

Краткие правила: 120 минут, без прокторинга, можно использовать любые материалы. Благородные доны и доньи решают самостоятельно.

1. Вспомним  $ETS(AAN)$  модель, которая описывается системой уравнений

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2). \end{cases}$$

Для  $\ell_{100} = 30$ ,  $b_{100} = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\sigma^2 = 16$  постройте интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

2. Рассмотрим  $ETS(AAN)$  модель с  $\ell_0 = 30$ ,  $b_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\sigma^2 = 16$ . Известно, что  $y_1 = 32$ ,  $y_2 = 35$  и  $y_3 = 37$ .

Найдите сглаженные значения  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$ .

3. Для  $ETS(ANN)$  модели найдите  $E(y_t)$  и  $\text{Var}(y_t)$ . Найдите пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(y_t), \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(y_t).$$

4. Рассмотрим  $MA(2)$  процесс  $y_t = 5 + u_t + 0.3u_{t-1} + 0.5u_{t-2}$ , где  $(u_t)$  — белый шум с дисперсией 16.

(а) Является ли данный процесс стационарным?

(б) Найдите автокорреляционную функцию данного процесса.

(с) Найдите  $E(y_{t+1} \mid y_t, y_{t-1})$ .

5. Рассмотрим стационарный  $AR(1)$  процесс относительно белого шума  $(u_t)$  с уравнением

$$y_t = 5 + 0.3y_{t-1} + u_t.$$

(а) Найдите автокорреляционную и частную автокорреляционную функции.

(б) Найдите  $E(y_{t+1} \mid y_t, y_{t-1})$ .

(с) Приведите пример нестационарного процесса, также являющегося решением упомянутого уравнения.

6. Рассмотрим уравнение  $y_t = 3 + 0.5y_{t-1} - 0.06y_{t-2} + u_t - 0.2u_{t-1}$ , где  $(u_t)$  — белый шум.

(а) Запишите уравнение с помощью лаговых полиномов и разложите полиномы на сомножители.

(б) Присмотревшись пристальным взглядом к корням явно выпишите хотя бы одно стационарное решение этого уравнения. Является ли стационарное решение единственным?

(с) Найдите  $\text{Corr}(y_t, y_{t-k})$  для всех стационарных решений.