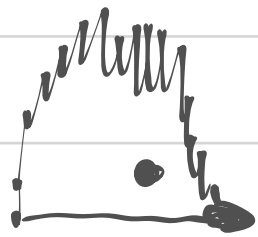2020-06-07

Байесовский подход

$$P(A \mid B)$$

классический (частотный) подход
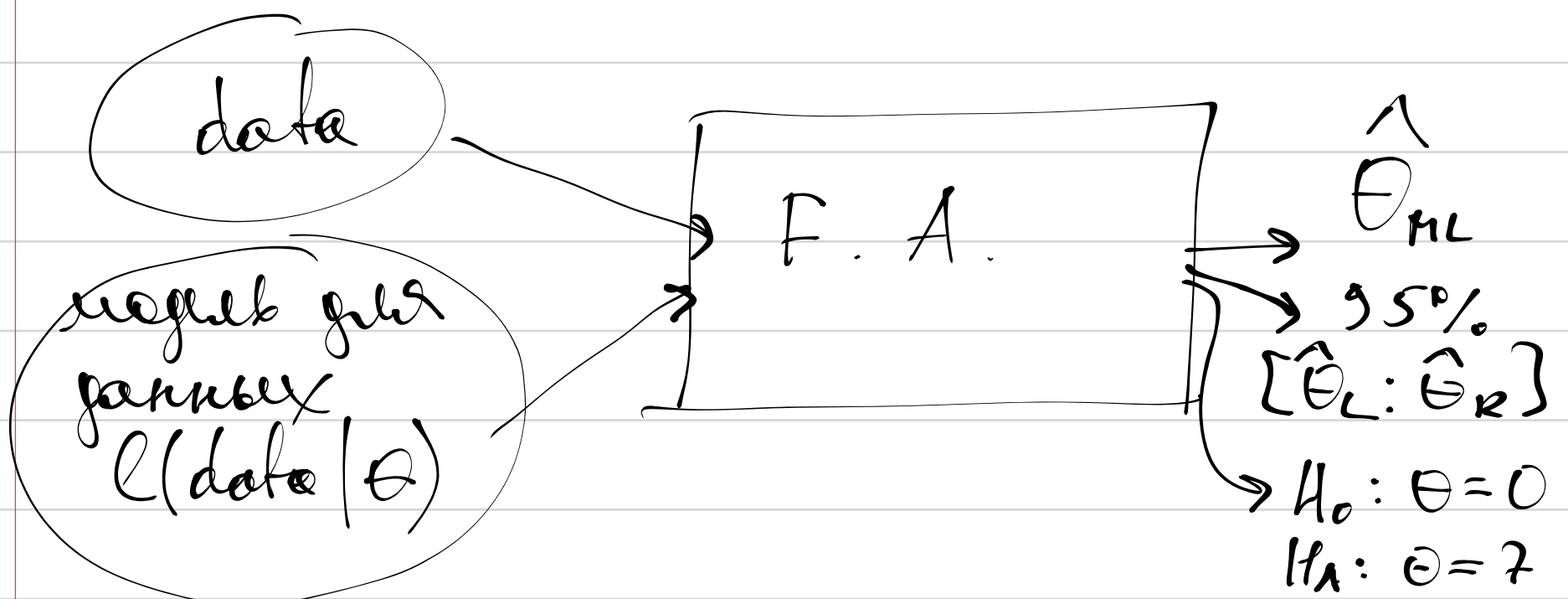
data → ┌─────────┐ → $\hat{\Theta}_{ML}$
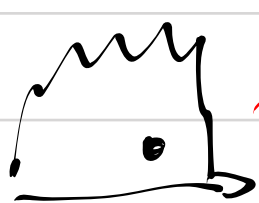модель для │ F. A. │ → 95%
данных   │   │ $[\hat{\Theta}_L : \hat{\Theta}_R]$
$\ell(data \mid \Theta)$ └─────────┘ → $H_0: \Theta = 0$
                            $H_A: \Theta = 7$

$\boxed{\Theta - \text{конст.}}$

естеств. вопрос

$\boxed{P(\Theta > 0 \mid data)}$ — ответы неверн.

