

**Вариант А**

1. Функция  $f$  задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\exp(1/x)}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

- (a) (8%) Найдите правую,  $f'_+(0)$ , и левую,  $f'_-(0)$ , производные функции  $f$  в точке  $x = 0$   
(b) (2%) Существует ли производная функции  $f$  в точке  $x = 0$ ?

2. (10%) Вычислите интеграл

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

3. Рассмотрим систему уравнений  $Ax = b$ , где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (6%) Найдите ранг и определитель матрицы  $A$  как функции от параметра  $\alpha$   
(b) (4%) Определите количество решений системы в зависимости от значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$   
4. Вектор-строка  $a$  состоит из последовательных чисел от 1 до 4,  $a = (1, 2, 3, 4)$ . Матрица  $A$  задана соотношением  $A = a^T a$ .  
(a) (5%) Найдите собственные числа матрицы  $A$   
(b) (3%) Для максимального собственного числа укажите хотя бы один собственный вектор  
(c) (2%) Является ли матрица  $A$  положительно определённой? Положительно полуопределённой?

5. Задано дифференциальное уравнение

$$x \frac{dy}{dx} - xy - e^x = 0$$

- (a) (8%) Решите дифференциальное уравнение  
(b) (2%) Дайте схематический рисунок интегральных кривых  
6. (10%) Исследуйте на экстремумы функцию  $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 23$

7. Рассмотрим функцию  $Q(x, y) = 4x - y$ , аргументы которой удовлетворяют условию  $b + ax^2 + y^2 = 0$ .

Найдите при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  функция  $Q(x, y)$ :

- (a) (4%) будет иметь ровно одну условную стационарную точку, определите, является ли данная точка экстремумом;  
(b) (4%) будет иметь более одной условной стационарной точки, определите, являются ли данные точки экстремумами;  
(c) (2%) не будет иметь стационарных точек.

Указание. Для нахождения условных стационарных точек используйте метод множителей Лагранжа. Дополнительные исследования проводить не требуется.

8. Меткий стрелок Василис стреляет по мишени, каждый раз поражая цель с вероятностью 0.95 независимо от других выстрелов. По условиям соревнования Василис стреляет десять раз, причём за каждое попадание она получает три очка, а за промах теряет одно очко, так что может получить и отрицательный результат.

- (a) (5%) Каковы математическое ожидание и дисперсия числа полученных Василисой очков?  
(b) (5%) На следующих соревнованиях правила другие: Василис будет стрелять до второго промаха. С какой вероятностью она сделает ровно шесть выстрелов?

9. Случайные величины  $X_i$  независимы, а их распределение известно с точностью до параметра  $p$ :

Значения	-1	0	2
Вероятности	$p$	$0.8 - p$	0.2

- (a) (5%) Пусть  $p = 0.4$ . С какой вероятностью среднее в выборке  $X_1, \dots, X_{120}$  превысит значение 0.08?  
 (b) (5%) Докажите состоятельность оценки  $\hat{p} = 0.4 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  для параметра  $p$ , где  $n$  — объём выборки.

10. Выпускник бакалавриата, изучавший эконометрику, принимает решение о поступлении в магистратуру и хочет оценить возможную прибавку к заработной плате, которую обеспечит ему диплом магистра. В его распоряжении есть данные о заработных платах (переменная  $wage$  — средняя почасовая заработная плата в долларах), опыте (переменная  $exper$  — годы опыта) и уровне образования (переменная  $educ$  — количество лет обучения). По 200-м наблюдениям он оценил следующее уравнение регрессии (предположения классической линейной регрессионной модели выполнены):

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

Результаты оценки уравнения представлены в таблице:

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка
$exper$	0.0389	0.0048
$exper^2$	-0.0007	0.0001
$educ$	0.0841	0.0070
константа	0.3905	0.1022

- (a) (1%) Выпишите оценённое уравнение регрессии.  
 (b) (6%) На уровне значимости 5%-ов проверьте гипотезу о связи образования и заработной платы против альтернативной гипотезы об отсутствии связи. Выпишите нулевую и альтернативную гипотезы, укажите используемые формулы, рассчитайте необходимую статистику, укажите точный и асимптотический вид её распределения и сделайте вывод на её основе.  
 (c) (3%) Перечислите модельные предположения, которые были использованы при решении задачи

Удачи!

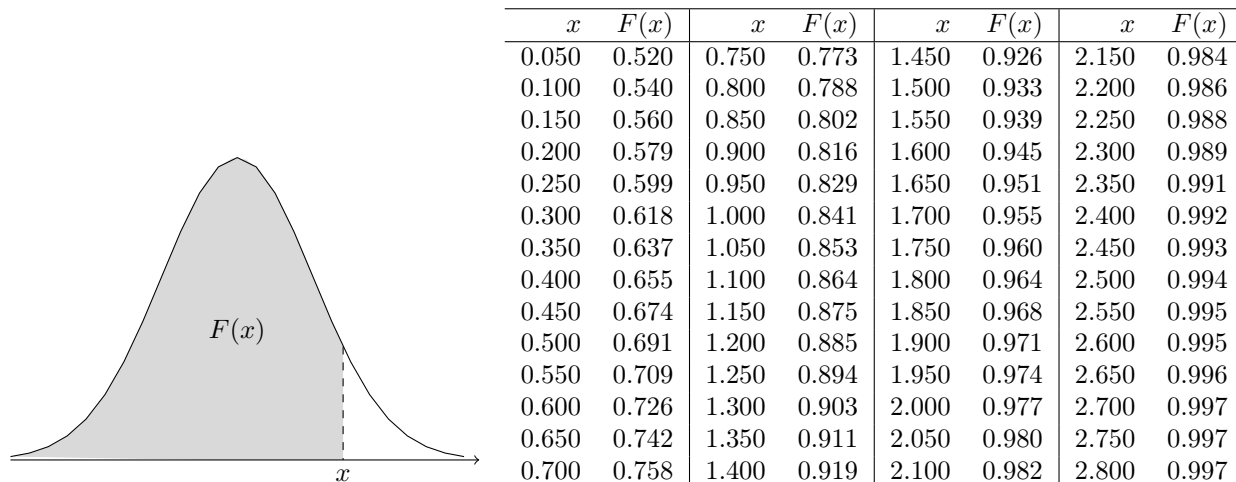


Рис. 1: Таблица значений функции распределения для стандартной нормальной величины