Подборка вступительных экзаменов в магистратуру. Факультет экономики, НИУ-ВШЭ

Коллектив авторов

15 апреля 2018 г.

Содержание

1 2007

1.1 Вариант А

1. Найдите
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt{7+x}}$$

2. Матрица вида A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda_1 = 3$, которому соответствует собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Второй собственный вектор этой матрицы — $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите определитель данной матрицы.

3. Найдите стационарные точки функции $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ и определите их тип.

4. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ при ограничении $x^2 + y^2 = 10$.

5. Найдите решение дифференциального уравнения $xy' - 6y = 10x^4 - 16x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$. Постройте эскиз графика данного решения.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

7. Время, проводимое покупателем в супермаркете, можно считать нормально распределенной случайной величиной. Известно, что математическое ожидание этой случайной величины составляет 1 час 20 минут, а стандартное отклонение равно 15 минутам. Найдите при этих условиях вероятность того, что из трех незнакомых между собой покупателей хотя бы один проведет в супермаркете более полутора часов.

8. Функция плотности двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид
$p(x,y) = \begin{cases} c(-x), & \text{если } x \in [0;1], y \in [1;2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

   Найдите:

   (a) значение константы c

   (b) вероятность того, что $Y \leqslant 2X$

   (c) математическое ожидание $\mathbb{E}(Y)$

9. Проверка 175 старых домов города показала, что в 56 из них электропровода требуют срочного ремонта. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что доля всех старых домов города, в которых требуется срочный ремонт электропроводки, составляет не менее 33%.

10. По данным 22 наблюдений в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.93$. Проверьте гипотезу об адекватности этой регресии

1.2 Вариант А1

1. Найдите
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$$

2. Матрица вида A= $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ c & d \end{pmatrix}$ коммутирует с матрицей B= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то есть выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Найдите константы c, d и матрицу A^{-2} (матрицу, обратную матрице $A^2 = A \cdot A$).

3. Найдите стационарные точки функции $f(x,y) = x^3 + y^3 + 21x^2 + 18xy + 21y^2$ и определите их тип.

4. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x,y) = x^3 \cdot y^4$ в области $x > 0, y > 0$ при ограничении $3x+4y = 7$.

5. Найдите решение дифференциального уравнения $xy' + 3y = x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1/3$. Постройте эскиз графика найденного решения.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = e^{2x}$.

7. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.1 и 0.2 соответственно. Их предсказания на завтра разошлись. Какова вероятность того, синоптики Аляски ошиблись?

8. Функция плотности двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид
$p(x,y) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in [0;1], y \in [0;1], y \geqslant x \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
Найдите:
   (a) значение константы c
   (b) вероятность того, что $Y \leqslant 2X$
   (c) математическое ожидание $\mathbb{E}(Y)$

9. Медицинское обследование 180 пациентов показало, что у 63 из них наблюдалось улучшение состояния после лечения новым препаратом. Найдите 95% доверительный интервал для теоретической доли тех пациентов, у которых може наблюдаться такое улучшение.

10. По данным 30 наблюдений в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$, причём $\hat{\beta} = 2.04, \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.75$. Проверьте адекватность этой регрессии.

1.3 Вариант B

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 4x}{\arcsin 2x}$$

2. Найдите матрицу X из уравнения $A \cdot X \cdot A' = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице A.

3. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x,y) = \ln x + \ln y - 3x - y - 6xy$.

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 3$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Время обслуживания одного вызова на междугородней телефонной станции можно считать нормально распределенной случайной величиной. При этом математическое ожидание составляет 1,5 минуты, а стандартное отклонение равно 0,5 минуты. Найдите при этих условиях вероятность того, что время обслуживания хотя бы одного из двух независимых вызовов составит более двух минут.

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид
$f(x,y) = \begin{cases} c(1-|x|), |x| \leqslant 1 \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$
Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию величины X.

7. Для случайной выборки, состоящей из 8 наблюдений, извлеченных из нормальной генеральной совокупности, был получен следующий 90% доверительный интервал для математического ожидания μ: $18,1 < \mu < 18.9$. Постройте 95% доверительный интервал для этого математического ожидания.

8. По данным 26 наблюдений в рамках классической нормальной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$, в которой $\hat{\beta} = 2.0598$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.0153$. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $\begin{matrix} H_0 : \beta = 2 \\ H_a : \beta \neq 2 \end{matrix}$

1.4 Вариант B1

1. Найдите предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$$

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ -6 & -a \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda = 1$. Найдите константу a и собственные значение матрицы A^{-1}.

3. Найдите стационарные точки в области $x > 0$, $y > 0$ и определите их тип для функции

$$f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$$

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 1$, удовлетворяющее условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.1 и 0.2 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию величины X.

7. Для случайной выборки из 8 автомобилей средняя скорость на определенном участке трассы составила $\bar{X} = 115$ км/ч, а выборочное стандартное отклонение — $\hat{\sigma} = 2$ км/ч. Предполагая нормальность закона распределения скорости постройте 95% доверительный интервал для математического ожидания μ скорости.

8. По 28 наблюдениям в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$, в которой $\hat{\beta} = 1.57$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.05$. Вычислите коэффициент детерминации R^2.

1.5 Вариант B2

1. Найдите предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x} - 1}$$

2. Матрица вида $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -3a & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda = 2$. Найдите константу a и собственные значение матрицы A^{-1} (матрицы, обратной к матрице A).

3. Найдите стационарные точки функции $f(x, y) = x^2 + xy - 9x - 3y$ и определите их тип.

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' - 16y = 32$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.05 и 0.1 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания верны?

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид $p(x, y) = \begin{cases} c/x^2, & \text{при } x \in [1; 2] \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

7. Для случайной выборки из 10 студентов средний балл за контрольную работу составил $\bar{X} = 71.2$ балла (по шкале в 100 баллов), причем выборочное стандартное отклонение $\hat{\sigma} = 15.4$ балла. Постройте 95% доверительный интервал для математического ожидания μ балла X за эту контрольную работу (в предположении нормального закона распределения случайной величины X).

8. По 32 наблюдениям в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$, в которой $\hat{\beta} = 0.32$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.04$. Вычислите коэффициент детерминации R^2.

2 2008

2.1 Вариант A

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+6x+5x^2}{1-3x-x^2}\right)^{-3/x}$$

2. В чемпионате по шахматам участвовало n участников. Каждый участник сыграл с каждым один раз. Известно, что ничьих не было. По результатам матча судья составил матрицу A размера $n\times n$ по принципу: $a_{ij}=1$, если игрок i выиграл у игрока j; $a_{ij}=-1$, если игрок i проиграл игроку j; диагональные элементы равны нулю, $a_{ii}=0$.
   (a) Найдите $\det(A)$ при $n=2$
   (b) Найдите $A+A^t$
   (c) Найдите $\det(A)$ при $n=1111$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-4x^2-y^2}$

4. С помощью метода множителей Лагранжа найдите условные минимумы и максимумы функции $f(x,y,z)=5x^3y^5z^3$ при ограничении $x+y+5z=110$.

5. Решите дифференциальное уравнение $y'''+6y''-7y'=14+8e^x$

6. Для дифференциального уравнения $y'=(y+x)/(y-x)$ найдите
   (a) общее решение
   (b) частное решение, проходящее через точку $(x;y)=(0;1)$

7. На острове Двупогодном погода бывает двух видов: пасмурная и ясная. Первого января губернатор острова «разгоняет» тучи, поэтому в этот день на острове всегда ясно. В каждый последующий день погода меняется случайным образом согласно двум закономерностям. После пасмурного дня ясный наступает с вероятностью 0.3, после ясного дня ясный наступает с вероятностью 0.8.
   (a) Какова вероятность того, что второе января будет ясное?
   (b) Какова вероятность того, что второе января было ясное, если известно, что третье – было пасмурное?

