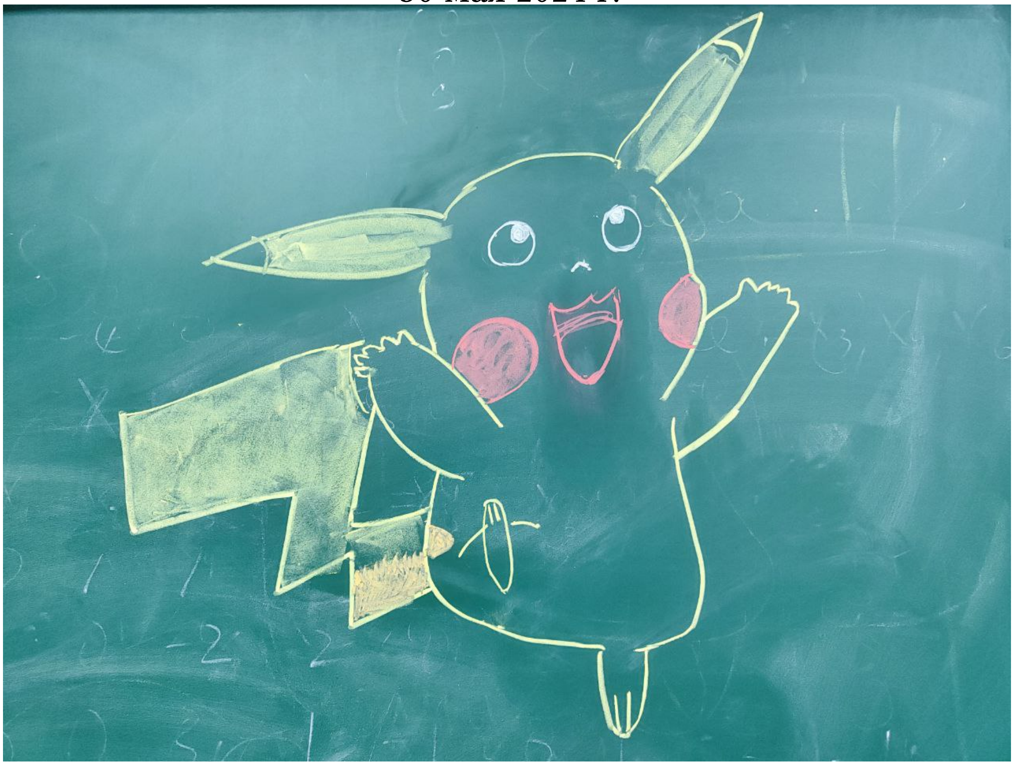
Заметки к семинарам по методам оптимальных решений

https://github.com/bdemeshev/optimal-solution-pro

зеркало: https://gitlab.com/bdemeshev/optimal-solution-pro

30 мая 2024 г.



皮卡丘

Содержание

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.
Подробная книжка Фергюсона, [Fer]. Слайды к оксфордскому курсу, [Law].
Обсуждение интуиции за двойственными задачами, [lit].

1. Картинки на плоскости

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \sum x_i = 1\right\}$$

1.1 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$ и $C = (5, -3)$.

а) Нарисуйте точки $0.5B + 0.5C$, $0.9A + 0.1B$, $3B - 2C$.

б) Нарисуйте точки $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, $0.1A + 0.45B + 0.45C$, $0.9A + 0.05B + 0.05C$.

1.2 Рассмотрим точки на плоскости, $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ и $C = (5, 1)$.

а) Нарисуйте $\mathrm{Convex}(A, B)$, $\mathrm{Convex}(A, B, C)$.

б) Нарисуйте $\mathrm{Cone}(A)$, $\mathrm{Cone}(A, B)$, $\mathrm{Cone}(A, B, C)$.

в) Нарисуйте $\mathrm{Span}(A)$, $\mathrm{Span}(A, B)$.

г) Нарисуйте $A + \mathrm{Span}(B)$, $\mathrm{Cone}(A) + \mathrm{Cone}(B)$.

д) Нарисуйте $\mathrm{Convex}(A, B) + \mathrm{Cone}(C)$, $\mathrm{Convex}(A) + \mathrm{Cone}(B, C)$, $\mathrm{Convex}(A, C) + \mathrm{Cone}(B, C)$.

1.3 Рассмотрим точки на плоскости $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 4)$, $D = (5, 4)$.

а) Запишите $E = (1, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D.

б) Запишите $F = (3, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D всеми возможными способами.

в) Можно ли записать $G = (6, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию точек A, B, C и D?

г) Сколькими способами можно записать $H = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

д) Сколькими способами можно записать $I = (4, 3)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B и D?

