

Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

11 июня 2024 г.



皮卡丘

Содержание

1	Картинки на плоскости	3
2	Оптимизация на плоскости	4
3	Симплекс-метод	4
4	Двойственность	10
5	Транспортная задача	12
6	Сети	14
7	Неравенство Коши — Буняковского	19
8	Решения	20
	Хэштэги	30
	Источники мудрости	30

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.
 Подробная книжка Фергюсона, [Fer]. Слайды к оксфордскому курсу, [Law].
 Обсуждение интуиции за двойственными задачами, [lit].
 Слайды по алгоритмам Кляйнберга и Тардос, [KT].

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

- а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.
- б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

- а) Нарисуйте $\text{Convex}(A, B)$, $\text{Convex}(A, B, C)$.
- б) Нарисуйте $\text{Cone}(A)$, $\text{Cone}(A, B)$, $\text{Cone}(A, B, C)$.
- в) Нарисуйте $\text{Span}(A)$, $\text{Span}(A, B)$.
- г) Нарисуйте $A + \text{Span}(B)$, $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$.
- д) Нарисуйте $\text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(C)$, $\text{Convex}(A) + \text{Cone}(B, C)$, $\text{Convex}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

- а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D .
- б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D ?
- г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B и D ?
- е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , C и D ?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2) .
 б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2) .

2. Оптимизация на плоскости

- допустимое множество, feasible set, 可行集, kěxíng jí;
- допустимая область, feasible region, 可行域, kěxíng yù;
- линейное программирование, linear programming, 线性规划, xiànxíng guīhuà;
- целевая функция, objective function, 目标函数, mùbiāo hánshù;

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c :

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + ax_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

Решение x системы $Ax = b$ называется *допустимым*, если все $x_i \geq 0$.

Решение x системы $Ax = b$ называется *базисным*, если столбцы $\text{col}_i A$ при $x_i \neq 0$ линейно независимы.

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解, jīběn kěxíng jiě;

Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

- Какие векторы являются решениями системы?
- Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geq 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

- а) Какие векторы являются решениями системы?
- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geq 0$?

3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

Приятная стартовая точка

3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
3.10	x_1	1	0	1	5
	x_2	0	1	2	6
	$\min z$	0	0	3	-3
					$8 - z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите все базисные допустимые решения.

г) Запишите все допустимые решения в виде выпуклой линейной оболочки.

д) Найдите оптимальное решение.

Особые случаи

Пустое допустимое множество

3.11 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неограниченная задача

3.12 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неединственное решение

3.13 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.
- д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.
- е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно оптимальное решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом в параметрическом виде.
- д) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- е) Запишите оптимальные решения в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

3.15 Рассмотрим симплекс-таблицку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

3.16 Рассмотрим симплекс-таблицку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

3.17 Рассмотрим симплекс-таблицку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	-2	5
x_2	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

3.18 Рассмотрим симплекс-таблицку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	2	-3	2
x_2	0	1	1	0	6
$\min z$	0	0	0	-2	$5 - z$

- а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.
- б) Найдите все допустимые решения.
- в) Найдите базисные допустимые решения.
- г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- д) Найдите все оптимальные решения.
- е) Найдите базисные оптимальные решения.

3.19 Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.
- б) Найдите все допустимые решения.
- в) Найдите базисные допустимые решения.
- г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- д) Найдите все оптимальные решения.
- е) Найдите базисные оптимальные решения.

Поиск стартовой точки

3.20 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

4. Двойственность

- двойственная задача, dual problem, 对偶问题, duì'ǒu wèntí;
- двойственность, duality, 对偶, duì'ǒu;
- условия дополняющей нежёсткости, complementary slackness condition, 互补松弛条件, hùbǔ sōngchí tiáojiàn;

Двойственные задачи в стандартной форме:

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \rightarrow \min$	\leftrightarrow	$u = b_1y_1 + b_2y_2 \rightarrow \max$
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$	\leftrightarrow	$y_1 \geq 0$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$	\leftrightarrow	$y_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	\leftrightarrow	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1$
$x_2 \geq 0$	\leftrightarrow	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2$
$x_3 \geq 0$	\leftrightarrow	$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leq c_3$

