Привет! Сем 4

Вкусное

№7 ....

$$\int_0^\infty \frac{\sin(px)}{x}\,dx =$$

идея: масштабирование

идея: трюк Фейнмана

↕ :

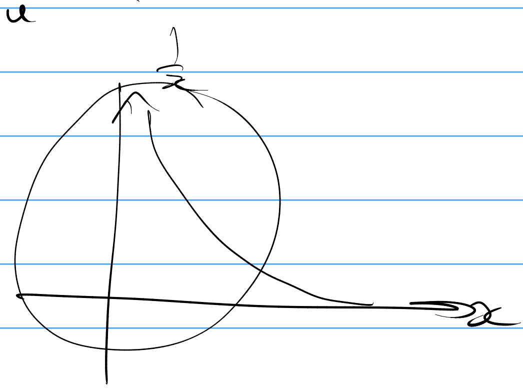
идея: я везде вижу экспоненты.

$px = u$

$x = \frac{u}{p}$ $\qquad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$

$dx = \frac{du}{p}$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$



трюк Фейнмана $\qquad$ умение видеть экспоненту.

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,(\text{здесь } y)\cdot du$$

$= \frac{\pi}{2}$ длинно

Вставим y в I таким образом, чтобы $I'(y)$ был попроще

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cdot \exp(-yu)\cdot du$$

$$I'(y) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cdot(-u)\cdot\exp(-yu)\cdot du \qquad I'(y) = \int_0^\infty -\sin u\cdot\exp(-yu)\,du$$

2 раза по частям

$$\boxed{\int \exp(\alpha t)\,dt = \frac{\exp(\alpha t)}{\alpha} + c}$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha t)\,dt = \frac{\exp(-\alpha t)}{-\alpha}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{\infty} \sin u \cdot \frac{1}{u}\cdot du = \int_0^{\infty} \sin u \cdot \int_0^{\infty} \exp(-ut)\,dt\,du =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin u \exp(-ut)\,du\,dt = \{2 \text{ раза по частям}\}$$

$\boxed{\text{помалеть}}$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

$$e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\to \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}\cdot e^{-ut}\,du\,dt = \ldots$$

$$\frac{1}{u^2+1} = \int_0^{\infty} \exp\left(-(u^2+1)\cdot t\right)dt$$

№8 $$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(x^{2022}\right)}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(x^{2022}\right)}{x^{2022}}\cdot x^{2021}\cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\cdot\frac{1}{2022}\,du =$$

$u = x^{2022}$

$du = 2022\,x^{2021}\cdot dx$

$$= \frac{1}{2022}\cdot\frac{\pi}{2}$$

№9 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx =$

от b изб-ся !!

$$= \frac{1}{b^2}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{p}{b}\cdot bt\right)}{1+t^2}\cdot b\cdot dt =$$

$\frac{x}{b}=t \qquad dx = b\cdot dt$

$a = \frac{p}{b}$

$$= \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\cos(pt)}{1+t^2}\,dt = I'(p)$$

$$I'(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I'(p) = \int_0^\infty \frac{\cos(pt)}{1+t^2}\,dt$$

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{\sin(pt)/t}{1+t^2}\,dt$$

$I(0)=0$

$$I''(p) = \int_0^\infty \frac{-t\cdot\sin(pt)}{1+t^2}\cdot dt$$

$$I - I'' = \int_0^\infty \frac{\sin(pt)}{1+t^2}\left(\frac{1}{t}+t\right)dt = \int_0^\infty \frac{\sin(pt)}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1+t^2}{t}\right)dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I - I'' = \frac{\pi}{2}$$

$I(y)$ и $I''(y)$

1) угадаем одно решение

2) $I(y)$ = угаданное + поправка

$I(y) = \frac{\pi}{2}$

$$I(y) = \frac{\pi}{2} + \Delta(y) \qquad I - I'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \Delta(y) - \left(\frac{\pi}{2} + \Delta(y)\right)'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta - \Delta'' = 0 \qquad x^2 - 1 = 0$$

$$\Delta - \Delta' + \Delta' - \Delta'' = 0 \qquad (x-1)(x+1) = 0$$

$$\Delta - \Delta' + (\Delta - \Delta')' = 0 \qquad x^2 - x + x - 1 = 0$$

$$x(x-1) + x - 1 = 0$$

$$V = \Delta - \Delta'$$

$$V + V' = 0$$

$$\boxed{V' = -V}$$

$$V(y) = c \cdot e^{-y}$$

интегрирующий множитель

$$\Delta - \Delta' = c \cdot e^{-y}$$

$$\cdot e^{-y}$$

$$\Delta(y) \cdot e^{-y} - \Delta'(y) \cdot e^{-y} = c \cdot e^{-2y}$$

$$-\left(\Delta(y) \cdot e^{-y}\right)' = c \cdot e^{-2y}$$

$$\Delta(y) \cdot e^{-y} = \frac{-c \cdot e^{-2y}}{-2} + d$$

$$\boxed{I(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e^{-y}}$$

$$\boxed{\Delta(y) = +\frac{c}{2} \cdot e^{-y} + d \cdot e^{y}}$$

c и $d \in \mathbb{R}$

$$\boxed{I(y) = \frac{\pi}{2} + d_1 \cdot e^{-y} + d_2 \cdot e^{+y}}$$

d_1? d_2?

