

Гетероскедастичность

Эконометрика. Openedu. Неделя 7

Для проверки гипотез мы предполагали условную гомоскедастичность ошибок:

$$\text{Var}(\varepsilon_i|X) = E(\varepsilon_i^2|X) = \sigma^2$$

Что произойдёт, если эта предпосылка будет нарушена?

Четыре разных понятия

Условная гомоскедастичность $Var(\varepsilon_i|X) = E(\varepsilon_i^2|X) = \sigma^2$

Условная гетероскедастичность $Var(\varepsilon_i|X) = E(\varepsilon_i^2|X) \neq const$

Безусловная гомоскедастичность $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$

Безусловная гетероскедастичность $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) \neq \sigma^2$

Примеры [доска]

Имеет ли место условная/безусловная гетероскедастичность в каждом из случаев?

- Случай А: ε_i независимы и одинаково распределены

Вероятности	$\varepsilon_i = -10$	$\varepsilon_i = -1$	$\varepsilon_i = 1$	$\varepsilon_i = 10$
$x_i = 1$	0	1/4	1/4	0
$x_i = 10$	0	1/4	1/4	0

- Случай В: ε_i независимы и одинаково распределены

Вероятности	$\varepsilon_i = -10$	$\varepsilon_i = -1$	$\varepsilon_i = 1$	$\varepsilon_i = 10$
$x_i = 1$	0	1/4	1/4	0
$x_i = 10$	1/4	0	0	1/4

Примеры [доска]

Имеет ли место условная/безусловная гетероскедастичность в каждом из случаев?

- Случай С: ε_i независимы

Вероятности	$\varepsilon_1 = -10$	$\varepsilon_1 = -1$	$\varepsilon_1 = 1$	$\varepsilon_1 = 10$
$x_1 = 1$	0	1/4	1/4	0
$x_1 = 10$	0	1/4	1/4	0

Вероятности	$\varepsilon_2 = -10$	$\varepsilon_2 = -1$	$\varepsilon_2 = 1$	$\varepsilon_2 = 10$
$x_2 = 1$	1/4	0	0	1/4
$x_2 = 10$	1/4	0	0	1/4

Когда логично ожидать гетероскедастичность?

- безусловной в случайной выборке не бывает
- условная возникает при наличии “размера” объекта
- условная присутствует почти всегда

Предпосылка об условной гомоскедастичности нарушена.
Все остальные предпосылки классической модели со
стохастическими регрессорами для случайной выборки выполнены.

Мы используем прежние формулы:

Для оценок коэффициентов:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Для оценки ковариационной матрицы оценок коэффициентов:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$$

В частности:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_j|X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j} \text{ и } se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j|X)}$$

Три группы свойств:

- конечная выборка без предположения о нормальности ε
- конечная выборка с предположением о нормальности ε
- асимптотические свойства без предположения о нормальности ε

Что происходит в каждом случае?

Малая выборка без нормальности ε

- (+) Линейность по y
- (+) Несмещенность, $E(\hat{\beta}|X) = \beta$, $E(\hat{\beta}) = \beta$
- (—) Оценки $\hat{\beta}$ эффективны

Малая выборка с нормальными ε

- $(-)\ \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$
- $(-)\ \frac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi_{n-k}^2$
- $(-)\ \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r, n-k}$

- $(+) \hat{\beta} \rightarrow \beta$
- $(+) \frac{RSS}{n-k} \rightarrow \sigma^2 = Var(\varepsilon_i)$
- $(-) \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \rightarrow N(0, 1)$
- $(-) \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n-k)} \rightarrow \chi_r^2$

Мораль:

- Сами $\hat{\beta}$ можно интерпретировать и использовать
- Стандартные ошибки $se(\hat{\beta}_j)$ несостоятельны
- Не можем строить доверительные интервалы для β_j и проверять гипотезы

Что делать?