Двойственность между равенствами и переменными с произвольными значениями:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$	\leftrightarrow	$y_1 \in \mathbb{R}$
$x_2 \in \mathbb{R}$	\leftrightarrow	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_2$

Двойственные задачи в стандартной форме с векторами:

$z = c^T x \rightarrow \min$	\leftrightarrow	$u = b^T y \rightarrow \max$
$Ax \geq b$	\leftrightarrow	$y \geq 0$
$x \geq 0$	\leftrightarrow	$A^T y \leq c$

Двойственность в оптимальной точке:

$$\begin{aligned} y_j^* \neq 0 &\Rightarrow a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* + a_{j3}x_3^* = b_j \\ a_{1i}y_1^* + a_{2i}y_2^* \neq c_i &\Rightarrow x_i^* = 0 \end{aligned}$$

4.1 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

4.2 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

4.3 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

4.4 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.

- б) Решите двойственную задачу.
в) Найдите решение исходной задачи.

4.5 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
б) Найдите допустимое множество двойственной задачи.
в) Найдите допустимое множество исходной задачи.

5. Транспортная задача

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解, jīběn kěxíng jiě;
- метод минимального элемента, least-cost rule, 最小元素法, zuìxiǎo yuánsù fǎ;
- метод северо-западного угла, northwest corner rule, 西北角法, xīběi jiǎo fǎ;
- транспортная задача, transportation problem, 运输问题, yùنشū wèntí;

Если в сбалансированной транспортной задаче m продавцов и n покупателей, то количество базисных переменных равно $m+n-1$. Базисные переменные должны соответствовать линейно независимым столбцам матрицы ограничений.

Метод потенциалов, Hitchhock method,



5.1 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} \sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_j x_{ij} = a_i \text{ для любого } i \\ \sum_i x_{ij} = b_j \text{ для любого } j \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Может ли измениться оптимальная точка, если каждый элемент матрицы C увеличить в 2 раза?

- б) Может ли измениться оптимальная точка, если один столбец матрицы C увеличить в 2 раза?
- в) Может ли измениться оптимальная точка, если одну строку матрицы C увеличить в 2 раза?
- г) Может ли измениться оптимальная точка, если к каждому элементу матрицы C прибавить 1?
- д) Может ли измениться оптимальная точка, если в одном столбце матрицы C к каждому элементу прибавить 1?
- е) Может ли измениться оптимальная точка, если в одной строке матрицы C к каждому элементу прибавить 1?

5.2 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 8x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} \rightarrow \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{11} + x_{21} = 7 \\ x_{12} + x_{22} = 11 \\ x_{13} + x_{23} = 12 \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Запишите задачу в виде симплекс-таблицы.
- б) Какая линейная зависимость существует между уравнениями?
- в) Сколько должно быть базисных и сколько свободных переменных?
- г) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.
- д) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.
- е) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.
- ж) Запишите двойственную задачу.
- з) Запишите условия дополняющей нежёсткости.
- и) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.3 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 10x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ + 6x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 7x_{41} + 6x_{42} + 8x_{43} \rightarrow \min \\ \sum_i x_{i1} = 25, \sum_i x_{i2} = 25, \sum_i x_{i3} = 50, \\ \sum_j x_{1j} = 15, \sum_j x_{2j} = 20, \sum_j x_{3j} = 30, \sum_j x_{4j} = 35, \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.
- б) Запишите двойственную задачу.
- в) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.
- г) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.
- д) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.4 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу, в которой 3 производителя и 7 потребителей.

- а) Сколько всего переменных в этой задаче?
- б) Сколько базисных и сколько свободных переменных в этой задаче?
- в) Сколько переменных в двойственной задаче?
- г) Сколько уравнений в условиях дополняющей нежёсткости?

5.5 В каждой транспортной таблице выписано базисное допустимое решение. Определите, какие переменные должны быть базисными, какие должны быть свободными, а какие могут быть базисными или свободными.