$\Theta - \text{конст}$

$P(5 > 3 \mid \dots) = 1$ нищ!
$P(3 > 5 \mid \dots) = 0$

$\boxed{\text{data}}$ Bayesian Approach:

апостериорное

* $P(A|B)$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{B. A.} \\ * \text{MCMC}\end{array}}$ $\longrightarrow p(\theta|data)$

модель
для данных
$\ell(data|\theta)$

априорное
мнение о θ
$p(\theta)$

θ - случ. величина.
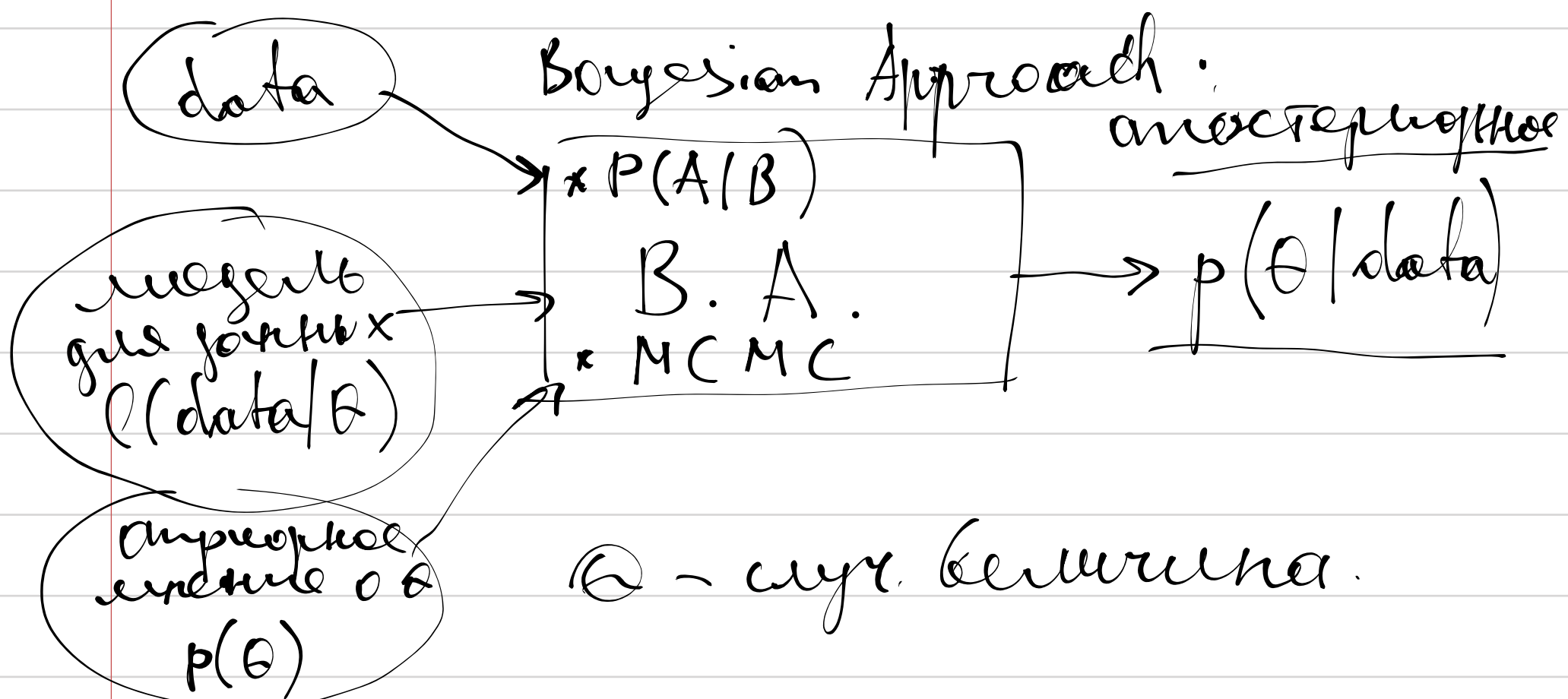
мнение о возможных зн-х θ
и их вер-стях до получения инфы

