

# Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

1 апреля 2024 г.



# Содержание

1	Картинки на плоскости . . . . .	3
2	Оптимизация на плоскости . . . . .	4
3	Симплекс-метод . . . . .	4
4	Решения . . . . .	9
	Хэштэги . . . . .	12
	Источники мудрости . . . . .	12

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

## 1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

**1.1** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (5, 3)$  и  $C = (5, -3)$ .

- а) Нарисуйте точки  $0.5B + 0.5C$ ,  $0.9A + 0.1B$ ,  $3B - 2C$ .
- б) Нарисуйте точки  $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ ,  $0.1A + 0.45B + 0.45C$ ,  $0.9A + 0.05B + 0.05C$ .

**1.2** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 4)$  и  $C = (5, 1)$ .

- а) Нарисуйте  $\text{Hull}(A, B)$ ,  $\text{Hull}(A, B, C)$ .
- б) Нарисуйте  $\text{Cone}(A)$ ,  $\text{Cone}(A, B)$ ,  $\text{Cone}(A, B, C)$ .
- в) Нарисуйте  $\text{Span}(A)$ ,  $\text{Span}(A, B)$ .
- г) Нарисуйте  $A + \text{Span}(B)$ ,  $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$ .
- д) Нарисуйте  $\text{Hull}(A, B) + \text{Cone}(C)$ ,  $\text{Hull}(A) + \text{Cone}(B, C)$ ,  $\text{Hull}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$ .

**1.3** Рассмотрим точки на плоскости  $A = (1, 2)$ ,  $B = (5, 2)$ ,  $C = (1, 4)$ ,  $D = (5, 4)$ .

- а) Запишите  $E = (1, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .
- б) Запишите  $F = (3, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать  $G = (6, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- г) Сколькими способами можно записать  $H = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- д) Сколькими способами можно записать  $I = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$  и  $D$ ?
- е) Сколькими способами можно записать  $J = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?
- ж) Сколькими способами можно записать  $K = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A$ ,  $C$  и  $D$ ?

**1.4** а) Нарисуйте семейство прямых  $ax_1 + 5x_2 = 10$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .  
б) Нарисуйте семейство прямых  $2x_1 + x_2 = d$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .

## 2. Оптимизация на плоскости

### 2.1

#### 2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $c$ :

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $a$ :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + ax_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## 3. Симплекс-метод

Решение  $x$  системы  $Ax = b$  называется *допустимым*, если все  $x_i \geq 0$ .

Решение  $x$  системы  $Ax = b$  называется *базисным*, если столбцы  $\text{col}_i A$  при  $x_i \neq 0$  линейно независимы.

## Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов,  $x_a = (0, 0, 0, 0)$ ,  $x_b = (0, 0, 8, 9)$ ,  $x_c = (1, 0, 6, 8)$ ,  $x_d = (1, -9, 33, -1)$ ,  $x_e = (0, -9, 35, 0)$ .

- а) Какие векторы являются решениями системы?
- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все  $x_i \geq 0$ ?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов,  $x_a = (1, 2, 3, 4)$ ,  $x_b = (0, 0, 10, 11)$ ,  $x_c = (1, 0, 9, 9)$ ,  $x_d = (6, -1, 7, 0)$ ,  $x_e = (0, 11, -23, 0)$ .

- а) Какие векторы являются решениями системы?

- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все  $x_i \geq 0$ ?

**3.3** Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

**3.4** Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

## Приятная стартовая точка

**3.5** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

**3.6** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

**3.7** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

**3.8** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

**3.9** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

## Поиск стартовой точки

**3.10** Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

## Особые случаи

### Пустое допустимое множество

**3.11** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Решите задачу симплекс-методом.

### Неограниченная задача

**3.12** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Решите задачу симплекс-методом.

### Неединственное решение

**3.13** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.
- д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.
- е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

### 3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно оптимальное решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом в параметрическом виде.
- д) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- е) Запишите оптимальные решения в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

### 3.15 Рассмотрим симплекс-таблицку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	3	5
$x_2$	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

### 3.16 Рассмотрим симплекс-таблицку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	3	5
$x_2$	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

### 3.17 Рассмотрим симплекс-таблицку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	-2	5
$x_2$	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.



- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

## 4. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а)  $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например,  $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$ .  
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы,  $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$ , где  $\alpha \in [0; 0.5]$ .

в) Нельзя, так как  $G \notin \text{Hull}(A, B, C, D)$ .

г) Есть  $\infty$  способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений  $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$ . Получаем, что  $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$ .

е) Есть 1 способ,  $J = 0.25A + 0.75B$ .

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

	вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
	$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
3.2.	$x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
	$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
	$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
	$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

3.3.

а)  $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение  $x = (0, 0, -8, 15, 11)$  является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например,  $x = (4, 0, 0, 11, 15)$ .

б)

3.5.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	1	3	1	0	9	
$x_4$	2*	1	0	1	8	, $x = (0, 0, 9, 8), z = 0$ .
$\max z$	1	1	0	0	$z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	0	5/2*	1	-1/2	5	
$x_1$	1	1/2	0	1/2	4	, $x = (4, 0, 5, 0), z = 4$ .
$\max z$	0	1/2	0	-1/2	$z - 4$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_2$	0	1	2/5	-1/5	2	
$x_1$	1	0	-1/5	3/5	3	, $x = (3, 2, 0, 0), z = 5$ .
$\max z$	0	0	-1/5	-2/5	$z - 5$	

3.6.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	1	1	2	1	0	10	
$x_5$	2	1	1	0	1	5	, $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0$ .
$\max z$	1	2	3	0	0	$z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	-3	-1	0	1	-2	0	
$x_3$	2	1	1	0	1	5	, $x = (0, 0, 5, 10, 0), z = 15$ .
$\max z$	-5	-1	0	0	-3	$z - 15$	

3.7.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	1	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 10, 5), z = 0.$
$x_4$	2	1	0	1	5	

$\min z$	-2	3	0	0	$-z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	-1	0	1	-1	5	, $x = (0, 5, 5, 0), z = -15.$
$x_2$	2	1	0	1	5	
$\min z$	-8	0	0	-3	$-z - 15$	

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	2	1*	3	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 6), z = 0.$
$x_5$	1	-1	1	0	1	6	
$\max z$	1	1	1	0	0	$z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_2$	2	1	3	1	0	10	, $x = (0, 10, 0, 0, 16), z = 10.$
$x_5$	3	0	4	1	1	16	
$\max z$	-1	0	-2	-1	0	$z - 10$	

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	3	2	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0.$
$x_5$	1	1*	-1	0	1	5	
$\min z$	-1	2	-3	0	0	$-z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	1	0	3	1	-2	0	, $x = (0, 5, 0, 0, 0), z = -10.$
$x_2$	1	1	-1	0	1	5	
$\min z$	-3	0	-1	0	-2	$-z - 10$	

3.10.

3.11.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$b$	
$x_1$	1	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2	, неограниченна задача
$x_2$	0	1	-1/2	1/2	1/2	1/2	
$\max z$	0	0	1	0	-1	$z - 1$	
$\min u$	0	0	0	0	-1	$-u$	

3.13.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_1$	1	0	1/2	-1/2	1/2	, $x = (1/2, 1/2, 0, 0), z = 1.$
$x_2$	0	1	1/2	1/2*	1/2	
$\max z$	0	0	-1	0	$z - 1$	

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_1$	1	1	1	0	1	, $x = (1, 0, 0, 0), z = 1.$
$x_4$	0	2*	1	1	1	

$\max z \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad z - 1$   
 Оптимум:  $[A, B] = \text{Hull}(A, B)$ ,  $A = (1/2, 1/2)$ ,  $B = (1, 0)$ .

**3.14.**

**3.15.**  $z = 15$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} x_3 \geq 0 \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 + 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$

г)  $x \in A + \text{Cone}(u)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $u = (1, 2, 1, 0)$ .

**3.16.**  $z = -16$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} x_3 \in [0; 2] \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

г)  $x \in \text{Convex}(A, B)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

**3.17.**  $z = 20$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} (x_3, x_4) \in S \\ S = \{(x_3, x_4) \mid x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, 6 - 3x_3 + x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

г)  $x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u, v)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ ,  $u = (2, 1, 0, 1)$ ,  $v = (7, 0, 1, 3)$ .

## Источники мудрости