Модели экспоненциального сглаживания

Модель ETS(ANN)

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.
- ETS(ANN) как модель.

Модель ETS(ANN): план

- Историческая справка о ETS.
- ETS(ANN) как модель.
- Формулы для прогнозов.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.
- 2017: PROPHET

Историческая справка

- 1957-1960: Хольт и Винтерс придумали удачную формулу для прогнозирования.
- 2002: Роб Хиндман придумал статистические предпосылки для этой формулы.
- 2012: появился STAN — вероятностный язык программирования для байесовского оценивания.
- 2015: Славек Смыль описал обобщение ETS на STAN.
- 2017: PROPHET
- 2020: ORBIT

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

$$u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.}$$

Терминология ETS

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

u_t — случайная ошибка.

$$y_t = \ell_{t-1} + u_t;$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое значение } \ell_0;$$

$$u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.}$$

Параметры: α, σ^2, ℓ_0.

Смысл сокращения

ETS — Error, Trend, Seasonality (ошибка, тренд, сезонность).

Смысл сокращения

ETS — Error, Trend, Seasonality (ошибка, тренд, сезонность).

ANN — аддитивная ошибка, нет тренда, нет сезонности.

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Не узнали?

ETS(ANN) — это обобщение случайного блуждания.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Подставим $\alpha = 1$:

$$y_t = \ell_t = \ell_{t-1} + u_t.$$

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Основная идея: разложить правдоподобие в сумму.

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \ell_0, \sigma^2)$.

Оценивание

Используется метод максимального правдоподобия.

Основная идея: разложить правдоподобие в сумму.

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \ell_0, \sigma^2)$.

К сожалению, явных формул для оценок нет.

Прогнозируем

картинка с прогнозами ANN модели

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + u_{T+1}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

К счастью, есть рекуррентные формулы для прогнозов.

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + u_{T+1}$$

$$(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2)$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + u_{T+2} = \ell_T + \alpha u_{T+1} + u_{T+2}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + u_{T+2} = \ell_T + \alpha u_{T+1} + u_{T+2}$$

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

Предиктивный интервал

Закон распределения

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

превращается в

Предиктивный интервал

Закон распределения

$$(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T; \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

превращается в предиктивный интервал

$$[\hat{\ell}_T - 1.96\hat{\sigma}\sqrt{\hat{\alpha}^2 + 1}; \hat{\ell}_T + 1.96\hat{\sigma}\sqrt{\hat{\alpha}^2 + 1}].$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

А что же открыли в 1950х?

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0;
\end{cases}
$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

$$\hat{\ell}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{\ell}_{t-1}$$

А что же открыли в 1950х?

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$$

Простое экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{\ell}_1 = y_1$$

$$\hat{\ell}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{\ell}_{t-1}$$

$$\min_\alpha \sum (y_t - \hat{\ell}_t)^2;$$

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.
- Обобщение случайного блуждания.

ETS(ANN): итоги

- Формулы для экспоненциального сглаживания были придуманы давно.
- Статистическая модель ETS(ANN) появилась в 21 веке.
- Обобщение случайного блуждания.
- Зёрнышко огромного класса современных моделей.

ETS(AAN)

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!
- Формулы для прогнозов.

ETS(AAN): план

- Наконец-то настоящий тренд!
- Формулы для прогнозов.
- Немного подробностей о правдоподобии.

Настоящий тренд!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

u_t — случайная ошибка.

Настоящий тренд!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

u_t — случайная ошибка.

ETS(AAN):

A — аддитивная ошибка;

A — аддитивный тренд;

N — нет сезонности.

ETS(AAN): уравнения

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0;
\end{cases}
$$

ETS(AAN): уравнения

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Параметры: α, β, σ^2, ℓ_0, b_0.

ETS(AAN): прогнозируем

Картинка с прогнозами на 2 шага вперед

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + b_T + u_{T+1}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$y_{T+1} = \ell_T + b_T + u_{T+1}$$

$$(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + b_T; \sigma^2)$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + \\ + (b_T + \beta u_{T+1}) + u_{T+2}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + {} \\
+ (b_T + \beta u_{T+1}) + u_{T+2}
\end{aligned}
$$

$$
(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + 2b_T; \sigma^2((\alpha + \beta)^2 + 1))
$$

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

$$(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\ell_{t-1} + b_{t-1}; \sigma^2)$$

Детали правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$\ln L(y \mid \theta) = \ln L(y_1 \mid \theta) + \ln L(y_2 \mid y_1, \theta) + \ldots + \\ + \ln L(y_T \mid y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta),$$

где $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \ell_0, b_0)$.

Уравнения для эволюции y_t, b_t, ℓ_t — линейные.

$$(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\ell_{t-1} + b_{t-1}; \sigma^2)$$

$$\ln L(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2}(y_t - (\ell_{t-1} + b_{t-1}))^2$$

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.
- Наклон линии тренда может меняться.

