_t - L_t.$$

6. Удаляем новую сезонность из исходного ряда и сглаживаем с помощью LOESS:

$$T_t^{new} = LOESS_{\rho}(Y_t - S_t^{new}).$$

уф!

Параметры STL

- n_p — периодичность сезонности, например, $n_p = 12$.

Параметры STL

- n_p — периодичность сезонности, например, $n_p = 12$.
- n_o — число проходов внешнего цикла.

Чем больше число n_o , тем слабее влияние выбросов.

Значение $n_o = 1$ часто достаточно.

Параметры STL

- n_p — периодичность сезонности, например, $n_p = 12$.
- n_o — число проходов внешнего цикла.

Чем больше число n_o , тем слабее влияние выбросов.
Значение $n_o = 1$ часто достаточно.

- n_i — число проходов внутреннего цикла.

Значение $n_i = 2$ часто достаточно для достижения сходимости.

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.

Что настроить?

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- n_s — сила сглаживания сезонных подрядов.

Что настроить?

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- n_s — сила сглаживания сезонных подрядов.
- n_t — сила сглаживания при выделении тренда на последнем шаге.

Что настроить?

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- n_s — сила сглаживания сезонных подрядов.
- n_t — сила сглаживания при выделении тренда на последнем шаге.

Что настроить?

1. Обязательно указать периодичность n_p .

Параметры сглаживания STL

- n_l — сила сглаживания низкочастотного фильтра.
- n_s — сила сглаживания сезонных подрядов.
- n_t — сила сглаживания при выделении тренда на последнем шаге.

Что настроить?

1. Обязательно указать периодичность n_p .
2. Возможно, поиграться с n_s .

STL: итоги

- LOESS — локальная регрессия.

STL: итоги

- LOESS — локальная регрессия.
- STL — хорошо проверенный временем алгоритм без модели.

STL: итоги

- LOESS — локальная регрессия.
- STL — хорошо проверенный временем алгоритм без модели.
- При желании можно поиграться с силами сглаживания.

Характеристики рядов

Характеристики рядов: план

- Выборочная автокорреляция.

Характеристики рядов: план

- Выборочная автокорреляция.
- Выборочная частная автокорреляция.

Характеристики рядов: план

- Выборочная автокорреляция.
- Выборочная частная автокорреляция.
- STL-характеристики.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Как решить?

1. Для каждого ряда сгенерировать **признаки**.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Как решить?

1. Для каждого ряда сгенерировать **признаки**.
2. К полученным признакам применить алгоритм для перекрестных данных.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Как решить?

1. Для каждого ряда сгенерировать **признаки**.
2. К полученным признакам применить алгоритм для перекрестных данных.

Задачи для множества рядов

- Классифицировать новый ряд в один из существующих классов.
- Понять, какие ряды близки к друг другу.
- Кластеризовать ряды на неизвестное множество кластеров.

Как решить?

1. Для каждого ряда сгенерировать **признаки**.
2. К полученным признакам применить алгоритм для перекрестных данных.

Классифицировать: с помощью случайного леса.

Измерить расстояние с помощью метрики Махаланобиса.

Кластеризовать с помощью иерархической кластеризации.

Создаём признаки

Два множества признаков:

- Выборочная ACF (автокорреляционная функция, AutoCorrelation Function).

Создаём признаки

Два множества признаков:

- Выборочная ACF (автокорреляционная функция, AutoCorrelation Function).
- Выборочная PACF (частная автокорреляционная функция, Partial ACF).

Создаём признаки

Два множества признаков:

- Выборочная ACF (автокорреляционная функция, AutoCorrelation Function).
- Выборочная PACF (частная автокорреляционная функция, Partial ACF).

Создаём признаки

Два множества признаков:

- Выборочная ACF (автокорреляционная функция, AutoCorrelation Function).
- Выборочная PACF (частная автокорреляционная функция, Partial ACF).

Из одного ряд получим:

$ACF_1, ACF_2, ACF_3, \dots$

$PACF_1, PACF_2, PACF_3, \dots$

Выборочная ACF

Оценим множество парных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}, \quad ACF_1 = \hat{\beta}_2;$$

Выборочная ACF

Оценим множество парных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}, \quad ACF_1 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad ACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

Выборочная ACF

Оценим множество парных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}, \quad ACF_1 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad ACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-k}, \quad ACF_k = \hat{\beta}_2;$$

Выборочная ACF

Оценим множество парных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}, \quad ACF_1 = \hat{\beta}_2;$$

