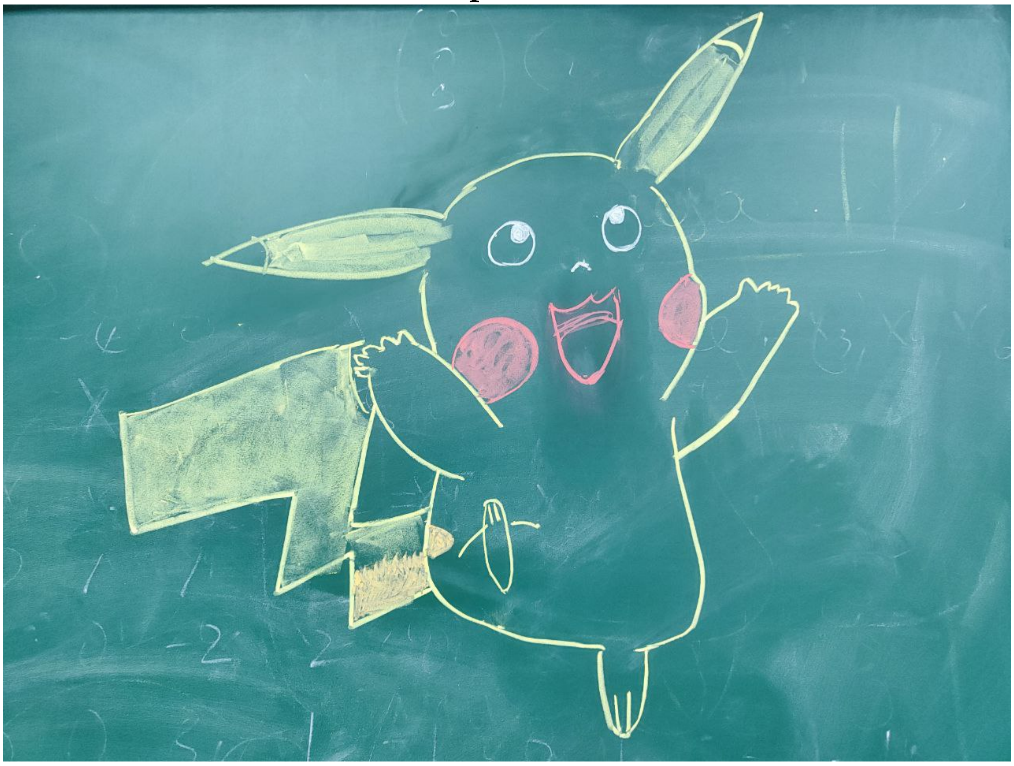
Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro
зеркало: https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro

28 марта 2024 г.



Содержание

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\operatorname{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\operatorname{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.

б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

а) Нарисуйте $\operatorname{Hull}(A, B)$, $\operatorname{Hull}(A, B, C)$.

б) Нарисуйте $\operatorname{Cone}(A)$, $\operatorname{Cone}(A, B)$, $\operatorname{Cone}(A, B, C)$.

в) Нарисуйте $\operatorname{Span}(A)$, $\operatorname{Span}(A, B)$.

г) Нарисуйте $A + \operatorname{Span}(B)$, $\operatorname{Cone}(A) + \operatorname{Cone}(B)$.

д) Нарисуйте $\operatorname{Hull}(A, B) + \operatorname{Cone}(C)$, $\operatorname{Hull}(A) + \operatorname{Cone}(B, C)$, $\operatorname{Hull}(A, C) + \operatorname{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D.

б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D всеми возможными способами.

в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D?

г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B и D?

е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, C и D?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2).

б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2).

2. Оптимизация на плоскости

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c:

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + ax_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

> Решение x системы $Ax = b$ называется *допустимым*, если все $x_i \geqslant 0$.
> Решение x системы $Ax = b$ называется *базисным*, если столбцы $\operatorname{col}_i A$ при $x_i \neq 0$ линейно независимы.

Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

Приятная стартовая точка

3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

Поиск стартовой точки

3.10 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.

в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

Особые случаи

Пустое допустимое множество

3.11 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неограниченная задача

3.12 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неединственное решение

3.13 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

в) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

в) Запишите ответ в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

3.15 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

а) Выпишите все решения в параметрическом виде.

б) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.16 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

а) Выпишите все решения в параметрическом виде.

б) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.17 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	-2	5
x_2	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20 - z$

а) Выпишите все решения в параметрическом виде.

б) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

4. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A+0.5B+0.5C+0D = 0.5A+0B+0C+0.5D = 0.25A+0.25B+0.25C+0.25D$. Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \mathrm{Hull}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1 A + t_2 B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

3.2.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

3.3.

а) $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

б)

3.5.

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ x_4 & 2^* & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline \max z & 1 & 1 & 0 & 0 & z \end{array}, \quad x = (0, 0, 9, 8),\ z = 0.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_3 & 0 & 5/2^* & 1 & -1/2 & 5 \\ x_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 4 \\ \hline \max z & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & z-4 \end{array}, \quad x = (4, 0, 5, 0),\ z = 4.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & 2 \\ x_1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\ \hline \max z & 0 & 0 & -1/5 & -2/5 & z-5 \end{array}, \quad x = (3, 2, 0, 0),\ z = 5.$$

3.6.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline x_4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ x_5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \max z & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & z \end{array}, \quad x = (0, 0, 0, 10, 5),\ z = 0.$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline x_4 & -3 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ x_3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \max z & -5 & -1 & 0 & 0 & -3 & z-15 \end{array}, \quad x = (0, 0, 5, 10, 0),\ z = 15.$$

3.7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	1	1	1	0	10
x_4	2	1	0	1	5
min z	-2	3	0	0	$-z$

, $x = (0, 0, 10, 5)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-1	0	1	-1	5
x_2	2	1	0	1	5
min z	-8	0	0	-3	$-z-15$

, $x = (0, 5, 5, 0)$, $z = -15$.

3.8.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	2	1^*	3	1	0	10
x_5	1	-1	1	0	1	6
max z	1	1	1	0	0	z

, $x = (0, 0, 0, 10, 6)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	2	1	3	1	0	10
x_5	3	0	4	1	1	16
max z	-1	0	-2	-1	0	$z-10$

, $x = (0, 10, 0, 0, 16)$, $z = 10$.

3.9.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	3	2	1	1	0	10
x_5	1	1^*	-1	0	1	5
min z	-1	2	-3	0	0	$-z$

, $x = (0, 0, 0, 10, 5)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	0	3	1	-2	0
x_2	1	1	-1	0	1	5
min z	-3	0	-1	0	-2	$-z-10$

, $x = (0, 5, 0, 0, 0)$, $z = -10$.

3.10.

3.11.

3.12.

3.13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	$1/2^*$	$1/2$
max z	0	0	-1	0	$-z-1$

, $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$, $z = 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	1	1	0	1
x_4	0	2^*	1	1	1
max z	0	0	-1	0	$-z-1$

, $x = (1, 0, 0, 0)$, $z = 1$.

Оптимум: $[A, B] = \mathrm{Hull}(A, B)$, $A = (1/2, 1/2)$, $B = (1, 0)$.

3.14.

3.15.

3.16.

3.17.

Источники мудрости