

# Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

<https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

зеркало: <https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro>

30 мая 2024 г.



皮卡丘

# Содержание

1	Картинки на плоскости	3
2	Оптимизация на плоскости	4
3	Симплекс-метод	4
4	Двойственность	10
5	Транспортная задача	12
6	Сети	14
7	Решения	19
	Хэштеги	27
	Источники мудрости	28

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.  
Подробная книжка Фергюсона, [Fer]. Слайды к оксфордскому курсу, [Law].  
Обсуждение интуиции за двойственными задачами, [htt].

## 1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \sum x_i = 1\right\}$$

**1.1** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (5, 3)$  и  $C = (5, -3)$ .

- а) Нарисуйте точки  $0.5B + 0.5C$ ,  $0.9A + 0.1B$ ,  $3B - 2C$ .
- б) Нарисуйте точки  $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ ,  $0.1A + 0.45B + 0.45C$ ,  $0.9A + 0.05B + 0.05C$ .

**1.2** Рассмотрим точки на плоскости,  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 4)$  и  $C = (5, 1)$ .

- а) Нарисуйте  $\text{Convex}(A, B)$ ,  $\text{Convex}(A, B, C)$ .
- б) Нарисуйте  $\text{Cone}(A)$ ,  $\text{Cone}(A, B)$ ,  $\text{Cone}(A, B, C)$ .
- в) Нарисуйте  $\text{Span}(A)$ ,  $\text{Span}(A, B)$ .
- г) Нарисуйте  $A + \text{Span}(B)$ ,  $\text{Cone}(A) + \text{Cone}(B)$ .
- д) Нарисуйте  $\text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(C)$ ,  $\text{Convex}(A) + \text{Cone}(B, C)$ ,  $\text{Convex}(A, C) + \text{Cone}(B, C)$ .

**1.3** Рассмотрим точки на плоскости  $A = (1, 2)$ ,  $B = (5, 2)$ ,  $C = (1, 4)$ ,  $D = (5, 4)$ .

- а) Запишите  $E = (1, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A, B, C$  и  $D$ .
- б) Запишите  $F = (3, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A, B, C$  и  $D$  всеми возможными способами.
- в) Можно ли записать  $G = (6, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию точек  $A, B, C$  и  $D$ ?
- г) Сколькими способами можно записать  $H = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A, B, C$  и  $D$ ?
- д) Сколькими способами можно записать  $I = (4, 3)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A, B$  и  $D$ ?
- е) Сколькими способами можно записать  $J = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A, B, C$  и  $D$ ?
- ж) Сколькими способами можно записать  $K = (4, 2)$  как выпуклую линейную комбинацию  $A, C$  и  $D$ ?

**1.4** а) Нарисуйте семейство прямых  $ax_1 + 5x_2 = 10$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .  
б) Нарисуйте семейство прямых  $2x_1 + x_2 = d$  на плоскости  $(x_1, x_2)$ .

## 2. Оптимизация на плоскости

- допустимое множество, feasible set, 可行集, kěxíng jí;
- допустимая область, feasible region, 可行域, kěxíng yù;
- линейное программирование, linear programming, 线性规划, xiànxíng guīhuà;
- целевая функция, objective function, 目标函数, mùbiāo hánshù;

### 2.1

#### 2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $c$ :

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях  $a$ :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + ax_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## 3. Симплекс-метод

Решение  $x$  системы  $Ax = b$  называется *допустимым*, если все  $x_i \geq 0$ .

Решение  $x$  системы  $Ax = b$  называется *базисным*, если столбцы  $\text{col}_i A$  при  $x_i \neq 0$  линейно независимы.

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解, jīběn kěxíng jiě;

## Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов,  $x_a = (0, 0, 0, 0)$ ,  $x_b = (0, 0, 8, 9)$ ,  $x_c = (1, 0, 6, 8)$ ,  $x_d = (1, -9, 33, -1)$ ,  $x_e = (0, -9, 35, 0)$ .

- Какие векторы являются решениями системы?
- Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все  $x_i \geq 0$ ?

### 3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов,  $x_a = (1, 2, 3, 4)$ ,  $x_b = (0, 0, 10, 11)$ ,  $x_c = (1, 0, 9, 9)$ ,  $x_d = (6, -1, 7, 0)$ ,  $x_e = (0, 11, -23, 0)$ .