$p(\theta)$
мнение о θ
до данных
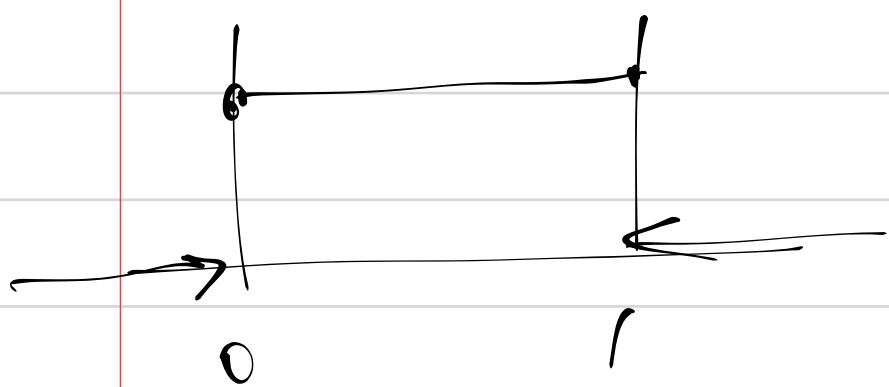
$\dfrac{p(\theta|data)}{\text{мнение о } \theta}$
после пол. данных

0   1

0   0,3   1
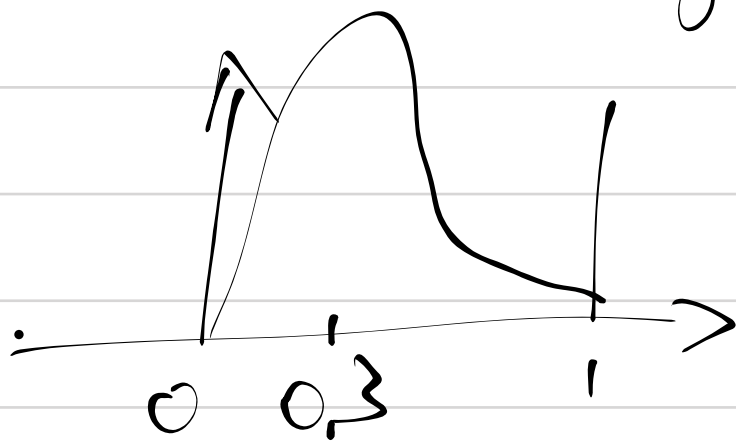
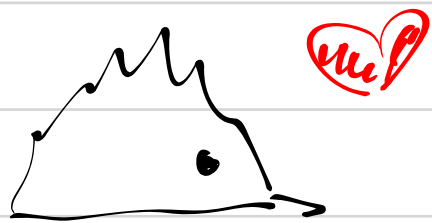$p(\theta|data)$ $\begin{array}{l}\longrightarrow \text{Mode}(\theta|data) \\ \longrightarrow \text{Median}(\theta|data)\end{array}$
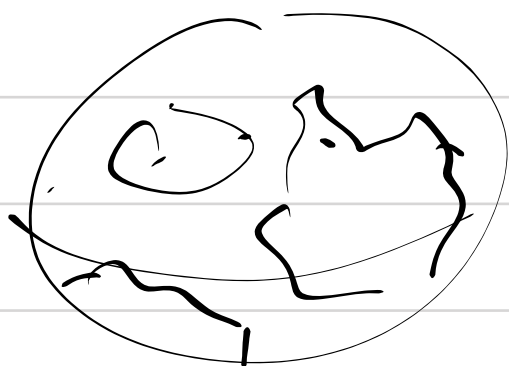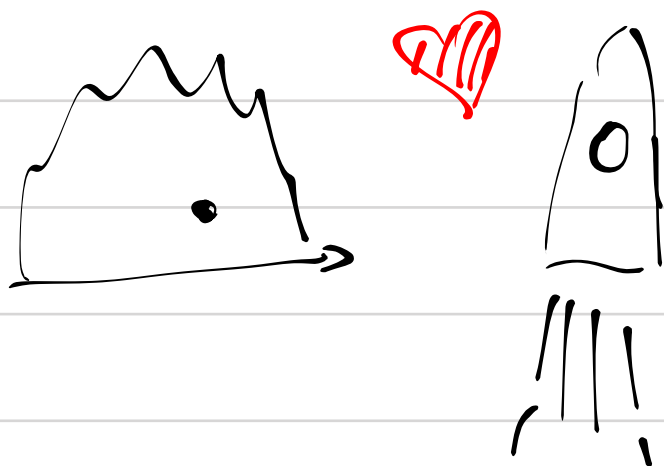
credible interval

$[\ P(\theta_L < \theta < \theta_R | data)=0,95$

$P(\theta > \tfrac{1}{2}|data)$

Первая задачка.

