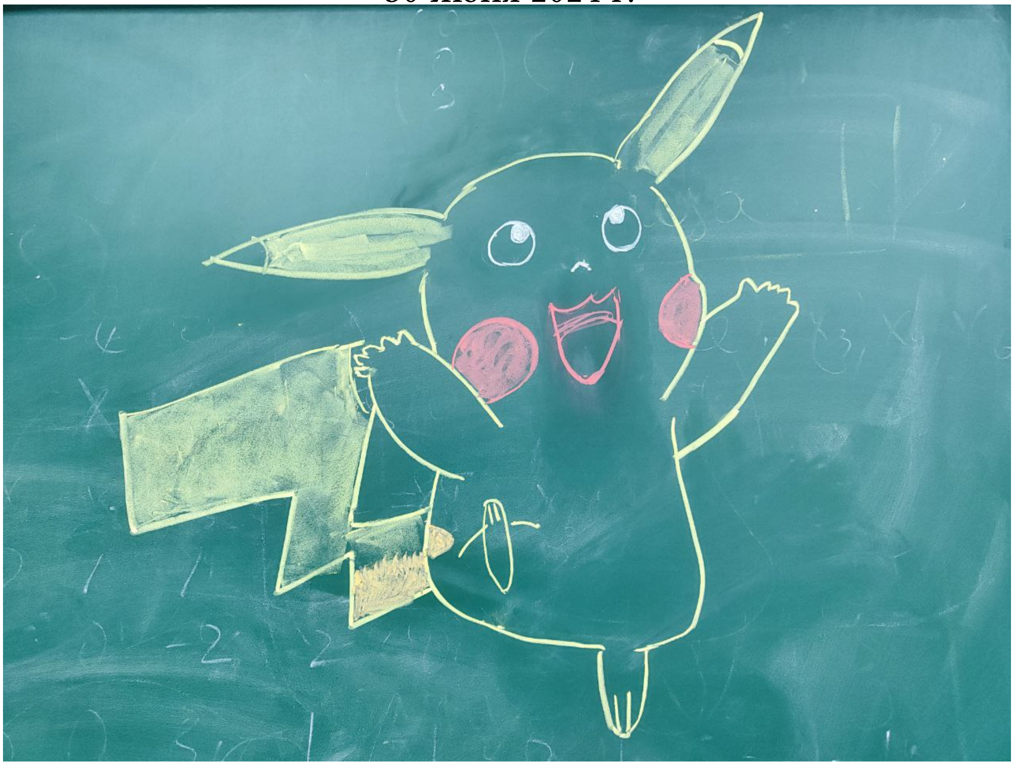
Задачки по методам оптимальных решений

30 июня 2024 г.



皮卡丘

Содержание

Эти задачки использовались в курсе по методам оптимальных решений в МГУ-ППИ в Шеньжене в весеннем семестре 2024 года.

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

В слайдах к оксфордскому курсу, [Law], можно найти простое и доступное введение в симплекс-метод. Более подробно в линейное программирование можно углубиться с помощью книжки Фергюсона, [Fer].

Кляйнберг и Тардос доступно излагают кучу алгоритмов на слайдах [KT], У них можно найти рассекреченную карту Пентагона, иллюстрирующую задачу поиска минимального разреза.

Для тех, кто хочет глубоко понять суть двойственности, можно посоветовать непростое, но интересное обсуждение [lit].

Задачник и исходные файлы к нему можно скачать по адресам

- `https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro`;
- `https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro`.

Добра!

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.

б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

а) Нарисуйте $\text{Convex}(A, B)$, $\text{Convex}(A, B, C)$.

б) Нарисуйте $\text{Cone}(A)$, $\text{Cone}(A, B)$, $\text{Cone}(A, B, C)$.

в) Нарисуйте $\text{Span}(A)$, $\text{Span}(A, B)$.

г) Нарисуйте $A + \text{Span}(B)$, $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$.

д) Нарисуйте $\text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(C)$, $\text{Convex}(A) + \text{Cone}(B, C)$, $\text{Convex}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D.

б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D всеми возможными способами.

в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D?

г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B и D?

е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, C и D?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2).

б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2).

2. Оптимизация на плоскости

- допустимое множество, feasible set, 可行集 , kěxíng jí;
- допустимая область, feasible region, 可行域 , kěxíng yù;
- линейное программирование, linear programming, 线性规划 , xiànxìng guīhuà;
- целевая функция, objective function, 目标函数 , mùbiāo hánshù;

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c:

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + ax_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

Решение x системы $Ax = b$ называется *допустимым*, если все $x_i \geqslant 0$.
Решение x системы $Ax = b$ называется *базисным*, если столбцы $\mathrm{col}_i\, A$ при $x_i \neq 0$ линейно независимы.

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解 , jīběn kěxíng jiě;

Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

Приятная стартовая точка

3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.10

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1	5 3	
x_2	0	1	2	6 4	
min z	0	0	3	-3	$8-z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите все базисные допустимые решения.

г) Запишите все допустимые решения в виде выпуклой линейной оболочки.

д) Найдите оптимальное решение.

Особые случаи

Пустое допустимое множество

3.11 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неограниченная задача

3.12 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неединственное решение

3.13 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Приведите задачу к каноническому виду.

в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.

д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.

е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Приведите задачу к каноническому виду.

в) Найдите хотя бы одно оптимальное решение задачи симплекс-методом.

г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом в параметрическом виде.

д) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

е) Запишите оптимальные решения в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

3.15 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.16 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.17 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	-2	5
x_2	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20 - z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.18 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	2	-3	2
x_2	0	1	1	0	6
$\min z$	0	0	0	-2	$5 - z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите базисные допустимые решения.

г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

д) Найдите все оптимальные решения.

е) Найдите базисные оптимальные решения.

3.19 Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите базисные допустимые решения.

г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

д) Найдите все оптимальные решения.

е) Найдите базисные оптимальные решения.

Поиск стартовой точки

3.20 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.

в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

4. Двойственность

- двойственная задача, dual problem, 对偶问题 , duì'ǒu wèntí;
- двойственность, duality, 对偶 , duì'ǒu;
- условия дополняющей нежёсткости, complementary slackness condition, 互补松弛条件 , hùbǔ sōngchí tiáojiàn;

Двойственные задачи в стандартной форме:

$$\begin{array}{lcr} z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min & \leftrightarrow & u = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geqslant b_1 & \leftrightarrow & y_1 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geqslant b_2 & \leftrightarrow & y_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leqslant c_1 \\ x_2 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leqslant c_2 \\ x_3 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leqslant c_3 \end{array}$$

Двойственность между равенствами и переменными с произвольными значениями:

$$\begin{array}{lcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \leftrightarrow & y_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} & \leftrightarrow & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_2 \end{array}$$

Двойственные задачи в стандартной форме с векторами:

$$\begin{array}{lcr} z = c^T x \to \min & \leftrightarrow & u = b^T y \to \max \\ Ax \geqslant b & \leftrightarrow & y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 & \leftrightarrow & A^T y \leqslant c \end{array}$$

Двойственность в оптимальной точке:

$$
\begin{aligned}
y_j^* \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* + a_{j3}x_3^* = b_j \\
a_{1i}y_1^* + a_{2i}y_2^* \neq c_i \quad &\Rightarrow \quad x_i^* = 0
\end{aligned}
$$

4.1 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 6 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geqslant 10 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.2 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 6 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leqslant 10 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.3 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\
x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.4 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geqslant 6 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\
x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.5 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Найдите допустимое множество двойственной задачи.

в) Найдите допустимое множество исходной задачи.

4.6 Для каждой функции f найдите двойственную функцию f^* и двойственную к двойственной, f^{**}:

а) $f(x) = x^2$;

б) $f(x) = 1$;

в) $f(x) = |x|$;

г) $f(x) = \sin x$;

д) $f(x) = x^3$;

е) $f(x) = \max 0, x^3$.