е) Сколькими способами можно записать $J = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, B, C и D?

ж) Сколькими способами можно записать $K = (4, 2)$ как выпуклую линейную комбинацию A, C и D?

1.4 а) Нарисуйте семейство прямых $ax_1 + 5x_2 = 10$ на плоскости (x_1, x_2).

б) Нарисуйте семейство прямых $2x_1 + x_2 = d$ на плоскости (x_1, x_2).

2. Оптимизация на плоскости

- допустимое множество, feasible set, 可行集 , kěxíng jí;
- допустимая область, feasible region, 可行域 , kěxíng yù;
- линейное программирование, linear programming, 线性规划 , xiànxìng guīhuà;
- целевая функция, objective function, 目标函数 , mùbiāo hánshù;

2.1

2.1. Оптимизация на плоскости с параметром

2.2 Решите задачу линейного программирования при всех значениях c:

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

2.3 Решите задачу линейного программирования при всех значениях a:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + ax_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

Решение x системы $Ax = b$ называется *допустимым*, если все $x_i \geqslant 0$.
Решение x системы $Ax = b$ называется *базисным*, если столбцы $\operatorname{col}_i A$ при $x_i \neq 0$ линейно независимы.

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解 , jīběn kěxíng jiě;

Терминология

3.1 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (0, 0, 0, 0)$, $x_b = (0, 0, 8, 9)$, $x_c = (1, 0, 6, 8)$, $x_d = (1, -9, 33, -1)$, $x_e = (0, -9, 35, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.2 Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Есть несколько векторов, $x_a = (1, 2, 3, 4)$, $x_b = (0, 0, 10, 11)$, $x_c = (1, 0, 9, 9)$, $x_d = (6, -1, 7, 0)$, $x_e = (0, 11, -23, 0)$.

а) Какие векторы являются решениями системы?

б) Какие векторы являются базисными решениями системы?

в) Какие векторы являются допустимыми решениями при условии, что все $x_i \geqslant 0$?

3.3 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

3.4 Рассмотрим систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно базисное допустимое решение системы.

б) Найдите все базисные допустимые решения системы.

Приятная стартовая точка

3.5 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.6 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.7 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.8 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.9 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу.

в) Укажите допустимое базисное решение для стартовой симплекс-таблицы.

г) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

3.10

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1	5	3
x_2	0	1	2	6	4
$\min z$	0	0	3	-3	$8-z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите все базисные допустимые решения.

г) Запишите все допустимые решения в виде выпуклой линейной оболочки.

д) Найдите оптимальное решение.

Особые случаи

Пустое допустимое множество

3.11 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неограниченная задача

3.12 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Решите задачу симплекс-методом.

Неединственное решение

3.13 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Приведите задачу к каноническому виду.

в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом.

д) Выпишите все базисные допустимые решения задачи.

е) Запишите ответ в виде выпуклой линейной оболочки.

3.14 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \to \min \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant x_2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Решите задачу графически.

б) Приведите задачу к каноническому виду.

в) Найдите хотя бы одно оптимальное решение задачи симплекс-методом.

г) Выпишите все решения задачи симплекс-методом в параметрическом виде.

д) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

е) Запишите оптимальные решения в виде суммы выпуклой линейной оболочки и конуса.

3.15 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	-2	7	6
$\min z$	0	0	0	-3	$12 - z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.16 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	3	5
x_2	0	1	3	7	6
$\max z$	0	0	0	-3	$16 + z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.17 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	-1	-2	5
x_2	0	1	3	-1	6
$\min z$	0	0	0	0	$20-z$

а) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

б) Выпишите все решения в параметрическом виде.

в) Выпишите все базисные оптимальные решения задачи.

г) Выпишите все решения, используя выпуклую линейную оболочки и конус.

3.18 Рассмотрим симплекс-табличку

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	2	-3	2
x_2	0	1	1	0	6
$\min z$	0	0	0	-2	$5-z$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите базисные допустимые решения.

г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

д) Найдите все оптимальные решения.

е) Найдите базисные оптимальные решения.

3.19 Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите хотя бы одно допустимое решение.

б) Найдите все допустимые решения.

в) Найдите базисные допустимые решения.

г) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

д) Найдите все оптимальные решения.

е) Найдите базисные оптимальные решения.

Поиск стартовой точки

3.20 Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Приведите задачу к канонической форме.

б) Выпишите стартовую симплекс-таблицу с искусственными переменными.

в) Найдите хотя бы одно решение задачи симплекс-методом.