8. Задана совместная функция плотности случайных величин X и Y:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx+y/2, & x,y\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$
   Найдите c, $\mathbb{E}(XY)$ и $\mathbb{P}(XY<1/2)$

9. Исследуется зависимость спроса Q на некоторый товар от его цены P. Предположим, что модель $\ln(Q)=\alpha+\beta\ln(P)+\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной случайной ошибкой. Функция спроса оценивается по 10 наблюдениям. Известно, что 99% доверительный интервал для коэффициента эластичности β равен $(-1.44;-0.88)$.
   (a) Определите значение оценки $\hat{\beta}$ и оценки ее дисперсии.
   (b) Можно ли утверждать, что спрос зависит от цены товара?

10. Распределение заработной платы работников подчиняется закону Эрланга с функцией плотности $f(x)=\frac{x}{\lambda^2}\exp(-x/\lambda)$ при $x>0$. Оцените значение параметра λ по выборке X_1, X_2, …, X_n методом максимального правдоподобия. Будет ли полученная оценка несмещенной?
   Примечание: $\int_0^\infty x^n\exp(-x/\lambda)=\lambda^{n+1}n!$

2.2 Вариант B

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+7x+2x^2}{1-x-x^2}\right)^{5/x}$$

2. В чемпионате по шахматам участвовало n участников. Каждый участник сыграл с каждым один раз. Известно, что ничьих не было. По результатам матча судья составил матрицу A размера $n\times n$ по принципу: $a_{ij}=1$, если игрок i выиграл у игрока j; $a_{ij}=-1$, если игрок i проиграл игроку j; диагональные элементы равны нулю, $a_{ii}=0$.

(a) Найдите $\det(A)$ при $n = 2$
(b) Найдите $A + A^T$
(c) Найдите $\det(A)$ при $n = 231$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-9y^2}$

4. С помощью метода множителей Лагранжа найдите условные минимумы и максимумы функции $f(x, y, z) = 6xy^{11}z^3$ при ограничении $x + 2y + z = 60$.

5. Решите линейное дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 2y' = 4 - e^x$

6. Для дифференциального уравнения $y' = (y + x)/(y - x)$ найдите
   (a) Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = \frac{y+7x}{y-x}$
   (b) Выберите из них решение, проходящее через точку $(x; y) = (0; 1)$

7. На острове Двупогодном погода бывает двух видов: пасмурная и ясная. Первого января губернатор острова «разгоняет» тучи, поэтому в этот день на острове всегда ясно. В каждый последующий день погода меняется случайным образом согласно двум закономерностям. После пасмурного дня ясный наступает с вероятностью 0.4, после ясного дня ясный наступает с вероятностью 0.9.
   (a) Какова вероятность того, что второе января будет ясное?
   (b) Какова вероятность того, что второе января было ясное, если известно, что третье – было пасмурное?

8. Задана совместная функция плотности случайных величин X и Y:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx + y/2, & x, y \in [0; 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   Найдите c, $\mathbb{E}(XY)$ и $\mathbb{P}(XY < 1/2)$

9. Распределение доходов некоторой группы населения подчиняется закону Парето с $f(x) = \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{x}\right)^{1+1/\gamma}, x > 2, 0 < \gamma < 1$. Требуется оценить значение параметра γ с помощью метода максимального правдоподобия по данным случайной выборки n налоговых деклараций, заполненных респондентами из исследуемой доходной группы. Будет ли полученная оценка несмещенной?

10. Исследуется зависимость спроса Q на некоторый товар от его цены P. Предположим, что модель $\ln(Q) = \alpha + \beta\ln(P) + \varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной случайной ошибкой. Функция спроса оценивается методом наименьших квадратов по 10 наблюдениям. Доверительный интервал для коэффициента эластичности β, соответствующий уровню доверия 95%, принимает значение $(-2.4350, -1.8802)$.
    (a) Определите значение МНК-оценки и оценки ее дисперсии для коэффициента эластичности.
    (b) На уровне значимости 1% проверить гипотезу о единичной эластичности.

2.3 Вариант C

1. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x} + 4e^{5x} - 5e^{-4x}}{\arcsin(\arcsin(6x))}$$

2. Известно, что $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$.
   (a) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A
   (b) Надйите $\lim_{n\to\infty} A^n$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x, y) = 2x^5 + 5y^2 + \frac{10}{xy}$

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = \frac{6y-2xy^3-\sin(xy)-xy\cos(xy)}{3x^2y^2-6x+x^2\cos(xy)}$

5. Вася кидает дротик в мишень три раза. Известно, что во второй раз он попал ближе к центру, чем в первый раз. Какова условная вероятность того, что в третий раз он попадёт ближе к центру, чем в первый раз? Указание: Предположить, что результаты бросков (расстояние от дротика до центра мишени) независимы друг от друга и имеют одинаковое непрерывное распределение.

6. Задана функция плотности случайной величины X:
$f_X(x) = \begin{cases} c(x+x^2), x \in [0;1] 0, \text{иначе} \end{cases}$.
   (a) Найдите значение константы c
   (b) Найдите $\mathbb{E}(X^2)$
   (c) Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$

7. Используя ежегодные данные об объеме импорта товаров Y в личном располагаемом доходе X в США за 1978 — 1997 годы и предполагая,что модель $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой, исследователь получил методом наименьших квадратов следующее уравнени регрессии: $Y = -261.09 + 0.2452X$. Оценка дисперсии случайной ошибки ε — $\hat{\sigma}^2 = 475.48$, коэффициент детерминации $R^2 = 0.9388$.
   (a) На уровне значимости 5% проверить гипотезу о независимости объема импорта от личного располагаемого дохода.
   (b) Предполагая, что в 1998 году располагаемый доход составил 2800 млрд. долларов, вычислить прогнозное значение для ожидаемого объема импорта. Какова точность полученного прогноза?

8. В рекламе утверждалось, что из двух типов пластиковых карт: «Visa» и «American Express» богатые люди предпочитают второй, т.е. владельцы второго типа карт ежемесячно тратят больше денег. Выборочное обследование показало, что ежемесячные расходы по картам каждого типа достаточно хорошо описываются нормальным законом распределения. Средние месячные расходы 31 обладателя «Visa» оказались равны \$500 при выборочной дисперсии 39000 $\$^2$, а среднемесячные расходы 29 обладателей «American Express» — \$ 580 при выборочной дисперсии 32000 $\$^2$. Проверить утверждение рекламы при 5% уровне значимости.

2.4 Вариант D

1. Найдите предел
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-7x} - 3e^{-5x} + 2e^{4x}}{\operatorname{tg} \operatorname{tg}(5x)}$$

2. Известно, что $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$.
   (a) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A
   (b) Надйите $\lim_{n\to\infty} A^n$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 + \frac{6}{xy}$

4. Найдите решение дифференциального уравнения
$$y' = \frac{18x^2y - y - 2xy^2\cos(x^2y)}{x - 6x^3 + \sin(x^2y) + x^2y\cos(x^2y)}$$

5. Вася кидает дротик в мишень три раза. Известно, что во второй раз он попал дальше от центра, чем в первый раз. Какова условная вероятность того, что в третий раз он попадёт ближе к центру, чем в первый раз?
Указание: Предположить, что результаты бросков (расстояние от дротика до центра мишени) независимы друг от друга и имеют одинаковое непрерывное распределение.

6. Задана функция плотности случайной величины X:
$f_X(x) = \begin{cases} c(x+x^3), x \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$.
   (a) Найдите значение константы c
   (b) Найдите $\mathbb{E}(X^2)$
   (c) Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$

7. Используя ежегодные данные об объеме импорта товаров Y в личном располагаемом доходе X в США за 1978 — 1997 годы и предполагая,что модель $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой, исследователь получил методом наименьших квадратов следующее уравнение регрессии: $Y = -261.09 + 0.2452X$ и оценку дисперсии $\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}) = 0.0004$.

(a) Построить 95% доверительный интервал для коэффициента наклона.

(b) На уровне значимости 5% проверить гипотезу о зависимости объема импорта от личного располагаемого дохода.

