— Что мы знаем о лисе?
— Ничего. И то не все.
Борис Заходер

Цель этой заметки — рассказать, как искать локальный экстремум многочленов без производной. В первой части изложен метод Глеба Весельского, придуманный им в клш в августе 2024. Метод Глеба основан на подборе дополнительных сомножителей к неравенству среднего арифметического и среднего геометрического. Метод годится для полинома любой степени, разложенного на линейные сомножители. Во второй части изложен метод Иоганна Худде, мэра Амстердама в 17-м веке. Метод Худде основан на выявлении кратного корня с помощью домножения коэффициентов многочлена на арифметическую прогрессию.

1. Метод средних для нахождения экстремума

Среднее арифметическое положительных чисел больше либо равно среднему геометрическому,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Точное равенство достигается, если

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Пример попроще

Найдите локальный максимум функции $f(x) = x^2 \cdot (6 - 2x)$.

Решение. Заметим, что $x + x + (6 - 2x) = 6$. Значит, мы знаем среднее арифметическое,

$$\frac{x + x + (6 - 2x)}{3} = 2.$$

В силу неравенства средних,

$$\frac{x + x + (6 - 2x)}{3} \geq (x \cdot x \cdot (6 - 2x))^{1/3}.$$

Отсюда, если $x > 0$ и $6 - 2x > 0$,

$$2^3 \geq x^2 \cdot (6 - 2x).$$

При этом наибольшее значение достигается при $x = 6 - 2x$, то есть при $x = 2$.

TODO: добавить картинку

Пример посложнее

Найдите локальный максимум функции $f(x) = x(x + 1)(2 - x)$.

Хьюстон, у нас проблемы со старым решением! В прошлом решении нам дважды повезло. Во-первых, в простой задаче сумма сомножителей сама собой оказалась константой. Во-вторых, в простой задаче было возможно одновременное равенство всех сомножителей между собой. В новой задаче ни сумма не равна константе, $x + (x+1) + (2-x) = 3 + x$, ни одновременное равенство $x = x + 1 = 2 - x$ не возможно.

Впрочем, точка оптимума не изменится, если мы домножим один сомножитель на $a > 0$, а второй — на $b > 0$. С помощью подбора a и b мы вернём двойную удачу!

Найдём максиму функции $h(x) = ax \cdot b(x+1)(2-x)$.

Потребуем постоянную сумму и равенство сомножителей!

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ ax = 2 - x \\ b(x+1) = 2 - x. \end{cases}$$

Величины a и b играют вспомогательную роль, избавимся от них, $a = (2-x)/x$, $b = (2-x)/(x+1)$! Получаем одно уравнение

$$\frac{2-x}{x} + \frac{2-x}{x+1} - 1 = 0.$$

Домножаем на знаменатели,

$$(2-x)(x+1) + (2-x)x - x(x+1) = 0.$$

Читатель, знакомый с производной, может заметить, что производную-то мы и получили!

$$f'(x) = (2-x)(x+1) + (2-x)x - x(x+1).$$

Остаётся лишь решить квадратное уравнение,

$$(2-x)(x+1) + (2-x)x - x(x+1) = 0.$$

Получаем $x_1 = (1-\sqrt{7})/3$, $x_2 = (1+\sqrt{7})/3$ — точки подозрительные на экстремум.

Аналогично можно найти и локальные экстремумы любого многочлена разложенного на сомножители. Для нахождения экстремума произвольного многочлена степени n потребуется $n-1$ дополнительный сомножитель. А частные случаи при везении могут решаться быстрее.

TODO: добавить картинку

Примерчик с везением

Найдите локальный максимум функции $f(x) = x^{10}(5-x)$.

Домножим функцию на 10 чтобы сделать сумму сомножителей постоянной.

$$h(x) = x^{10}(50 - 10x).$$

Воспользуемся неравенством средних, верным при $x > 0$ и $50 - 10x > 0$,

$$\frac{x + x + \cdots + x + (50 - 10x)}{11} \geq (x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \cdot (50 - 10x))^{1/11}.$$

Отсюда, при $x > 0$ и $50 - 10x > 0$,

$$h(x) \leq (50/11)^{11}.$$

Максимум достигается при $x = x = \cdots = x = 50 - 10x$, то есть $x = 50/11$.