4. Двойственность

- двойственная задача, dual problem, 对偶问题 , duì'ǒu wèntí;
- двойственность, duality, 对偶 , duì'ǒu;
- условия дополняющей нежёсткости, complementary slackness condition, 互补松弛条件 , hùbǔ sōngchí tiáojiàn;

Двойственные задачи в стандартной форме:

$$\begin{array}{lcr} z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min & \leftrightarrow & u = b_1y_1 + b_2y_2 \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geqslant b_1 & \leftrightarrow & y_1 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geqslant b_2 & \leftrightarrow & y_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leqslant c_1 \\ x_2 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leqslant c_2 \\ x_3 \geqslant 0 & \leftrightarrow & a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \leqslant c_3 \end{array}$$

Двойственность между равенствами и переменными с произвольными значениями:

$$\begin{array}{lcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \leftrightarrow & y_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} & \leftrightarrow & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_2 \end{array}$$

Двойственные задачи в стандартной форме с векторами:

$$\begin{array}{lcr} z = c^Tx \to \min & \leftrightarrow & u = b^Ty \to \max \\ Ax \geqslant b & \leftrightarrow & y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 & \leftrightarrow & A^Ty \leqslant c \end{array}$$

Двойственность в оптимальной точке:

$$\begin{aligned} y_j^* \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad a_{j1}x_1^* + a_{j2}x_2^* + a_{j3}x_3^* = b_j \\ a_{1i}y_1^* + a_{2i}y_2^* \neq c_i \quad &\Rightarrow \quad x_i^* = 0 \end{aligned}$$

4.1 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.2 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.3 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.4 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geqslant 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Решите двойственную задачу.

в) Найдите решение исходной задачи.

4.5 Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Выпишите двойственную задачу.

б) Найдите допустимое множество двойственной задачи.

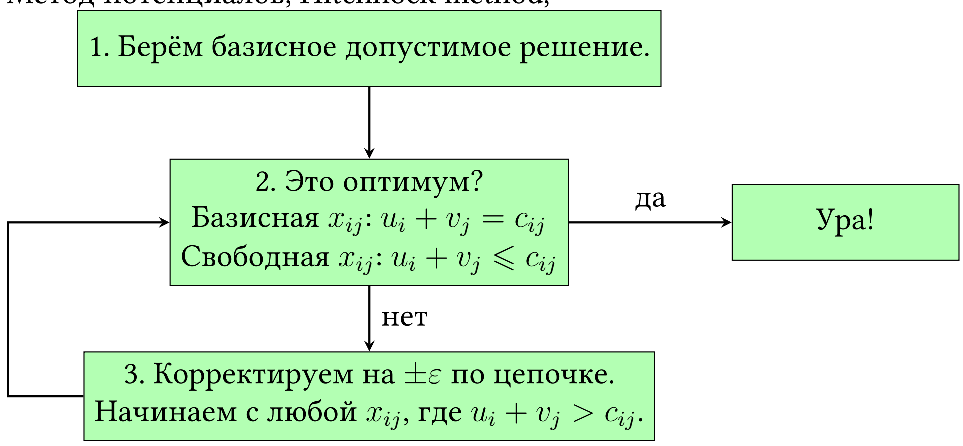
в) Найдите допустимое множество исходной задачи.

5. Транспортная задача

- базисное допустимое решение, basic feasible solution, 基本可行解 , jīběn kěxíng jiě;
- метод минимального элемента, least-cost rule, 最小元素法 , zuìxiǎo yuánsù fǎ;
- метод северо-западного угла, northwest corner rule, 西北角法 , xīběi jiǎo fǎ;
- транспортная задача, transportation problem, 运输问题 , yùnshū wèntí;

Если в сбалансированной транспортной задаче m продавцов и n покупателей, то количество базисных переменных равно $m+n-1$. Базисные переменные должны соответствовать линейно независимым столбцам матрицы ограничений.

Метод потенциалов, Hitchhock method,



5.1 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum_j x_{ij} = a_i \text{ для любого } i \\ \sum_i x_{ij} = b_j \text{ для любого } j \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Может ли измениться оптимальная точка, если каждый элемент матрицы C увеличить в 2 раза?

б) Может ли измениться оптимальная точка, если один столбец матрицы C увеличить в 2 раза?

в) Может ли измениться оптимальная точка, если одну строку матрицы C увеличить в 2 раза?

г) Может ли измениться оптимальная точка, если к каждому элементу матрицы C прибавить 1?

д) Может ли измениться оптимальная точка, если в одном столбце матрицы C к каждому элементу прибавить 1?

е) Может ли измениться оптимальная точка, если в одной строке матрицы C к каждому элементу прибавить 1?

5.2 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 8x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} \to \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{11} + x_{21} = 7 \\ x_{12} + x_{22} = 11 \\ x_{13} + x_{23} = 12 \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Запишите задачу в виде симплекс-таблицы.