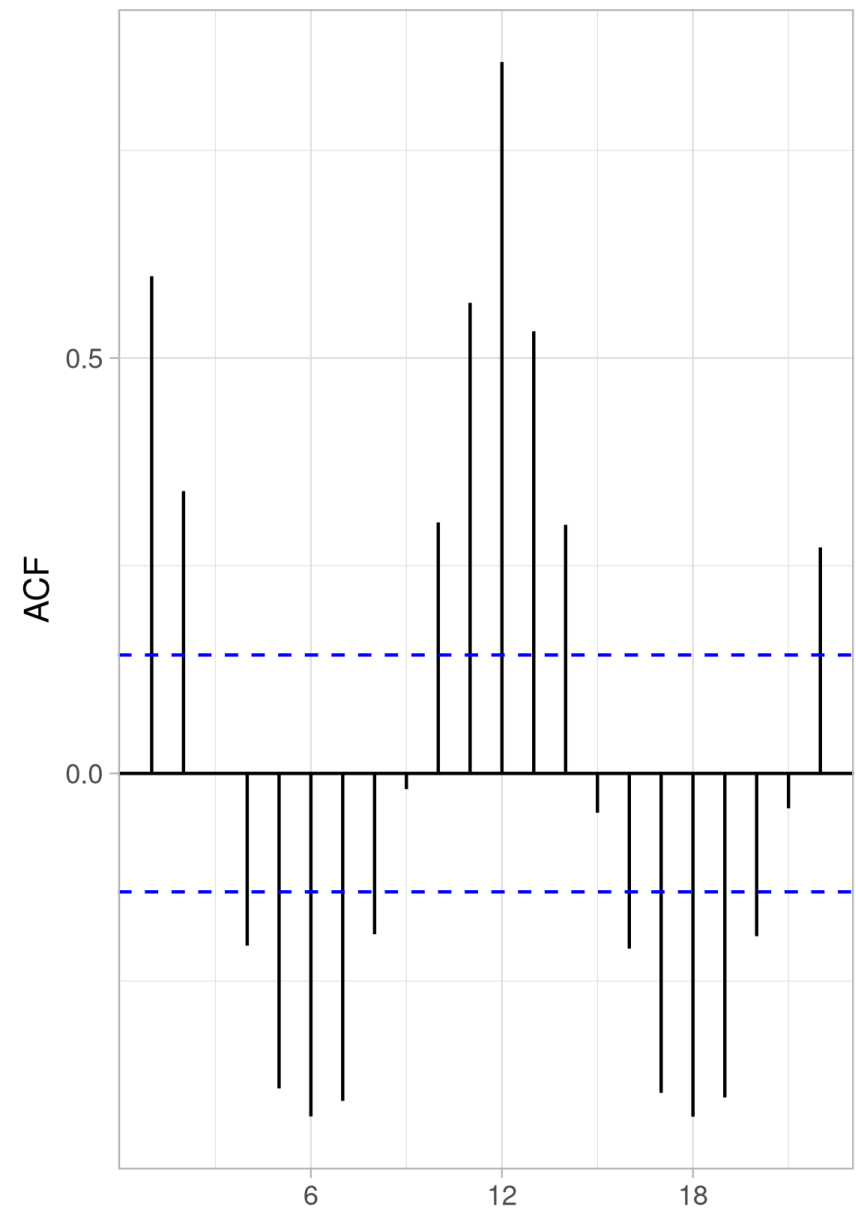
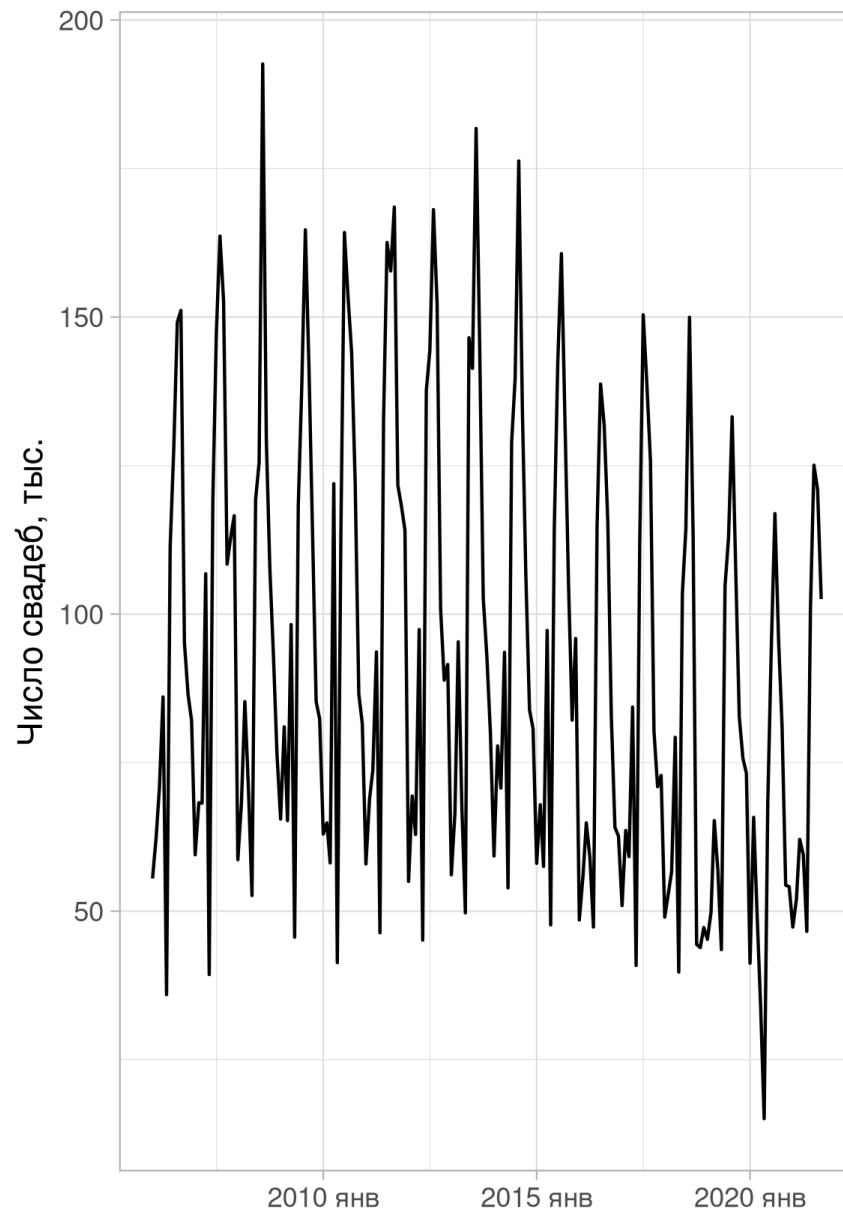
$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad ACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-k}, \quad ACF_k = \hat{\beta}_2;$$