- новая планета

d - доля суши
↳ случ. величина

суша (1), вода (0)

data:
б случ-х посадок на поверх планеты
$y = (0, 1, 1, 1, 0, 1)$

$y_i \sim$ незав.
$y_i \sim Bern(d)$

→ B.A. → $P(d=x \mid data)$
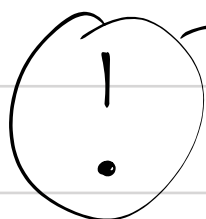
x	0.2	0.5	0.9
$P(d=x)$	0.1	0.2	0.7

априорн. распределение.
→ знание о мире
→ здрав. смысл

(!)
$$\sum_x P(d=x) = 1$$
$$\sum_x P(d=x \mid data) = 1$$

Априорное: →

x	0,2	0.5	0.9
$P(d=x)$	0,1	0.2	0,7
$P(d=x)\propto$	1	2	7

$$\boxed{P(d=x\mid data)} = \frac{P(d=x,\ data)}{P(data)}\quad \underset{\propto}{\longleftarrow}\ \text{забот } x \\ \longleftarrow \text{ не забоих}$$

$$\circledast\ P(d=x,\ data) = \underbrace{P(d=x)}\cdot\underbrace{P(data\mid d=x)}$$

апориорн.
вероятность
для θ

функция
правдоп.

$$\ln P(d=x\mid data) = \ln P(d=x) + \ln L + c$$

$$\boxed{p(\theta\mid data) \propto p(\theta)\cdot p(data\mid\theta)}$$

data
$y = (0,1,1,1,0,1)$

	x	0.2	0.5	0,9
вер	$P(d=x)$	0.1	0,2	0,7
вер ∝	$P(d=x)\propto$	1	2	7
вер	$P(data\mid x)$	$0{,}2^4\cdot 0{,}8^2$	$0.5^4\cdot 0.5^2$	$0{,}9^4\cdot 0{,}1^2$
вер ∝	$P(d=x\mid data)\propto$	$1\cdot 2^4\cdot 8^2$	$2\cdot 5^4\cdot 5^2$	$7\cdot 9^4\cdot 1^2$
		1024	31250	45927
вер	$P(d=x\mid data)$	$\dfrac{1024}{78201}$	$\dfrac{31250}{78201}$	$\dfrac{45927}{78201}$

$\sim 10^{-6}$

$= 78201$

$$p\left(d > \tfrac{1}{3}\mid data\right) \approx \frac{77}{78}$$

$$Mode(d\mid data) = 0.9$$

$$P(A\mid B)$$

data
$y = (0, 1, 1, 1, 0, 1)$

$\longrightarrow$

BA $\longrightarrow p(d \mid data)$

модель
$y_i \sim ky \ Bern(d)$

априорное
$p(d) = \boxed{2d}, \ d \in [0:1]$

$$p(d \mid data) \underbrace{\propto}_{\text{апостер}} \overbrace{p(d)}^{\text{априори}} \cdot \overbrace{p(data \mid d)}^{\text{ф. правд}}$$
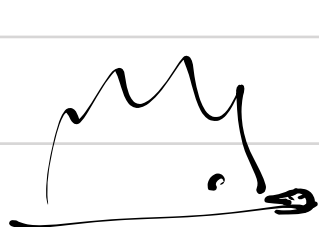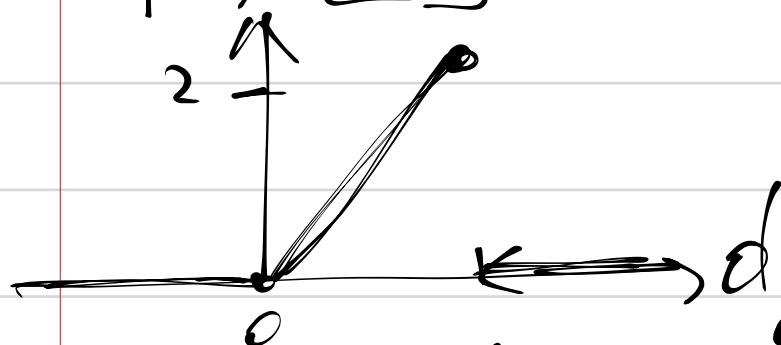
$p(d \mid data) \propto 2d \cdot (1-d) \cdot d^3 \cdot (1-d) \, d$

