Всё видно !!? Сем 3с

2022-01-25

Равномерная сх-сть интегралов

[№1-№4]

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^p+1}$$

[№1] $p\in(1;+\infty)$

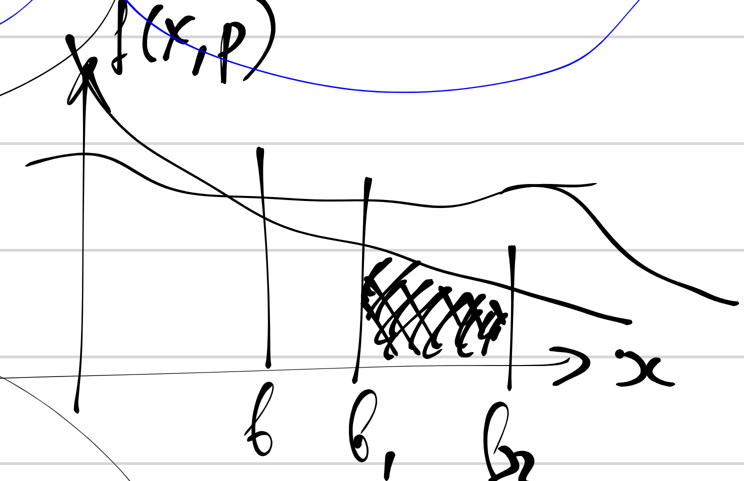
[№4] $p\in[p_0;+\infty)$

$p_0>1$ p_0 - гипер пар-р.

$p_0=1.01$

Критерий Коши.

$$\forall\varepsilon\ \underbrace{\exists b}_{\text{ход ББ}}\ \underbrace{\forall b_1,b_2\geq b}_{\text{Cauchy}}\ \underbrace{\forall p\in P}_{\text{BG}}\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,p)\,dx\right|<\varepsilon$$

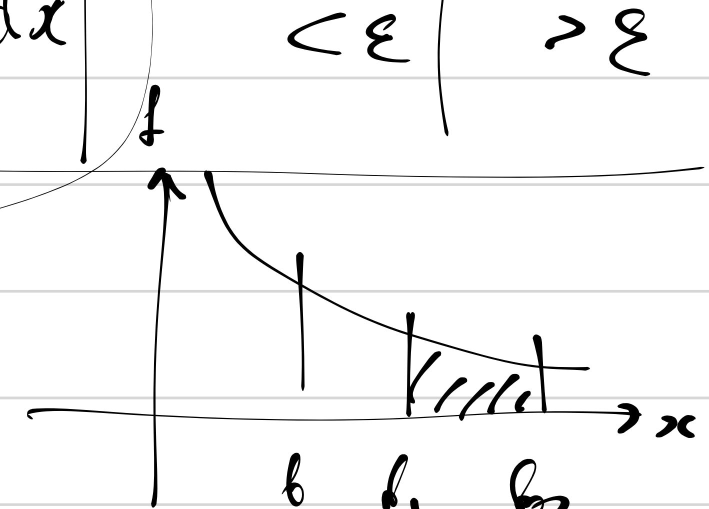


1. ББ выбирает b
2. Cauchy: b_1, b_2

BG: p

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,p)\,dx\right|$$

ББ	C+BG
$<\varepsilon$	$>\varepsilon$



1. b фиксировано.
2. $\boxed{b_1, b_2 \quad p}$ $\sup \int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^p+1}\,dx$

$\int_0^{\infty} f(x,p)\,dx$ $\int_1^{\infty} f\,dx$

$x=0.01$ $p\uparrow$ $x^p\downarrow$ не инт.

$x=100$ $p\downarrow$ $x^p\downarrow$

(!) Сходимость опр-ся не поведением в начале!