Смысл ACF_2 : на сколько единиц в среднем y_t выше среднего, если y_{t-2} выше среднего на одну единицу.

Ряд и его ACF

График числа свадеб в России и ACF



Почему АСF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная АСF

ACF_k — выборочная корреляция между рядом y_t и рядом y_{t-k} .

Почему АСF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная АСF

ACF_k — выборочная корреляция между рядом y_t и рядом y_{t-k} .

Различие между определениями **мало**.

Выборочная PACF

Оценим множество множественных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1}, \quad PACF_1 = \hat{\beta}_1;$$

Выборочная PACF

Оценим множество множественных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1}, \quad PACF_1 = \hat{\beta}_1;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad PACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

Выборочная PACF

Оценим множество множественных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1}, \quad PACF_1 = \hat{\beta}_1;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad PACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\beta}_k y_{t-k}, \quad PACF_k = \hat{\beta}_k;$$

Выборочная PACF

Оценим множество множественных регрессий:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1}, \quad PACF_1 = \hat{\beta}_1;$$

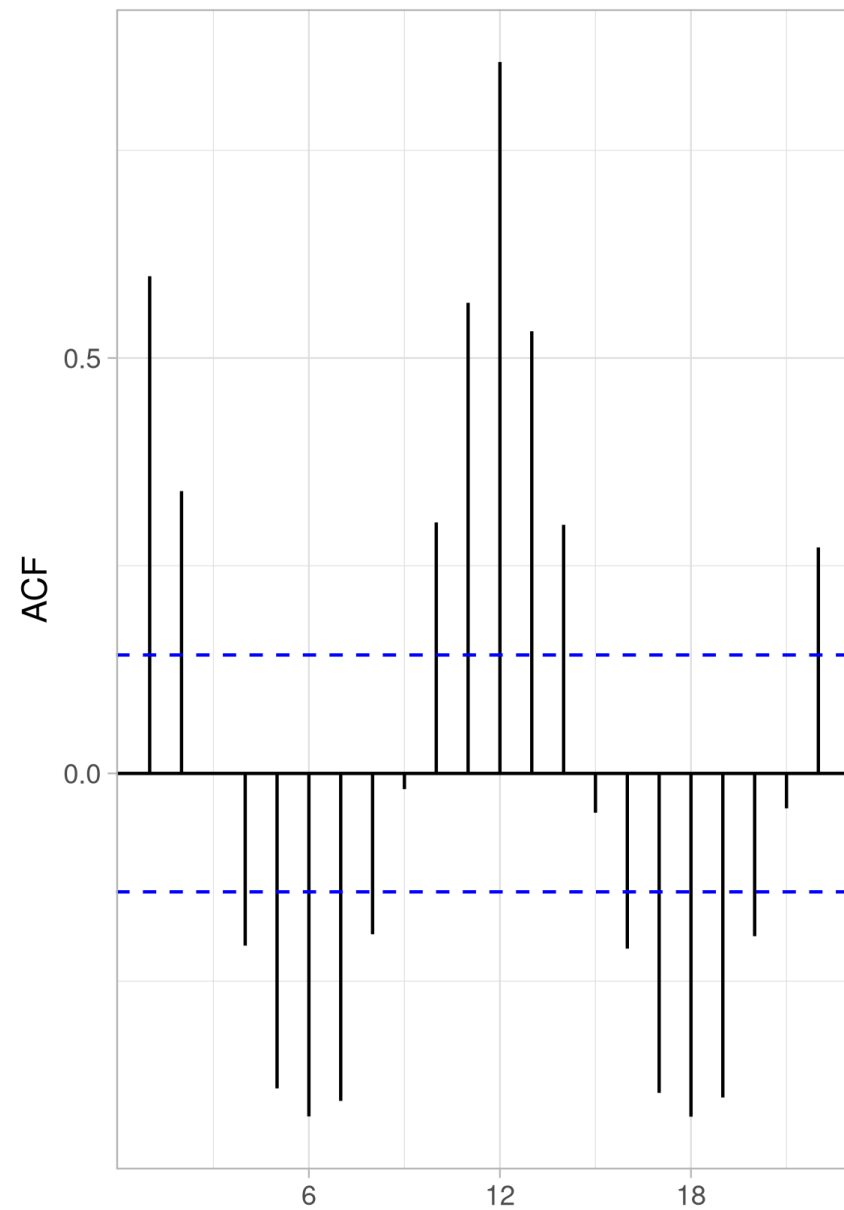
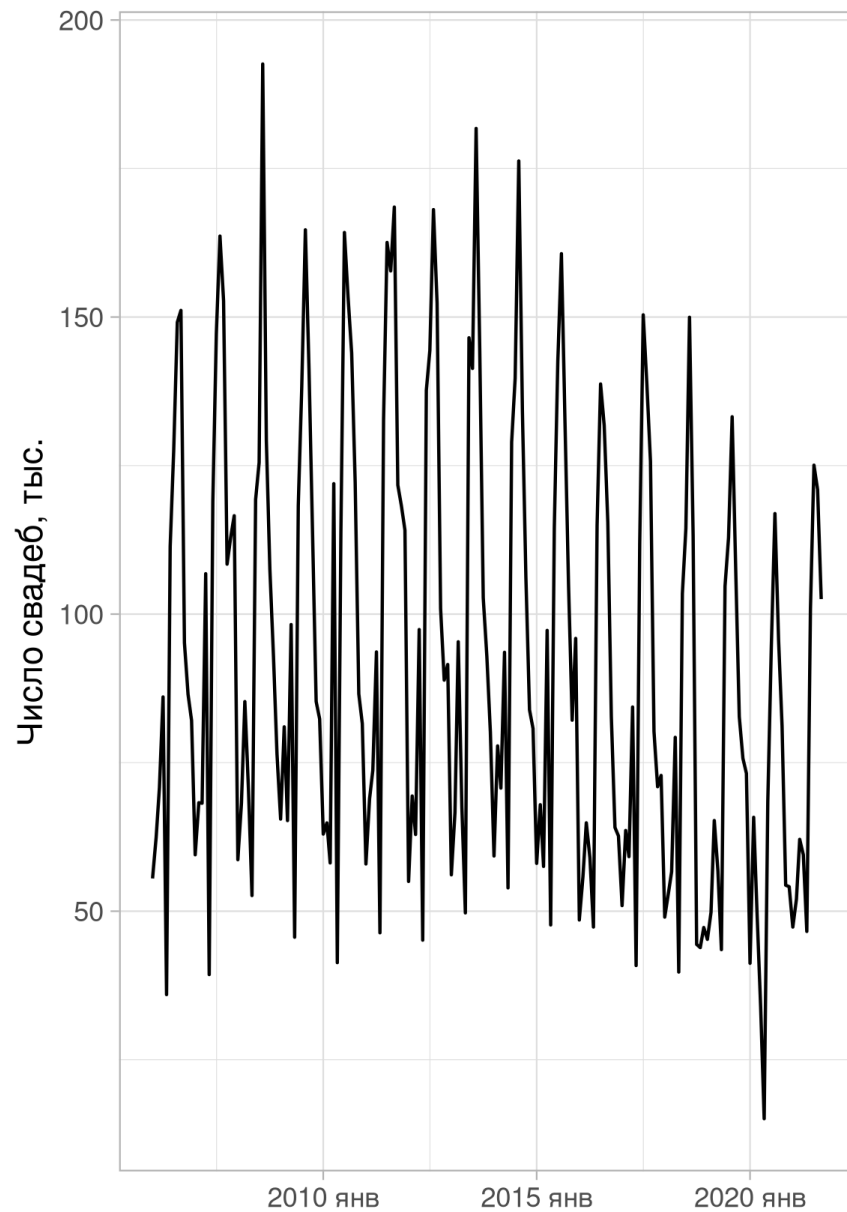
$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\beta}_2 y_{t-2}, \quad PACF_2 = \hat{\beta}_2;$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\beta}_k y_{t-k}, \quad PACF_k = \hat{\beta}_k;$$

Смысл $PACF_2$: на сколько единиц в среднем y_t выше среднего, если y_{t-2} выше среднего на одну единицу, а y_{t-1} на среднем уровне.