8. Изучается эффективность нового метода обучения. У группы из 40 студентов, обучавшихся по новой методике, средний балл на экзамене составил 322.12, а выборочное стандартное отклонение — 54.53. Аналогичные показатели для независимой выборки из 60 студентов того же курса, обучавшихся по старой методике, приняли значения 304.61 и 62.61 соответственно. Предполагая, что экзаменационный балл случайно выбранного студента хорошо описывается нормальным законом, проверить гипотезу об эффективности новой методики.

3 2010

3.1 Вариант А

1. Вычислить предел $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$

2. Пусть А $= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Найти:
   (a) A^{-1}
   (b) A^{10}
   (c) Такую симметрическую неотрицательно определенную матрицу B, что $A = B \cdot B$
   (d) Такую симметрическую неотрицательно определенную матрицу C, что $A^{-1} = C \cdot C$.

$\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 10$, $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$

3. Найти и классифицировать точки экстремума функции $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

$(-1, -1)$ - локальный максимум

4. Найти и классифицировать экстремумы функции $f(x, y) = 9x^2 + 9y^2 + 2xy$ при ограничении $x^2 + y^2 = 1$.

$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ - максимум,
$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ - максимум,
$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ - минимум,
$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ - минимум

5. Решить дифференциальное уравнение $y''' - 8y = 0$.

6. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x} = 2y \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

$x(t) = e^t(C_1 \sin(t) - C_2 \cos(t)) + e^{-t}(C_4 \cos(t) - C_3 \sin(t))$
$y(t) = e^t(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) + e^{-t}(C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t))$

7. Безработный индивид с вероятностью 20% находит работу в течение ближайшего месяца (независимо от того, сколько времени он уже ищет работу). Индивид, имеющий работу, теряет её в течение месяца с вероятностью 5%. Известно, что на данный момент индивид Петя является безработным.
   (a) Какова вероятность того, что через два месяца Петя тоже будет безработным?

   0.65

   (b) По прошествии двух месяцев выясняется, что Петя является безработным. Какова вероятность того, что месяц назад он работал (предполагается, что за месяц Петя может сделать только один переход между состояниями «безработица» и «занятость»)?

1/65

8. Контрольные камеры ДПС на МКАД зафиксировали скорость движения шести автомобилей: 89, 83, 78, 96, 80, 78 км/ч. Предполагается, что скорость распределена по нормальному закону.
   (a) Постройте 95% доверительный интервал для средней скорости автомобилей, если известно, что настоящая дисперсия равна 50 (км/ч)^2.

   $78.34 < \mu < 89.66$

   (b) Постройте 80% доверительный интервал для дисперсии скорости.

   $27.94 < \sigma^2 < 160.25$

9. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы
   (a) множества A и B не пересекались
   (b) множество A содержалось бы в множестве B?

10. В дереве по 2010 вершин степеней 3, 4 и 5 и нет вершин больших степеней. Сколько в этом дереве может быть
    (a) вершин степени 1?
    (b) вершин степени 2?

    Укажите все возможные варианты ответа.

3.2 Вариант B

1. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $x = (x_1 x_2 x_3)^T$. Привести квадратичную форму $f(x) = x^T A x$ к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования (требуется указать, как сам канонический вид квадратичной формы, так и ортогональное преобразование, которое приводит форму к каноническому виду).

3. Найти и классифицировать точки экстремума функции $f(x, y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

4. Найти и классифицировать экстремумы функции $f(x, y, z) = 2x - y + 9z^2$ при двух ограничениях $y + 6xz = -1$ и $3z - 2x = 1$.

5. Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - y^2)dy + 2xydx = 0$.

6. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} = 7 \\ \dot{x} + \ddot{y} = e^t \end{cases}$

7. Фирма производит микросхемы. Известно, что производство микросхем может находиться в одном из двух состояниях: нормальном (доля дефектных микросхем 10%) и проблемном (доля дефектных микросхем 55%). Для контроля состояния производства утром производится случайная выборка размером в 10 микросхем из продукции первого часа работы. Если из них 3 и более дефектные, производство останавливается до выяснения причины проблемы.
   (a) Найдите вероятность ложного срабатывания тревоги.
   (b) Найдите вероятность того, что проблемное состояние не будет идентифицировано.

8. Доходность ценных бумаг на New York Фондовой бирже имеет нормальное распределение. В таблице приведены данные о доходности 10 видов ценных бумаг:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
X	10	16	5	10	12	8	4	6	5	4	80
X^2	100	256	25	100	144	64	16	36	25	16	782

   (a) Найти точечные несмещенные и состоятельные оценки для математического ожидания и дисперсии доходности.

   (b) Найти 90% доверительный интервал для математического ожидания доходности.

9. Пусть $X_1,..,X_n$ — выборка из нормально распределенной генеральной совокупности,т.е. $X_i\ N(\mu,\sigma^2), i = 1,...,n$.
   Построены следующие оценки для математического ожидания μ:
   $\mu_1 = \bar{X}, \mu_2 = X_1, \mu_3 = \frac{X_1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}(X_2 + ... + X_n)$.

   (a) Какая из этих оценок является несмещенной?

   (b) Какая из этих оценок является наиболее эффективной?

   (c) Какая из этих оценок является состоятельной?

10. Оценка зависимости выпуска фирмы от капитальных и трудовых затрат вида $Q = AK^{\beta_2}L^{\beta_3}$ с помощью модели $\ln Q = \beta_1 + \beta_2 \ln K + \beta_3 \ln L + u$ по 40 наблюдениям дала следующие результаты (в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов регрессии):
    $\ln Q = 1.37 + 0.632(0.257) \ln K + 0.452(0.219) \ln L, R^2 = 0.98, \widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0.044$

    На уровне значимости 5 % проверить гипотезы

    (a) о значимости вклада труда/капитала в формирование выпуска

    (b) о наличии постоянной отдачи от масштаба.

4 2011

4.1 Вариант А

1. (10%) Найдите и классифицируйте экстремумы функции $f(x,y,z) = 2x - y + 3z$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Выписываем функцию Лагранжа: $L = 2x - y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x + 2 = 0 \\ -2\lambda y - 1 = 0 \\ -2\lambda z + 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 14 = 0 \end{cases}$

Решения системы (критические точки):
Точка A: $[x = 2, y = -1, z = 3, \lambda = 1/2]\,, f(A) = 14$
Точка B: $[x = -2, y = 1, z = -3, \lambda = -1/2]\,, f(B) = -14$
Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум. (График функции есть гиперплоскость, которая ограничивается на сферу).

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = 20 > 0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = -20 < 0$, минимум.
Баллы:
5 баллов за найденные точки
5 баллов за обоснование того, что они есть максимум и минимум (с гессианами или без)

2. (a) (4%) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 - 3A + I_n = 0$. (I_n — единичная матрица). Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

   $I_n = A(3I_n - A) = AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

   (b) (2%) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = 0$. Следует ли отсюда, что $A = 0$?$(n > 1)$.

   Для $n = 1$ следует, т.к. из $a^2 = 0$ следует $a = 0$. Для $n > 1$ это не верно, например: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

   (c) (4%) Множество многочленов степени 3, $M = \left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \right\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M \longrightarrow_A M$, такое, что $Af(x) = xf'(x)$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

> Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$, в этом базисе матрица оператора имеет вид: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,
> т.е. собственные числа 0,1,2,3 и соответствующие собственные векторы $1, x, x^2, x^3$

3. Имеется матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) (3%) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

   > Характеристическое уравнение $(4 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0$, собственные числа: 6,2.
   > Нормированные собственные векторы: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 6$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 2$

   (b) (2%) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера, и $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?

   > Собственные числа положительные. Значит, квадратичная форма принимает неотрицательные значения.

   (c) (5%) Обозначим через $||A|| = [tr(A^T A)]^{1/2}$ норму матрицы A. (A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B.
   Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n$.

   > Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ — ортогональная матрица, а $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ — диагональная.
   > Значит, $A^n = CD^nC^{-1}$, $D^n = \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.
   >
   > $$||A^n||^2 = [tr((A^n)^T A^n)] = tr((CD^nC^T)^T CD^nC^T) = tr(CD^nC^TCD^nC^T) = \\ = tr(CD^{2n}C^T) = tr(D^2nC^TC) = tr(D^{2n}) = 6^{2n} + 2^{2n}$$
   >
   > $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} D^n \right) \cdot C^T = \\ = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(6^{2n} + 2^{2n})^{1/2}} \right) \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot C^T = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C^T = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (10%) Функция $y(x)$ на отрезке [0,2] удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 4y = 0$, с граничными условиями: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Найдите $y(2)$.

> $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$.
> Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x) = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x), \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
> Учитывая $y = 0, y' = 2$ при $x = 0$ получаем $C_1 = 0, C_2 = 1$. Функция равна $y(x) = \sin(2x)$, соответственно, $y(2) = \sin(4) \approx 0.757$
> Баллы:
> 5 баллов за найденное общее решение
> 5 баллов за частное решение и верный ответ.

5. (10%) Функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) + 7 = 0$, а функция $x(t)$ равна $x(t) = \frac{1}{4}(y'(t) - y(t) - 1)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0) = x'(0) = 0$.

$y(t) = 7/9$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) + 7 = 0$. Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) = 0$.
Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9}$, соответственно,

$$x(t) = \frac{1}{4}(y'(t) - y(t) - 1) = \frac{1}{4}\left((c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9})' - (c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9}) - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-c_1e^{-t} + 9c_2e^{9t} - c_1e^{-t} - c_2e^{9t} - \frac{7}{9} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(-2c_1e^{-t} + 8c_2e^{9t} - \frac{16}{9}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-c_1e^{-t} + 4c_2e^{9t} - \frac{8}{9}\right)$$

Из граничных условий получаем:

$$\begin{cases} 2x(0) = -c_1 + 4c_2 - \dfrac{8}{9} & = 0 \\ 2x'(0) = c_1 + 36c_2 & = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$c_1 = -\frac{4}{5}, c_2 = \frac{1}{45}, y(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{45}e^{9t} + \frac{7}{9}$$

Баллы:
5 баллов за найденное общее решение неоднородного уравнения
5 баллов за частное решение и верный ответ

6. Два стрелка стреляют по мишени (каждый делает один выстрел). Для первого стрелка вероятность промаха составляет 0.3, для второго — 0.5. Результаты выстрелов независимы.

(a) (5%) Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из них?

Обозначим события: A — «первый стрелок промахнулся», B — «второй стрелок промахнулся». Тогда событие «мишень поражена» можно записать как $\bar{C} = A \cap B$. Искомая вероятность: $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1 - 0.3 \cdot 0.5 = 0.85$.

(b) (5%) При выстреле двух стрелков мишень была поражена (хотя бы одним выстрелом). Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся?

Здесь нужно найти условную вероятность события B при условии C. По определению условной вероятности, $\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. Совместное наступление событий B и C (второй стрелок промахнулся, но мишень была поражена) эквивалентно тому, что первый стрелок поразил мишень, а второй промахнулся, т.е. $B \cap C = \bar{A} \cap B$. Таким образом,

$$P(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)\bar{\mathbb{P}}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{(1 - 0.3) \cdot 0.5}{0.85} = \frac{0.35}{0.85} \approx 0.4118.$$

7. Случайная величина X принимает значения в интервале [0,2], и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x) = cx^3$, где c — некоторая константа.

(a) (2%) Найдите $\mathbb{P}(X < 0.3 \mid X < 0.6)$.

Сначала найдем c: $1 = F(2) = c \cdot 2^3$, получаем $c = 1/8$.

$$\mathbb{P}(X < 0.3 \mid X < 0.6) = \frac{\mathbb{P}(X < 0.3 \cap X < 0.6}{\mathbb{P}(C < 0.6)} = \frac{\mathbb{P}(X < 0.3)}{\mathbb{P}(X < 0.6)} = \frac{F(0.3)}{F(0.6)} = \frac{0.3}{0.6}^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

(b) (3%) Найдите $\mathrm{Cov}\left(X+1, \frac{1}{X}\right)$.

$$f(x) = F'(x) = \frac{3}{8}x^2.$$
$$EX = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{2^4}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \int_0^2 x^{-1}\frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{2^2}{2} = \frac{3}{4} = 0.75.$$
$$\mathrm{Cov}(X+1,\frac{1}{X}) = \mathrm{Cov}(X,\frac{1}{X}) = \mathbb{E}(X\cdot\frac{1}{X}) - (EX)\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} = -0.125.$$

8. Имеется случайная выборка $X_1, ..., X_n$, где все X_i независимы и принимают значения 1, 3 и 5 со следующими вероятностями:

x	1	3	5
$\mathbb{P}(X_i = x)$	a	0.2	0.8-a

(a) (5%) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?

Допустимое множество значений параметра $a : [0, 0.8]$.
Найдем математическое ожидание величин $X_i : \mathbb{E}(X_i) = 1\cdot a + 3\cdot 0.2 + 5(0.8-a) = 4.6 - 4a$.
Приравняем его к выборочному среднему: $4.6 - 4a = \bar{X}$.
Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов:

$$\hat{a}_{MM} = \frac{4.6-\bar{X}}{4} = 1.15 - \frac{\bar{X}}{4}$$

Эта оценка не может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

(b) (5%) При каком значении m оценка $\hat{a} = mX_1 - 1.15 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n X_i$ параметра a является несмещённой?

Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$\mathbb{E}(\hat{a} = m\mathbb{E}(X_1) - 1.15 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n \mathbb{E}(X_i) = = 4.6m - 4ma - 1.15 + \frac{1}{n-1}(n-1)(4.6-4a) = (4.6-4a)(m+1) - 1.15.$$

Оценка $\hat{a}$ будет несмещенной, если $\mathbb{E}(\hat{a}) = a$, или $(4.6-4a)(m+1) - 1.15 = a$. Решив уравнение относительно m, получаем

$$m = \frac{5a - 3.45}{4.6 - 4a}$$

Поскольку m, а, следовательно, и $\hat{a}$, зависит от неизвестного параметра, то такого значения m не существует.

9. Страховая компания выплачивает агентам комиссию. План возмещения убытков предполагает, что средние выплаты комиссий составят 32 тысячи долларов в год. Если средние выплаты будут меньше запланированных, то план потребуется изменить. Для проверки гипотезы о том, что средние выплаты равны 32 тысячам долларов, против альтернативной гипотезы о том, что средние выплаты меньше 32 тысяч, была сформирована случайная выборка из 49 агентов. В этой выборке средние выплаты комиссий составили 29.5 тысяч долларов, а несмещённая оценка дисперсии оказалась равна 36. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости 5%.

(a) (3%) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.

Тестируем нулевую гипотезу $H_0 : \mu_= \mu_0$ против альтернативы $H_A : \mu < \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой $z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim_{H_0} N(0,1)$. (Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{29.5 - 32}{\sqrt{36}/\sqrt{49}} = -\frac{5/2}{6/7} = -\frac{35}{12} = -2.917.$$

(b) (2%) Рассчитайте критическое значение этой статистики.

Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = -z_{0.05} = -1.645$ (Для распределения Стьюдента $t_{crit} = -t_{n-1,\alpha} = -t_{48,0.05} = -1.677$. Нужного числа степеней свободы в таблице нет, но можно установить, что $t_{crit} \in (-1.684, -1.671)$.

(c) (2%) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание для пересмотра плана пересмотра убытков.

Так как $z < z_{crit}(z < t_{crit})$, то нулевая гипотеза отвергается, план возмещения убытков стоит пересмотреть.

(d) (3%) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких — нет.

При использовании нормального распределения P-значение$=\mathbb{P}(Z < -2.917) = 0.0018$. Таким образом, при уровне значимости выше 0.18% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 0.18% — не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что P-значение $\in (0.001, 0.005)$.