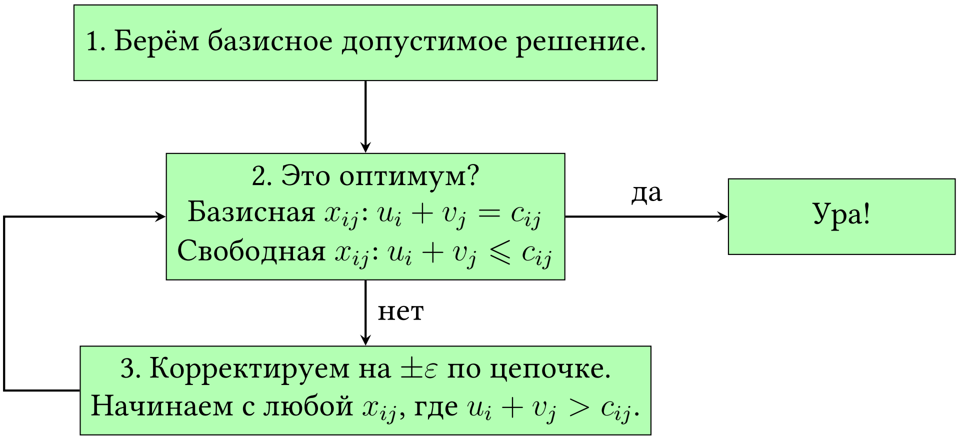
4.7 Что происходит с двойственной функции f^* при сдвиге исходной функции f на вектор b вдоль аргумента?

5. Транспортная задача

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解 , jīběn kěxíng jiě;
- метод минимального элемента, least-cost rule, 最小元素法 , zuìxiǎo yuánsù fǎ;
- метод северо-западного угла, northwest corner rule, 西北角法 , xīběi jiǎo fǎ;
- транспортная задача, transportation problem, 运输问题 , yùnshū wèntí;

Если в сбалансированной транспортной задаче m продавцов и n покупателей, то количество базисных переменных равно $m+n-1$. Базисные переменные должны соответствовать линейно независимым столбцам матрицы ограничений.

Метод потенциалов, Hitchhock method,



5.1 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum_j x_{ij} = a_i \text{ для любого } i \\ \sum_i x_{ij} = b_j \text{ для любого } j \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Может ли измениться оптимальная точка, если каждый элемент матрицы C увеличить в 2 раза?

б) Может ли измениться оптимальная точка, если один столбец матрицы C увеличить в 2 раза?

в) Может ли измениться оптимальная точка, если одну строку матрицы C увеличить в 2 раза?

г) Может ли измениться оптимальная точка, если к каждому элементу матрицы C прибавить 1?

д) Может ли измениться оптимальная точка, если в одном столбце матрицы C к каждому элементу прибавить 1?

е) Может ли измениться оптимальная точка, если в одной строке матрицы C к каждому элементу прибавить 1?

5.2 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 8x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} \to \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{11} + x_{21} = 7 \\ x_{12} + x_{22} = 11 \\ x_{13} + x_{23} = 12 \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Запишите задачу в виде симплекс-таблицы.

б) Какая линейная зависимость существует между уравнениями?

в) Сколько должно быть базисных и сколько свободных переменных?

г) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.

д) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.

е) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.

ж) Запишите двойственную задачу.

з) Запишите условия дополняющей нежёсткости.

и) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.3 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 10x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ +6x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 7x_{41} + 6x_{42} + 8x_{43} \to \min \\ \sum_i x_{i1} = 25, \sum_i x_{i2} = 25, \sum_i x_{i3} = 50, \\ \sum_j x_{1j} = 15, \sum_j x_{2j} = 20, \sum_j x_{3j} = 30, \sum_j x_{4j} = 35, \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.

б) Запишите двойственную задачу.

в) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.

г) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.

д) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.4 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу, в которой 3 производителя и 7 потребителей.

а) Сколько всего переменных в этой задаче?

б) Сколько базисных и сколько свободных переменных в этой задаче?

в) Сколько переменных в двойственной задаче?

г) Сколько уравнений в условиях дополняющей нежёсткости?

5.5 В каждой транспортной таблице выписано базисное допустимое решение. Определите, какие переменные должны быть базисными, какие должны быть свободными, а какие могут быть базисными или свободными.

а)

	5	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	7	8
	x_{31}	x_{32}	3

б)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	8
	x_{31}	x_{32}	3

в)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	x_{23}
	9	x_{32}	3

г)

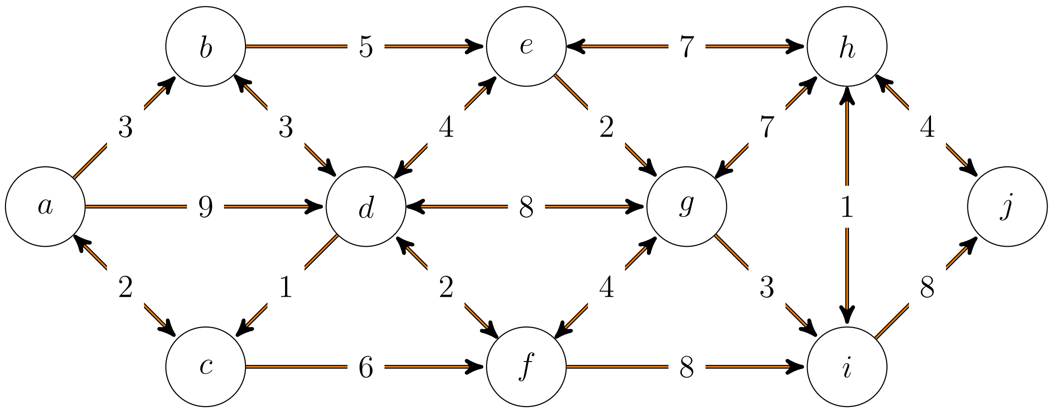
5	x_{12}	4	x_{34}	7
2	x_{22}	x_{23}	3	x_{25}
x_{31}	x_{32}	2	x_{34}	x_{35}
x_{41}	7	x_{43}	x_{44}	x_{45}

5.6

6. Сети

Алгоритм Дейкстры, Dijkstra algorithm

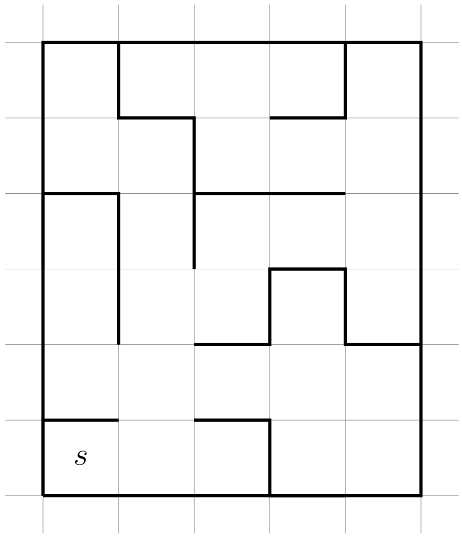
6.1 На ребрах графа указано время в пути.



а) С помощью алгоритма Дейкстры найдите самые быстрые маршруты из вершины a во все остальные вершины.

б) Выпишите матрицу весов для куска графа из вершин a, b, c и d.

6.2 С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайшее расстояние из точки старта s до каждой точки лабиринта.



6.3 Матрица весов взвешенного графа равна

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & 2 \\ 2 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 5 & 6 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте граф.

6.4 Матрица смежности графа равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Нарисуйте граф.

б) Найдите матрицу $A = M^2$. Какой смысл у элемента a_{44}? Какой смысл у элемента a_{31}?

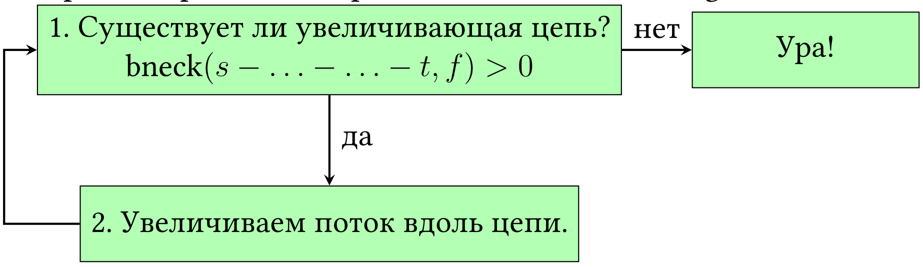
в) Найдите матрицу $B = M^3$. Какой смысл у элемента b_{31}? Какой смысл у элемента b_{32}?