Ряд и его PACF

График числа свадеб в России и PACF



Почему PACF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная PACF

$PACF_4$ — выборочная корреляция между остатками a_t и остатками b_t .

a_t — остатки из регрессии

y_t на $1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}$.

b_t — остатки из регрессии

y_{t-4} на $1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}$.

Почему PACF — корреляция?

Классическое определение

Выборочная PACF

$PACF_4$ — выборочная корреляция между остатками a_t и остатками b_t .

a_t — остатки из регрессии

y_t на $1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}$.

b_t — остатки из регрессии

y_{t-4} на $1, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}$.

Различие между определениями **мало**.

STL-характеристики

На выходе:

$$y_t = T_t + S_t + R_t.$$

STL-характеристики

На выходе:

$$y_t = T_t + S_t + R_t.$$

Измерим:

- Выраженность тренда F_{trend} .
- Выраженность сезонности F_{seas} .

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Идея определения: При идеальном разложении с некоррелированными компонентами:

$$F_{trend} = \frac{sVar(trend)}{sVar(trend) + sVar(remainder)},$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Идея определения: При идеальном разложении с некоррелированными компонентами:

$$F_{trend} = \frac{sVar(trend)}{sVar(trend) + sVar(remainder)},$$

$$F_{seas} = \frac{sVar(seas)}{sVar(seas) + sVar(remainder)},$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

На практике:

- Выраженность тренда:

$$F_{trend} = \max \left\{ 1 - \frac{sVar(remainder)}{sVar(trend + remainder)}, 0 \right\}.$$

Выраженность тренда и сезонности

Получили разложение:

$$y_t = trend_t + seas_t + remainder_t.$$

На практике:

- Выраженность тренда:

$$F_{trend} = \max \left\{ 1 - \frac{sVar(remainder)}{sVar(trend + remainder)}, 0 \right\}.$$

- Выраженность сезонности:

$$F_{seas} = \max \left\{ 1 - \frac{sVar(remainder)}{sVar(seas + remainder)}, 0 \right\}.$$

Выраженность тренда и сезонности

Близость регионов России по динамике числа свадеб



Характеристики рядов: итоги

- ACF — коэффициенты в **парных** регрессиях или корреляции.

Характеристики рядов: итоги

- ACF — коэффициенты в **парных** регрессиях или корреляции.
- PACF — коэффициенты во **множественных** регрессиях или корреляции.

Характеристики рядов: итоги

- ACF — коэффициенты в **парных** регрессиях или корреляции.
- PACF — коэффициенты во **множественных** регрессиях или корреляции.
- STL позволяет измерить **выраженность тренда и сезонности** по сравнению с остаточной компонентой.

Простейшие модели

Простейшие модели: план

- Белый шум.

Простейшие модели: план

- Белый шум.
- Независимые наблюдения.

Простейшие модели: план

- Белый шум.
- Независимые наблюдения.
- Случайное блуждание.

Белый шум

Белый шум

Временной ряд u_t — белый шум, если:

- $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
- $\text{Var}(u_t) = \sigma^2$;
- $\text{Cov}(u_s, u_t) = 0$ при $s \neq t$.

Белый шум

Белый шум

Временной ряд u_t — белый шум, если:

- $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
 - $\text{Var}(u_t) = \sigma^2$;
 - $\text{Cov}(u_s, u_t) = 0$ при $s \neq t$.
-
- Составная часть всех моделей. Чаще всего белый шум — это, что отказались моделировать.

Белый шум

Белый шум

Временной ряд u_t — белый шум, если:

- $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
 - $\text{Var}(u_t) = \sigma^2$;
 - $\text{Cov}(u_s, u_t) = 0$ при $s \neq t$.
-
- Составная часть всех моделей. Чаще всего белый шум — это, что отказались моделировать.
 - Часто дополнительно предполагают **независимость** и **нормальность**.

Белый шум

Белый шум

Временной ряд u_t — белый шум, если:

- $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
- $\text{Var}(u_t) = \sigma^2$;
- $\text{Cov}(u_s, u_t) = 0$ при $s \neq t$.

- Составная часть всех моделей. Чаще всего белый шум — это, что отказались моделировать.
- Часто дополнительно предполагают **независимость** и **нормальность**.
- В белом шуме **черти водятся**.

ARCH, GARCH модели волатильности основаны на том, что u_t и u_s могут быть зависимы!

Независимые наблюдения

Модель

$$y_t = \mu + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Независимые наблюдения

Модель

$$y_t = \mu + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Оценки:

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{y}, \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{T}.$$

Независимые наблюдения

Модель

$$y_t = \mu + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$.