а)

	5	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	7	8
	x_{31}	x_{32}	3

б)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	8
	x_{31}	x_{32}	3

в)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	x_{23}
	9	x_{32}	3

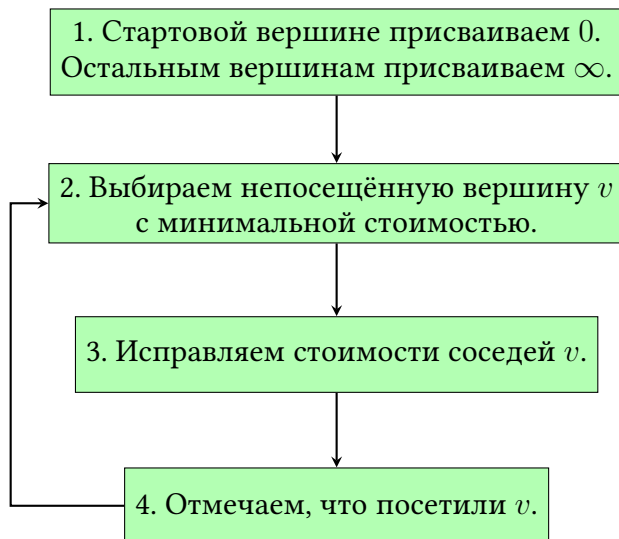
г)

	5	x_{12}	4	x_{34}	7
	2	x_{22}	x_{23}	3	x_{25}
	x_{31}	x_{32}	2	x_{34}	x_{35}
	x_{41}	7	x_{43}	x_{44}	x_{45}

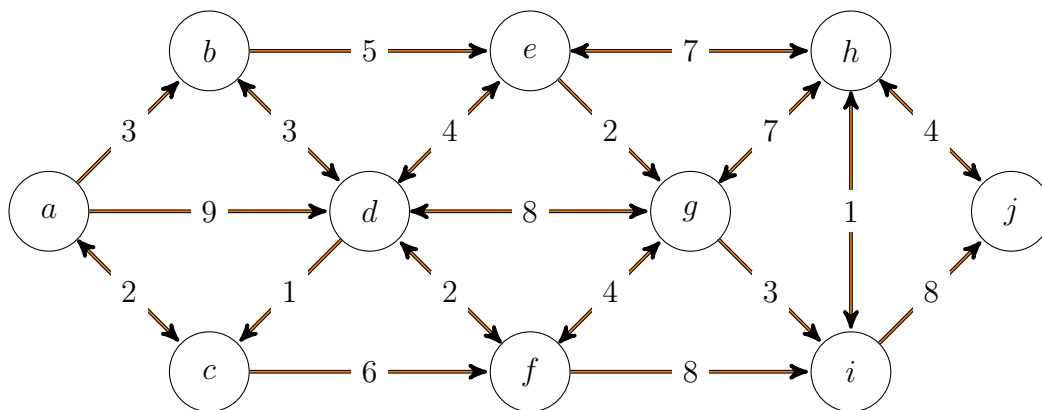
5.6

6. Сети

Алгоритм Дейкстры, Dijkstra algorithm,

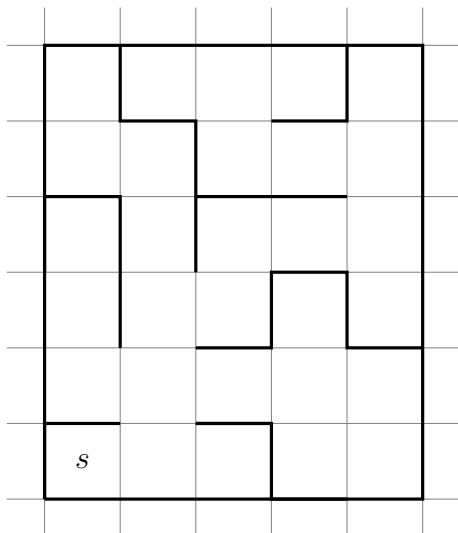


6.1 На ребрах графа указано время в пути.



- С помощью алгоритма Дейкстры найдите самые быстрые маршруты из вершины A во все остальные вершины.
- Выпишите матрицу весов для куска графа из вершин A, B, C и D .

6.2 С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайшее расстояние из точки старта s до каждой точки лабиринта.



6.3 Матрица весов взвешенного графа равна

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & 2 \\ 2 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 5 & 6 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте граф.

6.4 Матрица смежности графа равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Нарисуйте граф.