10. При 20 наблюдениях с помощью МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \epsilon_i$ при условиях на ошибки, соответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:

$$\hat\beta = \begin{bmatrix} 8.4739 \\ 20.8209 \\ 1.2309 \\ -17.4765 \end{bmatrix}, \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta) = \begin{bmatrix} 54.94838 & -24.62334 & -30.31618 & -0.628223 \\ -24.62334 & 85.97937 & 8.523841 & -72.60611 \\ -30.31618 & 8.523841 & 19.45426 & 6.176577 \\ -0.628223 & -72.60611 & 6.176577 & 77.56094 \end{bmatrix}$$

, а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 117.0376, R^2 = 0.243649$. Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \epsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.003539$.

(a) (5%) На 5% уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_3 \neq 0$

$$t_{\hat\beta_2} = \frac{\hat\beta_2}{s_{\hat\beta_2}} = \frac{20.8209}{\sqrt{85.97937}} = 2.245; t_{\hat\beta_3} = \frac{\hat\beta_3}{s_{\hat\beta_3}} = \frac{1.2309}{\sqrt{19.45426}} = 0.279$$

поскольку $|t_{\hat\beta_2}| > t_{0.25}(16) = 2.12$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ не отвергается.

(b) (5%) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_a: «не H_0».

$$F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} = \frac{(0.243649 - 0.0035359)/2}{(1 - 0.243649)/16} = 2.54 < F_{0.05}(2.16) = 3.63$$

т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

(c) (5%) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы H_a: $\beta_2 > \beta_3$.

Рассмотрим разность $\hat\beta_2 - \hat\beta_3$, оценка её дисперсии равна

$$\hat V(\hat\beta_2 - \hat\beta_3) = \hat V(\hat\beta_2) + \hat V(\hat\beta_3) - 2\hat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = 85.97937 + 19.45424 - 2 \cdot 8.523841 = 88.38595$$

критическая статистика $t = \frac{\hat\beta_2 - \hat\beta_3}{\sqrt{\hat V(\hat\beta_2 - \hat\beta_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(16)$. Поскольку $t_{0.05}(16) = 1.746$, а $t = 2.08 > 1.746$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ отвергается в пользу альтернативы

$H_1 : \beta_2 > \beta_3$

4.2 Вариант B

1. (10%) Найдите и классифицируйте экстремумы функции $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Выписываем функцию Лагранжа: $L = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x + 1 = 0 \\ -2\lambda y + 2 = 0 \\ -2\lambda z + 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 14 = 0 \end{cases}$

Решения системы (критические точки):
Точка A: $[x = 1, y = 2, z = 3, \lambda = 1/2]\,, f(A) = 14$
Точка B: $[x = -1, y = -2, z = -3, \lambda = -1/2]\,, f(B) = -14$
Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум. (График функции есть гиперплоскость, которая ограничивается на сферу).

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = 20 > 0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = -20 < 0$, минимум.
Баллы:
5 баллов за найденные точки
5 баллов за обоснование того, что они есть максимум и минимум (с гессианами или без)

2. (a) (4%) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 + 2A + I_n = 0$. (I_n — единичная матрица). Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

$I_n = A(-2I_n - A) = AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

(b) (2%) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = A$. Следует ли отсюда, что есть только две возможности: $A = 0$ или $A = I_n$?$(n > 1)$.

Для $n = 1$ следует, т.к. из $a^2 = a$ следует $a_1 = 0, a_2 = 1$. Для $n > 1$ это не верно, например: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) (4%) Множество многочленов степени 3, $M = \left\{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M \longrightarrow_A M$, такое, что $(Af)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$, в этом базисе матрица оператора имеет вид: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
т.е. собственные числа 0. Собственные векторы находятся из условия

$$Af)(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - a_0}{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0$$

откуда $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. имеется единственный (с точностью до множителя) собственный векторов $f(x) = 1$.

3. Имеется матрица $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) (3%) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

   Характеристическое уравнение $(7 - \lambda)(1 - \lambda) - 16 = 0$, собственные числа: 9,-1.
   Собственные векторы: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 9$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ для $\lambda = -1$

   (b) (2%) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера, и $f(\vec{x} = \vec{x}^T A\vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?

   Собственные числа разного знака. Значит, квадратичная форма принимает любые значения.

   (c) (5%) Обозначим через $||A|| = [tr(A^TA)]^{1/2}$ норму матрицы A. (A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B.
   Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n$.

   Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ — ортогональная матрица, а $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ — диагональная.
   Значит, $A^n = CD^nC^{-1}$, $D^n = \begin{bmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$.

   $$||A^n||^2 = [tr((A^n)^TA^n)] = tr((CD^nC^T)^TCD^nC^T) = tr(CD^nC^TCD^nC^T) = tr(CD^{2n}C^T) = tr(D^2nC^TC) = tr(D^{2n}$$
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} D^n \right) \cdot C^T = C \cdot \left(lim_{n\to\infty} \frac{1}{(9^{2n}+1)^{1/2}} \right) \begin{bmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \cdot C^T = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C$$

4. (10%) Функция $y(x)$ на отрезке [0,3] удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 3y' = 0$, с граничными условиями: $y(0) = 0, y'(3) = -3$. Найдите $y(3)$.

   $\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$.
   Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   $0 = y(0) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3\cdot 0} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$
   $-3 = y'(3) = -3C_2 \cdot e^{-3\cdot 3} \Rightarrow C_2 = e^9$.
   Функция равна $y(x) = e^9(-1 + e^{-3x})$, соответственно, $y(3) = e^9(-1 + e^{3\cdot 3}) = 1 - e^9 \approx -8102$
   Баллы:
   5 баллов за найденное общее решение
   5 баллов за частное решение и верный ответ.

5. (10%) Функция $y(t)$удовлетворяет уравнению $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) + 8 = 0$, а функция $x(t)$ равна $x(t) = \frac{1}{2}(y'(t) - 4y(t) - 2)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0) = x'(0) = 0$.

$y(t) = -8/12 = -2/3$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) + 8 = 0$.
Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) = 0$.
Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3}$, соответственно,

$$x(t) = \frac{1}{2}\left((c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3})' - 4(c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3}) - 2\right) = \frac{1}{2}(2c_1e^{2t} + 6c_2e^{6t} - 4c_1e^{2t} - 4c_2e^{6t} + \frac{8}{3} - 2) = -c_1e^{2t} + c_2e^{6t} + \frac{1}{3}$$

Из граничных условий получаем: $\begin{cases} x(0) = -c_1 + c_2 + \frac{1}{3} & = 0 \\ x'(0) = -2c_1 + 6c_2 & = 0 \end{cases}$

Отсюда получаем

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{6}, y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{2}{3}$$

Баллы:
5 баллов за найденное общее решение неоднородного уравнения
5 баллов за частное решение и верный ответ

6. На учениях два самолёта атакуют цель (каждый выпускает одну ракету). Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, а второй — с вероятностью 0.4. Пусть самолёты поражают цель независимо друг от друга.

(a) (5%) Какова вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним самолётом?

Обозначим события: A — «первый самолёт поразил цель», B — «второй самолёт поразил цель». Тогда событие «цель поражена только одним самолётом» можно записать как $C = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. В силу независимости событий A и B искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = (1 - 0.6) \cdot 0.4 + 0.6 \cdot (1 - 0.4) = 0.16 + 0.36 = 0.52$$

(b) (5%) При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что цель поразил первый самолёт?

Здесь нужно найти условную вероятность события A при условии C. По определению условной вероятности, $\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. Совместное наступление событий A и C (первый самоёт поразил цель, и цель была поражена только одним самолётом) эквивалентно тому, что первый самолёт поразил цель, а второй — нет, т.е. $A \cap C = A \cap \bar{B}$. Таким образом,

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cap \bar{B}}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0.6 \cdot 0.6}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} \approx 0.6923.$$

7. Случайная величина X принимает значения в интервале [0,3], и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x) = cx^2$, где c — некоторая константа.

(a) (2%) Найдите $\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1)$.