Оценки:

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{y}, \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{T}.$$

Интервальный прогноз на h шагов вперёд:

$$[\bar{y} - 1.96\hat{\sigma}; \bar{y} + 1.96\hat{\sigma}]$$

Случайное блуждание

Наивная модель

$$y_t = y_{t-1} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, задано стартовое y_1 .

Случайное блуждание

Наивная модель

$$y_t = y_{t-1} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, задано стартовое y_1 .

Переформулируем: $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = u_t$.

Случайное блуждание

Наивная модель

$$y_t = y_{t-1} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, задано стартовое y_1 .

Переформулируем: $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = u_t$. **Оценки:**

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (\Delta y_i - \overline{\Delta y})^2}{T - 1}.$$

Случайное блуждание

Наивная модель

$$y_t = y_{t-1} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, задано стартовое y_1 .

Переформулируем: $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = u_t$. **Оценки:**

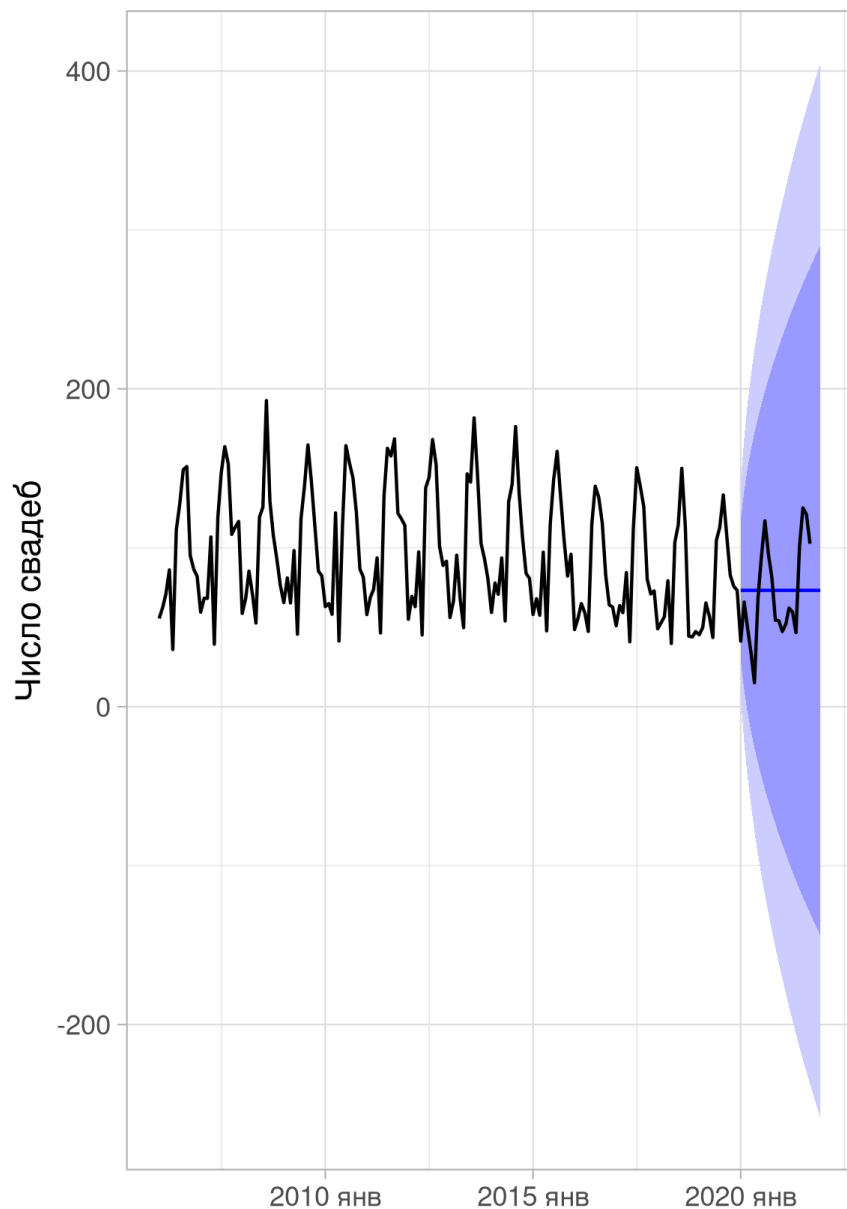
$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (\Delta y_i - \overline{\Delta y})^2}{T - 1}.$$

Интервальный прогноз на h шагов вперёд:

