

# Прогнозы. Сравнение моделей

Эконометрика. Openedu. Неделя 4

- Прогнозирование
- Выбор “наилучшей” модели

Модель:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

Точечный прогноз:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$

Что мы прогнозируем?

- Средний  $y_i$  при данных регрессорах,  $E(y_i|x_i, z_i)$ :

$$E(y_i|x_i, z_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i$$

- Конкретный  $y_i$  при данных регрессорах:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

Возникает две разных ошибки прогноза!

- условное среднее,  $E(y_i|X)$
- ошибка прогноза условного среднего,  $\hat{y}_i - E(y_i|X)$
- дисперсия ошибки прогноза:

$$Var(\hat{y}_i - E(y_i|X)|X) = Var(\hat{y}_i|X) = Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i|X)$$

# Ошибка прогноза конкретного значения

- конкретное наблюдение,  $y_i$
- ошибка прогноза,  $\hat{y}_i - y_i$
- дисперсия ошибки прогноза:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{y}_i - y_i|X) &= \text{Var}(\hat{y}_i - E(y_i|X) - \varepsilon_i|X) = \text{Var}(\hat{y}_i - \varepsilon_i|X) = \\ &= \text{Var}(\hat{y}_i|X) + \text{Var}(\varepsilon_i|X) = \text{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i|X) + \text{Var}(\varepsilon_i|X) \end{aligned}$$

- $Var(\hat{y}_i|X)$ ,  $Var(\varepsilon_i|X)$  неизвестны, зависят от  $\sigma^2$
- $\widehat{Var}(\hat{y}_i|X)$ ,  $\widehat{Var}(\varepsilon_i|X)$  известны
- Используем стандартные ошибки:  $se(\hat{y}_i) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{y}_i|X)}$

# Доверительный интервал для среднего значения

- Асимптотический:  $\frac{\hat{y}_i - E(y_i|X)}{se(\hat{y}_i)} \rightarrow N(0, 1)$

$$E(y_i|X) \in [\hat{y}_i - z_{cr} se(\hat{y}_i); \hat{y}_i + z_{cr} se(\hat{y}_i)]$$

- При предположении о нормальности:  $\frac{\hat{y}_i - E(y_i|X)}{se(\hat{y}_i)} \sim t_{n-k}$

$$E(y_i|X) \in [\hat{y}_i - t_{cr} se(\hat{y}_i); \hat{y}_i + t_{cr} se(\hat{y}_i)]$$



# Предиктивный интервал для конкретного значения

- Асимптотический:  $\frac{\hat{y}_i - y_i}{se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)} \rightarrow N(0, 1)$

$$y_i \in [\hat{y}_i - z_{cr} se(\hat{y}_i - \varepsilon_i); \hat{y}_i + z_{cr} se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)]$$

- При предположении о нормальности:  $\frac{\hat{y}_i - y_i}{se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)} \sim t_{n-k}$

$$y_i \in [\hat{y}_i - t_{cr} se(\hat{y}_i - \varepsilon_i); \hat{y}_i + t_{cr} se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)]$$

## Пример вычислений [у доски]

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	8.53539	0.05183	164.68	<2e-16 ***
log(carat)	1.74685	0.07505	23.27	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2771 on 38 degrees of freedom

vcov(mod)

	(Intercept)	log(carat)
(Intercept)	0.002686470	0.002078281
log(carat)	0.002078281	0.005632675

Четыре модели:

- $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$
- $\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_i) + \varepsilon_i$
- $\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$
- $y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_i) + \varepsilon_i$

# Вывод интерпретации [у доски]

Идея получения интерпретации логарифмических моделей:

$d \ln x = \frac{dx}{x}$  — изменение  $x$  в долях

# Две популярные версии

- $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ . С ростом  $x$  на единицу  $y$  растет на  $\beta_2$  единиц.
- $\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_i) + \varepsilon_i$ . С ростом  $x$  на один процент  $y$  растет на  $\beta_2$  процентов.

