Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro
зеркало: https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro

12 марта 2024 г.

Содержание

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.

б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

а) Нарисуйте $\mathrm{Hull}(A, B)$, $\mathrm{Hull}(A, B, C)$.

б) Нарисуйте $\mathrm{Cone}(A)$, $\mathrm{Cone}(A, B)$, $\mathrm{Cone}(A, B, C)$.

в) Нарисуйте $\mathrm{Span}(A)$, $\mathrm{Span}(A, B)$.

г) Нарисуйте $A + \mathrm{Span}(B)$, $\mathrm{Cone}(A) + \mathrm{Cone}(B)$.

д) Нарисуйте $\mathrm{Hull}(A, B) + \mathrm{Cone}(C)$, $\mathrm{Hull}(A) + \mathrm{Cone}(B, C)$, $\mathrm{Hull}(A, C) + \mathrm{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D.

б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D всеми возможными способами.

в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D?

г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B и D?

е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, C и D?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2).

б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2).

2. Оптимизация на плоскости

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c:

$$
\begin{aligned}
cx_1 + x_2 &\to \max &(1)\\
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6 &(2)\\
x_1 &\geqslant 0 &(3)\\
x_2 &\geqslant 0 &(4)
\end{aligned}
$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &\to \max &(5)\\
2x_1 + ax_2 &\leqslant 6 &(6)\\
x_1 &\geqslant 0 &(7)\\
x_2 &\geqslant 0 &(8)
\end{aligned}
$$

3. Симплекс-метод

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8\\
x_1 - x_2 + x_4 = 9
\end{cases}
$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + x_3 = 10\\
2x_1 + x_2 + x_4 = 11
\end{cases}
$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.3 Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

3.4 Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A+0.5B+0.5C+0D = 0.5A+0B+0C+0.5D = 0.25A+0.25B+0.25C+0.25D$. Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5-\alpha)B + (0.5-\alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \text{Hull}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1 A + t_2 B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0,0,0,0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0,0,8,9)$	да	да	да
$x_c = (1,0,6,8)$	да	нет	да
$x_d = (1,-9,33,-1)$	да	нет	нет
$x_e = (0,-9,35,0)$	да	да	нет

3.2.

3.3. $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

3.4. Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

Источники мудрости