Задача о максимальном потоке и о минимальном разрезе

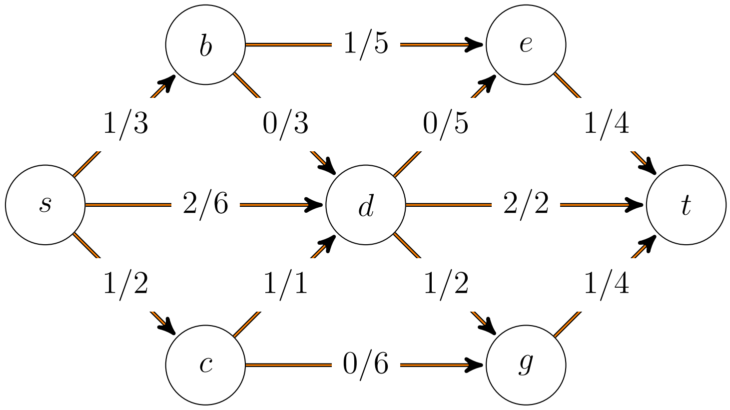
- пропускная способность, capacity, 大流量? ;
- поток, flow, 流 ;
- источник, source, 源 ;
- сток, sink, 汇 ;
- разрез, cut, 割 ;
- бутылочное горлышко, bottleneck, 瓶颈 ;
- минимальный разрез, minimal cut, 最小割 ;

- увеличивающая цепь, augmenting path, 增广路径 , zēng guǎng lu jing;
- остаточная пропускная способность, residual capacity, 残留容量 ;

Хорошие слайды можно найти у Кляйнберга и Тардос, [KT].
алгоритм Форда — Фалкерсона, Ford — Fulkerson algorithm, ? ;



6.5 На ребрах графа указаны текущий поток f и пропускная способность c. Например, надпись $1/3$ над ребром означает, что по ребру течёт поток величины 1, а пропускная способность ребра равна 3.



а) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S = \{s, b, c\}$, $T = \{e, g, t, d\}$.

б) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S = \{s, g, e\}$, $T = \{b, c, t, d\}$.

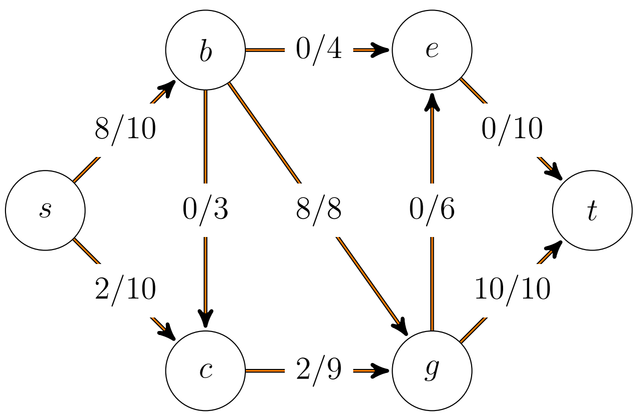
в) Найдите величину потока $v(f)$.

г) Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, b, g, e\}$.

д) Найдите остаточную пропускную способность bneck$(s - b - e - t, f)$.

е) Найдите остаточную пропускную способность bneck$(s - c - g - d - e - t, f)$.

6.6 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c.



а) Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, b, c\}$ и $T = \{e, g, t\}$.

б) Найдите пропускную способность разреза $c(S, T)$ для $S = \{s, g, e\}$ и $T = \{b, c, t\}$.

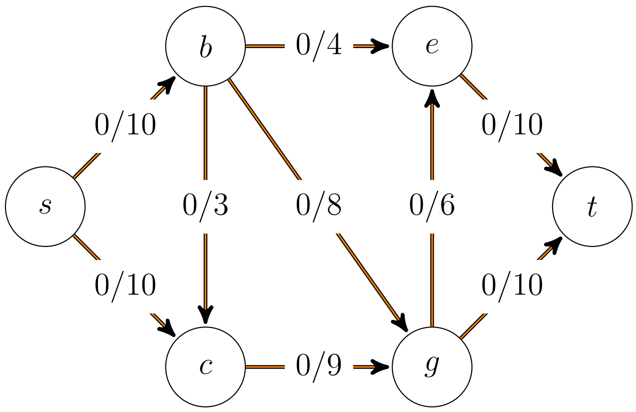
в) Найдите величину потока $v(f)$.

г) Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, c, g\}$.

д) Найдите остаточную пропускную способность bneck$(s - b - e - t, f)$.

е) Найдите остаточную пропускную способность bneck$(s - c - g - b - e - t, f)$.

6.7 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c.

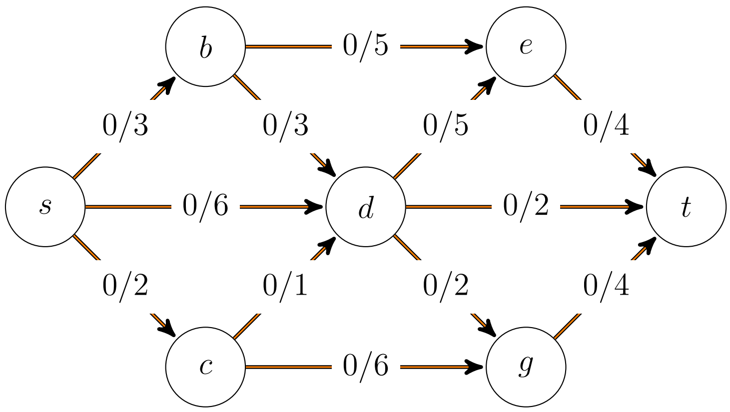


а) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.

б) Укажите минимальный разрез.

в) Запишите задачу максимизации потока как задачу линейного программирования.

6.8 На ребрах графа с помощью f/c указаны текущий поток f и пропускная способность c.



а) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.

б) Укажите минимальный разрез.

в) Запишите задачу максимизации потока как задачу линейного программирования.

Меры центральности

- Степень вершины, degree of the vertex, $\deg(v)$, 度, dù;

- Центральность по близости, closeness centrality, 接近中心性, jiējìn zhōngxīn xìng;

$$\text{closeness}(v) = \frac{1}{\sum_x d(v, x)},$$

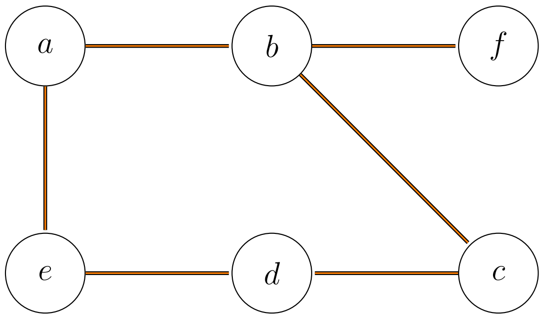
  где $d(v, x)$ — кратчайшее расстояние между вершинами v и x.

- Центральность по количеству кратчайших путей, betweenness centrality, 介数中心性, jiè shù zhōngxīn xìng;

$$\text{betweenness}(v) = \sum_{v \neq a, v \neq b, a \neq b} \frac{N_v(a, b)}{N(a, b)},$$

  где $N(a, b)$ — количество кратчайших путей между вершинами a и b, $N_v(a, b)$ — количество кратчайших путей между вершинами a и b, проходящих через вершину v.

6.9 Рассмотрим следующий граф:

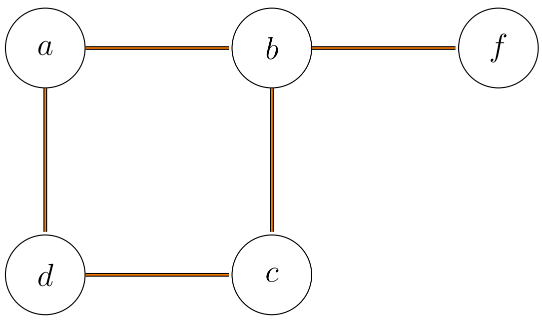


а) Найдите степень каждой вершины, $\deg(v)$.

б) Найдите центральность каждой вершины по близости, $\text{closeness}(v)$.

в) Найдите центральность каждой вершины по числу кратчайших путей, $\text{betweenness}(v)$.