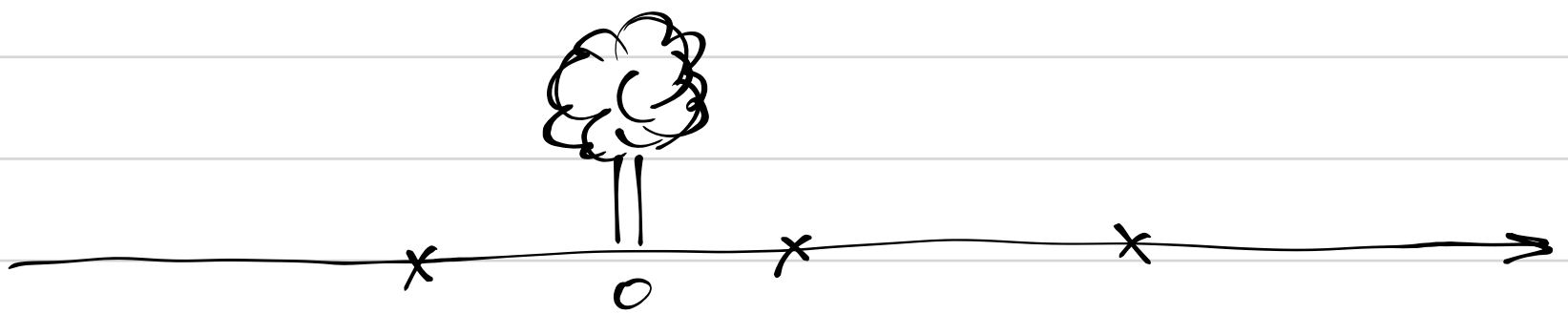$p(d \mid data) \propto d^5 \cdot (1-d)^2$

$p(d \mid data)$

$p(d \mid data) = \begin{cases} c \cdot d^5 (1-d)^2 & d \in [0;1] \\ 0 & d \notin [0;1] \end{cases}$
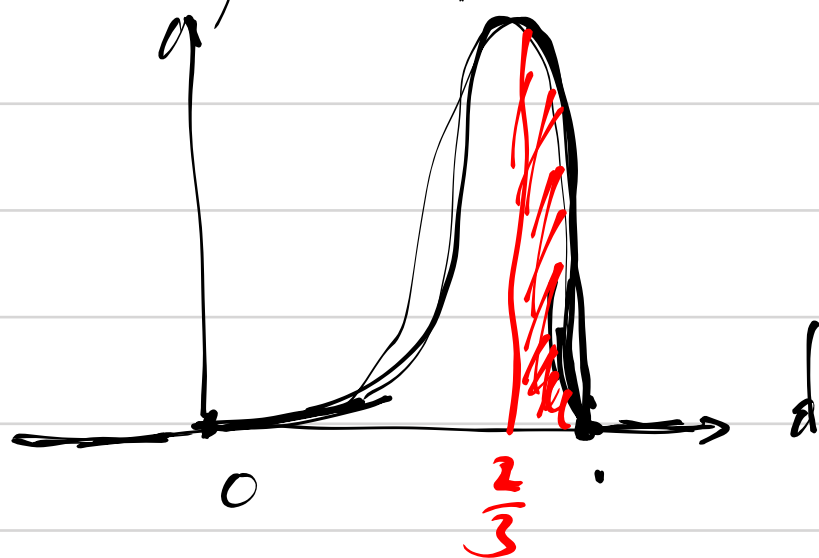
$\boxed{P\left(d > \frac{2}{3} \mid data\right) =}$

$\frac{2}{3}$

Байесовский подход Волка и 3-м поросятам !!

d — место домика 3-х поросят

Волк на разведку

[data] $\quad y_1 = 3 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = -1$

[модель] $\quad y_i \mid d \sim$ незав, $N(d, 4) \quad \Big\}$ [BA] $\rightarrow$

[априор.] $\quad d \sim N(0; 1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p(d \mid data)$

$$\boxed{p(d \mid data) \propto p(d) \cdot p(data \mid d)} =$$

$$= p(d) \cdot p(y_1 \mid d) \cdot p(y_2 \mid d) \cdot p(y_3 \mid d) \propto$$
$$\underbrace{\quad}_{N(0;1)} \qquad \underbrace{\quad}_{N(d;4)} \qquad \underbrace{\quad}_{N(d;4)} \qquad \underbrace{\quad}_{N(d;4)}$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(d-0)^2}{1^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1-d)^2}{4}\right) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_3-d)^2}{4}\right) = \begin{bmatrix} \text{подст} \\ y_1=3 \quad y_2=1 \\ y_3=-1 \end{bmatrix} \propto$$

$$\propto \text{ прив. под слагаемых } \atop \text{выделен. полн. квадр} \qquad \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(d-\frac{3}{7}\right)^2}{4/7}\right]$$

$$d \mid y_1=3, y_2=1, y_3=-1 \sim N\left(\frac{3}{7} ; \frac{4}{7}\right)$$
$$\sigma = \sqrt{4/7}$$