- а) Какие векторы являются решениями системы?
- б) Какие векторы являются базисными решениями системы?
- в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все  $x_i \geq 0$ ?

### 3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

### 3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.
- б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

## Приятная стартовая точка

### 3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.
- г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.
- в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

**3.10**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	1	5	3
$x_2$	0	1	2	6	4
$\min z$	0	0	3	-3	$8 - z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите все базисные допустимые решения.

г) Запишите все допустимые решения в виде выпуклой линейной оболочки.

д) Найдите оптимальное решение.

## Особые случаи

### Пустое допустимое множество

**3.11** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

### Неограниченная задача

**3.12** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

### Неединственное решение

**3.13** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.
- д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.
- е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

### 3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Решите задачу графически.
- б) Приведите задачу к каноническому виду.
- в) Найдите хотя бы одно оптимальное решение задачи симплекс-методом.
- г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом в параметрическом виде.
- д) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- е) Запишите оптимальные решения в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

### 3.15 Рассмотрим симплекс-табличку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	3	5
$x_2$	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

### 3.16 Рассмотрим симплекс-табличку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	3	5
$x_2$	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.



г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

**3.17** Рассмотрим симплекс-таблицку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	-1	-2	5
$x_2$	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20 - z$

- а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- б) Выпишите все решения в параметрическом виде.
- в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.
- г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочку и конус.

**3.18** Рассмотрим симплекс-таблицку

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	2	-3	2
$x_2$	0	1	1	0	6
$\min z$	0	0	0	-2	$5 - z$

- а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.
- б) Найдите все допустимые решения.
- в) Найдите базисные допустимые решения.
- г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- д) Найдите все оптимальные решения.
- е) Найдите базисные оптимальные решения.

**3.19** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.
- б) Найдите все допустимые решения.
- в) Найдите базисные допустимые решения.
- г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.
- д) Найдите все оптимальные решения.
- е) Найдите базисные оптимальные решения.

## Поиск стартовой точки

3.20 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- а) Приведите задачу к канонической форме.
- б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.
- в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

## 4. Двойственность

- двойственная задача, dual problem, 对偶问题, duì'ǒu wèntí;
- двойственность, duality, 对偶, duì'ǒu;
- условия дополняющей нежёсткости, complementary slackness condition, 互补松弛条件, hùbǔ sōngchí tiáojiàn;

Двойственные задачи в стандартной форме:

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \rightarrow \min$	$\leftrightarrow$	$u = b_1y_1 + b_2y_2 \rightarrow \max$
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$	$\leftrightarrow$	$y_1 \geq 0$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$	$\leftrightarrow$	$y_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$\leftrightarrow$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1$
$x_2 \geq 0$	$\leftrightarrow$	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2$
$x_3 \geq 0$	$\leftrightarrow$	$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leq c_3$

Двойственность между равенствами и переменными с произвольными значениями:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$	$\leftrightarrow$	$y_1 \in \mathbb{R}$
$x_2 \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrow$	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_2$

Двойственные задачи в стандартной форме с векторами:

$z = c^T x \rightarrow \min$	$\leftrightarrow$	$u = b^T y \rightarrow \max$
$Ax \geq b$	$\leftrightarrow$	$y \geq 0$
$x \geq 0$	$\leftrightarrow$	$A^T y \leq c$

Двойственность в оптимальной точке:

$$\begin{aligned} y_j^* \neq 0 &\Rightarrow a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* + a_{j3}x_3^* = b_j \\ a_{1i}y_1^* + a_{2i}y_2^* \neq c_i &\Rightarrow x_i^* = 0 \end{aligned}$$

**4.1** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

**4.2** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

**4.3** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.
- б) Решите двойственную задачу.
- в) Найдите решение исходной задачи.

**4.4** Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.

- б) Решите двойственную задачу.  
в) Найдите решение исходной задачи.

#### 4.5 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- а) Выпишите двойственную задачу.  
б) Найдите допустимое множество двойственной задачи.  
в) Найдите допустимое множество исходной задачи.

## 5. Транспортная задача

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解, jīběn kěxíng jiě;
- метод минимального элемента, least-cost rule, 最小元素法, zuìxiǎo yuánsù fǎ;
- метод северо-западного угла, northwest corner rule, 西北角法, xīběi jiǎo fǎ;
- транспортная задача, transportation problem, 运输问题, yùنشū wèntí;

Если в сбалансированной транспортной задаче  $m$  продавцов и  $n$  покупателей, то количество базисных переменных равно  $m+n-1$ . Базисные переменные должны соответствовать линейно независимым столбцам матрицы ограничений.