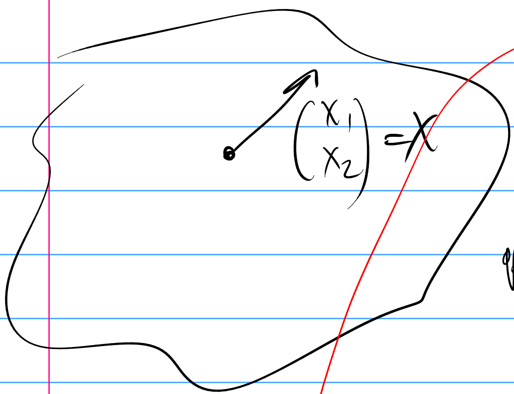
$$\boxed{I(0) = 0} \qquad \boxed{I'(0) = \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} + d_1 + d_2 = 0 \qquad -d_1 + d_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$d_2 = 0$$

$$d_1 = -\frac{\pi}{2}$$

№11 Откуда взялся? X – с.вектор



① Нет „предпочитаемого" напр-ия.

$$R\cdot X \sim X$$

если R – поворот/отражение

ф. плотности $f(x_1,x_2)$ зависит только от $\|x\|$, только от $x_1^2+x_2^2$.

② X_1 и X_2 незав.

$f(x_1,x_2)$?

$$f(x_1,x_2) \overset{②}{=} f_1(x_1)\cdot f_2(x_2) \overset{①}{=}$$

$$= f_1(x_1)\cdot f_1(x_2)$$

f – совм. ф. плотности вектора

f_1 – ф. плотности для X_1

f_2 – // — X_2

① $$f(x_1,x_2) = h(x_1^2+x_2^2) = c\cdot e^{k(x_1^2+x_2^2)}$$

$$f_1(x_1) = h_1(x_1^2) = \sqrt{c}\cdot e^{kx_1^2}$$

№11

$$h(x_1^2+x_2^2) = h_1(x_1^2)\cdot h_1(x_2^2)$$

$$x_1^2=a \quad x_2^2=b$$

$$h(a+b) = h_1(a)\cdot h_1(b)$$

$b=0$ $\quad$ d/db, $b=0$

$$h(a) = h_1(a)\cdot h_1(0)$$

$$h'(a+b) = h_1(a)\cdot h_1'(b)$$

$$h'(a) = h_1(a)\cdot h_1'(0)$$

$(e^{2a})' = 2e^{2a}$

Ага!

$$h'(a) = k\cdot h(a) \qquad h' = cke^{ka}$$

$$h(a) = c\cdot e^{k\cdot a}$$

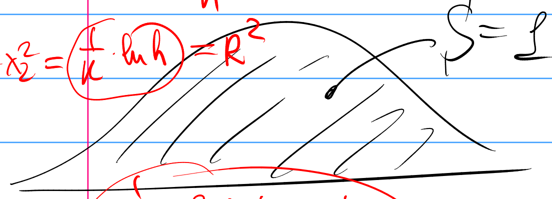
$x_1=0 \quad x_2=0$

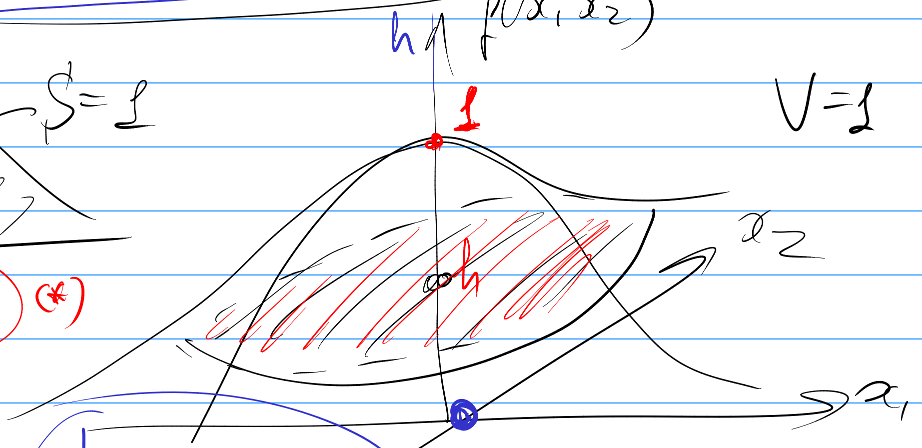
$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{k(x_1^2+x_2^2)}\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{c}$$