- Исправить стандартные ошибки!
- Другая формула для оценки $\widehat{Var}_{HC}(\hat{\beta}|X)$
- Следовательно, другие $se_{HC}(\hat{\beta}_j)$

Робастная (устойчивая) к гетероскедастичности оценка ковариационной матрицы

- Вместо

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$$

ИСПОЛЬЗОВАТЬ

$$\widehat{Var}_{HC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'X)^{-1}$$

- Уайт, 1980, HC0:

$$\hat{\Omega} = \text{diag}(\hat{\varepsilon}_1^2, \dots, \hat{\varepsilon}_n^2)$$

- Современный вариант, HC3:

$$\hat{\Omega} = \text{diag}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{(1-h_{11})^2}, \dots, \frac{\hat{\varepsilon}_n^2}{(1-h_{nn})^2}\right)$$

Суть корректировки:

Мы меняем $se(\hat{\beta}_j)$ на $se_{HC}(\hat{\beta}_j)$

Какие проблемы решены?

- (+) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HC}(\hat{\beta}_j)} \rightarrow N(0, 1)$ (УРА!)

Какие проблемы не решены?

- (—) эффективность

Оценки $\hat{\beta}$ не меняются и остаются неэффективными!

Даже при предположении о нормальности ε :

- (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HC}(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$
- (—) $\frac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi^2_{n-k}$
- (—) $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r, n-k}$

С практической точки зрения:

- Новая формула для $\widehat{Var}_{HC}(\hat{\beta}|X)$, и, следовательно, для $se_{HC}(\hat{\beta}_j)$
- робастная ковариационная матрица в R (по умолчанию HC3):

```
model <- lm(y~x, data=data)
vcovHC(model)
```

- С ней жизнь прекрасна!

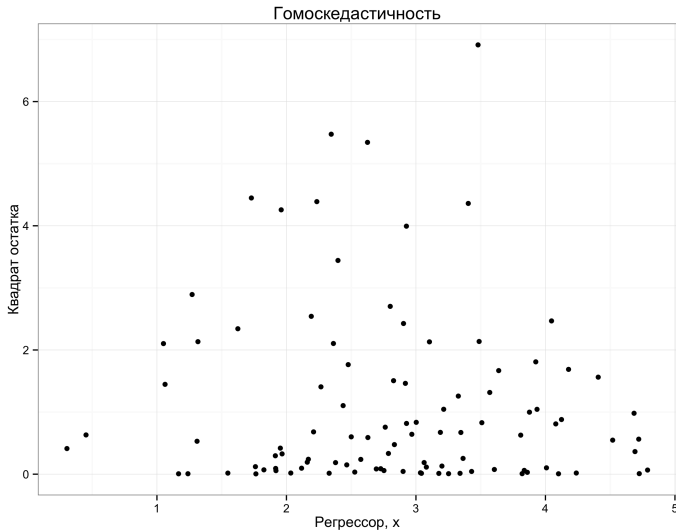
$$(+)\ \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HC}(\hat{\beta}_j)} \rightarrow N(0, 1)$$

Когда следует использовать робастные стандартные ошибки?

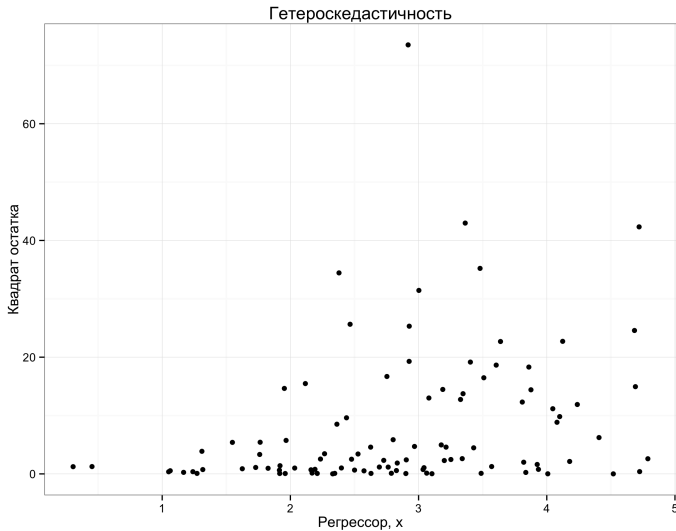
- Как только есть случайная выборка и объекты могут быть разного “размера”, использовать $se_{HC}(\hat{\beta}_j)$ для проверки гипотез!