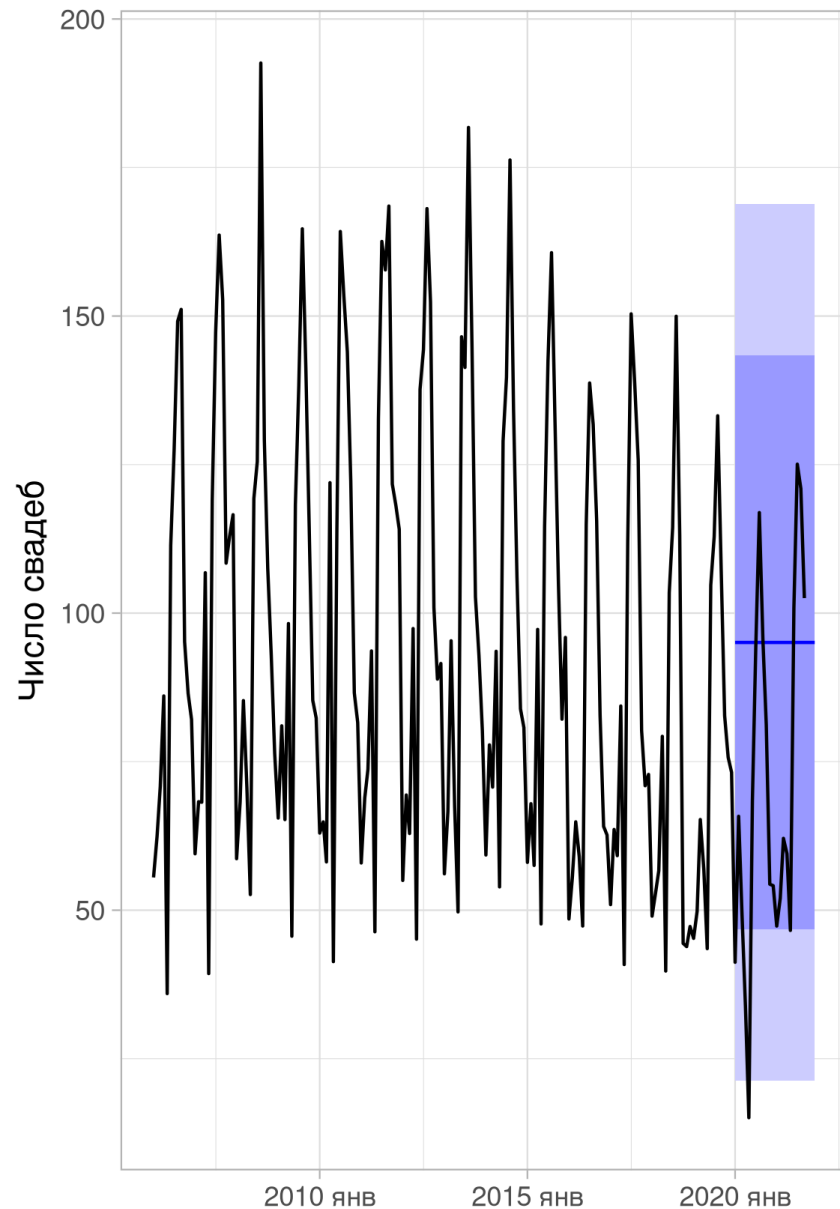
$$[y_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}; y_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}]$$

Первые прогнозы!

Случайное блуждание



Модель независимых наблюдений



Сезонное случайное блуждание

Сезонная наивная модель

$$y_t = y_{t-12} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, заданы y_1, \dots, y_{11} .

Сезонное случайное блуждание

Сезонная наивная модель

$$y_t = y_{t-12} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, заданы y_1, \dots, y_{11} .

Переформулируем: $y_t - y_{t-12} = \Delta_{12}y_t = u_t$.

Сезонное случайное блуждание

Сезонная наивная модель

$$y_t = y_{t-12} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, заданы y_1, \dots, y_{11} .

Переформулируем: $y_t - y_{t-12} = \Delta_{12}y_t = u_t$. **Оценки:**

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (\Delta_{12}y_i - \overline{\Delta_{12}y})^2}{T - 12}.$$

Сезонное случайное блуждание

Сезонная наивная модель

$$y_t = y_{t-12} + u_t,$$

где u_t — белый шум, $u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$, заданы y_1, \dots, y_{11} .