6.10 Рассмотрим следующий граф:



а) Найдите степень каждой вершины, $\deg(v)$.

б) Найдите центральность каждой вершины по близости, $\text{closeness}(v)$.

в) Найдите центральность каждой вершины по числу кратчайших путей, $\text{betweenness}(v)$.

7. Неравенства

- AM/GM inequality,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

- Неравенство Коши — Буняковского, Cauchy — Schwarz inequality,

$$|\langle a, b\rangle| \leqslant \|a\|\|b\|,$$

где $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

7.1 Найдите условные экстремумы:

а) $xyz \to \max$ при условии $x + y + z = 600$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

б) $xy \to \max$ при условии $2x + y = 600$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

в) $xy \to \max$ при условии $2x + y = 400$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

г) $x^2 y \to \max$ при условии $x + y = 300$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

д) $x^3 y^5 \to \max$ при условии $6x + 7y = 200$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

е) $a + b + c \to \min$ при условии $abc = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

ж) $a^2 + b^2 + c^2 \to \min$ при условии $abc = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

з) $ab + bc + ac \to \min$ при условии $abc = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

и) $2a + 3b + 4c \to \min$ при условии $abc = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

к) $2ab + 3bc + 4ac \to \min$ при условии $abc = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

л) $a + b + c \to \min$ при условии $a^2 b^3 c^4 = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

м) $7a + 3b + 4c \to \min$ при условии $a^2 b^3 c^4 = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

7.2

7.3

7.4

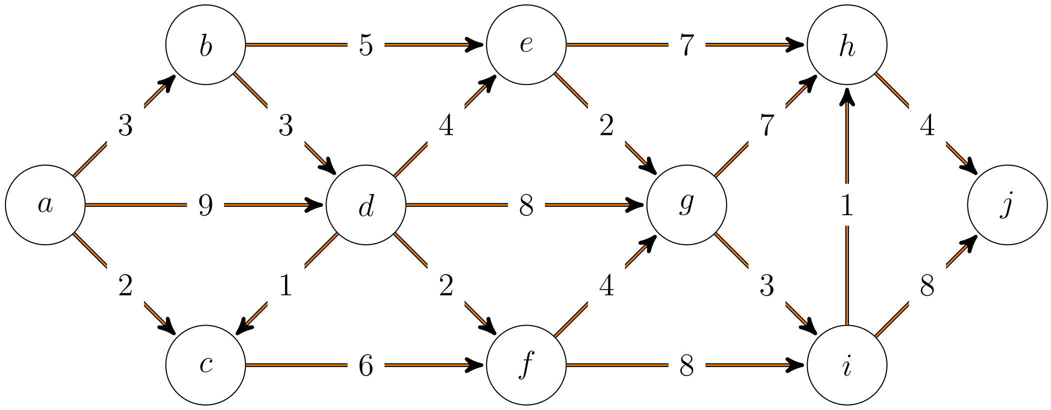
7.5

7.6

8. Динамическое программирование

- Уравнение Беллмана, Bellman equation, 贝尔曼方程, bèi'ěr màn fāngchéng;
- Метод обратной индукции, backward induction, 逆向归纳法, nìxiàng guīnà fǎ;

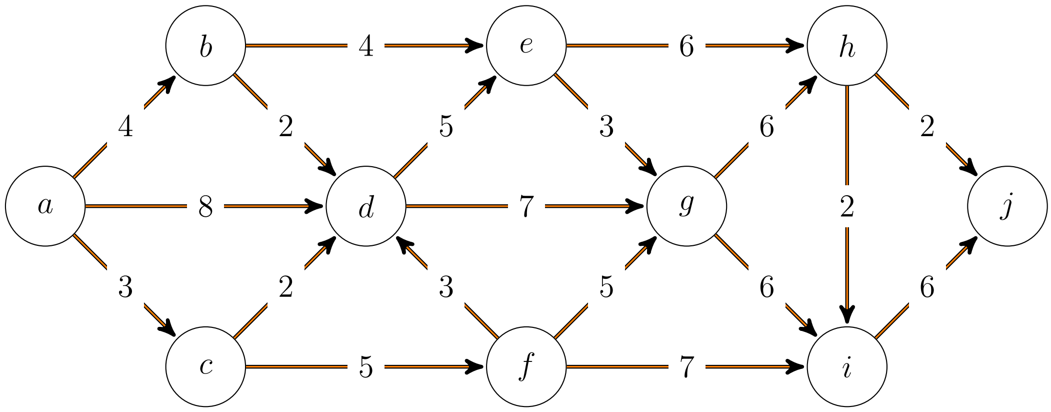
8.1 На ребрах графа указано время в пути в часах.



а) С помощью метода обратной индукции найдите самые быстрые маршруты в вершину j из вершин a, b и c.

б) С помощью метода обратной индукции найдите самые медленные маршруты в вершину j из вершин a, b и c.

8.2 На ребрах графа указано время в пути в часах.



а) С помощью метода обратной индукции найдите самые быстрые маршруты в вершину j из вершин a, b и c.

б) С помощью метода обратной индукции найдите самые медленные маршруты в вершину j из вершин a, b и c.

8.3 В куче лежит 2024 камня. Бульбазавр и Пикачу берут камни из кучи по очереди. Бульбазавр берёт камень первым. Бульбазавр может взять 2, 3 или 5 камней за один ход. Пикачу может взять 1 или 3 камня за один ход.

Проигрывает игру тот, кто первым не сможет сделать ход по правилам.

а) Сможет ли Бульбазавр выиграть?

б) Если Бульбазавр может выиграть, то какой первый ход ему нужно сделать?

8.4 В куче лежит 1000 камней. Бульбазавр и Пикачу берут камни из кучи по очереди. Бульбазавр берёт камень первым. Бульбазавр может взять 1, 2 или 4 камней за один ход. Пикачу может взять 1 или 3 камня за один ход.

Проигрывает игру тот, кто первым не сможет сделать ход по правилам.

а) Сможет ли Бульбазавр выиграть?

б) Если Бульбазавр может выиграть, то какой первый ход ему нужно сделать?

8.5 В куче лежит 1234 камня. Бульбазавр и Пикачу берут камни из кучи по очереди. Пикачу берёт камень первым. Бульбазавр может взять 2 или 3 камня за один ход. Пикачу может взять 1 или 3 камня за один ход.

Выигрывает игру тот, кто первым не сможет сделать ход по правилам.

а) Сможет ли Пикачу выиграть?

б) Если Бульбазавр может выиграть, то какой первый ход ему нужно сделать?

8.6 В самолёт можно загрузить любое целое количество контейнеров четырёх типов. Веса этих типов контейнеров равны 2, 3, 5 и 6 тонн, а прибыль за их перевозку — 5, 6, 13 и 16 тысяч рублей, соответственно. Грузоподъёмность самолёта — 14 тонн.

а) Найдите оптимальную загрузку самолёта.

б) Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования.

8.7 В самолёт можно загрузить любое целое количество контейнеров четырёх типов. Веса этих типов контейнеров равны 2, 3, 4 и 6 тонн, а прибыль за их перевозку — 5, 7, 11 и 17 тысяч рублей, соответственно. Грузоподъёмность самолёта — 15 тонн.

а) Найдите оптимальную загрузку самолёта.

б) Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования.

8.8 Рассмотрим марковский процесс принятия решений, начинающийся в состоянии s.

состояние	действие	выигрыш u_t	переход
s	a	5	s
s	b	1	$0.8\, t + 0.2\, s$
t	c	3	$0.7\, t + 0.3\, s$

Запись $0.7\, t + 0.3\, s$ означает, что с вероятностью 0.7 мы переходим в состояние t, а с вероятностью 0.3 переходим в состояние s.

а) Определите оптимальный выбор для трёх периодов без дисконтирования,

$$V_1 = u_1 + u_2 + u_3 \to \max .$$

б) Определите оптимальный выбор для трёх периодов с дисконт-фактором 0.5,

$$V_1 = u_1 + 0.5u_2 + 0.5^2 u_3 \to \max .$$

в) Определите оптимальный выбор для бесконечного количества периодов с дисконт-фактором 0.2,

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} 0.2^{t-1} u_t \to \max .$$

8.9 Рассмотрим марковский процесс принятия решений, начинающийся в состоянии s.