TODO: добавить картинку

Ещё примерчик

Найдём экстремумы функции
$$f(x) = 4x + 3 + \frac{1}{x-1}.$$
Для удобства заменим $x - 1$ на t,
$$g(t) = 4(t+1) + 3 + \frac{1}{t} = 7 + 4t + \frac{1}{t}.$$
По неравенству средних, находим локальный минимум,
$$\frac{4t + 1/t}{2} \geq \sqrt{4t \cdot 1/t} = 2.$$
Достигается равенство при $4t = 1/t$, то есть при $t = 1/2$ и $t = -1/2$. Точка $t = 1/2$ или $x = 1.5$ — это локальный минимум, а $t = -1/2$ или $x = 0.5$ — локальный максимум.

TODO: добавить картинку

2. Метод Иоганна Худде с арифметическими прогрессиями

Иоганн Худде жил в 17 веке, был математиком, мэром Амстердама и придумал метод нахождения локальных экстремумов без производных.

Снова начнём с простой задачки!

Найдите хотя бы один локальный экстремум функции
$$f(x) = (x-2)^2(x-5)(x-7)^4.$$

В точке $x = 5$ экстремума нет, так как при переходе переменной x через 5 функция меняет знак. А вот в точках $x = 2$ и $x = 7$ есть локальные минимумы. В этих точках функция равна нулю, а справа и слева от этих точек функция положительна. Функция достигает своего локального минимума $f_{\min} = 0$ в точках кратных сомножителей!

TODO: добавить картинку

Впрочем, экстремум не обязательно равен нулю. Он может быть равен числу m. Поэтому Иоганн Худде объявил охоту за кратными корнями уравнения $f(x) = m$.

Охота за кратными корнями

Придумаем действие, которое бы упрощало многочлен $p(x) = f(x) - m$, но при этом любой кратный корень многочлена $p(x)$ оставался бы корнем нашего нового изобретаемого многочлена.

Начнём с параболы $p(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Конечно, кратный корень у этой параболы равен $x = 1$.

Мне не известно, как Иоганн Худде пришёл к своей идее. Наверное, это были долгие часы безрезультатных поисков, а потом внезапное открытие. Далее лишь моя попытка реконструкции его рассуждений.

Нам нужно строить новый многочлен $q(x)$ на базе старого $p(x) = x^2 - 2x + 1$. Поэтому давайте домножим коэффициенты старого на произвольные константы, $q(x) = ax^2 - 2bx + c$. Хм, но при этом действии мы, конечно, можем потерять кратный корень! Поэтому давайте вернём кратный корень обратно! Для этого число c не может быть произвольным, оно обязано подбираться так, чтобы кратный корень не погиб. В нашем игрушечном примере мы знаем, что кратный корень равен $x = 1$. Поэтому новый многочлен должен иметь вид $q(x) = a(x-1)^2 - 2b(x-1)$.

Раскрываем скобки!

$$q(x) = a(x-1)^2 - 2b(x-1) = ax^2 - 2(a+b)x + (a+2b).$$

Внимательно смотрим на коэффициенты: a, $a+b$, $a+2b$! Они образуют арифметическую прогрессию!

Возможно, именно так и была открыта теорема.

Теорема (Иоганн Худде): Если коэффициенты исходного многочлена домножить на любую арифметическую прогрессию, то корнями нового многочлена обязательно будут все кратные корни исходного.

Мы, конечно, её доказали только для квадратного многочлена с корнем $x = 1$, но давайте поверим, что она верна для любого многочлена, и применим её в деле!

Найдите локальный максимум функции $f(x) = x(x+1)(2-x)$.

Раскрываем скобки, $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$.

Мы не знаем, чему равен экстремум, поэтому будем искать кратные корни многочлена

$$p(x) = -x^3 + x^2 + 2x - m.$$

Домножим коэффициенты этого многочлена на прогрессию $(3, 2, 1, 0)$, чтобы избавиться от неизвестного m,

$$\operatorname{yan}(p(x)) = -3x^3 + 2x^2 + 2x + 0.$$

Решаем уравнение, $-3x^3 + 2x^2 + 2x + 0 = 0$, получаем корни $x_1 = 0$, $x_2 = (1-\sqrt{7})/3$, $x_3 = (1+\sqrt{7})/3$.