б) Какая линейная зависимость существует между уравнениями?

в) Сколько должно быть базисных и сколько свободных переменных?

г) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.

д) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.

е) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.

ж) Запишите двойственную задачу.

з) Запишите условия дополняющей нежёсткости.

и) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.3 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$\begin{cases} 10x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ +6x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 7x_{41} + 6x_{42} + 8x_{43} \to \min \\ \sum_i x_{i1} = 25, \sum_i x_{i2} = 25, \sum_i x_{i3} = 50, \\ \sum_j x_{1j} = 15, \sum_j x_{2j} = 20, \sum_j x_{3j} = 30, \sum_j x_{4j} = 35, \\ \text{все } x_{ij} \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Запишите задачу в виде транспортной таблицы.

б) Запишите двойственную задачу.

в) Найдите базисное допустимое решение методом северо-западного угла.

г) Найдите базисное допустимое решение методом минимального элемента.

д) Найдите хотя бы одно оптимальное решение.

5.4 Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу, в которой 3 производителя и 7 потребителей.

а) Сколько всего переменных в этой задаче?

б) Сколько базисных и сколько свободных переменных в этой задаче?

в) Сколько переменных в двойственной задаче?

г) Сколько уравнений в условиях дополняющей нежёсткости?

5.5 В каждой транспортной таблице выписано базисное допустимое решение. Определите, какие переменные должны быть базисными, какие должны быть свободными, а какие могут быть базисными или свободными.

а)

	5	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	7	8
	x_{31}	x_{32}	3

б)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	8
	x_{31}	x_{32}	3

в)

	5	x_{12}	x_{13}
	3	x_{22}	x_{23}
	9	x_{32}	3

г)

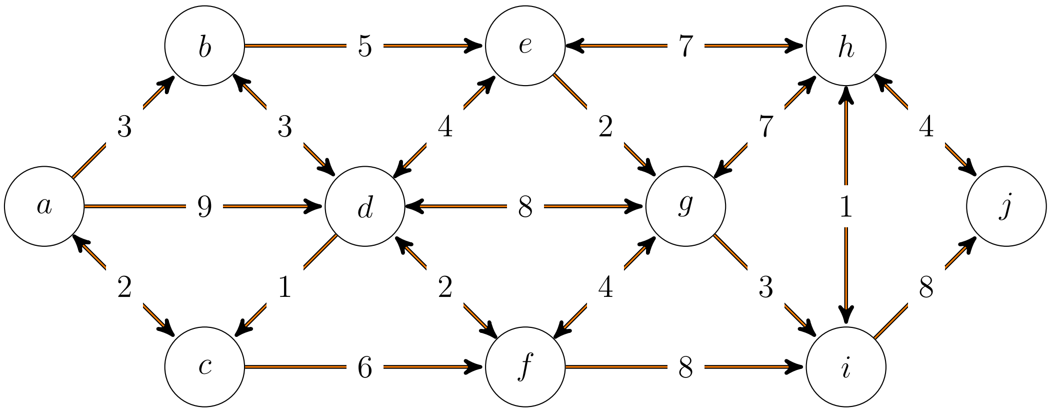
	5	x_{12}	4	x_{34}	7
	2	x_{22}	x_{23}	3	x_{25}
	x_{31}	x_{32}	2	x_{34}	x_{35}
	x_{41}	7	x_{43}	x_{44}	x_{45}

5.6

6. Сети

Алгоритм Дейкстры, Dijkstra algorithm,

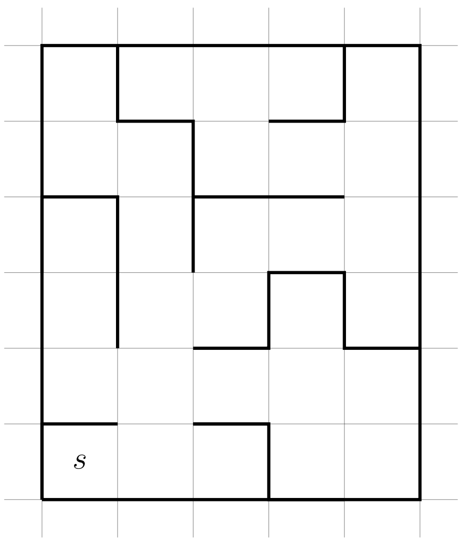
6.1 На ребрах графа указано время в пути.



а) С помощью алгоритма Дейкстры найдите самые быстрые маршруты из вершины A во все остальные вершины.

б) Выпишите матрицу весов для куска графа из вершин A, B, C и D.

6.2 С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайшее расстояние из точки старта s до каждой точки лабиринта.