состояние	действие	выигрыш u_t	переход
s	a	5	s
s	b	1	$0.8\ t + 0.2\ s$
t	c	3	$0.7\ t + 0.3\ s$
t	d	2	$0.5\ t + 0.5\ s$

Запись $0.7\ t + 0.3\ s$ означает, что с вероятностью 0.7 мы переходим в состояние t, а с вероятностью 0.3 переходим в состояние s.

а) Определите оптимальный выбор для трёх периодов без дисконтирования,

$$V_1 = u_1 + u_2 + u_3 \to \max .$$

б) Определите оптимальный выбор для трёх периодов с дисконт-фактором 0.5,

$$V_1 = u_1 + 0.5u_2 + 0.5^2 u_3 \to \max .$$

в) Определите оптимальный выбор для бесконечного количества периодов с дисконт-фактором 0.2,

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} 0.2^{t-1} u_t \to \max .$$

8.10 У кота есть стартовый запас рыбы $y_1 \in [0; 1]$. В момент времени t кот может выловить и съесть количество рыбы $x_t \in [0; y_t]$. Мгновенное удовольствие кота равно $u_t = \ln x_t$. Оставшаяся невыловленная рыба размножается согласно правилу $y_{t+1} = (y_t - x_t)^{0.5}$.

а) Определите оптимальное поведение кота для трёх периодов без дисконтирования,

$$V_1 = u_1 + u_2 + u_3 \to \max .$$

б) Определите оптимальное поведение кота для трёх периодов с дисконт-фактором 0.5,

$$V_1 = u_1 + 0.5u_2 + 0.5^2 u_3 \to \max .$$

в) Определите оптимальное поведение кота для бесконечного количества периодов с дисконт-фактором 0.2,

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} 0.2^{t-1} u_t \to \max .$$

Подсказка: можно предположить, что функция ценности имеет вид $V_t(y) = a + b \ln y$.

г) Определите оптимальное поведение кота для бесконечного количества периодов и максимизации долгосрочного среднего,

$$V_1 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} u_t / T \to \max .$$

8.11 У кота есть стартовый запас рыбы $y_1 \in [0; 1]$. В момент времени t кот может выловить количество рыбы $x_t \in [0; y_t]$. Мгновенная удовольствие кота равно $u_t = 1 + \ln x_t$. Оставшаяся невыловленная рыба размножается согласно правилу $y_{t+1} = (y_t - x_t)^{0.2}$.

а) Определите оптимальное поведение кота для трёх периодов без дисконтирования,

$$V_1 = u_1 + u_2 + u_3 \to \max .$$

б) Определите оптимальное поведение кота для трёх периодов с дисконт-фактором 0.5,

$$V_1 = u_1 + 0.5u_2 + 0.5^2 u_3 \to \max .$$

в) Определите оптимальное поведение кота для бесконечного количества периодов с дисконт-фактором 0.1,

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} 0.1^{t-1} u_t.$$

Подсказка: можно предположить, что функция ценности имеет вид $V_t(y_t) = a + b \ln y_t$.

г) Определите оптимальное поведение кота для бесконечного количества периодов и максимизации долгосрочного среднего,

$$V_1 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} u_t/T \to \max .$$

8.12 У Пикачу есть стартовый капитал $y_1 \geqslant 0$. В момент времени t Пикачу может потратить $x_t \in [0; y_t]$ на удовольствия. Мгновенное удовольствие Пикачу равно $u_t = \sqrt{x_t}$. Оставшийся капитал можно увелить согласно формуле, $y_{t+1} = 2 \cdot (y_t - x_t)$.

а) Определите оптимальное поведение Пикачу для трёх периодов без дисконтирования,

$$V_1 = u_1 + u_2 + u_3 \to \max .$$

б) Определите оптимальное поведение Пикачу для трёх периодов с дисконт-фактором 0.5,

$$V_1 = u_1 + 0.5u_2 + 0.5^2 u_3 \to \max .$$

в) Определите оптимальное поведение Пикачу для бесконечного количества периодов с дисконт-фактором 0.7,

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} 0.7^{t-1} u_t \to \max .$$

Подсказка: можно предположить, что функция ценности имеет вид $V_t(y_t) = a\sqrt{y_t}$.

г) Определите оптимальное поведение Пикачу для бесконечного количества периодов и максимизации долгосрочного среднего,

$$V_1 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} u_t/T \to \max .$$

8.13 Начинающая певица дает концерты каждый день и планирует жить бесконечно долго. Каждый её концерт приносит продюсеру 0.75 тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью 0.5. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии певица не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только цветы от продюсера. Если подарить цветы на сумму $0 \leqslant x \leqslant 1$ тысяч евро, то певица выйдет из депрессии с вероятностью $\sqrt{x}$.

Продюсер максимизирует текущую ожидаемую ценность певицы.

а) Какова оптимальная стратегия продюсера без дисконтирования?

б) Какова оптимальная стратегия продюсера с дисконт-фактором 0.3?

8.14 Каждый день Василиса Прекрасная примеряет новое платьюшко и узнает величину X_t — потенциальную радость от покупки этого платьюшка. Величины X_t независимы и равномерно распределены на $[0;1]$. Узнав X_t Василиса решает, покупать ли новое платьюшко. Вернуться к предыдущему примеренному платьюшку нельзя. Пока платьюшко не куплено, Василиса испытывает ежедневные страдания в размере 0.05. Радость X_t от покупки платьюшка длится всего один день, в последующие дни Василиса с платьюшком получает нулевую полезность.

а) Какова оптимальная стратегия, если время поисков не ограничено и Василиса одинаково ценит все моменты времени?

б) Какова оптимальная стратегия, если на поиск платья в Париже у неё есть всего четыре дня, и Василиса одинаково ценит все моменты времени?

в) Какова оптимальная стратегия, если время поисков не ограничено и Максима дисконтирует полезность с коэффициентом 0.7?

8.15 Джон Сильвер подбрасывает монетку до выпадения ООО. За каждую решку казино увеличивает потенциальный выигрыш Сильвера на один песо.

В любой момент Джон Сильвер может сказать «стоп» и забрать выигрыш. Если ООО выпадает, то Сильвер не получает ничего.

Как следует играть Сильверу? Чему будет равен его выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

8.16 Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

8.17 Вам предложена следующая игра. Изначально на кону 0 рублей. Раз за разом подбрасывается правильная монетка. Если она выпадает орлом, то казино добавляет на кон 100 рублей. Если монетка выпадает решкой, то все деньги, лежащие на кону, казино забирает себе, а Вы получаете красную карточку. Игра прекращается либо когда Вы получаете третью красную карточку, либо в любой момент времени до этого по Вашему выбору. Если Вы решили остановить игру до получения трех красных карточек, то Ваш выигрыш равен сумме на кону. При получении третьей красной карточки игра заканчивается и Вы не получаете ничего. Вы заинтересованы в максимальном среднем выигрыше.

а) Как выглядит оптимальная стратегия, если только что была получена вторая красная карточка? Чему равен средний выигрыш?

б) Как выглядит оптимальная стратегия, если только что была получена первая красная карточка?

в) Как выглядит оптимальная стратегия в исходной игре? Чему равен средний выигрыш?

Стратегия суммы шансов

> Шансы события, odds of an event,
>
> $$\text{odds}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}$$

8.18 Стратегия суммы шансов.

Рассмотрим серию из n независимых испытаний. Событие A_k означает, что испытание номер k окончилось успехом. Наша цель — выбрать последний успех. Шансы $\text{odds}(A_k)$ известны.

Рассмотрим стратегию S_k: пропустить $(k-1)$ испытание и далее выбрать первое испытание с успехом.

Докажите, что наилучшая стратегия S_k будет получается при наибольшем k, для которого сумма шансов с конца не меньше единицы,

$$\text{odds}(A_n) + \text{odds}(A_{n-1}) + \ldots + \text{odds}(A_k) \geqslant 1.$$

8.19 Вася подкидывает кубик ровно 100 раз. Вася имеет право сказать «Ура» один раз. Если Вася сказал «Ура» сразу после последнего выпадения шестёрки, то он получает 100 рублей. Как выглядит оптимальная стратегия?