ETS(AAN): итоги

- Настоящий тренд в модели.
- Наклон линии тренда может меняться.
- Устройство функции правдоподобия.

ETS(AAA)

ETS(AAA): план

- Добавляем сезонность в ETS!

ETS(AAA): план

- Добавляем сезонность в ETS!
- Прогнозы.

ETS(AAA): план

- Добавляем сезонность в ETS!
- Прогнозы.
- Разложение на составляющие.

Добавляем сезонность!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

s_t — сезонная составляющая (единорог);

u_t — случайная ошибка.

Добавляем сезонность!

y_t — наблюдаемый ряд;

ℓ_t — тренд, очищенный ряд (единорог);

b_t — текущая скорость роста очищенного ряда (единорог);

s_t — сезонная составляющая (единорог);

u_t — случайная ошибка.

ETS(AAN):

A — аддитивная ошибка;

A — аддитивный тренд;

A — аддитивная сезонность.

ETS(AAA): уравнения

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t; \text{ стартовые } s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-11}. \end{cases}$$

ETS(AAA): уравнения

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t; \text{ стартовые } s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-11}. \end{cases}$$

Параметры: α, β, γ, σ^2, ℓ_0, b_0, s_0, s_{-1}, ..., s_{-11}.

Ограничение: $s_0 + s_{-1} + \ldots + s_{-11} = 0$.

ETS(AAA): сколько параметров?

Параметры: α, β, γ, σ^2, ℓ_0, b_0, s_0, s_{-1}, …, s_{-11}.

Ограничение: $s_0 + s_{-1} + \ldots + s_{-11} = 0$.

Сколько независимых параметров оцениваем?

ETS(AAA): сколько параметров?

Параметры: $\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2, \ell_0, b_0, s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-11}$.

Ограничение: $s_0 + s_{-1} + \ldots + s_{-11} = 0$.

Сколько независимых параметров оцениваем?

Правильный ответ: 17

ETS(AAA): прогнозируем

Картинка с прогнозами на 12 шагов вперед

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t \end{cases}$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\
s_t = s_{t-12} + \gamma u_t
\end{cases}
$$

$$
y_{T+1} = \ell_T + b_T + s_{T-11} + u_{T+1}
$$

Прогноз на 1 шаг вперёд

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\
s_t = s_{t-12} + \gamma u_t
\end{cases}
$$

$$
y_{T+1} = \ell_T + b_T + s_{T-11} + u_{T+1}
$$

$$
(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + b_T + s_{T-11}; \sigma^2)
$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t \end{cases}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t \end{cases}$$

$$y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + s_{T-10} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + \\ + (b_T + \beta u_{T+1}) + s_{T-10} + u_{T+2}$$

Прогноз на 2 шага вперёд

$$
\begin{cases}
y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t; \\
\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t, \text{ стартовое } \ell_0; \\
u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \text{ и независимы.} \\
b_t = b_{t-1} + \beta u_t, \text{ стартовое } b_0; \\
s_t = s_{t-12} + \gamma u_t
\end{cases}
$$

$$
y_{T+2} = \ell_{T+1} + b_{T+1} + s_{T-10} + u_{T+2} = (\ell_T + b_T + \alpha u_{T+1}) + \\
+ (b_T + \beta u_{T+1}) + s_{T-10} + u_{T+2}
$$

$$
(y_{T+2} \mid \mathcal{F}_T) \sim \mathcal{N}(\ell_T + 2b_T + s_{T-10}; \sigma^2((\alpha+\beta)^2 + 1))
$$

Попутное разложение!

На выходе ETS(AAA):

Оценки параметров: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\ell}_0$, $\hat{b}_0$, $\hat{s}_0$, $\hat{s}_{-1}$, …, $\hat{s}_{-11}$.

Ограничение: $\hat{s}_0 + \hat{s}_{-1} + \ldots + \hat{s}_{-11} = 0$.

Попутное разложение!

На выходе ETS(AAA):

Оценки параметров: $\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma, \hat\sigma^2, \hat\ell_0, \hat b_0, \hat s_0, \hat s_{-1}, \ldots, \hat s_{-11}$.

Ограничение: $\hat s_0 + \hat s_{-1} + \ldots + \hat s_{-11} = 0$.

Оценённые значения составляющих: $\hat\ell_t, \hat b_t, \hat s_t$.

Попутное разложение!

На выходе ETS(AAA):

Оценки параметров: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\ell}_0$, $\hat{b}_0$, $\hat{s}_0$, $\hat{s}_{-1}$, …, $\hat{s}_{-11}$.

Ограничение: $\hat{s}_0 + \hat{s}_{-1} + \ldots + \hat{s}_{-11} = 0$.