$k<0$
$c>0$

$$e^{k(x_1^2+x_2^2)} = h$$

$$x_1^2+x_2^2 = \frac{1}{k}\ln h = R^2$$





$$\int_0^1 \pi R^2(h)\, dh = \frac{1}{c} \quad (*)$$

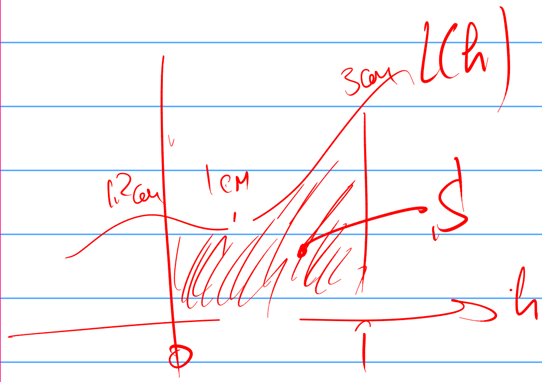
$$\boxed{\int_0^1 \pi \cdot \frac{1}{k}\ln h\, dh = \frac{1}{c}}$$

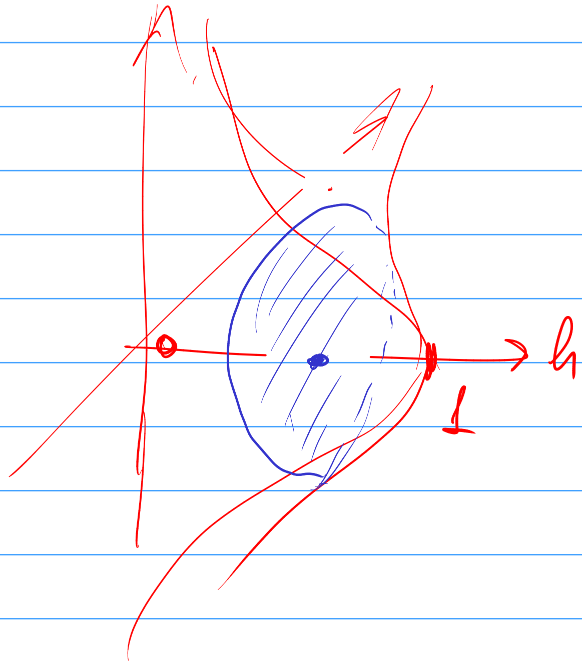
$$\int_0^1 \ln h\, dh = \frac{k}{c\pi}$$

идея: переход в полярные координаты

трюк Фейнмана

9 класса / 11 класс : принцип Кавальери / Мамикона

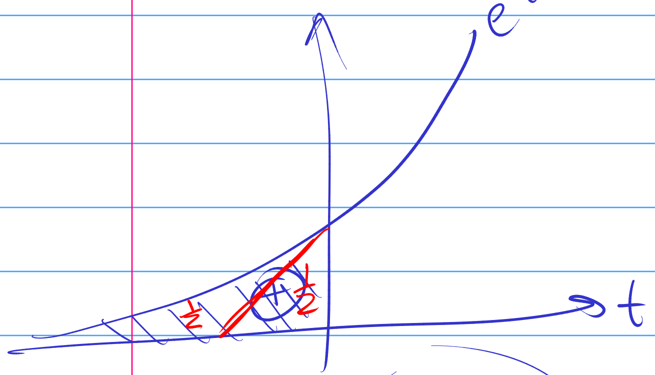


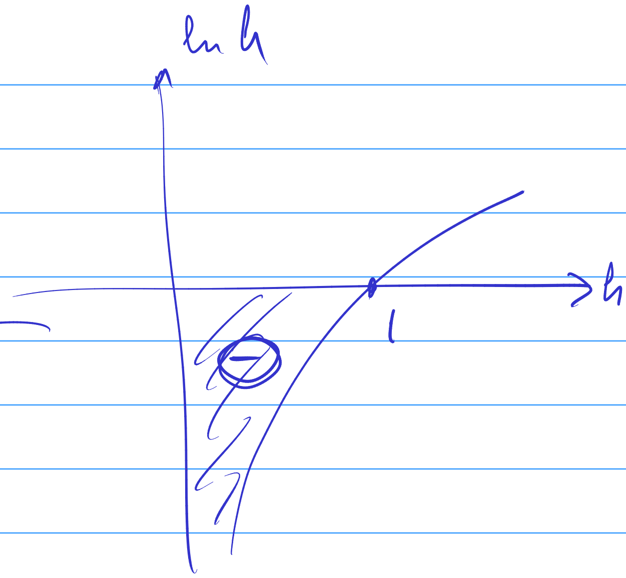


$$\int_0^1 l(h)\, dh = S$$

$$\int_0^1 s(h)\, dh = V$$

$$\int_0^1 \ln h \, dh = \frac{k}{\pi c}$$





$$\int_{-\infty}^{0} e^t \, dt = \frac{-k}{\pi \cdot c}$$

примен. Машинона

$$1 = -\frac{k}{\pi c} \qquad k = -a$$

$$1 = \frac{a}{\pi c} \qquad c = \frac{a}{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x_1^2+x_2^2)} \, dx_1 \, dx_2 = \frac{1}{c} = \frac{\pi}{a}$$

$$x = u - \frac{b}{a}$$

$$x^2 = u^2 - 2\frac{b}{a}\cdot u + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{№}11$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(u^2 - 2\frac{b}{a}u + \frac{b^2}{a^2}\right)} \, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$