Метод потенциалов, Hitchhock method,



#### 5.1 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} \sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_j x_{ij} = a_i \text{ для любого } i \\ \sum_i x_{ij} = b_j \text{ для любого } j \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Может ли измениться оптимальная точка, если каждый элемент матрицы  $C$  увеличить в 2 раза?

- б) Может ли измениться оптимальная точка, если один столбец матрицы  $C$  увеличить в 2 раза?
- в) Может ли измениться оптимальная точка, если одну строку матрицы  $C$  увеличить в 2 раза?
- г) Может ли измениться оптимальная точка, если к каждому элементу матрицы  $C$  прибавить 1?
- д) Может ли измениться оптимальная точка, если в одном столбце матрицы  $C$  к каждому элементу прибавить 1?
- е) Может ли измениться оптимальная точка, если в одной строке матрицы  $C$  к каждому элементу прибавить 1?

## 5.2 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 8x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} \rightarrow \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{11} + x_{21} = 7 \\ x_{12} + x_{22} = 11 \\ x_{13} + x_{23} = 12 \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Запишите задачу в виде симплекс-таблицы.
- б) Какая линейная зависимость существует между уравнениями?
- в) Сколько должно быть базисных и сколько свободных переменных?
- г) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.
- д) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.
- е) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.
- ж) Запишите двойственную задачу.
- з) Запишите условия дополняющей нежёсткости.
- и) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

## 5.3 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 10x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ + 6x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 7x_{41} + 6x_{42} + 8x_{43} \rightarrow \min \\ \sum_i x_{i1} = 25, \sum_i x_{i2} = 25, \sum_i x_{i3} = 50, \\ \sum_j x_{1j} = 15, \sum_j x_{2j} = 20, \sum_j x_{3j} = 30, \sum_j x_{4j} = 35, \\ \text{все } x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

- а) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.
- б) Запишите двойственную задачу.
- в) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.
- г) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.
- д) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

**5.4** Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу, в которой 3 производителя и 7 потребителей.

- а) Сколько всего переменных в этой задаче?
- б) Сколько базисных и сколько свободных переменных в этой задаче?
- в) Сколько переменных в двойственной задаче?
- г) Сколько уравнений в условиях дополняющей нежёсткости?

**5.5** В каждой транспортной таблице выписано базисное допустимое решение. Определите, какие переменные должны быть базисными, какие должны быть свободными, а какие могут быть базисными или свободными.

а)

	5	$x_{12}$	$x_{13}$
	$x_{21}$	7	8
	$x_{31}$	$x_{32}$	3

б)

	5	$x_{12}$	$x_{13}$
	3	$x_{22}$	8
	$x_{31}$	$x_{32}$	3

в)

	5	$x_{12}$	$x_{13}$
	3	$x_{22}$	$x_{23}$
	9	$x_{32}$	3

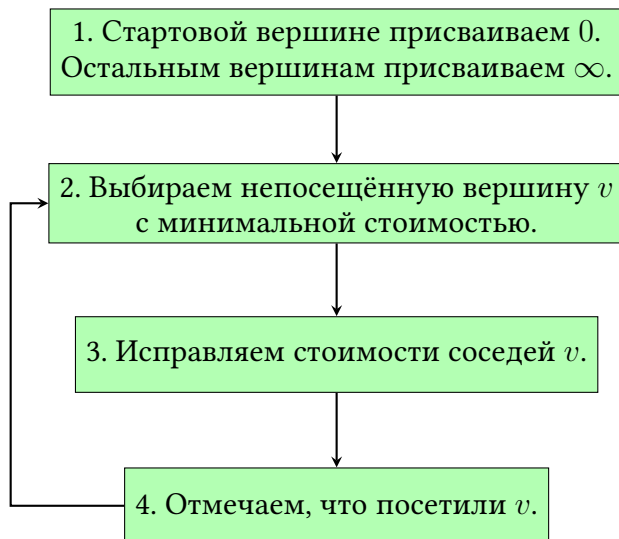
г)