6.3 Матрица весов взвешенного графа равна

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & 2 \\ 2 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 5 & 6 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте граф.

6.4 Матрица смежности графа равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Нарисуйте граф.

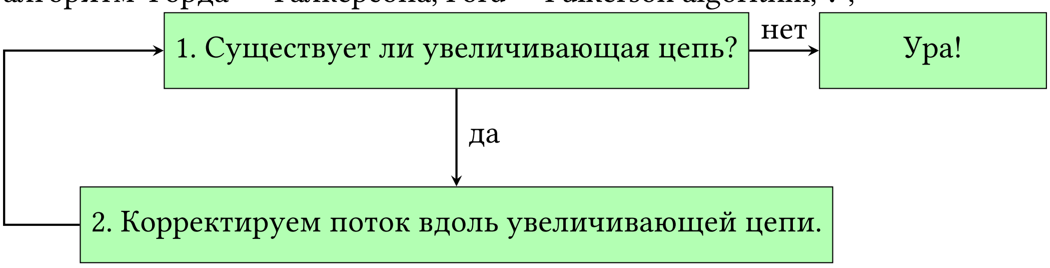
б) Найдите матрицу $A = M^2$. Какой смысл у элемента a_{44}? Какой смысл у элемента a_{31}?

в) Найдите матрицу $B = M^3$. Какой смысл у элемента b_{31}? Какой смысл у элемента b_{32}?

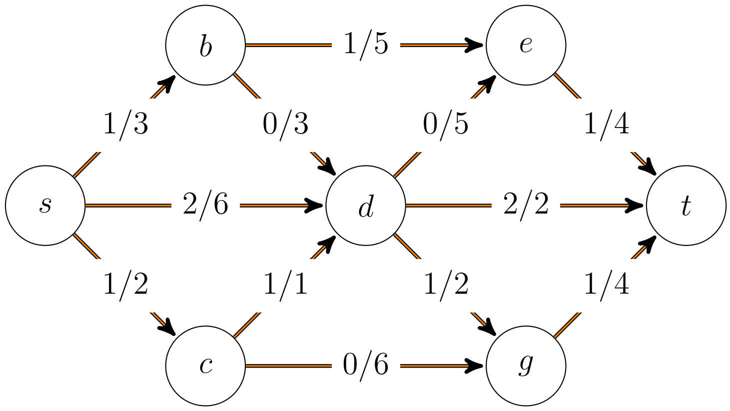
Задача о максимальном потоке и о минимальном разрезе

- пропускная способность, capacity, 大流量? ;
- поток, flow, 流 ;
- источник, source, 源 ;
- сток, sink, 汇 ;
- разрез, cut, 割 ;
- бутылочное горлышко, bottleneck, 瓶颈 ;
- минимальный разрез, minimal cut, 最小割 ;
- увеличивающая цепь, augmenting path, 增广路径 ;
- остаточная пропускная способность, residual capacity, 残留容量 ;

Хорошие слайды можно найти у Кляйнберга и Тардос, [KT].
алгоритм Форда — Фалкерсона, Ford — Fulkerson algorithm, ? ;



6.5 На ребрах графа указаны текущий поток f и пропускная способность c. Например, надпись $1/3$ над ребром означает, что по ребру течёт поток величины 1, а пропускная способность ребра равна 3.



а) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S=\{s,b,c\}$, $T=\{e,g,t\}$.

б) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S=\{s,g,e\}$, $T=\{b,c,t\}$.

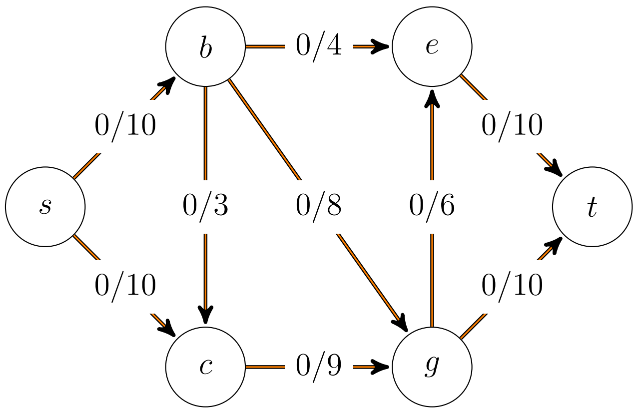
в) Найдите величину потока $v(f)$.

г) Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s,b,g,e\}$.

д) Найдите остаточную пропускную способность $\text{bneck}(s-b-e-t,f)$.

е) Найдите остаточную пропускную способность $\text{bneck}(s-c-g-d-e-t,f)$.