Сначала найдем c: $1 = F(3) = c \cdot 3^2$, получаем $c = 1/9$.

$$\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X > 2 \cap X > 1}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X > 2)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{1 - F(2)}{1 - F(1)} = \frac{1 - \frac{1}{9} \cdot 4}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

(b) (3%) Найдите $\mathrm{Cov}\left(X^2 + 3, \frac{1}{X}\right)$.

$f(x) = F'(x) = \frac{2}{9}x.$

$EX = \int_0^3 x^2 \frac{2}{9} x dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^4}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$

$\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \int_0^3 x^{-1} \frac{2}{9} x dx = 3\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \approx 0.667.$

$\mathrm{Cov}(X^2 + 3, \frac{1}{X}) = \mathrm{Cov}(X^2, \frac{1}{X}) = \mathbb{E}(X^2 \cdot \frac{1}{X}) - (E(X^2))\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = 2 - \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1.$

8. Имеется случайная выборка $X_1, ..., X_n$, где все X_i независимы и принимают значения -1, 1 и 4 со следующими вероятностями:

x	-1	1	4
$\mathbb{P}(X_i = x)$	0.3	a	0.7-a

(a) (5%) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?

Допустимое множество значений параметра $a : [0, 0.7]$.
Найдем математическое ожидание величин $X_i : \mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot a + 4(0.7 - a) = 2.5 - 3a.$
Приравняем его к выборочному среднему: $2.5 - 3a = \bar{X}$.
Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов: $\hat{a}_{MM} = \frac{2.5 - \bar{X}}{3}$. Эта оценка не может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

(b) (5%) При каком значении m оценка $\hat{a} = X_1 - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1} \sum_{i=2}^{n} X_i$ параметра a является несмещённой?

Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$\mathbb{E}(\hat{a} = \mathbb{E}(X_1) - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(X_i) = 2.5 - 3a - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1}(n-1)(2.5 - 3a) = (2.5 - 3a)(m + 1) - \frac{5}{6} = a$$

Оценка $\hat{a}$ будет несмещенной, если $\mathbb{E}(\hat{a}) = a$, или $(2.5 - 3a)(m + 1) - \frac{5}{6} = a$. Решив уравнение относительно m, получаем

$$m = \frac{5a - 3.45}{4.6 - 4a}$$

Поскольку m, а, следовательно, и $\hat{a}$, зависит от неизвестного параметра, то такого значения m не существует.

9. Фирма-производитель некоторого лекарственного препарат следит за тем, чтобы концентрация посторонних примесей в препарате в среднем составляла не более 0.03. Для проверки гипотезы о том, что концентрация посторонних примесей равна 0.03, против альтернативной гипотезы о том, что эта концентрация выше 0.03, была взята случайная выборка из 64 образцов препарата. Средняя концентрация примесей в выборке составила 0.0327, а несмещённая оценка дисперсии составила 0.0009. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости 10%.

(a) (3%) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.

Тестируем нулевую гипотезу $H_0 : \mu_{=}\mu_0$ против альтернативы $H_A : \mu < \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой $z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim_{H_0} N(0, 1)$. (Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{0.0327 - 0.03}{\sqrt{0.0009}/\sqrt{64}} = -\frac{0.0027}{0.03/8} = 0.72.$$

(b) Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = -z_{0.1} = 1.28$ (Для распределения Стьюдента $t_{crit} = -t_{n-1,\alpha} = -t_{63,0.1} = 1.295$. Нужного числа степеней свободы в таблице нет, но можно установить, что $t_{crit} \in (1.289, 1.296)$.

(c) (2%) Рассчитайте критическое значение этой статистики.

> Так как $z < z_{crit}(z < t_{crit})$, то нет оснований отвергать основную гипотезу и считать, что допустимый предел концентрации превышен.

(d) (2%) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание считать, что средняя концентрация посторонних примесей превышает допустимый предел в 0.03?

> При использовании нормального распределения P-значение$=\mathbb{P}(Z > 0.72) = 0.2358$. Таким образом, при уровне значимости выше 23.58% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 23.58% — не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что P-значение $\in (0.2, 0.25)$.

(e) (3%) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких — нет.

> $$t_{\hat\beta_2} = \frac{\hat\beta_2}{s_{\hat\beta_2}} = \frac{-0.49371}{\sqrt{0.077753}} = -1.77; t_{\hat\beta_3} = \frac{\hat\beta_3}{s_{\hat\beta_3}} = \frac{0.281451}{\sqrt{0.061492}} = 1.13$$
>
> поскольку $|t_{\hat\beta_2}| < t_{0.25}(16) = 2.12$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ не отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ не отвергается.

10. При 20 наблюдениях с помощью МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \epsilon_i$ при условиях на ошибки, соответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:

$$\hat\beta = \begin{bmatrix} 9.979620 \\ -0.493709 \\ 0.281451 \\ 2.955317 \end{bmatrix}, \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta) = \begin{bmatrix} 0.264234 & 0.009178 & -0.116760 & -0.264416 \\ 0.009178 & 0.077753 & 0.014406 & -0.114635 \\ -0.116760 & 0.014406 & 0.061492 & 0.098570 \\ -0.264416 & -0.116760 & 0.098570 & 0.436001 \end{bmatrix}$$

, а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 0.49367627, R^2 = 0.832389$. Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \epsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.786790$.

(a) (5%) На 5% уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_3 \neq 0$

(b) (5%) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_a: «не H_0».

> $$F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} = \frac{(0.832389 - 0.786790)/2}{(1 - 0.832389)/16} = 2.18 < F_{0.05}(2.16) = 3.63$$
>
> т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

(c) (5%) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы $H_a : \beta_2 > \beta_3$.

> Рассмотрим разность $\hat\beta_2 - \hat\beta_3$, оценка её дисперсии равна
>
> $$V(\hat\beta_2 - \hat\beta_3) = \hat V(\hat\beta_2) + \hat V(\hat\beta_3) - 2\hat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = 0.077753 + 0.061492 - 2 \cdot 0.014406 = 0.110433$$
>
> критическая статистика $t = \frac{\hat\beta_2 - \hat\beta_3}{\sqrt{\hat V(\hat\beta_2 - \hat\beta_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(16)$. Поскольку $t_{0.05}(16) = 1.746$, а $t = -2.33 < -1.746$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ отвергается в пользу альтернативы $H_1 : \beta_2 < \beta_3$

5 2012

5.1 Вариант А

Вступительная олимпиада

Во всех задачах: штраф за арифметическую ошибку -1 балл.

1. (10%) Вычислить предел выражения $\frac{n+x}{n-1}^n$ при $n \to \infty$.

Находим решение с помощью второго замечательного предела. При $n \to \infty$

$$\lim(\frac{n+x}{n-1}^n = \lim(1+\frac{x+1}{n-1})^n = \begin{cases} \lim(1+\frac{x+1}{n-1}) \cdot \left(\lim(1+\frac{x+1}{n-1})^{\frac{n-1}{x+1}}\right)^{x+1}, \text{при} x \neq -1 \\ 1, \text{при} x = -1 \end{cases}$$

Ответ: e^{x+1}.

2. Рассмотрите следующую систему линейных алгебраических уравнений.
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_2 = 0 \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) (2%) Найдите размерность пространства решённой системы.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 11 & 17 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, $rg(A) = 2$, где A — основная матрица системы.
Известно, что $\dim L = n - rg(A) = 4 - 2 = 2$, где L — множество решений линейной однородной системы, n — число переменных системы.

(b) (3%) Найдите фундаментальную систему решений системы.

Фундаментальная система решений: $e_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$.

(c) (5%) Опишите общее решение системы через фундаментальную систему решений.