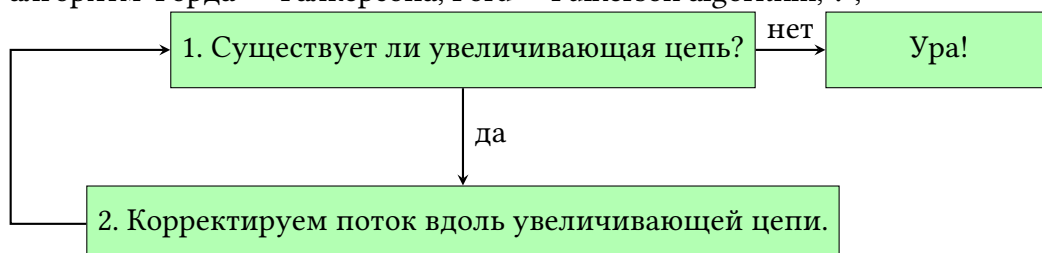
б) Найдите матрицу $A = M^2$. Какой смысл у элемента a_{44} ? Какой смысл у элемента a_{31} ?

в) Найдите матрицу $B = M^3$. Какой смысл у элемента b_{31} ? Какой смысл у элемента b_{32} ?

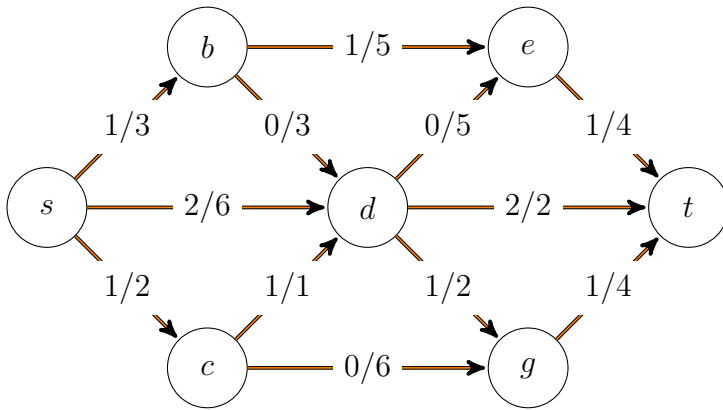
Задача о максимальном потоке и о минимальном разрезе

- пропускная способность, capacity, 大流量? ;
- поток, flow, 流 ;
- источник, source, 源 ;
- сток, sink, 汇 ;
- разрез, cut, 割 ;
- бутылочное горлышко, bottleneck, 瓶颈 ;
- минимальный разрез, minimal cut, 最小割 ;
- увеличивающая цепь, augmenting path, 增广路径 ;
- остаточная пропускная способность, residual capacity, 残留容量 ;

Хорошие слайды можно найти у Кляйнберга и Тардос, [KT].
алгоритм Форда — Фалкерсона, Ford — Fulkerson algorithm, ? ;

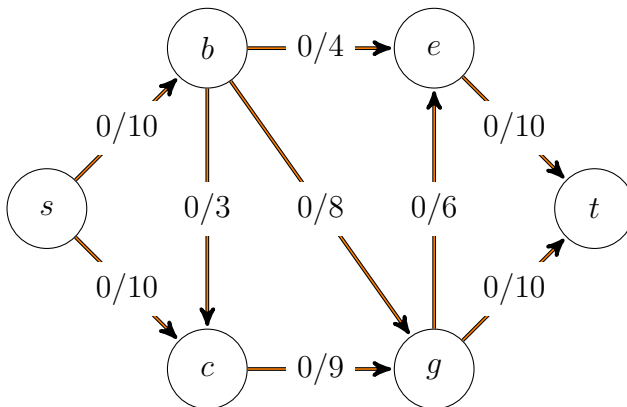


6.5 На ребрах графа указаны текущий поток f и пропускная способность c . Например, надпись $1/3$ над ребром означает, что по ребру течёт поток величины 1, а пропускная способность ребра равна 3.