	5	$x_{12}$	4	$x_{34}$	7
	2	$x_{22}$	$x_{23}$	3	$x_{25}$
	$x_{31}$	$x_{32}$	2	$x_{34}$	$x_{35}$
	$x_{41}$	7	$x_{43}$	$x_{44}$	$x_{45}$

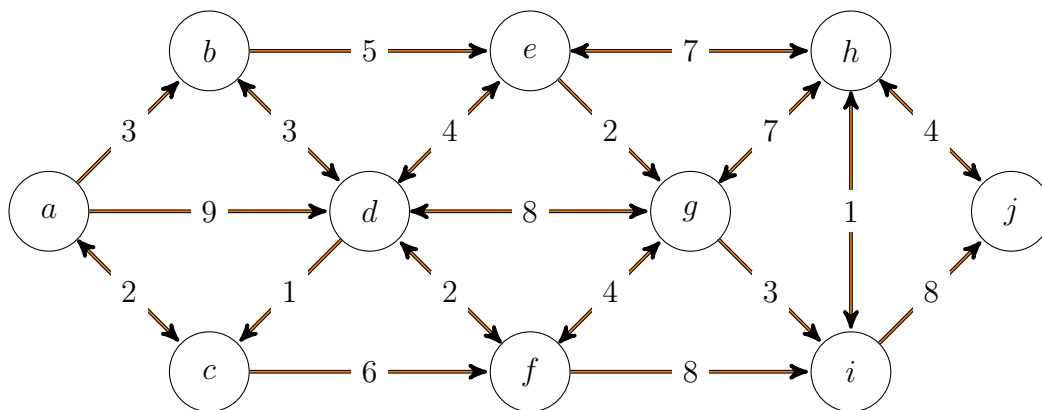
**5.6**

## 6. Сети

Алгоритм Дейкстры, Dijkstra algorithm,

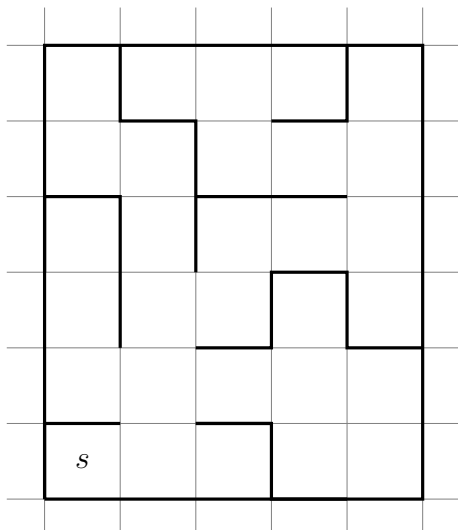


**6.1** На ребрах графа указано время в пути.



- С помощью алгоритма Дейкстры найдите самые быстрые маршруты из вершины  $A$  во все остальные вершины.
- Выпишите матрицу весов для куска графа из вершин  $A, B, C$  и  $D$ .

**6.2** С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайшее расстояние из точки старта  $s$  до каждой точки лабиринта.



### 6.3 Матрица весов взвешенного графа равна

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & 2 \\ 2 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 5 & 6 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте граф.

### 6.4 Матрица смежности графа равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Нарисуйте граф.

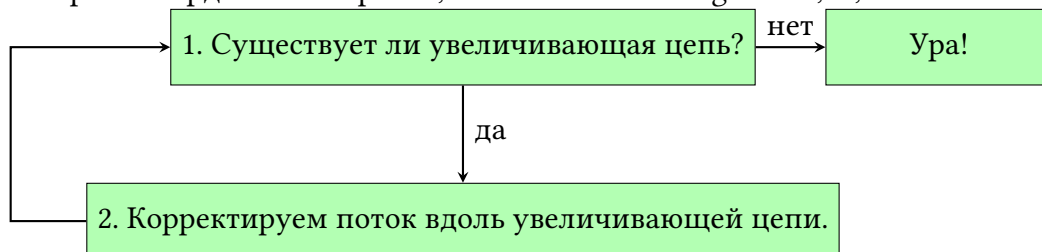
б) Найдите матрицу  $A = M^2$ . Какой смысл у элемента  $a_{44}$ ? Какой смысл у элемента  $a_{31}$ ?

в) Найдите матрицу  $B = M^3$ . Какой смысл у элемента  $b_{31}$ ? Какой смысл у элемента  $b_{32}$ ?