Общее решение системы: $L = x = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

3. (10%) В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора $f = (7, -4, -1, 2)$ на подпространство L, заданное однородной системой уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -3 & 21 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right].$

Фундаментальная система решений: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $e_1 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.
Следовательно, $L = L(e_1, e_2)$.
$f = g + h$
$f = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 + h; \begin{cases} (e_1, f) = \alpha_1 \cdot (e_1, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_1, e_2) + (e_1, h), \\ (e_2, f) = \alpha_1 \cdot (e_2, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2, e_2) + (e_2, h) \end{cases}$
$\begin{cases} (e_1, f) = \alpha_1 \cdot (e_1, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_1, e_2), \\ (e_2, f) = \alpha_1 \cdot (e_2, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2, e_2) \end{cases}$
$\begin{cases} 3 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-7) \\ -61 = \alpha_1 \cdot (-7) + \alpha_2 \cdot 75 \end{cases}$
$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -1.$
$g = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 = -2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T - 1 \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T;$
$h = f - g = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T.$

Критерии:

- Найдена только фундаментальная система решений — **3 балла**
- Записана, но не решена система уравнений для определения коэффициентов разложения проекции по базисным векторам — **5 баллов**
- Найдена проекция, не найден перпендикуляр — **7 баллов**
- Найдены проекция и перпендикуляр — **10 баллов**

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y^{(4)} + y^{(2)} = 2\cos x$, удовлетворяюшее начальным условиям $y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0$.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению: $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$ — решения характеристического уравнения. Согласно общей теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеем

$$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные вещественные числа.
Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$y_{\text{част.неодн.}}(x) = x(A\cos x + B \cdot \sin x$$

Подставляя частное решение с неопределёнными коэффициентами в неоднородное дифференциальное уравнение, получаем, что $A = 0, B = -1$.
Следовательно,

$$y_{\text{част.неодн.}}(x) = -x \sin x.$$

Согласно теории решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеем:

$$y_{\text{общ.неодн.}}(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{част.неодн.}}(x)$$

Значит,

$$y_{\text{общ.неодн.}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x - x \sin x$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные вещественные числа.
Теперь общее решение для неоднородного дифференциального уравнения известно. Находим частное решение, которое удовлетворяет начальным условиям. В итоге получаем, что $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -2, C_4 = 0$. Значит,

$$y(x) = x - 2\cos x - x \sin x$$

Критерии

1. Выписано для однородного уравнения общее решение с константами — **5 баллов**
2. Выписан общий вид частного решения для неоднородного уравнения — **7 баллов**
3. Найдены константы — **10 баллов**

5. Найдите критические точки для функции

$$f(x, y) = x + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$$

и укажите их тип.

Находим условия первого порядка: $\begin{cases} y - \dfrac{4}{x} + 1 = 0 \\ x + 2y - \dfrac{10}{y} = 0 \end{cases}$

Решение системы сводится к решению кубического уравнения:

$$x^2(x-4) - 2(x-4)^2 + 10x^2 = 0$$

Находим корень уравнения $x \approx 1.4$

Получаем единственную критическую точку $x \approx 1.4, y \approx 1.9$

Находим матрицу Гессе и знак угловых миноров $\begin{pmatrix} 4/x^2 & 1 \\ 1 & 2 + 10/y^2 \end{pmatrix}$

Знаки: $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0 \Rightarrow$ найденная точка — локальный минимум.

6. В задаче поиска экстремумов функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

при ограничении $x + y + z = 4$

(a) (5%) Найдите все критические точки, удовлетворяющие необходимым условиям первого порядка

Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - \lambda(x + y + z - 4)$$

Критически точки являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda yz & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda xz & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda xy & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 4 - x - y - z & = 0 \end{cases}$$

Находим четыре точки: $M_1(2, 2, 0), M_2(2, 0, 2), M_3(0, 2, 2), M_4(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

(b) (5%) для всех критических точках, найденных в пункте (A),выпишите какие-либо достаточные условия второго порядка и проведите классификацию критических точек.

Достаточные условия второго порядка — знакоопределенность второго дифференциала функции $f(x, y, z)$ при ограничении на дифференциалы $dx + dy + dz = 0$:

$$d^2f = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz = [\textit{при выполнении } dx + dy + dz = 0] = \quad (1)$$
$$= (4 - 2y)dx^2 - (4 - 2x)dy^2 + 2(z - x - y + 2)dxdy = A(x, y) \quad (2)$$

Для точек $M_1(2,2,0), M_2(2,0,2), M_3(0,2,2)$ квадратичная форма $A(x,y)$ не является знакоопределенной, так как

$$\det\begin{pmatrix} 4-2y & 2+z-x-y \\ 2+z-x-y & 4-2x \end{pmatrix} < 0$$

В точке $M_4(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ квадратичная форма $A(x,y)$ по критерию Сильвестра отрицательно определена, так как первый и второй миноры её матрицы положительны:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} > 0$$

Следовательно, точка $M_4(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ является точкой минимума.

7. Контрольная работа состоит из тестовых вопросов. В каждом вопросе 5 вариантов ответа из которых один – верный. Студент не очень готовился и поэтому знает 40% вопросов. Неправильный ответ на тесте не штрафуется, поэтому если студент не знает ответа, то он отвечает наугад равновероятно.

   (a) (3%) Какова вероятность того, что студент отметит верный ответ на первый вопрос теста?

   Обозначим события:
   A_1 — студент знает ответ на 1-ый вопрос
   B_1 — студент выбрал верный ответ на 1-ый вопрос
   A_2, B_2 — аналогично для 2-го вопроса.
   $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1) + 0.2(1-\mathbb{P}(A_1)) = 0.4 + 0.2\cdot 0.6 = 0.52$

   (b) (3%) Какова вероятность того, что студент знает ответ на первый вопрос теста, если он отметил верный ответ?

   $\mathbb{P}(A_1 \mid B_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1)/\mathbb{P}(B_1) = 0.4/0.52 = 10/0.77$

   (c) (4%) Какова вероятность того, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос из первых двух, если он отметил верные ответы на оба из них?

   $\mathbb{P}(A_1\cup A_2) \mid B_1\cap B_2) = 1-\mathbb{P}(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2 \mid B_1\cap B_2) = 1-\mathbb{P}(\bar{A}_1 \mid B_1)\mathbb{P}(\bar{A}_2 \mid B_2) = 1-(3/13)^2 = 160/169 \approx 0.95$
   Некоторые студенты трактовали условие по-другому: Студент знает q вопросов из общего количества в N вопросов, причем q/N=0.4. Такая трактовка тоже засчитывалась как верная. При этом вероятности в первых двух пунктах не меняются, а вероятность для третьего будет зависеть от N.

8. В ходе анкетирования 225 человек ответили на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равно 9.5 часов при выборочном стандартном отклонении 0.6 часа.

   (a) (4%) Постройте 90% доверительный интервал для математического ожидания времени, проводимого на работе

   Общий вид доверительного интервала:

   $$\left[\bar{X} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

   По условию, $\bar{X} = 9.5, s = 0.6, n = 225$.
   Квантиль нормального распределения для 90% доверительного интервала $z = 1.65$ Тогда численное значение доверительного интервала: $[9.434; 9.566]$

   (b) (3%) Проверьте гипотезу о том, что в среднем люди проводят на работе 9 часов, против альтернативной гипотезе о том, что в среднем люди проводят на работе больше 9 часов, укажите точное P-значение.

Тестирование гипотезы

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{(9.5 - 9) \cdot 15}{0.6} = 12.5$$

Значение 12.5 фантастически велико для нормального распределеия, поэтому P-значение равно нулю. При любом разумном уровне значимости, будь то $\alpha = 0.01, \alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.1$ гипотеза H_0 отвергается.

(c) (3%) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы для проведения теста.

Предпосылки: все X_i независимы, одинаково распределены и имеют конечное матиматическое ожидани и дисперсию.