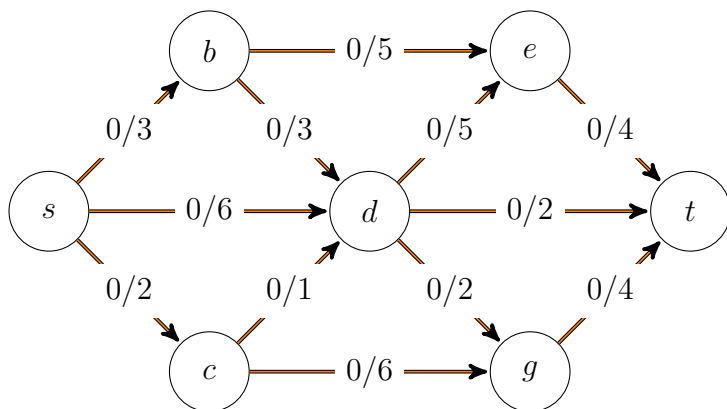
- Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, b, c\}$, $T = \{e, g, t, d\}$.
- Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, g, e\}$, $T = \{b, c, t, d\}$.
- Найдите величину потока $v(f)$.
- Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, b, g, e\}$.
- Найдите остаточную пропускную способность $\text{bnesk}(s - b - e - t, f)$.
- Найдите остаточную пропускную способность $\text{bnesk}(s - c - g - d - e - t, f)$.

6.6 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c .



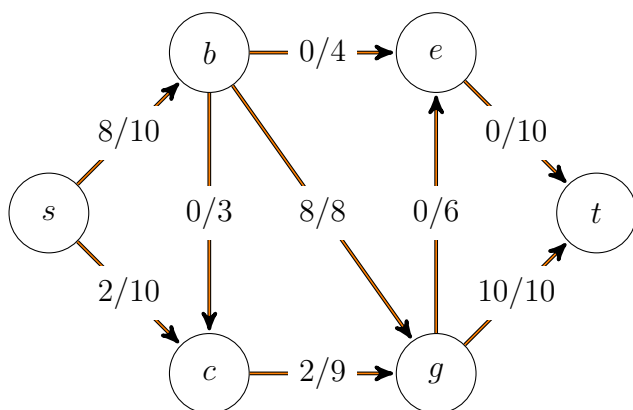
- С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.
- Укажите минимальный разрез.
- Запишите задачу максимизации потока как задачу линейного программирования.

6.7 На ребрах графа с помощью f/c указаны текущий поток f и пропускная способность c .



- С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.
- Укажите минимальный разрез.
- Запишите задачу максимизации потока как задачу линейного программирования.

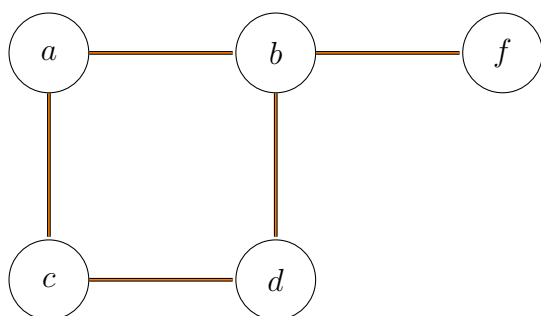
6.8 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c .



- Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, b, c\}$ и $T = \{e, g, t\}$.
- Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, g, e\}$ и $T = \{b, c, t\}$.
- Найдите величину потока $v(f)$.
- Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, c, g\}$.
- Найдите остаточную пропускную способность $\text{bnesk}(s - b - e - t, f)$.
- Найдите остаточную пропускную способность $\text{bnesk}(s - c - g - b - e - t, f)$.

- 6.9**
- Найдите степень каждой вершины, $\deg(v)$.
 - Найдите центральность каждой вершины по близости, $\text{closeness}(v)$.
 - Найдите центральность каждой вершины по числу кратчайших путей, $\text{betweenness}(v)$.

6.10 Рассмотрим следующий граф:



- а) Найдите степень каждой вершины, $\deg(v)$.
- б) Найдите центральность каждой вершины по близости, $\text{closeness}(v)$.
- в) Найдите центральность каждой вершины по числу кратчайших путей, $\text{betweenness}(v)$.