$\text{апр}: \ d \sim N(0;1)$ $\qquad$ апост: $d \,|\, data \sim N\left(\frac{3}{7} : \frac{4}{7}\right)$
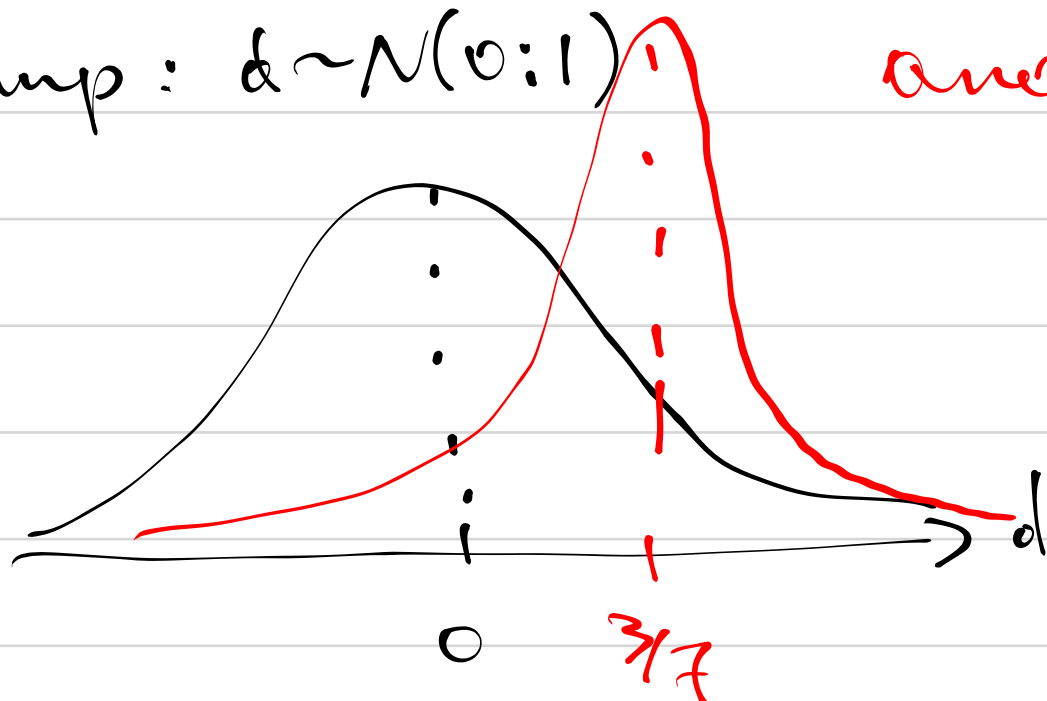
$$\text{Mode}\,(d\,|\,data) = \ ? \ = 3/7$$

$$P(d>0\,|\,data) = P\left(N\left(\tfrac{3}{7}:\tfrac{4}{7}\right) > 0\right) =$$

$$= p\left(N(0;1) > \frac{-3/7}{\sqrt{4/7}}\right) \approx \boxed{\text{табл}/к} \approx 0.72$$

$F.A.: \quad \theta - \text{конст} \ , \ y_i - \text{сл. вел}$

$BA: \quad \theta, \ y_i \ - \ \text{сл. вел.}$

$$P(y_4 > 0\,|\,data) = \ldots \ (\text{метод решения единый}).$$

как описать плотность ?
на компьютере ?