№1

№4

sup будет достиг-ся при $p=1$

$$\int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^1+1}\,dx$$

$$\ln(b_2+1)-\ln(b_1+1)$$

$p = p_0$ $p_0 > 1$, $p_0 = 1.01$

$$\int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^{p_0}+1}\,dx$$

1. Хор. пар: b
2. $b_1, b_2 \geq b$, $p \in P$

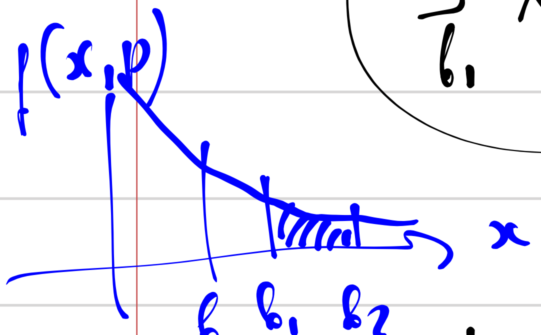
№1: всегда найдется p близкое к 1 и достаточно большое b_2, чтобы $\int_{b_1}^{b_2} f\,dx > \varepsilon$.

№4

$$\int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^{p_0}+1}$$

p_0 – это самое плохое (для сх-сти) знач-ие p.

$p_0 = 1.03$ → интеграл не падает !!



$$\frac{1}{x^{p_0}+1} < \frac{1}{x^{p_0}} \quad \text{при} \quad x > 0$$

$p_0 > 1$

$$\int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^{p_0}+1}\,dx < \int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{x^{p_0}}\,dx = \frac{x^{-p_0+1}}{-p_0+1}\Bigg|_{x=b_1}^{x=b_2} =$$

$$= \frac{b_2^{\overset{0}{-p_0+1}} - b_1^{-p_0+1 \,<0}}{-p_0+1} \quad <0$$

$$\boxed{b = (\varepsilon)^{\frac{1}{-p_0+1}}}$$

$$b^{-p_0+1} = \varepsilon$$

$\boxed{бб : b}$

Cauchy: $b_1, b_2 \geq b$

№2 и №5

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$$

№2: $p\in(0;2)$

№5: $p\in(0;p_0)$ $\quad p_0<2$

$\forall\varepsilon\ \underbrace{\exists a}_{\text{Хор.}}\ \underbrace{\forall a_1,a_2\le a}_{\text{Cauchy}}\ \underbrace{\forall p}_{\text{в } 6},\quad \left|\int_{a_1}^{a_2} f\,dx\right|<\varepsilon.$

интуиция: при $x\approx 0.$ $\sin x\approx x$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^p}\,dx$$

$$\int_0^1 x^{1-p}\,dx$$

$(p=2)$: $\displaystyle\int_\alpha^1 x^{-1}dx = \ln 1-(\ln\alpha)$ $\quad \alpha\to 0$

$p=1{,}99$ $\quad \displaystyle\int_\alpha^1 x^{-0{,}99}dx = \left.\frac{x^{0.01}}{0.01}\right|_\alpha^1$

ответ (догадка) №2: не будет р.сх.

№5: будет равном. сх.

Коши крит. ? необх и дост

Вейерш признак? дост.

признак. Вейерш.

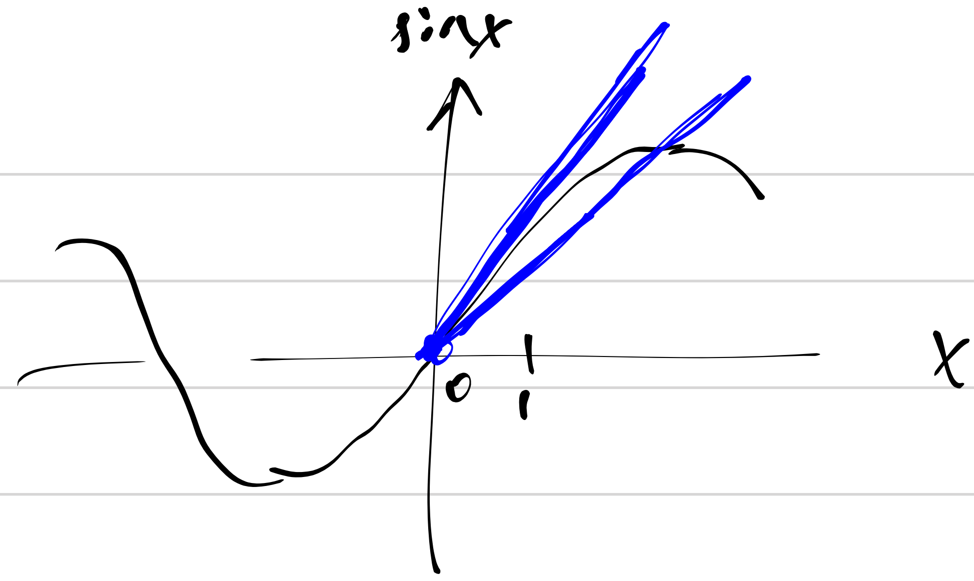
Если $|f(x,p)|\le g(x,p)$ $\quad \forall x\in[0;1]$ $\quad \forall p\in P$