7. Неравенство Коши — Буняковского

- AM/GM inequality,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

- Неравенство Коши — Буняковского, Cauchy — Schwarz inequality,

7.1 Найдите условные экстремумы:

- а) $xyz \rightarrow \max$ при условии $x + y + z = 600, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
- б) $xy \rightarrow \max$ при условии $2x + y = 600, x \geq 0, y \geq 0$.
- в) $xy \rightarrow \max$ при условии $2x + y = 400, x \geq 0, y \geq 0$.
- г) $x^2y \rightarrow \max$ при условии $x + y = 300, x \geq 0, y \geq 0$.
- д) $x^3y^5 \rightarrow \max$ при условии $6x + 7y = 200, x \geq 0, y \geq 0$.
- е) $a + b + c \rightarrow \min$ при условии $abc = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
- ж) $ab + bc + ac \rightarrow \min$ при условии $abc = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
- з) $2a + 3b + 4c \rightarrow \min$ при условии $abc = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
- и) $2ab + 3bc + 4ac \rightarrow \min$ при условии $abc = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
- к) $a + b + c \rightarrow \min$ при условии $a^2b^3c^4 = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
- л) $7a + 3b + 4c \rightarrow \min$ при условии $a^2b^3c^4 = 100, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

8. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$.
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \text{Convex}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
3.2. $x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

3.3.

а) $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

б)

3.5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	1	3	1	0	9
x_4	2*	1	0	1	8

, $x = (0, 0, 9, 8), z = 0$.

max z	1	1	0	0	z
	x_1	x_2	x_3	x_4	b

x_3	0	5/2*	1	-1/2	5
x_1	1	1/2	0	1/2	4

, $x = (4, 0, 5, 0), z = 4$.

max z	0	1/2	0	-1/2	$z - 4$
	x_1	x_2	x_3	x_4	b

x_2	0	1	2/5	-1/5	2
x_1	1	0	-1/5	3/5	3

, $x = (3, 2, 0, 0), z = 5$.

max z	0	0	-1/5	-2/5	$z - 5$
---------	---	---	------	------	---------

3.6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	1	2	1	0	10
x_5	2	1	1	0	1	5

, $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0$.

max z	1	2	3	0	0	z
---------	---	---	---	---	---	-----

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	-3	-1	0	1	-2	0	, $x = (0, 0, 5, 10, 0), z = 15.$
x_3	2	1	1	0	1	5	
$\max z$	-5	-1	0	0	-3	$z - 15$	

3.7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_3	1	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 10, 5), z = 0.$
x_4	2	1	0	1	5	
$\min z$	-2	3	0	0	$-z$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_3	-1	0	1	-1	5	, $x = (0, 5, 5, 0), z = -15.$
x_2	2	1	0	1	5	
$\min z$	-8	0	0	-3	$-z - 15$	

3.8.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	2	1*	3	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 6), z = 0.$
x_5	1	-1	1	0	1	6	
$\max z$	1	1	1	0	0	z	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_2	2	1	3	1	0	10	, $x = (0, 10, 0, 0, 16), z = 10.$
x_5	3	0	4	1	1	16	
$\max z$	-1	0	-2	-1	0	$z - 10$	

3.9.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	3	2	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0.$
x_5	1	1*	-1	0	1	5	
$\min z$	-1	2	-3	0	0	$-z$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	1	0	3	1	-2	0	, $x = (0, 5, 0, 0, 0), z = -10.$
x_2	1	1	-1	0	1	5	
$\min z$	-3	0	-1	0	-2	$-z - 10$	

3.10.

a) $x = (3, 4, 0, 0).$

б) Найдите все допустимые решения.

в)

$$x_1 = 3 - x_3 - 5x_4 \geq 0, x_2 = 4 - 2x_3 - 6x_4 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

г) $A = (3, 4, 0, 0)$, $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$, $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$, $D = (1, 0, 2, 0)$.

д) $\text{Convex}(A, B, C, D)$, где $A = (3, 4, 0, 0)$, $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$, $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$, $D = (1, 0, 2, 0)$.

е) $D = (1, 0, 2, 0)$, $z = 2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	-1	0	2	1
x_3	0	0.5	1	3	2
$\min z$	0	-1.5	0	-12	$2 - z$

3.11.