$\rightarrow$ ① $\boxed{\text{перебор.}}$ $\qquad$ Бета- распределение

$$X \sim Beta(a, b) \qquad X \in [0;1]$$

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} \\ 0, \quad x \notin [0;1] \end{cases}$$
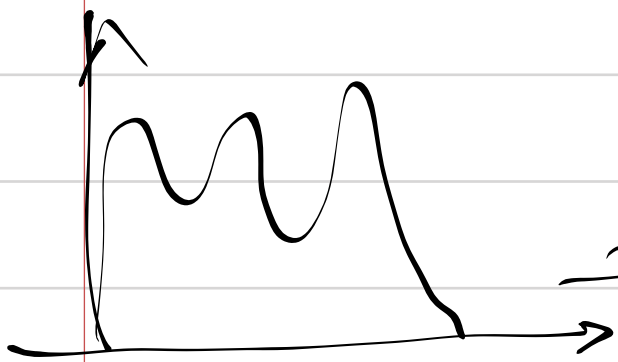
$a=1 \ \ b=1$ $\qquad$ $\boxed{a=2 \quad b=1}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p(x) = 2x$

$\rightarrow$ ② . промоделировать большую случ. вел.
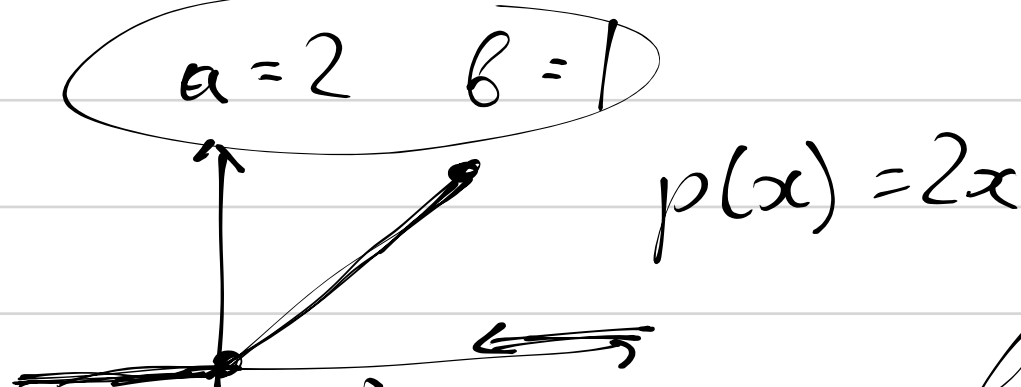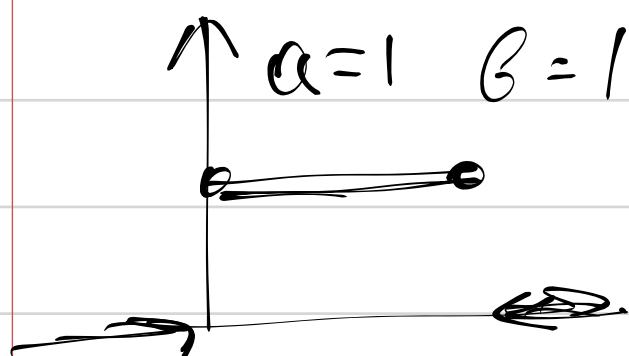
NUTS, Gibbs, HMC, ...

[MHRW] Метрополис-Гастингс
со случайным блужданием.