## Задача о максимальном потоке и о минимальном разрезе

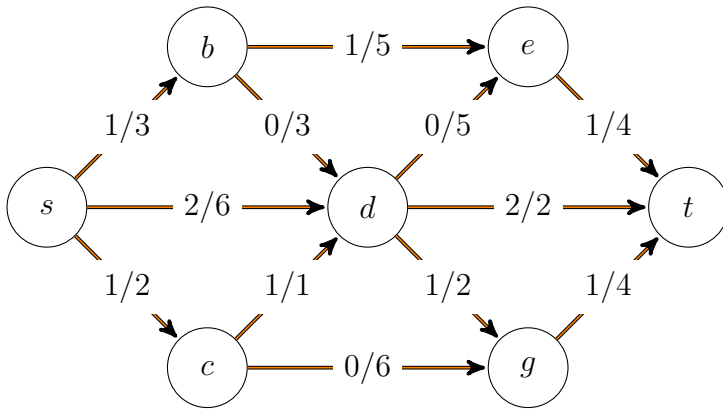
- пропускная способность, capacity, 大流量? ;
- поток, flow, 流 ;
- источник, source, 源 ;
- сток, sink, 汇 ;
- разрез, cut, 割 ;
- бутылочное горлышко, bottleneck, 瓶颈 ;
- минимальный разрез, minimal cut, 最小割 ;
- увеличивающая цепь, augmenting path, 增广路径 ;
- остаточная пропускная способность, residual capacity, 残留容量 ;

алгоритм Форда — Фалкерсона, Ford — Fulkerson algorithm, ? ;



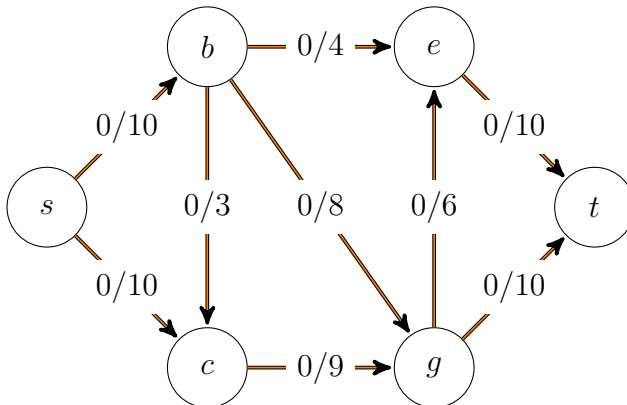
6.5 На ребрах графа указаны текущий поток  $f$  и пропускная способность  $c$ . Например, надпись  $1/3$  над ребром означает, что по ребру течёт поток величины 1, а пропускная способность ребра равна 3.





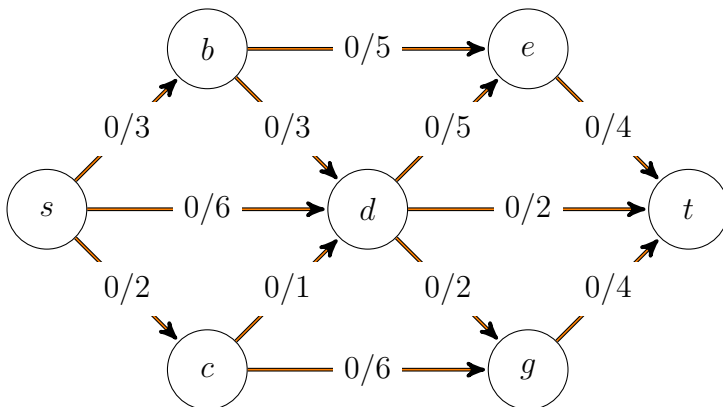
- Найдите пропускную способность разреза  $c(S, T)$  для  $S = \{s, b, c\}$ ,  $T = \{e, g, t\}$ .
- Найдите пропускную способность разреза  $c(S, T)$  для  $S = \{s, g, e\}$ ,  $T = \{b, c, t\}$ .
- Найдите величину потока  $v(f)$ .
- Найдите исходящий поток  $f^{\text{out}}(S)$  и входящий поток  $f^{\text{in}}(S)$  для множества  $S = \{s, b, g, e\}$ .
- Найдите остаточную пропускную способность  $\text{внеск}(s - b - e - t, f)$ .
- Найдите остаточную пропускную способность  $\text{внеск}(s - c - g - d - e - t, f)$ .