Корень $x = 0$ возможен только при $m = 0$, при этом $p(x) = x \cdot (-x^2 + x + 2)$ и корень $x = 0$ не кратный.

Читатель, знакомый с производной, может заметить, что умножение на арифметическую прогрессию $\ldots, 3, 2, 1, 0$ и сокращение сомножителя x полностью эквивалентно взятию производной.

$$\operatorname{yan}(p(x)) = -3x^3 + 2x^2 + 2x + 0 = x \cdot (-3x^2 + 2x + 2) = x \cdot p'(x).$$

Мощь метода Иоганна Худде состоит в том, что мы сами можем выбирать арифметическую прогрессию. И можем специально поставить в прогрессии ноль там, где в исходном многочлене стоит неприятный коэффициент. Подробнее про метод можно прочитать в замечательной статье Джеффа Удзуки [**uzuki2005lost**].

Нахождение касательной

Найдите касательную к графику x^3 в точке $x = 2$.

Мы хотим, чтобы корень $x = 2$ был кратным корнем уравнения $x^3 = kx + b$.

Перенесём всё в левую часть

$$p(x) = x^3 + 0x^2 - kx - b = 0.$$

Домножим на две разные прогрессии, $(2, 1, 0, -1)$ и $(3, 2, 1, 0)$. Первая прогрессия избавит нас от параметра k, а вторая — от b. Кстати, умножение на прогрессию $(0, 1, 2, 3)$ избавило бы нас от высоких степеней.

$$\begin{cases} 2x^3 + b = 0 \\ 3x^3 - kx = 0 \end{cases}$$

Мы хотим, чтобы кратным корнем был $x = 2$. Из системы находим $b = -16$, $k = 12$.

Ещё примерчик

Найдём экстремумы функции
$$f(x) = 4x + 3 + \frac{1}{x-1}.$$
Для удобства заменим $x - 1$ на t,
$$g(t) = 4(t+1) + 3 + \frac{1}{t} = 4t + 7 + \frac{1}{t}.$$
Приравняем эту функцию к ещё пока неизвестному значению экстремума m,
$$4t + 7 + \frac{1}{t} = m.$$
Домножим на t,
$$4t^2 + (7-m)t + 1 = 0.$$
Это уравнение должно иметь кратный корень, домножаем коэффициенты на прогрессию $(1, 0, -1)$,
$$4t^2 - 1 = 0.$$
Отсюда, $t = 1/2$ и $t = -1/2$. Следовательно, $x = 1.5$ и $x = 0.5$.

Доказательство теоремы Иоганна Худде

Во-первых, посмотрим, как операция $\text{yan}()$ домножения коэффициентов многочлена на арифметическую прогрессию действует на самые простые многочлены с кратным корнем x_0:
$$\text{yan}(x^n(x-x_0)^2) = \text{yan}(x^{n+2} - 2x^{n+1}x_0 + x^n x_0^2) = ax^{n+2} - 2(a+b)x^{n+1}x_0 + (a+2b)x^n x_0^2$$
Подставляем кратный корень $x = x_0$ исходного многочлена в преобразованный многочлен и замечаем, что получится ноль.

Во-вторых, домножение коэффициентов многочлена на арифметическую прогрессию, $\text{yan}()$, — это линейная операция:
$$\text{yan}(a(x) + b(x)) = \text{yan}(a(x)) + \text{yan}(b(x)).$$
Во-третьих, любой многочлен с кратным корнем x_0 можно записать в виде
$$p(x) = a_n x^n (x-x_0)^2 + a_{n-1}x^{n-1}(x-x_0)^2 + \cdots + a_0(x-x_0)^2.$$
Применим операцию $\text{yan}()$ к левой и правой части. В силу линейности применяем $\text{yan}()$ к каждому слагаемому. Один сомножитель $(x-x_0)$ выживает в каждом слагаемом, а значит и во всей сумме выживает корень, бывший кратным в изначальном многочлене.

Источники мудрости