$p(\theta | data)$
Цель

форма сейчас

$\pi(x)$

x

a b

0.1   0.7
      0.69

1. Выбирает одну песчинку у вас случ-но $\pi(x)$
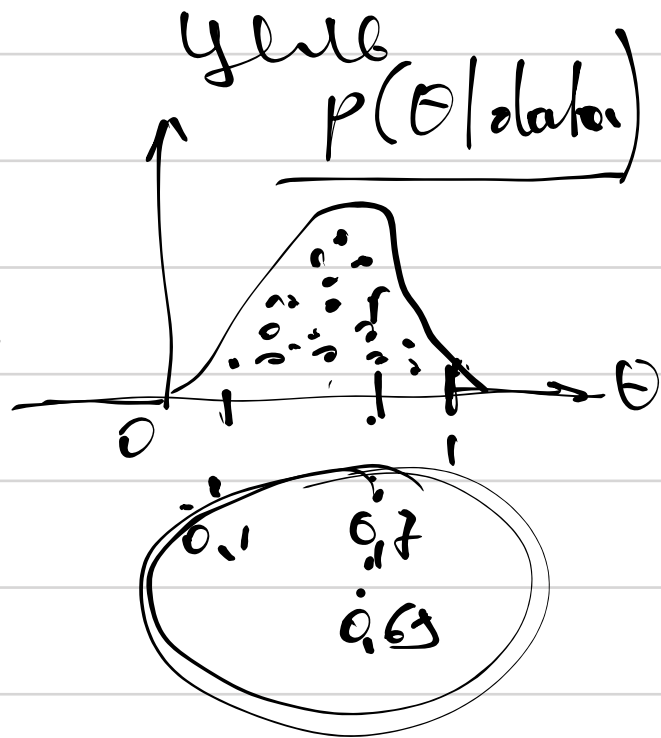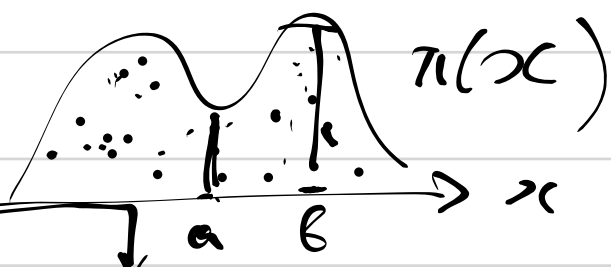
2. Внутр голос
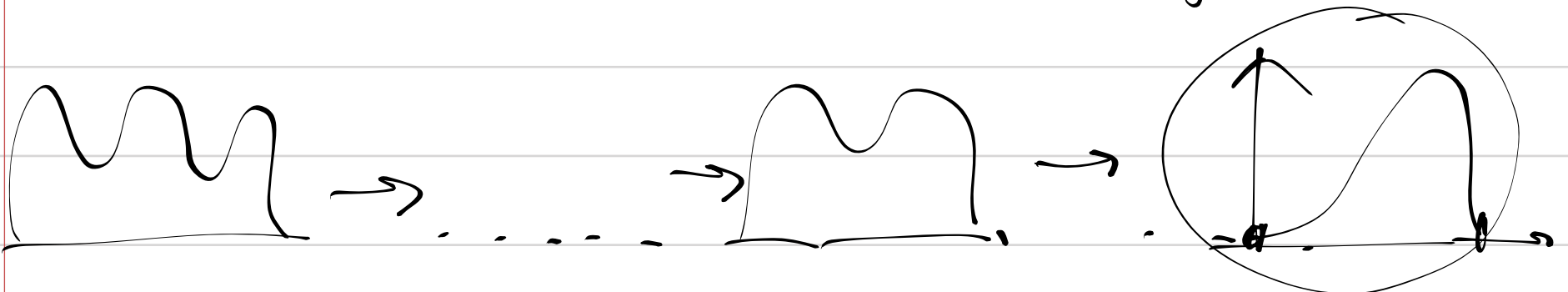 $x \longrightarrow y$ $y = x + u$
   $u \sim$ симметр расп отн 0.
   $u \sim U(-1; 1)$
   $u \sim N(0; 19)$

3. Одобрит В.Г. / не одобрит В.Г.

Если форма кучи песка достигла жилаемой, то её не надо менять

досаст. условие для стабильности

$$\forall x, y \qquad \boxed{\underline{S(x \to y)} = S(y \to x)}$$

$S(x \to y)$ – вер-сть понес см песч
из x в y

1. $\pi(x)$ — выбор песчинки
2. $\sigma(x \to y)$ — в. голос
3. $a(x \to y)$ — accept / do not accept
   └ вер-сть одобр. напутствий В.Г

$$\pi(x) \cdot \underline{\sigma(x \to y)} \cdot a(x \to y) = \pi(y) \cdot \underline{\sigma(y \to x)} a(y \to x)$$

$$\boxed{y = x + u} \quad \underline{симм}$$

$$\sigma(x \to y) = \sigma(y \to x)$$
$$\sigma(5 \to 3) = \sigma(3 \to 5)$$
$$p(u = -2) = p(u = +2)$$

$$\boxed{\underline{\pi(x)} \cdot a(x \to y) = \underline{\pi(y)} \cdot a(y \to x)}$$

$$\underline{форма\ кучи\ песка\ не\ мен.}$$

$$p(\theta | data) \cdot a(\theta \to \theta') = p(\theta' | data) \cdot a(\theta' \to \theta)$$

$$\boxed{подобрать\quad a}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(\theta | data) \propto 0.6 \\ p(\theta' | data) \propto 1.8 \end{array}}$$

MHRW

$$0.6 \cdot \underline{a(\theta \to \theta')} = 0.8 \cdot \underline{a(\theta' \to \theta)}$$

$$a(\theta \to \theta') = 1$$
$$a(\theta' \to \theta) = \frac{6}{8}$$

$$\boxed{MH} \qquad a(\theta \to \theta') = \min\left\{1, \frac{p(\theta' | data)}{p(\theta | data)}\right\}$$