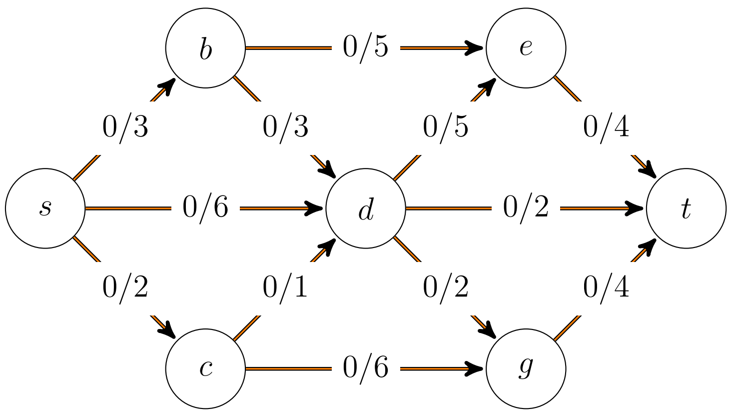
6.6 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c.



а) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.

б) Укажите минимальный разрез.

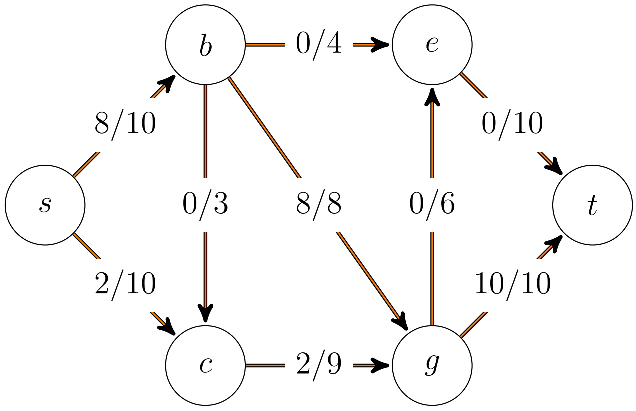
6.7 На ребрах графа с помощью f/c указаны текущий поток f и пропускная способность c.



а) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найдите максимальный поток.

б) Укажите минимальный разрез.

6.8 Надпись f/c на ребре означает текущий поток f и пропускную способность c.



а) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S = \{s,b,c\}$ и $T = \{e,g,t\}$.

б) Найдите пропускную способность разреза $c(S,T)$ для $S = \{s,g,e\}$ и $T = \{b,c,t\}$.

в) Найдите величину потока $v(f)$.

г) Найдите исходящий поток $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s,c,g\}$.

д) Найдите остаточную пропускную способность $\text{bneck}(s-b-e-t,f)$.

е) Найдите остаточную пропускную способность $\text{bneck}(s-c-g-b-e-t,f)$.

7. Решения

1.1.

1.2.

1.3.

а) $E = 0.5A + 0B + 0.5C + 0D$

б) Например, $F = 0A+0.5B+0.5C+0D = 0.5A+0B+0C+0.5D = 0.25A+0.25B+0.25C+0.25D$. Для нахождения всех способов надо решить систему:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = E\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Система имеет бесконечное количество решений.

Все способы, $F = \alpha A + (0.5 - \alpha)B + (0.5 - \alpha)C + \alpha D$, где $\alpha \in [0; 0.5]$.

в) Нельзя, так как $G \notin \text{Convex}(A, B, C, D)$.

г) Есть ∞ способов.

д) Есть 1 способ. Решаем систему уравнений $I = t_1 A + t_2 B + (1 - t_1 - t_2)D$. Получаем, что $I = 0.25A + 0.25B + 0.5D$.

е) Есть 1 способ, $J = 0.25A + 0.75B$.

ж) 0

1.4.

2.1.

2.2.

2.3.

3.1.

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (0, 0, 0, 0)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 8, 9)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 6, 8)$	да	нет	да
$x_d = (1, -9, 33, -1)$	да	нет	нет
$x_e = (0, -9, 35, 0)$	да	да	нет

вектор	решение	базисное решение	допустимое решение
$x_a = (1, 2, 3, 4)$	нет	нет	нет
$x_b = (0, 0, 10, 11)$	да	да	да
$x_c = (1, 0, 9, 9)$	да	нет	да
$x_d = (6, -1, 7, 0)$	да	нет	нет
$x_e = (0, 11, -23, 0)$	да	да	нет

3.2.

3.3.

а) $x = (0, 0, 8, 15, 11)$

б)

3.4.

а) Решение $x = (0, 0, -8, 15, 11)$ является базисным и не является допустимым. Подойдёт, например, $x = (4, 0, 0, 11, 15)$.

б)

3.5.

