

# Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

8 марта 2024 г.

# Содержание

1	Картинки на плоскости	3
2	Оптимизация на плоскости	4
3	Решения	5
	Хэштэги	5
	Источники мудрости	5

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

## 1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

**1.1** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (5, 3)$  и  $C = (5, -3)$ .

- а) Нарисуйте точки  $0.5B + 0.5C$ ,  $0.9A + 0.1B$ ,  $3B - 2C$ .
- б) Нарисуйте точки  $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ ,  $0.1A + 0.45B + 0.45C$ ,  $0.9A + 0.05B + 0.05C$ .

**1.2** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 4)$  и  $C = (5, 1)$ .

- а) Нарисуйте  $\text{Hull}(A, B)$ ,  $\text{Hull}(A, B, C)$ .
- б) Нарисуйте  $\text{Cone}(A)$ ,  $\text{Cone}(A, B)$ ,  $\text{Cone}(A, B, C)$ .
- в) Нарисуйте  $\text{Span}(A)$ ,  $\text{Span}(A, B)$ .
- г) Нарисуйте  $A + \text{Span}(B)$ ,  $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$ .
- д) Нарисуйте  $\text{Hull}(A, B) + \text{Cone}(C)$ ,  $\text{Hull}(A) + \text{Cone}(B, C)$ ,  $\text{Hull}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$ .

**1.3** Рассмотрим точки на плоскости  $A = (1, 2)$ ,  $B = (5, 2)$ ,  $C = (1, 4)$ ,  $D = (5, 4)$ .

- а) Запишите  $E = (1, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .
- б) Запишите  $F = (3, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать  $G = (6, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- г) Сколькими способами можно записать  $H = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- д) Сколькими способами можно записать  $I = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$  и  $D$ ?
- е) Сколькими способами можно записать  $J = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- ж) Сколькими способами можно записать  $K = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $C$  и  $D$ ?

**1.4** а) Нарисуйте семейство прямых  $ax_1 + 5x_2 = 10$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .  
б) Нарисуйте семейство прямых  $2x_1 + x_2 = d$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .

## 2. Оптимизация на плоскости

### 2.1

#### 2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $c$ :

$$cx_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $a$ :

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (5)$$

$$2x_1 + ax_2 \leq 6 \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (7)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (8)$$

### 3. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а)  $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например,  $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$ .  
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы,  $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$ , где  $\alpha \in [0; 0.5]$ .

в) Нельзя, так как  $G \notin \text{Hull}(A, B, C, D)$ .

г) Есть  $\infty$  способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений  $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$ . Получаем, что  $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$ .

е) Есть 1 способ,  $J = 0.25A + 0.75B$ .

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

### Источники мудрости