$\displaystyle\int_0^1 g(x,p)dx$ — сх-ся равн-но при $p\in P$

то и $\displaystyle\int_0^1 f(x,p)\,dx$ — // —

часто выбирают $g(x,p)$ не зав-ет от p.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$$



$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\frac{x}{2} \le \sin x \le x \qquad x\in[0;1]$$

$$\underbrace{0{,}903287\ldots x} \le \sin x \le x$$

$\boxed{№1}$

① ББ: a $\qquad \left|\int_{a_1}^{a_2} f\,dx\right| < \varepsilon$

② Cauchy + ВБ: $a_1, a_2 \le a$, $p\in(0;2)$

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f\,dx\right| > \varepsilon.$$

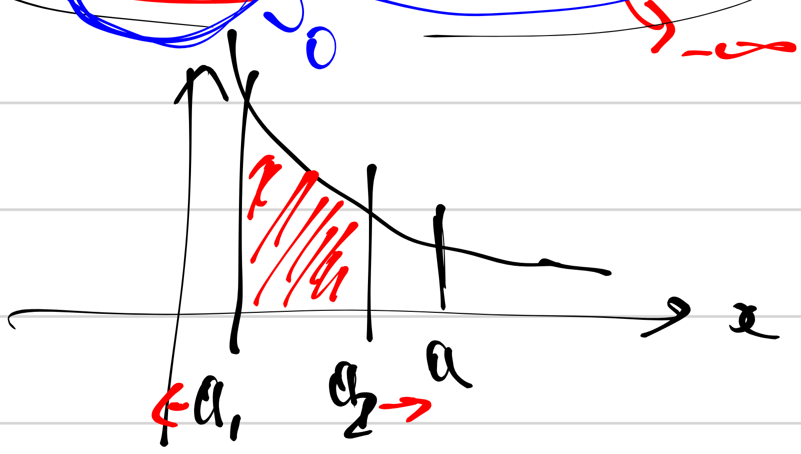
$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{\sin x}{x^p}\,dx \ge \int_{a_1}^{a_2}\frac{0{,}911x}{x^p}\,dx = \frac{0{,}911\cdot x^{2-p}}{2-p}\Bigg|_{a_1}^{a_2} =$$

$$= \frac{0{,}911}{\underbrace{2-p}_{\to 0}}\left(a_2^{2-p} - \underbrace{a_1^{2-p}}_{\to -\infty}\right)$$

$p \to 2$

$a_1 \to 0$

$a_2 := a$



$p \to 2$

$$\sup_{\substack{a_1, a_2 \le a\\ p\in(0;1)}} \int_{a_1}^{a_2}\frac{\sin x}{x^p}\,dx > \varepsilon.$$

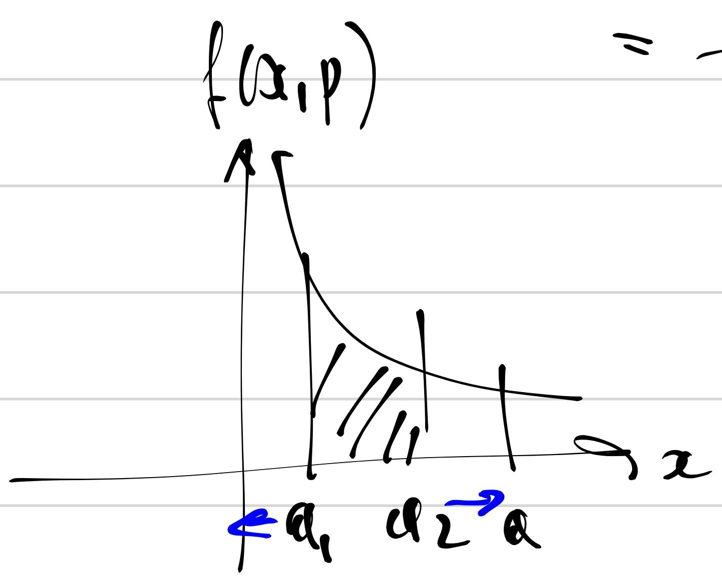
[Оне зав-сим от выб-ра a]