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 9 \\ x_4 & 2^* & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline \max z & 1 & 1 & 0 & 0 & z \end{array}, \quad x = (0, 0, 9, 8),\ z = 0.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_3 & 0 & 5/2^* & 1 & -1/2 & 5 \\ x_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 4 \\ \hline \max z & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & z-4 \end{array}, \quad x = (4, 0, 5, 0),\ z = 4.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & 2 \\ x_1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3 \\ \hline \max z & 0 & 0 & -1/5 & -2/5 & z-5 \end{array}, \quad x = (3, 2, 0, 0),\ z = 5.$$

3.6.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline x_4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ x_5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \max z & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & z \end{array}, \quad x = (0, 0, 0, 10, 5),\ z = 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	-3	-1	0	1	-2	0
x_3	2	1	1	0	1	5
max z	-5	-1	0	0	-3	$z-15$

, $x = (0, 0, 5, 10, 0)$, $z = 15$.

3.7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	1	1	1	0	10
x_4	2	1	0	1	5
min z	-2	3	0	0	$-z$

, $x = (0, 0, 10, 5)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-1	0	1	-1	5
x_2	2	1	0	1	5
min z	-8	0	0	-3	$-z-15$

, $x = (0, 5, 5, 0)$, $z = -15$.

3.8.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	2	1^*	3	1	0	10
x_5	1	-1	1	0	1	6
max z	1	1	1	0	0	z

, $x = (0, 0, 0, 10, 6)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	2	1	3	1	0	10
x_5	3	0	4	1	1	16
max z	-1	0	-2	-1	0	$z-10$

, $x = (0, 10, 0, 0, 16)$, $z = 10$.

3.9.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	3	2	1	1	0	10
x_5	1	1^*	-1	0	1	5
min z	-1	2	-3	0	0	$-z$

, $x = (0, 0, 0, 10, 5)$, $z = 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	0	3	1	-2	0
x_2	1	1	-1	0	1	5
min z	-3	0	-1	0	-2	$-z-10$

, $x = (0, 5, 0, 0, 0)$, $z = -10$.

3.10.

а) $x = (3, 4, 0, 0)$.

б) Найдите все допустимые решения.

в)
$$x_1 = 3 - x_3 - 5x_4 \geqslant 0 x_2 = 4 - 2x_3 - 6x_4 \geqslant 0 x_3 \geqslant 0 x_4 \geqslant 0$$

г) $A = (3,4,0,0)$, $B = (0,2/5,0,3/5)$, $C = (0,0,1/2,1/2)$, $D = (1,0,2,0)$.

д) Convex(A,B,C,D), где $A = (3,4,0,0)$, $B = (0,2/5,0,3/5)$, $C = (0,0,1/2,1/2)$, $D = (1,0,2,0)$.

е) $D = (1,0,2,0)$, $z = 2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	-1	0	2 1	
x_3	0	0.5	1	3 2	
min z	0	-1.5	0	-12	$2-z$

3.11.

3.12.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
max z	0	0	1	0	-1	$z-1$
min u	0	0	0	0	-1	$-u$

, неограниченная задача

3.13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	$1/2^*$	$1/2$
max z	0	0	-1	0	$z-1$

, $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$, $z = 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	1	1	0	1
x_4	0	2^*	1	1	1
max z	0	0	-1	0	$z-1$

, $x = (1,0,0,0)$, $z = 1$.

Оптимум: $[A,B] = \text{Convex}(A,B)$, $A = (1/2,1/2)$, $B = (1,0)$.

3.14.

3.15. $z = 15$

а) Например, $A = (5,6,0,0)$.

б)
$$\begin{cases} x_3 \geqslant 0 \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 + 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$

г) $x \in A + \mathrm{Cone}(u)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $u = (1, 2, 1, 0)$.

3.16. $z = -16$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} x_3 \in [0; 2] \\ x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 6 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \mathrm{Convex}(A, B)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

3.17. $z = 20$

а) Например, $A = (5, 6, 0, 0)$.

б)

$$\begin{cases} (x_3, x_4) \in S \\ S = \{(x_3, x_4) \mid x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, 6 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0\} \\ x_1 = 5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

в) $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$.

г) $x \in \mathrm{Convex}(A, B) + \mathrm{Cone}(u, v)$, где $A = (5, 6, 0, 0)$, $B = (7, 0, 2, 0)$, $u = (2, 1, 0, 1)$, $v = (7, 0, 1, 3)$.

3.18.

а) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

б) $\mathrm{Convex}(A, B, C) + \mathrm{Cone}(u)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$, $u = (3, 0, 0, 1)$.

в) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$, $C = (0, 0, 6, 10/3)$

г) Например, $A = (2, 6, 0, 0)$.

д) $\mathrm{Convex}(A, B)$, где $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

е) $A = (2, 6, 0, 0)$, $B = (0, 5, 1, 0)$

3.19.