8.20 Джон Сильвер играет в казино. Сначал подбрасывается одновременно шесть кубиков. Потом одновременно пять кубиков. Потом четыре и так далее до одного. В любой момент Джон может сказать «Это была последняя шестёрка в игре, больше шестёрок не будет». Если Джон Сильвер окажется прав, то он получает 100 песо.

Как выглядит оптимальная стратегия Джона?

9. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A+0.5B+0.5C+0D = 0.5A+0B+0C+0.5D = 0.25A+0.25B+0.25C+0.25D$. Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \mathrm{Convex}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1 A + t_2 B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

3.2.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

3.3.

а) $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

б)

3.5.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\
\hline
x_3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 9 \\
x_4 & 2^* & 1 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
\max z & 1 & 1 & 0 & 0 & z
\end{array}, \quad x = (0, 0, 9, 8),\ z = 0.$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\
\hline
x_3 & 0 & 5/2^* & 1 & -1/2 & 5 \\
x_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 4 \\
\hline
\max z & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & z-4
\end{array}, \quad x = (4, 0, 5, 0),\ z = 4.$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\
\hline
x_2 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & 2 \\
x_1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\
\hline
\max z & 0 & 0 & -1/5 & -2/5 & z-5
\end{array}, \quad x = (3, 2, 0, 0),\ z = 5.$$

3.6.

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
x_4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\
x_5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\max z & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & z
\end{array}, \quad x = (0, 0, 0, 10, 5),\ z = 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	-3	-1	0	1	-2	0
x_3	2	1	1	0	1	5
$\max z$	-5	-1	0	0	-3	$z-15$

, $x=(0,0,5,10,0)$, $z=15$.

3.7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	1	1	1	0	10
x_4	2	1	0	1	5
$\min z$	-2	3	0	0	$-z$

, $x=(0,0,10,5)$, $z=0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-1	0	1	-1	5
x_2	2	1	0	1	5
$\min z$	-8	0	0	-3	$-z-15$

, $x=(0,5,5,0)$, $z=-15$.

3.8.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	2	1^*	3	1	0	10
x_5	1	-1	1	0	1	6
$\max z$	1	1	1	0	0	z

, $x=(0,0,0,10,6)$, $z=0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	2	1	3	1	0	10
x_5	3	0	4	1	1	16
$\max z$	-1	0	-2	-1	0	$z-10$

, $x=(0,10,0,0,16)$, $z=10$.

3.9.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	3	2	1	1	0	10
x_5	1	1^*	-1	0	1	5
$\min z$	-1	2	-3	0	0	$-z$

, $x=(0,0,0,10,5)$, $z=0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	0	3	1	-2	0
x_2	1	1	-1	0	1	5
$\min z$	-3	0	-1	0	-2	$-z-10$

, $x=(0,5,0,0,0)$, $z=-10$.

3.10.

а) $x=(3,4,0,0)$.

б) Найдите все допустимые решения.

в)

$$x_1 = 3 - x_3 - 5x_4 \geqslant 0 x_2 = 4 - 2x_3 - 6x_4 \geqslant 0 x_3 \geqslant 0 x_4 \geqslant 0$$

г) $A = (3, 4, 0, 0)$, $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$, $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$, $D = (1, 0, 2, 0)$.

д) Convex(A, B, C, D), где $A = (3, 4, 0, 0)$, $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$, $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$, $D = (1, 0, 2, 0)$.

е) $D = (1, 0, 2, 0)$, $z = 2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	-1	0	2 1	
x_3	0	0.5	1	3 2	
$\min z$	0	-1.5	0	-12	$2 - z$

3.11.

3.12.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$\max z$	0	0	1	0	-1	$z - 1$
$\min u$	0	0	0	0	-1	$-u$

, неограниченная задача

3.13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	$1/2^*$	$1/2$
$\max z$	0	0	-1	0	$z - 1$

, $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$, $z = 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	1	1	0	1
x_4	0	2^*	1	1	1
$\max z$	0	0	-1	0	$z - 1$

, $x = (1, 0, 0, 0)$, $z = 1$.

Оптимум: $[A, B] = \text{Convex}(A, B)$, $A = (1/2, 1/2)$, $B = (1, 0)$.

3.14.

3.15. $z = 15$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} x_3 \geqslant 0 \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 + 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$

г) $x \in A + \text{Cone}(u)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $u = (1, 2, 1, 0)$.

3.16. $z = -16$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} x_3 \in [0; 2] \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \text{Convex}(A, B)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

3.17. $z = 20$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} (x_3, x_4) \in S \\ S = \{(x_3, x_4) \mid x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, 6 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0\} \\ x_1 = 5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u, v)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$, $u = (2, 1, 0, 1)$, $v = (7, 0, 1, 3)$.

3.18.

а) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

б) $\text{Convex}(A, B, C) + \text{Cone}(u)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$, $u = (3, 0, 0, 1)$.

в) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$

г) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

д) $\text{Convex}(A, B)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

е) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

3.19.

а) Например, $A = (0, 0, 0)$.

б) $\text{Convex}(A, B, C, D)$, где $A = (0, 0, 0)$, $B = (10, 0, 0)$, $C = (0, 10, 0)$, $D = (0, 0, 10)$.

в) $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$, $D = (0,0,10)$.

г) Например, $B = (10,0,0)$.

д) $\mathrm{Convex}(B,C)$, где $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$.

е) $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$.

3.20.

4.1.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 \leqslant 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$, $u = 5$

в) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5 + x_4$, $x_4 \geqslant 1/2$, $z = 5$. Можно записать ответ в виде $x \in A + \mathrm{Cone}(u)$, где $A = (0,0,5.5,0.5)$, $u = (0,0,1,1)$.

4.2.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \min \\ y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ y_1 - y_2 \geqslant 3 \\ y_1 + 2y_2 \geqslant 1 \\ y_1 - 2y_2 \geqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $u = 18$

в) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z = 18$

4.3.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \end{cases}$$

б) $y_1 = -7$, $y_2 = -10$, $u = -142$

в) $x_1 = 0$, $x_2 = -42$, $x_3 = 0$, $x_4 = 16$, $z = -142$

4.4.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Неограниченная задача.

4.5.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 + 6y_2 \leqslant -1 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Пустое допустимое множество.

4.6.

а) $f^*(x^*) = (x^*)^2/4$, $f^{**}(x) = x^2$;

б) $f^*(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x^* = 0; \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$

в)

г)

д) $f^*(x^*) = \infty$, $f^{**}(x) = -\infty$;

е)

4.7.

5.1.

5.2.

а)

б) $\mathrm{Eq}_1 + \mathrm{Eq}_2 = \mathrm{Eq}_3 + \mathrm{Eq}_4 + \mathrm{Eq}_5$;

в) 4 базисных переменных и 2 свободных;

г)

д)

$$X = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

е)

$$X = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

ж)

з)

$$X = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

5.3.

5.4.

а) $3 \cdot 7 = 21$;

б) $3 + 7 - 1 = 9$, $21 - 9 = 12$;

в) $3 + 7 = 10$;

г) $10 + 21 = 31$;

5.5. Буквой «Б» отмечены переменные, которые обязательно являются базисными. Буквой «С» отмечены переменные, которые обязательно являются свободными. Надписью «Б или С» отмечены переменные, которые могут быть базисными или свободными.

а)

	Б	Б или С	Б или С
	Б или С	Б	Б
	Б или С	С	Б

б)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б
	С	Б или С	Б

в)	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б

г)	Б	Б или С	Б	С	Б
	Б	Б или С	С	Б	С
	С	Б или С	Б	С	С
	Б или С	Б	Б или С	Б или С	Б или С

5.6.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 17$
$a_1 = 5$	12	10	6 600
$a_2 = 6$	4 400	15	3
$a_3 = 7$	9 300	7	M
$a_4 = 5$	11	8 500	6 300

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

6.5.

а) $c(S, T) = 5 + 3 + 6 + 1 + 6 = 21;$

б) $c(S, T) = 3 + 6 + 4 + 4 + 2 = 19;$

в) $v(f) = 4;$

г) $f^{\text{out}}(S) = 0 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5$, $f^{\text{in}}(S) = 1 + 0 + 0 = 1;$

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 3\} = 2;$

е) $\text{bneck}(s - c - g - d - e - t, f) = \min\{1, 6, 1, 5, 3\} = 1.$

6.6.