Оценённые значения составляющих: $\hat{\ell}_t$, $\hat{b}_t$, $\hat{s}_t$.

Автоматически получаем разложение:

$y_t = \hat{\ell}_t + \hat{s}_t + remainder_t$.

ETS(AAA): итоги

- Ух, целых 17 параметров!

ETS(AAA): итоги

- Ух, целых 17 параметров!
- Наклон линии тренда и сезонность могут меняться.

ETS(AAA): итоги

- Ух, целых 17 параметров!
- Наклон линии тренда и сезонность могут меняться.
- Автоматическое разложение на составляющие.

Много моделей

Много моделей: план

- Преобразование переменной.

Много моделей: план

- Преобразование переменной.
- Усреднение моделей.

Много моделей: план

- Преобразование переменной.
- Усреднение моделей.
- Выбор с помощью кросс-валидации.

Много моделей: план

- Преобразование переменной.
- Усреднение моделей.
- Выбор с помощью кросс-валидации.
- Выбор с помощью AIC.

Преобразование переменной

Помимо модели $y_t \sim ETS(AAA)$ можно оценить:

Преобразование переменной

Помимо модели $y_t \sim ETS(AAA)$ можно оценить:

вторую модель $\ln y_t \sim ETS(AAA)$ или

Преобразование переменной

Помимо модели $y_t \sim ETS(AAA)$ можно оценить:

вторую модель $\ln y_t \sim ETS(AAA)$ или третью модель $\sqrt{y_t} \sim ETS(AAA)$.

Преобразование переменной

Помимо модели $y_t \sim ETS(AAA)$ можно оценить:

вторую модель $\ln y_t \sim ETS(AAA)$ или третью модель $\sqrt{y_t} \sim ETS(AAA)$.

Чтобы сравнивать прогнозы моделей, нужно работать в общем масштабе!

Преобразование переменной

Помимо модели $y_t \sim ETS(AAA)$ можно оценить:

вторую модель $\ln y_t \sim ETS(AAA)$ или третью модель $\sqrt{y_t} \sim ETS(AAA)$.

Чтобы сравнивать прогнозы моделей, нужно работать в общем масштабе!

В зависимости от софта: либо сами приводим к исходным единицам, либо это происходит автоматически.

Преобразование Бокса-Кокса

Для y_t, чей размах колебаний растёт с ростом y_t, разумно попробовать логарифм или преобразование Бокса-Кокса.

Преобразование Бокса-Кокса

Для y_t, чей размах колебаний растёт с ростом y_t, разумно попробовать логарифм или преобразование Бокса-Кокса.

Логарифм: $y_t \to \ln y_t$.

Преобразование Бокса-Кокса: $y_t \to bc_\lambda(y_t)$.

Преобразование Бокса-Кокса

Для y_t, чей размах колебаний растёт с ростом y_t, разумно попробовать логарифм или преобразование Бокса-Кокса.

Логарифм: $y_t \to \ln y_t$.

Преобразование Бокса-Кокса: $y_t \to bc_\lambda(y_t)$.

(Обобщённое) преобразование Бокса-Кокса:

$$bc_\lambda(y_t) = \begin{cases} \ln y_t, \text{ если } \lambda = 0 \\ \operatorname{sign}(y_t)(|y_t|^\lambda - 1)/\lambda, \text{ если } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Параметр лямбда

Как выбрать параметр λ для перехода $y_t \to bc_{lambda}(y_t)$?

$$bc_\lambda(y_t) = \begin{cases} \ln y_t, \text{ если } \lambda = 0 \\ \operatorname{sign}(y_t)(|y_t|^\lambda - 1)/\lambda, \text{ если } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Параметр лямбда

Как выбрать параметр λ для перехода $y_t \to bc_{lambda}(y_t)$?

$$bc_\lambda(y_t) = \begin{cases} \ln y_t, \text{ если } \lambda = 0 \\ \operatorname{sign}(y_t)(|y_t|^\lambda - 1)/\lambda, \text{ если } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

- Некоторые модели содержат его внутри себя и сами подбирают λ.

Параметр лямбда

Как выбрать параметр λ для перехода $y_t \to bc_{lambda}(y_t)$?

$$bc_\lambda(y_t) = \begin{cases} \ln y_t, \text{ если } \lambda = 0 \\ \operatorname{sign}(y_t)(|y_t|^\lambda - 1)/\lambda, \text{ если } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

- Некоторые модели содержат его внутри себя и сами подбирают λ.
- Можно подобрать λ самостоятельно, чтобы стабилизировать амплитуду колебаний ряда.

Много моделей: итоги

- Сделать больше моделей: преобразования переменной, усреднение моделей.

Много моделей: итоги

- Сделать больше моделей: преобразования переменной, усреднение моделей.
- Отобрать лучшую: кросс-валидация, критерий AIC.