№5 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ $\quad p\in(0;p_0)\quad p_0<2$

мажорируем сверху

$\sin x \le x \qquad 0\le a_1\le a_2\le 1$

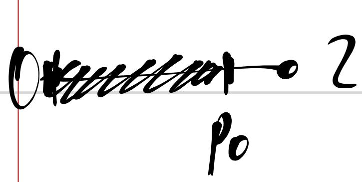
$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{\sin x}{x^p}\,dx \le \int_{a_1}^{a_2}\frac{x}{x^p}\,dx = \int_{a_1}^{a_2} x^{2-p}\,dx =$$



$$= \frac{x^{2-p}}{-p}\Bigg|_{x=a_1}^{x=a_2} = \frac{a_2^{2-p}-a_1^{2-p}}{2-p} \le$$

$a_2,\ a_1\le a$

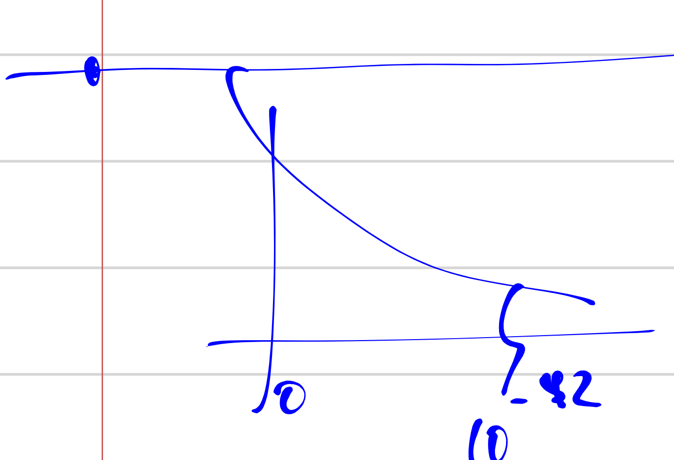
$p\in(0;p_0)\quad p_0<2$



$$\le \frac{a^{2-p}-0^{2-p}}{2-p_0} \le \frac{a^{2-p_0}}{2-p_0}$$

самое большое

самое малое



$a=0{,}01$

$a^{0.95}\quad a^{0.03}\quad a^{1.56}$

$$\frac{a^{2-p_0}}{2-p_0}=\varepsilon \qquad \boxed{a=\left(\varepsilon\cdot(2-p_0)\right)^{\frac{1}{2-p_0}}}$$

$$\forall\varepsilon\ \exists a\ \forall a_1,a_2\le a\ \forall p\in P\ \left|\int_{a_1}^{a_2} f\,dx\right|<\varepsilon$$

Дирихле + Абель.

Оч. похожи $\int_0^{+\infty} f(x,p)\cdot g(x,p)\,dx$

признак (дост. усл)	усл на $\int_0^\infty f\,dx$	усл на g
Дирихле	$\int_0^b f\,dx$ ограничен $\exists M\ \forall b, \forall p\ \left\|\int_0^b f\,dx\right\| < M$	$g(x,p)$ мон. по x $g(x,p) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0$
Абель	$\int_0^\infty f\,dx$ сх-ся равномерно	$g(x,p)$ огранич. $g(x,p)$ мон-но по x $\exists M: \|g(x,p)\| < M$

(равн сх) + (огранич)

№7 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-px}\,dx \quad p\in[0;\infty)$

равн. сходимость?

как типы? $\sin x \,\Big|\, \frac{e^{-px}}{x}$ $\quad \frac{\sin x}{x} \,\Big|\, e^{-px}$

$\sin x\cdot e^{-px} \,\Big|\, \frac{1}{x}$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ [нет p!]

известный уже трюк Фейнмана

$H(p) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-px}\,dx$

$H'(p)$ ....

сх-ся равномерно!

$p\in[0;\infty)$

$x\in[0;\infty)$

e^{-px} – огранич. ф-ция

$e^{-px} \le 1$

Ура!!