а) $c(S,T) = 4 + 8 + 9 = 21$;

б) $c(S,T) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$;

в) $v(f) = 2 + 8 = 10$.

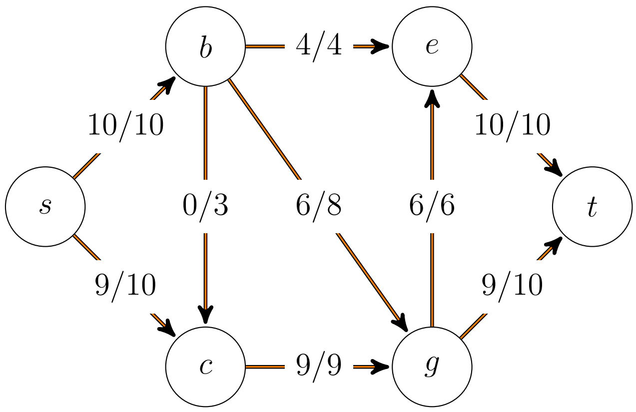
г) $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, c, g\}$.

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 10\} = 2$.

е) $\text{bneck}(s - c - g - b - e - t, f) = \min\{8, 7, 8, 4, 10\} = 4$.

6.7.

а) $\max v(f) = 19$;



б) $\min c(S,T) = 19$, $S = \{s, c\}$, $T = \{b, g, e, t\}$.

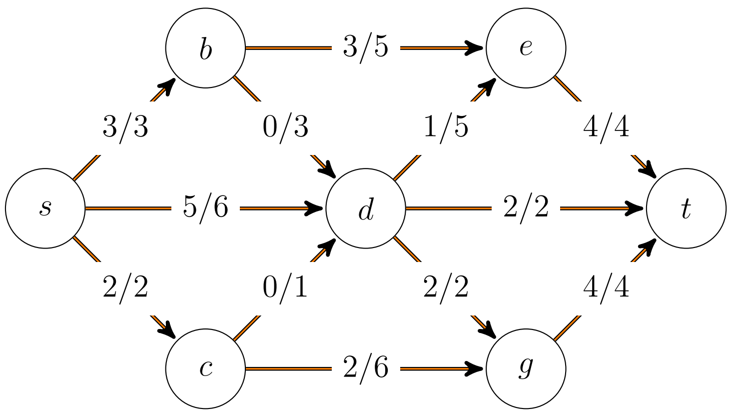
в)

$$\begin{cases} x_{sb} + x_{sc} \to \max \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0 \\ x_{sb} \leqslant 10, x_{sc} \leqslant 10, x_{bc} \leqslant 3, x_{be} \leqslant 4, x_{bg} \leqslant 8 \\ x_{et} \leqslant 10, x_{ge} \leqslant 6, x_{gt} \leqslant 10, x_{cg} \leqslant 9 \\ x_{sb} = x_{bc} + x_{bg} + x_{be}, x_{sc} + x_{bc} = x_{cg} \\ x_{bg} + x_{cg} = x_{gt} + x_{gt}, x_{be} + x_{ge} = x_{et} \end{cases}$$

6.8.

а) $\max v(f) = 10$;

Один из возможных вариантов:



б) $\min c(S,T) = 10$, $S = \{s, b, c, d, e, g\}$, $T = \{t\}$.

в)

$$\begin{cases} x_{sb} + x_{sc} + x_{sd} \to \max \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0 \\ x_{sb} \leqslant 3, x_{sd} \leqslant 6, x_{sc} \leqslant 2, x_{bd} \leqslant 3, x_{be} \leqslant 5 \\ x_{cg} \leqslant 6, x_{cd} \leqslant 1, x_{de} \leqslant 5, x_{dt} \leqslant 2, x_{dg} \leqslant 2 \\ x_{et} \leqslant 4, x_{gt} \leqslant 4 \\ x_{sb} = x_{bd} + x_{be}, x_{be} + x_{de} = x_{et}, x_{sc} = x_{cd} + x_{cg} \\ x_{dg} + x_{cg} = x_{gt}, x_{sd} + x_{bd} + x_{cd} = x_{de} + x_{dt} + x_{dg} \end{cases}$$

6.9.

вершина	deg()	closeness()	betweenness()
a	2	1/8	1
b	3	1/7	5
c	2	1/8	1
d	2	1/9	1
e	2	1/9	1
f	1	1/11	0

6.10.

вершина	deg()	closeness()	betweenness()
a	2	1/6	1
b	3	1/5	7/2
c	2	1/6	1
d	2	1/7	1/2
f	1	1/8	0

7.1.

а) $x = 200$, $y = 200$, $z = 200$, $\max f = 200^3$;

б) $xy \to \max$ при условии $2x + y = 600$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

в) $2x + y \geqslant 2\sqrt{2x \cdot y}$, следовательно, $x = 100$, $y = 200$, $\max f = 20000$.

г) $300 = 0.5x + 0.5x + y \geqslant 3\sqrt[3]{0.5x \cdot 0.5x \cdot y}$, следовательно, $x = 200$, $y = 100$, $\max f = 4000000$;

д) $x = 1400/112$, $y = 2000/112$, $\max f = 25^8 5^5/8 \cdot 7^5$;

е) $a = \sqrt[3]{100}$, $b = \sqrt[3]{100}$, $c = \sqrt[3]{100}$, $\min f = 3\sqrt[3]{100}$;

ж) $a = \sqrt[3]{100}$, $b = \sqrt[3]{100}$, $c = \sqrt[3]{100}$, $\min f = 3\sqrt[3]{10000}$;

з) $a = \sqrt[3]{100}$, $b = \sqrt[3]{100}$, $c = \sqrt[3]{100}$, $\min f = 3\sqrt[3]{10000}$;

и) $2a + 3b + 4c \geqslant 3\sqrt[3]{2a \cdot 3b \cdot 4c} = 3\sqrt{3}2400$, следовательно, $a = \sqrt[3]{300}$, $b = 2\sqrt[3]{300}/3$, $c = \sqrt[3]{300}/2$, $\min f = 3\sqrt[3]{2400}$;

к) $2ab+3bc+4ac \geqslant 3\sqrt[3]{2ab\cdot 3bc\cdot 4ac}$, следовательно, $a = 3\sqrt[3]{100/3}/2$, $b = 2\sqrt[3]{100/3}$, $c = \sqrt[3]{100/3}$, $\min f = 3\sqrt[3]{240000}$.

л) $a+b+c \to \min$ при условии $a^2b^3c^4 = 100$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

м) $a = \sqrt[9]{2^7\cdot 100/7^7}$, $b = 7\sqrt[9]{2^7\cdot 100/7^7}/2$, $c == 7\sqrt[9]{2^7\cdot 100/7^7}/2$, $\min f = 9\sqrt[9]{25\cdot 49}$.

7.2.

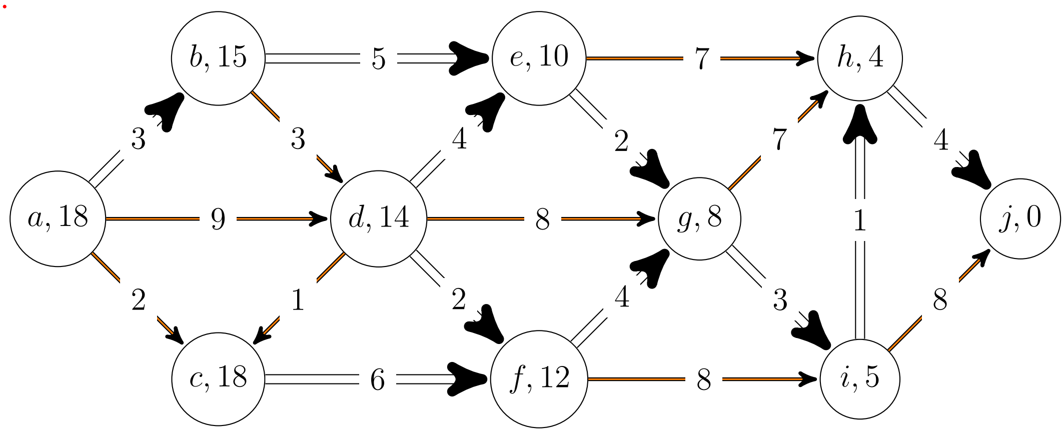
7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

8.1.