- $\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ . С ростом  $x$  на единицу  $y$  растёт на  $100\beta_2$  процентов.
- $y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_i) + \varepsilon_i$ . С ростом  $x$  на один процент  $y$  растёт на  $0.01\beta_2$  единиц.

- Объясняющая переменная, принимающая значение 0 или 1, называется дамми-переменной (dummy variable)
- Например, пол респондента в опросе, переменная  $male_i$ , равная 1 для мужчин и 0 — для женщин.

# Дамми-переменные и разные зависимости на подвыборках

Пример 1. Базовая модель.

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

Зарплата мужчин и женщин в среднем одинаковая при равном опыте и образовании



## Пример 2.

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \varepsilon_i$$

Для мужчин:  $wage_i = (\beta_1 + \beta_4) + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

Для женщин:  $wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

## Пример 3.

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \beta_5 male_i exper_i + \varepsilon_i$$

Для мужчин:  $wage_i = (\beta_1 + \beta_4) + (\beta_2 + \beta_5) exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

Для женщин:  $wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

## Пример 4.

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \beta_5 male_i educ_i + \varepsilon_i$$

Для мужчин:  $wage_i = (\beta_1 + \beta_4) + \beta_2 exper_i + (\beta_3 + \beta_5) educ_i + \varepsilon_i$

Для женщин:  $wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

## Пример 5.

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \beta_5 male_i educ_i + \beta_6 male_i exper_i + \varepsilon_i$$

Для мужчин:  $wage_i = (\beta_1 + \beta_4) + (\beta_2 + \beta_6) exper_i + (\beta_3 + \beta_5) educ_i + \varepsilon_i$

Для женщин:  $wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

# Факторная переменная принимает несколько значений

$season_i \in \{ \text{зима} , \text{весна} , \text{лето} , \text{осень} \}$

- 1 Выбираем базовое значение факторной переменной: зима.
- 2 Вводим 3 (четыре сезона минус один базовый)  
дамми-переменных:

$vesna_i, leto_i, osen_i$

# Вводим дамми-переменные

Наблюдение	Сезон	$vesna_i$	$leto_i$	$osen_i$
1	Зима	0	0	0
2	Весна	1	0	0
3	Лето	0	1	0
4	Осень	0	0	1
5	Зима	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

# Модели для подвыборок на примере

$$icecream_i = \beta_1 + \beta_2 price_i + \beta_3 vesna_i + \beta_4 leto_i + \beta_5 osen_i + \varepsilon_i$$

Зима:  $icecream_i = \beta_1 + \beta_2 price_i + \varepsilon_i$

Весна:  $icecream_i = (\beta_1 + \beta_3) + \beta_2 price_i + \varepsilon_i$

Лето:  $icecream_i = (\beta_1 + \beta_4) + \beta_2 price_i + \varepsilon_i$

Осень:  $icecream_i = (\beta_1 + \beta_5) + \beta_2 price_i + \varepsilon_i$

# Частая ошибка!

Включить дамми-переменные на все значения факторной переменной и константу в регрессию. Благородные доны и дуэньки так не поступают!

Пример с ошибкой (!).

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 male_i + \beta_4 female_i + \varepsilon_i$$

Выполнено соотношение  $1 = male_i + female_i$ .



## частая ошибка — нарушение предпосылки

- 8 С вероятностью 1 среди регрессоров нет линейно зависимых
  - Синонимы в матричном виде:  $\text{rank}(X) = k$  или  $\det(X'X) \neq 0$  или  $(X'X)^{-1}$  существует

Регрессоры линейно зависимы. Не существует единственных оценок МНК.