**6.6** Надпись  $f/c$  на ребре означает текущий поток  $f$  и пропускную способность  $c$ .



- С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.
- Укажите минимальный разрез.

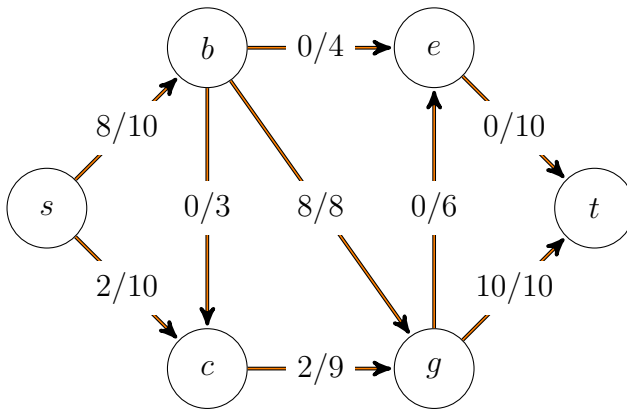
**6.7** На ребрах графа с помощью  $f/c$  указаны текущий поток  $f$  и пропускная способность  $c$ .



- С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.

б) Укажите минимальный разрез.

**6.8** Надпись  $f/c$  на ребре означает текущий поток  $f$  и пропускную способность  $c$ .



- Найдите пропускную способность разреза  $c(S, T)$  для  $S = \{s, b, c\}$  и  $T = \{e, g, t\}$ .
- Найдите пропускную способность разреза  $c(S, T)$  для  $S = \{s, g, e\}$  и  $T = \{b, c, t\}$ .
- Найдите величину потока  $v(f)$ .
- Найдите исходящий поток  $f^{\text{out}}(S)$  и входящий поток  $f^{\text{in}}(S)$  для множества  $S = \{s, c, g\}$ .
- Найдите остаточную пропускную способность  $\text{vnesk}(s - b - e - t, f)$ .
- Найдите остаточную пропускную способность  $\text{vnesk}(s - c - g - b - e - t, f)$ .

## 7. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а)  $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например,  $F = 0A + 0.5B + 0.5C + 0D = 0.5A + 0B + 0C + 0.5D = 0.25A + 0.25B + 0.25C + 0.25D$ .  
Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы,  $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$ , где  $\alpha \in [0; 0.5]$ .

в) Нельзя, так как  $G \notin \text{Convex}(A, B, C, D)$ .

г) Есть  $\infty$  способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений  $I = t_1A + t_2B + (1 - t_1 - t_2)D$ . Получаем, что  $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$ .

е) Есть 1 способ,  $J = 0.25A + 0.75B$ .

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
3.2. $x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

### 3.3.

а)  $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

### 3.4.

а) Решение  $x = (0, 0, -8, 15, 11)$  является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например,  $x = (4, 0, 0, 11, 15)$ .

б)

### 3.5.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_3$	1	3	1	0	9
$x_4$	2*	1	0	1	8

,  $x = (0, 0, 9, 8), z = 0$ .

max $z$	1	1	0	0	$z$
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$

$x_3$	0	5/2*	1	-1/2	5
$x_1$	1	1/2	0	1/2	4

,  $x = (4, 0, 5, 0), z = 4$ .

max $z$	0	1/2	0	-1/2	$z - 4$
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$

$x_2$	0	1	2/5	-1/5	2
$x_1$	1	0	-1/5	3/5	3

,  $x = (3, 2, 0, 0), z = 5$ .

max $z$	0	0	-1/5	-2/5	$z - 5$
---------	---	---	------	------	---------

### 3.6.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_4$	1	1	2	1	0	10
$x_5$	2	1	1	0	1	5

,  $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0$ .

max $z$	1	2	3	0	0	$z$
---------	---	---	---	---	---	-----

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	-3	-1	0	1	-2	0	, $x = (0, 0, 5, 10, 0), z = 15.$
$x_3$	2	1	1	0	1	5	
$\max z$	-5	-1	0	0	-3	$z - 15$	

3.7.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	1	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 10, 5), z = 0.$
$x_4$	2	1	0	1	5	
$\min z$	-2	3	0	0	$-z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	
$x_3$	-1	0	1	-1	5	, $x = (0, 5, 5, 0), z = -15.$
$x_2$	2	1	0	1	5	
$\min z$	-8	0	0	-3	$-z - 15$	