3.12.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b
x_1	1	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2
x_2	0	1	-1/2	1/2	1/2	1/2
$\max z$	0	0	1	0	-1	$z - 1$
$\min u$	0	0	0	0	-1	$-u$

, неограниченная задача

3.13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1/2	-1/2	1/2
x_2	0	1	1/2	1/2*	1/2
$\max z$	0	0	-1	0	$z - 1$

, $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$, $z = 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	1	1	0	1
x_4	0	2*	1	1	1

, $x = (1, 0, 0, 0)$, $z = 1$.

$$\max z \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad z - 1$$

Оптимум: $[A, B] = \text{Convex}(A, B)$, $A = (1/2, 1/2)$, $B = (1, 0)$.

3.14.

3.15. $z = 15$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} x_3 \geq 0 \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 + 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$

г) $x \in A + \text{Cone}(u)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $u = (1, 2, 1, 0)$.

3.16. $z = -16$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} x_3 \in [0; 2] \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \text{Convex}(A, B)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

3.17. $z = 20$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} (x_3, x_4) \in S \\ S = \{(x_3, x_4) \mid x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, 6 - 3x_3 + x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u, v)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$, $u = (2, 1, 0, 1)$, $v = (7, 0, 1, 3)$.

3.18.

а) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

б) $\text{Convex}(A, B, C) + \text{Cone}(u)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$, $u = (3, 0, 0, 1)$.

в) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$

г) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

д) $\text{Convex}(A, B)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

е) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

3.19.

а) Например, $A = (0, 0, 0)$.

б) $\text{Convex}(A, B, C, D)$, где $A = (0, 0, 0)$, $B = (10, 0, 0)$, $C = (0, 10, 0)$, $D = (0, 0, 10)$.

в) $A = (0, 0, 0), B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0), D = (0, 0, 10)$.

г) Например, $B = (10, 0, 0)$.

д) $\text{Convex}(B, C)$, где $B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0)$.

е) $B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0)$.

3.20.

4.1.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 - 2y_2 \leq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 0, y_2 = 1/2, u = 5$

в) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5 + x_4, x_4 \geq 1/2, z = 5$. Можно записать ответ в виде $x \in A + \text{Cone}(u)$, где $A = (0, 0, 5.5, 0.5), u = (0, 0, 1, 1)$.

4.2.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \min \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 3, y_2 = 0, u = 18$

в) $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 18$

4.3.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leq -1 \end{cases}$$

б) $y_1 = -7, y_2 = -10, u = -142$

в) $x_1 = 0, x_2 = -42, x_3 = 0, x_4 = 16, z = -142$

4.4.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leq -1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Неограниченная задача.

4.5.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 + 6y_2 \leq -1 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Пустое допустимое множество.

5.1.

5.2.

а)

б) $\text{Eq}_1 + \text{Eq}_2 = \text{Eq}_3 + \text{Eq}_4 + \text{Eq}_5$;

в) 4 базисных переменных и 2 свободных;

г)

д)

$$X = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

е)

$$X = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

ж)

3)

$$X = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

5.3.

5.4.

а) $3 \cdot 7 = 21;$

б) $3 + 7 - 1 = 9, 21 - 9 = 12;$

в) $3 + 7 = 10;$

г) $10 + 21 = 31;$

5.5. Буквой «Б» отмечены переменные, которые обязательно являются базисными. Буквой «С» отмечены переменные, которые обязательно являются свободными. Надписью «Б или С» отмечены переменные, которые могут быть базисными или свободными.

а)

	Б	Б или С	Б или С
	Б или С	Б	Б
	Б или С	С	Б

б)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б
	С	Б или С	Б

в)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б

г)

	Б	Б или С	Б	С	Б
	Б	Б или С	С	Б	С
	С	Б или С	Б	С	С
	Б или С	Б	Б или С	Б или С	Б или С

	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 17$
$a_1 = 5$	12	10	6
$a_2 = 6$	400	15	3
$a_3 = 7$	300	7	M
$a_4 = 5$	11	8	6
		500	300

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

6.5.

a) $c(S, T) = 5 + 3 + 6 + 1 + 6 = 21$;

б) $c(S, T) = 3 + 6 + 4 + 4 + 2 = 19$;

в) $v(f) = 4$;