# Проверка гипотез о нескольких ограничениях сразу

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \beta_5 male_i educ_i + \varepsilon_i$$

Для мужчин:  $wage_i = (\beta_1 + \beta_4) + \beta_2 exper_i + (\beta_3 + \beta_5) educ_i + \varepsilon_i$

Для женщин:  $wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$

$$H_0 : \begin{cases} \beta_4 = 0 \\ \beta_5 = 0 \end{cases}$$

$H_a$  : хотя бы один коэффициент ( $\beta_4$  или  $\beta_5$ ) отличен от нуля

- 1 Оценить неограниченную модель (unrestricted, ur)

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \beta_4 male_i + \beta_5 male_i educ_i + \varepsilon_i$$

Посчитать  $RSS_{UR}$

- 2 Оценить ограниченную модель (restricted, r)

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 exper_i + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

Посчитать  $RSS_R$

## Два подхода:

3.1. Асимптотически:

$$\chi^2 = \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} \rightarrow \chi_r^2$$

3.2. При нормальности ошибок,  $\varepsilon_i|X \sim N(0, \sigma^2)$

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} \sim F_{r, n-k_{UR}}$$

$r$  — количество ограничений в  $H_0$

- ❶ Если  $F_{obs} > F_{cr}$  или  $\chi_{obs}^2 > \chi_{cr}^2$ , то  $H_0$  отвергается

## Пример [у доски]

Проверьте гипотезу о двух ограничениях. RSS для двух моделей:

```
model_1 <- lm(data = h, log(price) ~ log(totsp) + log(livesp) +  
              log(kitsp) + brick + metrdist + walk)  
model_2 <- lm(data = h, log(price) ~ log(totsp) + log(livesp) +  
              log(kitsp)+brick)  
deviance(model_1)
```

```
## [1] 62.56589
```

```
deviance(model_2)
```

```
## [1] 69.29502
```

RSS ограниченной модели всегда больше:

- $RSS_{UR} = \min_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots} RSS$
- $RSS_R = \min_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_4=0} RSS$

TSS в моделях равны, т.к.  $TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$   
Следовательно,  $ESS_{UR} > ESS_R$  и  $R^2_{UR} > R^2_R$ .

# Самый простой случай

Модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

Гипотеза  $H_0$ : все наши регрессоры абсолютно бесполезны

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Всего  $(k - 1)$  ограничение.

Гипотеза о незначимости регрессии.



# Доказательство формулы статистики для гипотезы о незначимости регрессии [у доски]

Для гипотезы:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \dots \\ \beta_k = 0 \end{cases}$$

Статистика приобретает вид:

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} \sim F_{k-1, n-k}$$

Идея доказательства: ограниченной моделью будет модель  $y_i = \beta_1 + \varepsilon_i$ .

В ограниченной модели  $\hat{\beta}_1 = \bar{y}$  и  $RSS_R = TSS_R$ , а  $ESS_R = 0$ .

# Проверка гипотезы о незначимости регрессии

Модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} \sim F_{k-1, n-k}$$

# Пример проверки гипотезы о незначимости регрессии [у доски]

Для регрессии

$$\widehat{wage}_i = -2.5 + 0.6school_i + 0.157exper_i$$

Проверьте гипотезу о незначимости регрессии в целом.  
 $R^2 = 0.09$ ,  $n = 3294$ .

Если:

- ❶ Истинная зависимость имеет вид  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ 
  - В матричном виде:  $y = X\beta + \varepsilon$
- ❷ С помощью МНК оценивается регрессия  $y$  на константу,  $x_i$ ,  $z_i$ 
  - В матричном виде:  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$
- ❸ Наблюдений больше, чем оцениваемых коэффициентов  $\beta$ :  $n > k$

## БСХС — предположения на $\varepsilon_i$ :

- ❶ Строгая экзогенность:  $E(\varepsilon_i | \text{все регрессоры}) = 0$ 
  - В матричном виде:  $E(\varepsilon_i | X) = 0$
- ❷ Условная гомоскедастичность:  $E(\varepsilon_i^2 | \text{все регрессоры}) = \sigma^2$ 
  - В матричном виде:  $E(\varepsilon_i^2 | X) = \sigma^2$
- ❸  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j | X) = 0$  при  $i \neq j$