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	2	1*	3	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 6), z = 0.$
$x_5$	1	-1	1	0	1	6	
$\max z$	1	1	1	0	0	$z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_2$	2	1	3	1	0	10	, $x = (0, 10, 0, 0, 16), z = 10.$
$x_5$	3	0	4	1	1	16	
$\max z$	-1	0	-2	-1	0	$z - 10$	

3.9.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	3	2	1	1	0	10	, $x = (0, 0, 0, 10, 5), z = 0.$
$x_5$	1	1*	-1	0	1	5	
$\min z$	-1	2	-3	0	0	$-z$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
$x_4$	1	0	3	1	-2	0	, $x = (0, 5, 0, 0, 0), z = -10.$
$x_2$	1	1	-1	0	1	5	
$\min z$	-3	0	-1	0	-2	$-z - 10$	

3.10.

a)  $x = (3, 4, 0, 0).$

б) Найдите все допустимые решения.

в)

$$x_1 = 3 - x_3 - 5x_4 \geq 0, x_2 = 4 - 2x_3 - 6x_4 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

г)  $A = (3, 4, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$ ,  $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$ ,  $D = (1, 0, 2, 0)$ .

д)  $\text{Convex}(A, B, C, D)$ , где  $A = (3, 4, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2/5, 0, 3/5)$ ,  $C = (0, 0, 1/2, 1/2)$ ,  $D = (1, 0, 2, 0)$ .

е)  $D = (1, 0, 2, 0)$ ,  $z = 2$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	-1	0	2	1
$x_3$	0	0.5	1	3	2
$\min z$	0	-1.5	0	-12	$2 - z$

3.11.

3.12.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$b$
$x_1$	1	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2
$x_2$	0	1	-1/2	1/2	1/2	1/2
$\max z$	0	0	1	0	-1	$z - 1$
$\min u$	0	0	0	0	-1	$-u$

, неограниченная задача

3.13.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	0	1/2	-1/2	1/2
$x_2$	0	1	1/2	1/2*	1/2
$\max z$	0	0	-1	0	$z - 1$

,  $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$ ,  $z = 1$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
$x_1$	1	1	1	0	1
$x_4$	0	2*	1	1	1

,  $x = (1, 0, 0, 0)$ ,  $z = 1$ .

$$\max z \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad z - 1$$

Оптимум:  $[A, B] = \text{Convex}(A, B)$ ,  $A = (1/2, 1/2)$ ,  $B = (1, 0)$ .

3.14.

3.15.  $z = 15$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} x_3 \geq 0 \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 + 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$

г)  $x \in A + \text{Cone}(u)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $u = (1, 2, 1, 0)$ .

**3.16.**  $z = -16$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} x_3 \in [0; 2] \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

г)  $x \in \text{Convex}(A, B)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

**3.17.**  $z = 20$

а) Например,  $A = (5, 6, 0, 0)$ .

б)

$$\begin{cases} (x_3, x_4) \in S \\ S = \{(x_3, x_4) \mid x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, 6 - 3x_3 + x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

в)  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ .

г)  $x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u, v)$ , где  $A = (5, 6, 0, 0)$ ,  $B = (7, 0, 2, 0)$ ,  $u = (2, 1, 0, 1)$ ,  $v = (7, 0, 1, 3)$ .

**3.18.**

а) Например,  $A = (2, 6, 0, 0)$ .

б)  $\text{Convex}(A, B, C) + \text{Cone}(u)$ , где  $A = (2, 6, 0, 0)$ ,  $B = (0, 5, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 6, 10/3)$ ,  $u = (3, 0, 0, 1)$ .

в)  $A = (2, 6, 0, 0)$ ,  $B = (0, 5, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 6, 10/3)$

г) Например,  $A = (2, 6, 0, 0)$ .

д)  $\text{Convex}(A, B)$ , где  $A = (2, 6, 0, 0)$ ,  $B = (0, 5, 1, 0)$

е)  $A = (2, 6, 0, 0)$ ,  $B = (0, 5, 1, 0)$

**3.19.**

а) Например,  $A = (0, 0, 0)$ .

б)  $\text{Convex}(A, B, C, D)$ , где  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (10, 0, 0)$ ,  $C = (0, 10, 0)$ ,  $D = (0, 0, 10)$ .

