

Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

29 марта 2024 г.



Содержание

| | | |
|---|------------------------------------|----|
| 1 | Картинки на плоскости | 3 |
| 2 | Оптимизация на плоскости | 4 |
| 3 | Симплекс-метод | 4 |
| 4 | Решения | 9 |
| | Хэштэги | 12 |
| | Источники мудрости | 12 |

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

- а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.
- б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

- а) Нарисуйте $\text{Hull}(A, B)$, $\text{Hull}(A, B, C)$.
- б) Нарисуйте $\text{Cone}(A)$, $\text{Cone}(A, B)$, $\text{Cone}(A, B, C)$.
- в) Нарисуйте $\text{Span}(A)$, $\text{Span}(A, B)$.
- г) Нарисуйте $A + \text{Span}(B)$, $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$.
- д) Нарисуйте $\text{Hull}(A, B) + \text{Cone}(C)$, $\text{Hull}(A) + \text{Cone}(B, C)$, $\text{Hull}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

- а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D .
- б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D ?
- г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B и D ?
- е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , C и D ?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2) .
б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2) .

2. Оптимизация на плоскости

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c :

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + ax_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

Решение x системы $Ax = b$ называется *допустимым*, если все $x_i \geq 0$.

Решение x системы $Ax = b$ называется *базисным*, если столбцы $\text{col}_i A$ при $x_i \neq 0$ линейно независимы.

Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

- а) Какие векторы являются решениями системы?
- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geq 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

- а) Какие векторы являются решениями системы?

- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geq 0$?

3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

Приятная стартовая точка

3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

Поиск стартовой точки

3.10 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

Особые случаи

Пустое допустимое множество

3.11 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Решите задачу симплекс-методом.

Неограниченная задача

3.12 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Решите задачу симплекс-методом.

Неединственное решение

3.13 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.
- д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.
- е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.
- д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.
- е) Запишите ответ в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

3.15 Рассмотрим симплекс-табличку

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b |
|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| x_1 | 1 | 0 | -1 | 3 | 5 |
| x_2 | 0 | 1 | -2 | 7 | 6 |
| $\min z$ | 0 | 0 | 0 | -3 | $12 - z$ |

- а) Найдите хотя бы одно решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

3.16 Рассмотрим симплекс-табличку

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b |
|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| x_1 | 1 | 0 | -1 | 3 | 5 |
| x_2 | 0 | 1 | 3 | 7 | 6 |
| $\max z$ | 0 | 0 | 0 | -3 | $16 + z$ |

- а) Найдите хотя бы одно решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

3.17 Рассмотрим симплекс-табличку

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b |
|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| x_1 | 1 | 0 | -1 | -2 | 5 |
| x_2 | 0 | 1 | 3 | -1 | 6 |
| $\min z$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $20 - z$ |

- а) Найдите хотя бы одно решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

4. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$.
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \text{Hull}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

| вектор | решение | базисное решение | допустимое решение |
|-------------------------|---------|------------------|--------------------|
| $x_a = (0, 0, 0, 0)$ | нет | нет | нет |
| $x_b = (0, 0, 8, 9)$ | да | да | да |
| $x_c = (1, 0, 6, 8)$ | да | нет | да |
| $x_d = (1, -9, 33, -1)$ | да | нет | нет |
| $x_e = (0, -9, 35, 0)$ | да | да | нет |

| | вектор | решение | базисное решение | допустимое решение |
|------|-------------------------|---------|------------------|--------------------|
| | $x_a = (1, 2, 3, 4)$ | нет | нет | нет |
| 3.2. | $x_b = (0, 0, 10, 11)$ | да | да | да |
| | $x_c = (1, 0, 9, 9)$ | да | нет | да |
| | $x_d = (6, -1, 7, 0)$ | да | нет | нет |
| | $x_e = (0, 11, -23, 0)$ | да | да | нет |

3.3.

а) $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

б)

3.5.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|---------|-------------------------------|
| x_3 | 1 | 3 | 1 | 0 | 9 | |
| x_4 | 2* | 1 | 0 | 1 | 8 | , $x = (0, 0, 9, 8), z = 0$. |
| $\max z$ | 1 | 1 | 0 | 0 | z | |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
| x_3 | 0 | 5/2* | 1 | -1/2 | 5 | |
| x_1 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 4 | , $x = (4, 0, 5, 0), z = 4$. |
| $\max z$ | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | $z - 4$ | |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
| x_2 | 0 | 1 | 2/5 | -1/5 | 2 | |
| x_1 | 1 | 0 | -1/5 | 3/5 | 3 | , $x = (3, 2, 0, 0), z = 5$. |
| $\max z$ | 0 | 0 | -1/5 | -2/5 | $z - 5$ | |

3.6.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|------------------------------------|
| x_4 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 10 | |
| x_5 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | , $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0$. |
| $\max z$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | z | |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
| x_4 | -3 | -1 | 0 | 1 | -2 | 0 | |
| x_3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | , $x = (0, 0, 5, 10, 0), z = 15$. |
| $\max z$ | -5 | -1 | 0 | 0 | -3 | $z - 15$ | |

3.7.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------------------------------|
| x_3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 | , $x = (0, 0, 10, 5), z = 0.$ |
| x_4 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | |

| $\min z$ | -2 | 3 | 0 | 0 | $-z$ | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----------|--------------------------------|
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
| x_3 | -1 | 0 | 1 | -1 | 5 | , $x = (0, 5, 5, 0), z = -15.$ |
| x_2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | |
| $\min z$ | -8 | 0 | 0 | -3 | $-z - 15$ | |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|------------------------------------|
| x_4 | 2 | 1* | 3 | 1 | 0 | 10 | , $x = (0, 0, 0, 10, 6), z = 0.$ |
| x_5 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 6 | |
| $\max z$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | z | |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
| x_2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 10 | , $x = (0, 10, 0, 0, 16), z = 10.$ |
| x_5 | 3 | 0 | 4 | 1 | 1 | 16 | |
| $\max z$ | -1 | 0 | -2 | -1 | 0 | $z - 10$ | |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------------------------------|
| x_4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 10 | , $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0.$ |
| x_5 | 1 | 1* | -1 | 0 | 1 | 5 | |
| $\min z$ | -1 | 2 | -3 | 0 | 0 | $-z$ | |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | b | |
| x_4 | 1 | 0 | 3 | 1 | -2 | 0 | , $x = (0, 5, 0, 0, 0), z = -10.$ |
| x_2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 5 | |
| $\min z$ | -3 | 0 | -1 | 0 | -2 | $-z - 10$ | |

3.10.

3.11.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | y_1 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|------------------------|
| x_1 | 1 | 0 | -1/2 | -1/2 | 1/2 | 1/2 | , неограниченна задача |
| x_2 | 0 | 1 | -1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | |
| $\max z$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | $z - 1$ | |
| $\min u$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | $-u$ | |

3.13.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|---------|----------------------------------|
| x_1 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 1/2 | , $x = (1/2, 1/2, 0, 0), z = 1.$ |
| x_2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2* | 1/2 | |
| $\max z$ | 0 | 0 | -1 | 0 | $z - 1$ | |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | b | |
|----------|-------|-------|-------|-------|---------|------------------------------|
| x_1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | , $x = (1, 0, 0, 0), z = 1.$ |
| x_4 | 0 | 2^* | 1 | 1 | 1 | |
| $\max z$ | 0 | 0 | -1 | 0 | $z - 1$ | |

Оптимум: $[A, B] = \text{Hull}(A, B)$, $A = (1/2, 1/2)$, $B = (1, 0)$.

3.14.

3.15.

3.16.

3.17.

Источники мудрости