а) Например, $A = (0, 0, 0)$.

б) $\mathrm{Convex}(A, B, C, D)$, где $A = (0, 0, 0)$, $B = (10, 0, 0)$, $C = (0, 10, 0)$, $D = (0, 0, 10)$.

в) $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$, $D = (0,0,10)$.

г) Например, $B = (10,0,0)$.

д) $\mathrm{Convex}(B,C)$, где $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$.

е) $B = (10,0,0)$, $C = (0,10,0)$.

3.20.

4.1.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 \leqslant 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$, $u = 5$

в) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5 + x_4$, $x_4 \geqslant 1/2$, $z = 5$. Можно записать ответ в виде $x \in A + \mathrm{Cone}(u)$, где $A = (0,0,5.5,0.5)$, $u = (0,0,1,1)$.

4.2.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \min \\ y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ y_1 - y_2 \geqslant 3 \\ y_1 + 2y_2 \geqslant 1 \\ y_1 - 2y_2 \geqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $u = 18$

в) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z = 18$

4.3.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \end{cases}$$

б) $y_1 = -7$, $y_2 = -10$, $u = -142$

в) $x_1 = 0, x_2 = -42, x_3 = 0, x_4 = 16, z = -142$

4.4.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ y_1 - y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 - 2y_2 \leqslant -1 \\ y_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Неограниченная задача.

4.5.

а)

$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 \to \max \\ y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ 3y_1 + 6y_2 \leqslant -1 \end{cases}$$

б) Пустое допустимое множество.

в) Пустое допустимое множество.

5.1.

5.2.

а)

б) $\mathrm{Eq}_1 + \mathrm{Eq}_2 = \mathrm{Eq}_3 + \mathrm{Eq}_4 + \mathrm{Eq}_5$;

в) 4 базисных переменных и 2 свободных;

г)

д)

$$X = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

е)

$$X = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

ж)

з)

$$X = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

5.3.

5.4.

а) $3 \cdot 7 = 21$;

б) $3 + 7 - 1 = 9$, $21 - 9 = 12$;

в) $3 + 7 = 10$;

г) $10 + 21 = 31$;

5.5. Буквой «Б» отмечены переменные, которые обязательно являются базисными. Буквой «С» отмечены переменные, которые обязательно являются свободными. Надписью «Б или С» отмечены переменные, которые могут быть базисными или свободными.

а)

	Б	Б или С	Б или С
	Б или С	Б	Б
	Б или С	С	Б

б)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б
	С	Б или С	Б

в)

	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	С
	Б	Б или С	Б

г)

	Б	Б или С	Б	С	Б
	Б	Б или С	С	Б	С
	С	Б или С	Б	С	С
	Б или С	Б	Б или С	Б или С	Б или С

5.6.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 17$
$a_1 = 5$	12	10	6 600
$a_2 = 6$	4 400	15	3
$a_3 = 7$	9 300	7	M
$a_4 = 5$	11	8 500	6 300

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

6.5.

а) $c(S,T) = 5 + 3 + 6 + 1 + 6 = 21$;

б) $c(S,T) = 3 + 6 + 4 + 4 + 2 = 19$;

в) $v(f) = 4$;

г) $f^{\text{out}}(S) = 0 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5$, $f^{\text{in}}(S) = 1 + 0 + 0 = 1$;

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 3\} = 2$;

е) $\text{bneck}(s - c - g - d - e - t, f) = \min\{1, 6, 1, 5, 3\} = 1$.

6.6.

6.7.

6.8.

а) $c(S,T) = 4 + 8 + 9 = 21$;

б) $c(S,T) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$;

в) $v(f) = 2 + 8 = 10$.

г) $f^{\text{out}}(S)$ и входящий поток $f^{\text{in}}(S)$ для множества $S = \{s, c, g\}$.

д) $\text{bneck}(s - b - e - t, f) = \min\{2, 4, 10\} = 2$.

е) $\text{bneck}(s - c - g - b - e - t, f) = \min\{8, 7, 8, 4, 10\} = 4$.

Источники мудрости

[Fer] Tomas Ferguson. *Linear programming: concise introduction.* URL: http://web.tecnico.ulisboa.pt/mcasquilho/acad/or/ftp/FergusonUCLA_LP.pdf.

[Law] Neil Laws. *Linear programming: lecture notes.* URL: https://www.stats.ox.ac.uk/~cmcd/lp/lp.pdf.

[lit] littleO (https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo). *Intuition behind the dual problem in optimization.* Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/223235.

[KT] Kleinberg, John and Tardos, Éva. *Lecture Slides for Algorithm Design.* URL: https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/.