- Оцениваем интересующую нас модель с помощью МНК
- Строим график квадратов (или модулей) остатков в зависимости от регрессора

Условная гомоскедастичность



Условная гетероскедастичность



- Тест Уайта (White)
- Тест Голдфельда-Квандта (Goldfeld-Quandt)

- асимптотический
- не требуется нормальность остатков

- 1 Оценить основную регрессию, получить $\hat{\varepsilon}_i$
- 2 Оценить вспомогательную регрессию:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 z_{i2} + \dots + \gamma_m z_{im} + u_i$$

z_{i2}, \dots, z_{im} — факторы, определяющие форму гетероскедастичности. По умолчанию во вспомогательной регрессии берут исходные регрессоры, их квадраты и попарные произведения

- 3 Посчитать $LM = nR_{aux}^2$

При верной H_0 об условной гомоскедастичности:

$$H_0: \text{Var}(\varepsilon_i|X) = E(\varepsilon_i^2|X) = \sigma^2$$

$LM \sim \chi_{m-1}^2$, где m — число параметров во вспомогательной регрессии

Если наблюдаемое значение статистики LM больше критического χ_{cr}^2 , то H_0 отвергается.

По 200 киоскам мороженого и исследователь оценил зависимость спроса (q) от цены (p), разнообразия ассортимента (a) и удаленности от метро (d).

- Какой регрессор скорее всего влияет на условную дисперсию ошибок?

Исследователь провел классический тест Уайта и получил $R^2_{aux} = 0.2$.

- Как выглядит вспомогательная регрессия для теста Уайта?
- Имеет ли место условная гетероскедастичность?

Тест Голдфельда-Квандта (Goldfeld-Quandt)

- Есть переменная, от которой условная дисперсия ошибок предположительно зависит монотонно
- Требуется нормальность ошибок
- Тест подходит для малых выборок

Процедура теста Голдфелда-Квандта

- 1 Сортируем наблюдения по предполагаемому убыванию условной дисперсии
- 2 Выкидываем часть наблюдений посередине (например, 20%)
- 3 Оцениваем исходную модель отдельно по первым и по последним наблюдениям
- 4 Считаем $F = \frac{RSS_1/(n_1-k)}{RSS_2/(n_2-k)}$

Тест Голдфельда-Квандта продолжение

При верной H_0 об условной гомоскедастичности:

$$H_0: \text{Var}(\varepsilon_i|X) = E(\varepsilon_i^2|X) = \sigma^2$$

$$F \sim F_{n_1-k, n_2-k}$$

Если наблюдаемое значение статистики F больше критического F_{cr} , то H_0 отвергается.

Тест Голдфельда-Квандта [доска]

По 200 киоскам мороженого и исследователь оценил зависимость спроса (q) от цены (p), разнообразия ассортимента (a) и удаленности от метро (d).

Чтобы проверить наличие гетероскедастичности исследователь оценил эту модель отдельно по 80 самым удаленным от метро киоскам, получил, $RSS_2 = 120$. По 80 самым близки к метро киоскам, получил, $RSS_1 = 210$.

Проведите тест Голдфельда-Квандта

Эффективность оценок?

- Да, надо смириться с тем, что оценки неэффективны
- Мы довольны несмещенностью, состоятельностью и возможностью проверять гипотезы
- Для получения эффективных оценок нужно точно понимать как устроена гетероскедастичность. Это большая редкость.

Модель $m_i = \beta_1 + \beta_2 r_i + \beta_3 t_i + \varepsilon_i$:

- m_i — средний результат класса по математике
- r_i — количество учеников
- t_i — среднее время, потраченное на занятия математикой
- Какую структуру гетероскедастичности логично ожидать?
- Как при такой структуре гетероскедастичности получить эффективные оценки?

- Нарушение предпосылки об условной гомоскедастичности
- Почти всегда имеет место в случайной выборке
- Неприятность небольшая, мы используем робастные стандартные ошибки
- Если нужны эффективные оценки, то надо знать структуру гетероскедастичности

- Артамонов Н.В., Введение в эконометрику: глава 3.3
- Борзых Д.А., Демешев Б.Б. Эконометрика в задачах и упражнениях: глава 8
- Катышев П.К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс: глава 6.1
- Себер Дж., Линейный регрессионный анализ: глава 6.2