

Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

12 марта 2024 г.

Содержание

1	Картинки на плоскости	3
2	Оптимизация на плоскости	4
3	Симплекс-метод	4
4	Решения	5
	Хэштэги	5
	Источники мудрости	5

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

- а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.
- б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

- а) Нарисуйте $\text{Hull}(A, B)$, $\text{Hull}(A, B, C)$.
- б) Нарисуйте $\text{Cone}(A)$, $\text{Cone}(A, B)$, $\text{Cone}(A, B, C)$.
- в) Нарисуйте $\text{Span}(A)$, $\text{Span}(A, B)$.
- г) Нарисуйте $A + \text{Span}(B)$, $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$.
- д) Нарисуйте $\text{Hull}(A, B) + \text{Cone}(C)$, $\text{Hull}(A) + \text{Cone}(B, C)$, $\text{Hull}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

- а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D .
- б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A , B , C и D ?
- г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B и D ?
- е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , B , C и D ?
- ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A , C и D ?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2) .
б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2) .

2. Оптимизация на плоскости

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c :

$$cx_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a :

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (5)$$

$$2x_1 + ax_2 \leq 6 \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (7)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (8)$$

3. Симплекс-метод

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, 0)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

- а) Какие векторы являются решениями системы?
- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geq 0$?

4. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$.
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \text{Hull}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

Источники мудрости