Переформулируем: $y_t - y_{t-12} = \Delta_{12}y_t = u_t$. **Оценки:**

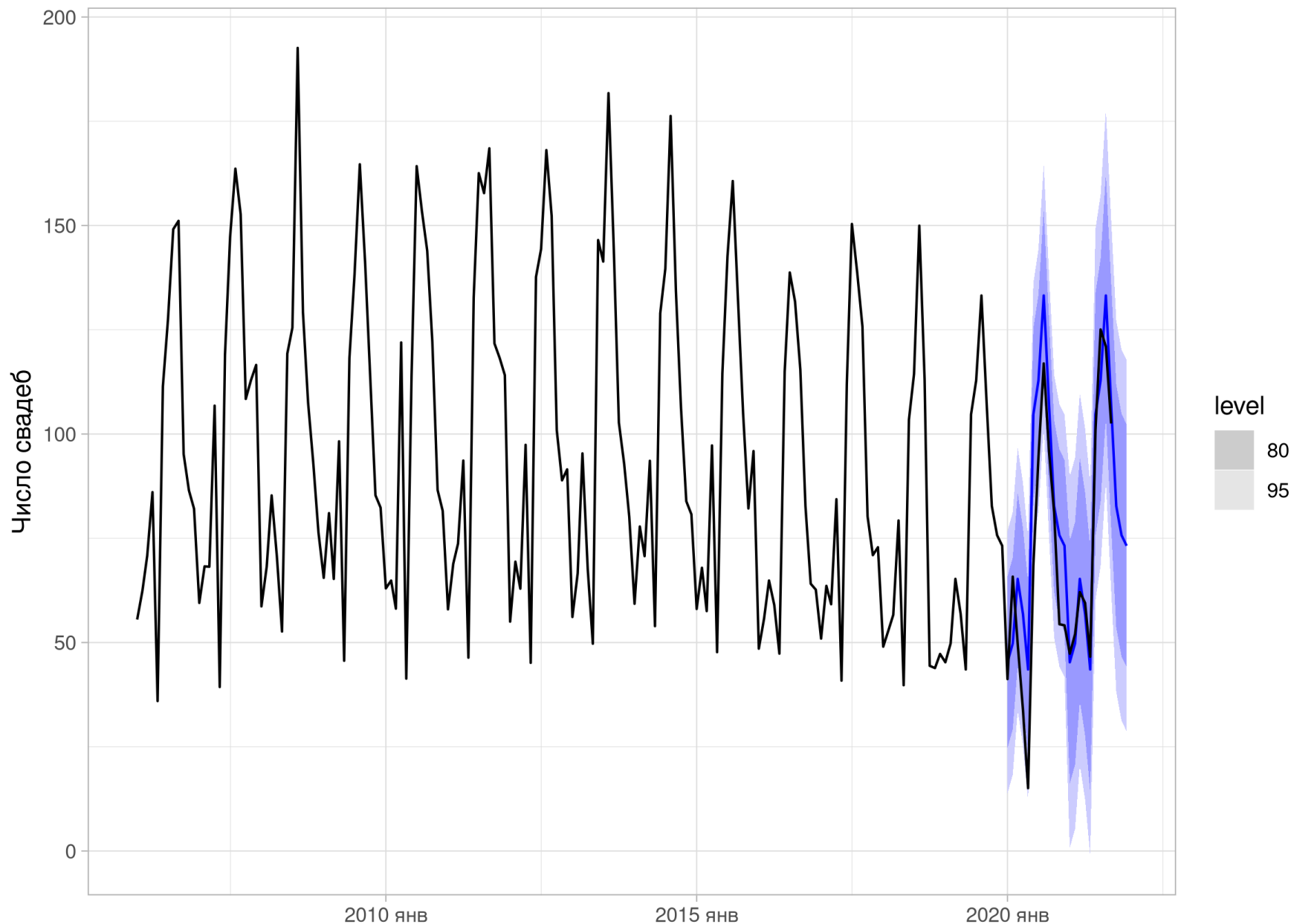
$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum (\Delta_{12}y_i - \overline{\Delta_{12}y})^2}{T - 12}.$$

Интервальный прогноз на h **сезонов** вперёд:

$$[y_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}; y_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{h}]$$

Уже неплохо!

Сезонный наивный прогноз числа свадеб на 2 года



Зачем нужны наивные модели?

- Идеи для сложных моделей.

Модели стационарных рядов похожи на модель независимых наблюдений.

Модели нестационарных рядов похожи на случайное блуждание.

Зачем нужны наивные модели?

- Идеи для сложных моделей.

Модели стационарных рядов похожи на модель независимых наблюдений.

Модели нестационарных рядов похожи на случайное блуждание.

- База для сравнения.

При оценке сложной модели очень важно иметь базу сравнения.

Зачем нужны наивные модели?

- **Идеи** для сложных моделей.

Модели **стационарных рядов** похожи на модель независимых наблюдений.

Модели **нестационарных рядов** похожи на случайное блуждание.

- **База для сравнения.**

При оценке сложной модели очень важно иметь базу сравнения.

- **Помощники** других моделей.

Можно **усреднить прогнозы** сложной модели и наивной сезонной!

Наивные модели: итоги

- Белый шум — то, что не охота моделировать.

Наивные модели: итоги

- Белый шум — то, что не охота моделировать.
- Независимые наблюдения и случайное блуждание.

Наивные модели: итоги

- Белый шум — то, что не охота моделировать.
- Независимые наблюдения и случайное блуждание.
- Идеи, составные части и помощники других моделей.

Наивные модели: итоги

- Белый шум — то, что не охота моделировать.
- Независимые наблюдения и случайное блуждание.
- Идеи, составные части и помощники других моделей.
- База для сравнения.