а) $a\to b\to e\to g\to i\to h\to j$: 18 часов, $b\to e\to g\to i\to h\to j$: 15 часов, $c\to f\to g\to i\to h\to j$: 18 часов.

б) $a\to d\to c\to f\to i\to j$: 32 часа, $b\to d\to c\to f\to i\to j$: 26 часов, $c\to f\to i\to j$: 22 часа.

8.2.

8.3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$	2024
Бульбазавр	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\cdots$	$+$
Пикачу	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$\cdots$	$+$

Видим цикл с периодом $T = 6$, $2024 = 337\cdot 6+2$.

а) Да, Бульбазавр может выиграть.

б) На первом ходе Бульбазавру нужно взять 2 камня.

8.4.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	1000
Бульбазавр	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$
Пикачу	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$	$-$

а) Да, Бульбазавр может выиграть.

б) На первом ходе Бульбазавр может взять 1, 2 или 4 камня.

8.5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	1234
Бульбазавр	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$
Пикачу	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$	$-$

а) Нет, при любом первом ходе Пикачу выигрывает Бульбазавр.

б) Вне зависимости от первого хода Пикачу Бульбазавр может взять 2 или 3 камня.

8.6.

$$\begin{cases} 5x_A + 6x_B + 13x_C + 16x_D \to \max \\ 2x_A + 3x_B + 5x_C + 6x_D \leqslant 14 \\ x_A, x_B, x_C, x_D \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

Грузоподъёмность	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	0	0	5	5	10	10	15	15	20	20	25	25	30	30	35
A, B	0	0	5	6/5	6/10	11/10	12/15	16/15	17/20	21/20	22/25	26/25	27/30	31/30	32/35
A, B, C	0	0	5	6	10	13/11	13/15	18/16	19/20	23/21	26/25	28/30	31/30	33/31	36/35
A, B, C, D	0	0	5	6	10	13	16/15	16/18	21/20	22/23	26/26	29/28	32/31	34/33	37/36

Рекуррентные уравнения:

$$\begin{cases} \phi_A(w) = \max\{0, \phi_A(w-2) + 5\} \\ \phi_{AB}(w) = \max\{0, \phi_{AB}(w-3) + 6\} \\ \phi_{ABC}(w) = \max\{0, \phi_{ABC}(w-5) + 13\} \\ \phi_{ABCD}(w) = \max\{0, \phi_{ABCD}(w-6) + 16\} \end{cases}$$

Оптимальный набор: A, D, D, прибыль — 37.

8.7.

8.8.

8.9.

8.10.

а) $x_3^* = y_3$, $x_2^* = 2y_2/3$, $x_1^* = 4y_1/7$, $V_3 = \ln y_3$, $V_2 = (3/2)\ln y_2 + \ln(2/3) + (1/2)\ln(1/3)$, $V_1 = (7/4)\ln y_1 + \ln(4/7) + (3/4)\ln(3/7) + \ln(2/3) + (1/2)\ln(1/3)$.

б)

в) Уравнение Беллмана имеет вид

$$a + b \ln y_1 = \max_{x_1} \{\ln x_1 + 0.2(a + b \ln(y_1 - x_1)^{1/2})\}.$$

Отсюда

$$x_1 = y_1/(1 + 0.1b).$$

Снова используем уравнение Беллмана и получаем уравнение

$$1 + 0.1b = b$$

Отсюда получаем $b = 10/9$, $x_t^* = 0.9y_t$.

8.11.

а)

б)

в) Уравнение Беллмана

$$V_1(y_1) = \max_{x_1} \{u_1 + 0.1V_2(y_2)\}.$$

В данном случае

$$a + b \ln y_1 = \max_{x_1} \{1 + \ln x_1 + 0.1 + 0.02b \ln(y_1 - x_1)\}.$$

Оптимальное потребление $x_1 = y_1/(1 + 0.02b)$.

Решаем уравнение на b: $0.02b + 1 = b$. Отсюда, $b = 50/49$ и $x_t^* = (49/50)y_t$.

г)

8.12.

а) $x_3^* = y_3$, $x_2^* = y_2/3$, $x_1^* = y_1/7$, $V_3 = \sqrt{y_3}$, $V_2 = \sqrt{3y_2}$, $V_1 = \sqrt{7y_1}$.

б) $x_3^* = y_3$, $x_2^* = (2/3)y_2$, $x_1^* = (4/7)y_1$, $V_3 = \sqrt{y_3}$, $V_2 = \sqrt{3y_2/2}$, $V_1 = \sqrt{7y_1/4}$.

в) Уравнение Беллмана имеет вид

$$a\sqrt{y_1} = \max_{x_1} \{\sqrt{x_1} + 0.7a\sqrt{2y_1 - 2x_1}\}.$$

Отсюда

$$x_1 = y_1/(1 + 0.98a^2).$$

Снова используем уравнение Беллмана,

$$a\sqrt{y_1} = \sqrt{y_1/(1 + 0.98a^2)} + 0.7a\sqrt{2}y_1 0.98a^2/(1 + 0.98a^2).$$

Домножим обе части уравнения на $\sqrt{(1 + 0.98a^2)/y_1}$,

$$a\sqrt{1 + 0.98a^2} = 1 + 0.98a^2.$$

Отсюда получаем $a = \sqrt{50}$, $x_t^* = y_t/50$.

8.13.

8.14.

8.15.

8.16. стоп на 4-5-6 или стоп на 5-6

8.17. стратегия 1: говорить стоп, если на кону 200 рублей вне зависимости от числа набранных красных карточек

стратегия 2: если нет красных карточек или одна, то останавливаться при 200 рублях, а при двух карточках останавливаться на 100 рублях.

8.18. Вероятность того, что стратегия S_k выберет последний успех равна:

$$\mathbb{P}(\text{стратегия } S_k \text{ выигрывает}) = \mathbb{P}(\text{произойдет ровно одно событие из } A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \\ = p_k q_{k+1} q_{k+2} q_{k+3} \ldots q_n + q_k p_{k+1} q_{k+2} q_{k+3} + \ldots + q_k q_{k+1} q_{k+2} \ldots q_{n-1} p_n \quad (1)$$

Для понимания сути рассмотрим условие, при котором при 10 испытаниях стратегия S_8 хуже стратегии S_9:

$$p_8 q_9 q_{10} + q_8 p_9 q_{10} + q_8 q_9 p_{10} \leqslant p_9 q_{10} + q_9 p_{10}$$

Переносим два последних слагаемых из левой части в правую и приводим подобные слагаемые:

$$p_8 q_9 q_{10} \leqslant p_8 p_9 q_{10} + p_8 q_9 p_{10}$$

И после деления:

$$1 \leqslant \frac{p_9}{1 - p_9} + \frac{p_{10}}{1 - p_{10}}$$

Теперь мы можем понять, как выглядит оптимальная стратегия в общем случае. Складываем шансы успехов, начиная с конца,

$$R_k = \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \ldots + \frac{p_k}{q_k}$$

Находим, при каком k впервые сумма R_k превышает 1. Это и есть оптимальная стратегия S_k.

8.19. Согласно теореме о сумме шансов, $0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 \geqslant 1$, поэтому пропускаем 95 подбрасываний и выбираем первую шестёрку после этого.

8.20. Согласно теореме о сумме шансов, суммируем шансы на выпадения хотя бы одной шестёрки с конца. Получаем, что $1/5 + 11/25 + 91/125 > 1$, поэтому стратегия пропустить три броска и сказать фразу в первый раз при выпадении шестёрки после этого оптимальная.

Источники мудрости

[Law] Neil Laws. *Linear programming: lecture notes.* URL: https://www.stats.ox.ac.uk/~cmcd/lp/lp.pdf.

[Fer] Tomas Ferguson. *Linear programming: concise introduction.* URL: http://web.tecnico.ulisboa.pt/mcasquilho/acad/or/ftp/FergusonUCLA_LP.pdf.

[KT] Kleinberg, John and Tardos, Éva. *Lecture Slides for Algorithm Design.* URL: https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/.

[lit] littleO (https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo). *Intuition behind the dual problem in optimization.* Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/223235.