# БСХС — предпосылки на регрессоры

- 7 векторы отдельных наблюдений  $(x_i, z_i, y_i)$  — независимы и одинаково распределены
- 8 с вероятностью 1 среди регрессоров нет линейно зависимых
- Синонимы в матричном виде:  $\text{rank}(X) = k$  или  $\det(X'X) \neq 0$  или  $(X'X)^{-1}$  существует

При  $n \rightarrow \infty$ :

- $\hat{\beta}_j \rightarrow \beta_j$  по вероятности
- $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \rightarrow N(0, 1)$  по распределению
- $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$  по вероятности
- новое:  $\chi^2 = \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} \rightarrow \chi_r^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n - k}$$

Если дополнительно известно, что  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ :

- Оценки эффективны среди несмещенных
- $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}, \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k}$
- $RSS/\sigma^2 | X \sim \chi_{n-k}^2, RSS/\sigma^2 \sim \chi_{n-k}^2$
- новое:  $F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} | X \sim F_{r, n - k_{UR}}$



- Истина:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$
- Оценена регрессия:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$
- Потеряна: эффективность

- Истина:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$
- Оценена регрессия:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$
- Всё плохо!

# Мораль:

- Если в теории предполагается зависимость от переменной  $z$ , то её лучше включить в модель, даже если она не значима.
- Если переменные значимы, то их лучше оставить в модели, даже если теория говорит, что зависимости от них быть не должно.

- Как проверить не пропущены ли переменные, которых нет?
- RESET-тест Рамсея

$$H_0 : y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

$H_a$  : Есть неизвестные нам пропущенные регрессоры

# Алгоритм теста Рамсея:

- 1 Оценить модель:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

Получить прогнозы  $\hat{y}_i$

- 2 Оценить модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \gamma_1 \hat{y}_i^2 + \gamma_2 \hat{y}_i^3 + \dots + \gamma_p \hat{y}_i^{p+1} + \varepsilon_i$$

- 3 Посчитать  $F$ -статистику проверяющую гипотезу о равенстве всех  $\gamma_i$  нулю.

Рамсей: при верной  $H_0$  и нормальности остатков  $F \sim F_{p, n-k-p}$

## Пример теста Рамсея [у доски]

Для регрессии

$$\widehat{wage}_i = -2.5 + 0.6school_i + 0.157exper_i$$

Проверьте тест Рамсея, если:

- $R^2 = 0.091$  (в основной регрессии),
- $R^2_{aux} = 0.095$  (во вспомогательной регрессии Рамсея),
- $n = 3294$ .

①  $R^2$ . Растет с добавлением регрессоров,  $R_{ur}^2 > R_r^2$

② 
$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k)}{TSS/(n-1)} = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{TSS/(n-1)}$$

Чем больше  $R_{adj}^2$  тем меньше  $\hat{\sigma}^2$ .

Модель плохая если:

- плохо предсказывает ( $RSS$  большой)
- сложная (много коэффициентов, большое  $k$ )
- ⑧ Информационные критерии (размер штрафа):
  - Акаике  $AIC = n \ln(RSS/n) + 2k$
  - Шварца  $BIC = n \ln(RSS/n) + \ln(n)k$



В этой лекции:

- Прогнозирование
- Гипотезы о нескольких ограничениях
- RESET-тест Рамсея

Далее: о неприятностях :)

## Источники мудрости:

- Артамонов Н.В., Введение в эконометрику: главы 2.4, 2.5, 3.2
- Борzych Д.А., Демешев Б.Б. Эконометрика в задачах и упражнениях: глава 3
- Катышев П.К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс: главы 3.5
- Себер Дж., Линейный регрессионный анализ: главы 4.1, 5.1, 5.2, 5.3