в)  $A = (0, 0, 0), B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0), D = (0, 0, 10)$ .

г) Например,  $B = (10, 0, 0)$ .

д)  $\text{Convex}(B, C)$ , где  $B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0)$ .

е)  $B = (10, 0, 0), C = (0, 10, 0)$ .

### 3.20.

#### 4.1.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 - 2y_2 \leq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

б)  $y_1 = 0, y_2 = 1/2, u = 5$

в)  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5 + x_4, x_4 \geq 1/2, z = 5$ . Можно записать ответ в виде  $x \in A + \text{Cone}(u)$ , где  $A = (0, 0, 5.5, 0.5), u = (0, 0, 1, 1)$ .

#### 4.2.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \min \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

б)  $y_1 = 3, y_2 = 0, u = 18$

в)  $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 18$

#### 4.3.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leq -1 \end{cases}$$

б)  $y_1 = -7, y_2 = -10, u = -142$



в)  $x_1 = 0, x_2 = -42, x_3 = 0, x_4 = 16, z = -142$

#### 4.4.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leq -1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Неограниченная задача.

#### 4.5.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 + 6y_2 \leq -1 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Пустое допустимое множество.

#### 5.1.

#### 5.2.

а)

б)  $\text{Eq}_1 + \text{Eq}_2 = \text{Eq}_3 + \text{Eq}_4 + \text{Eq}_5$ ;

в) 4 базисных переменных и 2 свободных;

г)

д)

$$X = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

е)

$$X = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

ж)

3)

$$X = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

5.3.

5.4.

а)  $3 \cdot 7 = 21;$

б)  $3 + 7 - 1 = 9, 21 - 9 = 12;$

в)  $3 + 7 = 10;$

г)  $10 + 21 = 31;$

5.5. Буквой «Б» отмечены переменные, которые обязательно являются базисными. Буквой «С» отмечены переменные, которые обязательно являются свободными. Надписью «Б или С» отмечены переменные, которые могут быть базисными или свободными.

а)

	Б	Б или С	Б или С
	Б или С	Б	Б
	Б или С	С	Б

б)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б
	С	Б или С	Б

в)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б

г)

	Б	Б или С	Б	С	Б
	Б	Б или С	С	Б	С
	С	Б или С	Б	С	С
	Б или С	Б	Б или С	Б или С	Б или С

	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 17$
$a_1 = 5$	12	10	6
$a_2 = 6$	400	15	3
$a_3 = 7$	300	7	M
$a_4 = 5$	11	8	6
		500	300

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

6.5.

- а)  $c(S, T) = 5 + 3 + 6 + 1 + 6 = 21$ ;  
 б)  $c(S, T) = 3 + 6 + 4 + 4 + 2 = 19$ ;  
 в)  $v(f) = 4$ ;  
 г)  $f^{\text{out}}(S) = 0 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5$ ,  $f^{\text{in}}(S) = 1 + 0 + 0 = 1$ ;  
 д)  $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 3\} = 2$ ;  
 е)  $\text{bneck}(s - c - g - d - e - t, f) = \min\{1, 6, 1, 5, 3\} = 1$ .

6.6.

6.7.

6.8.

- а)  $c(S, T) = 4 + 8 + 9 = 21$ ;  
 б)  $c(S, T) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$ ;  
 в)  $v(f) = 2 + 8 = 10$ .  
 г)  $f^{\text{out}}(S)$  и входящий поток  $f^{\text{in}}(S)$  для множества  $S = \{s, c, g\}$ .  
 д)  $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 10\} = 2$ .  
 е)  $\text{bneck}(s - c - g - b - e - t, f) = \min\{8, 7, 8, 4, 10\} = 4$ .

## Источники мудрости

- [Fer] Tomas Ferguson. *Linear programming: concise introduction*. URL: [http://web.tecnico.ulisboa.pt/mcasquilho/acad/or/ftp/FergusonUCLA\\_LP.pdf](http://web.tecnico.ulisboa.pt/mcasquilho/acad/or/ftp/FergusonUCLA_LP.pdf).
- [Law] Neil Laws. *Linear programming: lecture notes*. URL: <https://www.stats.ox.ac.uk/~cmcd/lp/lp.pdf>.
- [htt] littleO (<https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo>). *Intuition behind the dual problem in optimization*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/223235>.