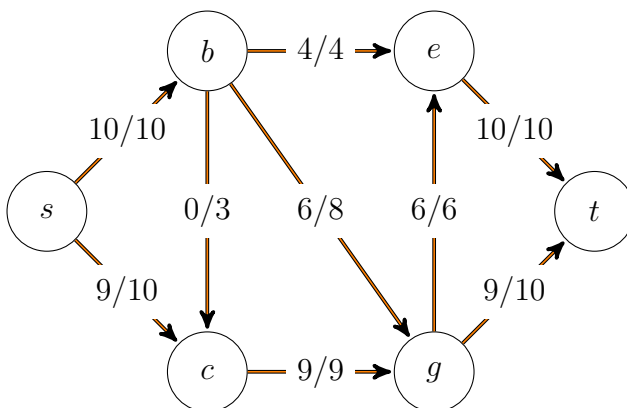
г) $f^{\text{out}}(S) = 0 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5$, $f^{\text{in}}(S) = 1 + 0 + 0 = 1$;

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 3\} = 2$;

е) $\text{bneck}(s - c - g - d - e - t, f) = \min\{1, 6, 1, 5, 3\} = 1$.

6.6.

a) $\max v(f) = 19$;

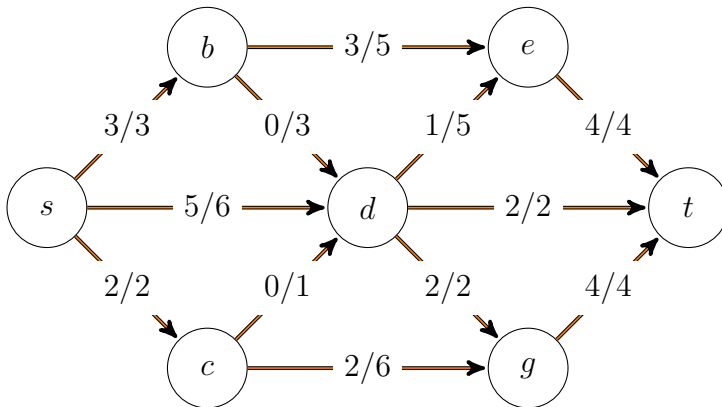


б) $\min c(S, T) = 19, S = \{s, c\}, T = \{b, g, e, t\}$.

6.7.

а) $\max v(f) = 10$;

Один из возможных вариантов:



б) $\min c(S, T) = 10, S = \{s, b, c, d, e, g\}, T = \{t\}$.

в)

$$\begin{cases} x_{sb} + x_{sc} + x_{sd} \rightarrow \max \\ \text{все } x_{ij} \geq 0 \\ x_{sb} \leq 3, x_{sd} \leq 6, x_{sc} \leq 2, x_{bd} \leq 3, x_{be} \leq 5 \\ x_{cg} \leq 6, x_{cd} \leq 1, x_{de} \leq 5, x_{dt} \leq 2, x_{dg} \leq 2 \\ x_{et} \leq 4, x_{gt} \leq 4 \\ x_{sb} = x_{bd} + x_{be}, x_{be} + x_{de} = x_{et}, x_{sc} = x_{cd} + x_{cg} \\ x_{dg} + x_{cg} = x_{gt}, x_{sd} + x_{bd} + x_{cd} = x_{de} + x_{dt} + x_{dg} \end{cases}$$

6.8.

а) $c(S, T) = 4 + 8 + 9 = 21$;

б) $c(S, T) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$;

в) $v(f) = 2 + 8 = 10$.

г) $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, c, g\}$.

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 10\} = 2$.

е) $\text{bneck}(s - c - g - b - e - t, f) = \min\{8, 7, 8, 4, 10\} = 4$.

6.9.

6.10.

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

Источники мудрости

- [Fer] Tomas Ferguson. *Linear programming: concise introduction*. URL: http://web.tecnico.ulisboa.pt/mcasquilho/acad/or/ftp/FergusonUCLA_LP.pdf.
- [Law] Neil Laws. *Linear programming: lecture notes*. URL: <https://www.stats.ox.ac.uk/~cmcd/lp/lp.pdf>.
- [lit] littleO (<https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo>). *Intuition behind the dual problem in optimization*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/223235>.
- [KT] Kleinberg, John and Tardos, Éva. *Lecture Slides for Algorithm Design*. URL: <https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/>.