9. Наблюдения $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и одинаково распределены с функцией плотности $f(x) = \frac{a(\ln(x))^{a-1}}{x}$ при $x \in [1; \varepsilon]$. По 100 наблюдениям известно, что $\sum_{i=1}^{1} 00 \ln(\ln(X_i)) = -20$

(a) Постройте оценку $\hat{a}$ для неизвестного параметра a методом максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия:

$$L(a) = \prod_i \frac{a \ln^{a-1} x_i}{x_i}$$

Лог-функция правдоподобия:

$$l(a) = \sum_i \ln a + (a - 1) \ln \ln x_i - \ln x_i$$

Производная:

$$l'(a) = \sum \frac{1}{a} + \ln \ln x_i = \frac{n}{a} - \ln \ln x_i$$

Условие первого порядка:

$$\hat{a} = -\frac{n}{\sum \ln \ln x_i} = \frac{100}{20} = 5$$

Проверяем, что нашли максимум: $l''(a) = -\frac{n}{a^2} < 0 \Rightarrow$ действительно нашли максимум.

(b) (3%) Найдите наблюдаемую информацию Фишера.

Наблюдаемая информация Фишера: $\hat{I} = -l''(\hat{a}) = \frac{n}{\hat{a}^2} = 4$

(c) (3%) Постройте 90% доверительный интервал для a

Оценка дисперсии: $\hat{\text{Var}}(\hat{a}) = \hat{I}^2 = 0.25$
Поскольку оценки максимального правдоподобия асимптотические нормальны и несмещены, доверительный интервал в общем виде:

$$\left[\hat{a} - z\sqrt{\text{Var}(\hat{a}}; \hat{a} - z\sqrt{\text{Var}(\hat{a}}\right]$$

Численно: $[4.18; 5.82]$

10. Исследователь располагает следующими данными по 935 респондентам (U.S. NLS80 Database, J. Wooldridge):

- ежемесячный доход, EARNINGS, долл.;
- возраст, AGE, число лет;
- число лет обучения, EDUC;
- расовая принадлежность, BLACK = 1, если респондент – афроамериканец, = 0 в противном случае;
- URBAN = 1, если респондент проживает в крупном городе.

С помощью метода наименьших квадратов он оценивает следующие регрессии, в каждой из которых LWAGE = LN(WAGE) является зависимой переменной, а объясняющие переменные:

(1) AGE, EDUC, URBAN, по всей выборке
(2) AGE, EDUC, URBAN, BLACK, по всей выборке
(3) AGE, EDUC, URBAN, только для ‘whites’
(4) AGE, EDUC, URBAN, только для blacks
(5) AGE, EDUC, TENURE, BLACK, AGE*BLACK, EDUC*BLACK, URBAN*BLACK, по всей выборке.

Результаты оценивания представлены в таблице 1. RSS = сумма квадратов остатков. В скобках приведены стандартные ошибки. К сожалению, некоторые результаты оценивания для Модели 4 в таблице были по ошибке не внесены исследователем в таблицу.

(a) (5%) Вычислите пропущенные в Модели 4 оценки коэффициентов и RSS. Поясните Ваши вычисления.

При проверке данной задачи комиссией было принято решение проверять пункты (a), (b) и (d), на ход решения которых не влияли опечатки.

Коэффициенты можно найти, используя результаты оценивания модели 5:

	4	5
COEFFICIENT	LWAGE	LWAGE
AGE	0.0185-0.0194=0.0009	0.0185
EDUC	0.0541-0.0296=0.0245	0.0541
URBAN	0.196-0.0381=0.1579	0.196
BLACK		0.671
AGE*BLACK		-0.0194
EDUC*BLACK		-0.0296
URBAN*BLACK		-0.0381
CONSTANT	5.251+0.671=5.922	5.251
RSS	128.185-112.948=112.948	128.185

RSS можно найти как разницу между RSS в модели 5(с учетом дамми-переменной black, характеризующей различия в коэффициентах между white и black) и RSS в модели 3 (только для white): $RSS_4 = RSS_5 - RSS_3$.
Аналогично можно было вывести через TSS по всей выборке (из моделей 1, 2 или 5) и TSS для модели 3(по white):

$$RSS_4 = (1 - R_4^2(TSS_5 - TSS_3)$$

где $TSS = \frac{RSS_5}{(1-R_5^2)}, TSS_3 = \frac{RSS_3}{(1-R_3^2)}$.

(b) (2%) Дайте содержательную интерпретацию коэффициентам при BLACK, AGE*BLACK и URBAN*BLACK в Модели 2.

Коэффициент значим (при любом разумном уровне значимости): $t = \frac{-0.228}{0.0374} = -6.1$.
У афроамериканцев заработная плата ниже (при прочих равных) на 20.4: % $(\exp(-0.228)-1)\cdot 100\% = -20.4\%$(для полулогарифмической модели).
Приближенная интерпретация: на 22.8%, т.е. $-0.228 \cdot 100\% = -22.8\%$

(c) Проверьте совместную значимость коэффициентов при переменных BLACK, AGE*BLACK, EDUC*BLACK, TENURE*BLACK, URBAN*BLACK в Модели 5.

(d) (3%) Объясните, как связан тест из пункта (c) с тестом Чоу для Моделей 1, 3 и 4.

Недостаточно: если коэффициент незначим, это еще не означает отсутствия проблемы дискриминации, если значим — не факт, что спецификация модели верна (могут быть пропущены существенные переменные; дискриминация проявляется не только «в среднем», но и в отдаче на другие регрессоры модели).

(e) Объясните, достаточно ли проверить на значимость коэффициент при BLACK в Модели 2, чтобы показать наличие дискриминации по расовой принадлежности.

Таблица 1.

	1	2	3	4	5
COEFFICIENT	LWAGE	LWAGE	LWAGE	LWAGE	LWAGE
AGE	0.0163(0.00417)	0.0159(0.00409)	0.0185(0.00440)	?	0.0185(0.00438)
EDUC	0.0587(0.00569)	0.0522(0.00569)	0.0541(0.00593)	?	0.0541(0.00592)
URBAN	0.177(0.0278)	0.191(0.0273)	0.196(0.0288)	?	0.196(0.0287)
BLACK		-0.228(0.0374)			0.671(0.504)
AGE*BLACK					-0.0194(0.0121)
EDUC*BLACK					-0.0296(0.0209)
URBAN*BLACK					-0.0381(0.0903)
CONSTANT	5.219(0.156)	5.348(0.154)	5.251(0.163)	?	5.251(0.163)
Observations	935	935	815	815	935
R-squared	0.185	0.217	0.183	0.183	0.226
RSS	134.930	129.752	112.948	?	128.185

6 2013

6.1 Вариант А

Демо-версия вступительной олимпиады

1. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+5n+1}-2n}{e^{\cos(\operatorname{arctg} n)}}$$

2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Исследуйте на экстремум функцию $F(x, y) = 4x^3 + 10x^2 + 2y^2 + 2xy^2 + 9$

4. Пусть $F(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ при ограничении $a + bx + cy = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. При каких значениях параметров ограничения множество условных локальных экстремумов функции $F(x, y)$ будет не пусто? Каков характер этих экстремумов?

5. Найдите частное решение дифференциального уравнения
$$y' = \frac{y^5 + 3x^2\cos(y)}{x^3\sin(y) - 3y^2 - 5y^4x}$$
удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

6. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.
   (a) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?
   (b) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?
   (c) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?
   (d) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

7. Для того чтобы поступить в университет, абитуриенту Васе Смирнову необходимо сдать два экзамена: по математике и по английскому языку. Экзамен по математике оценивается по десятибалльной шкале, а экзамен по английскому языку по пятибалльной. Предполагается, что шкалы оценок непрерывные, например, на экзамене по математике абитуриент может получить $4.734(34)\ldots$ балла. Известно, что для поступления на бюджет необходимо набрать 11 из 15 баллов.

   Кроме того, необходимо получить по математике не ниже 4 баллов, а по английскому языку не ниже 3 баллов для того, чтобы участвовать в конкурсе на бюджетные места. Функция совместной плотности распределения вероятности получения определенной оценки по математике, X, и по английскому языку, Y, для Васи имеет следующий вид:
$$f(x, y) = \begin{cases} axy,\ 0 \leqslant x \leqslant 100,\ 0 \leqslant y \leqslant 5 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$
   (a) Определите значение параметра a, при котором указанная функция может являться функцией плотности.
   (b) Найдите вероятность того, что Вася поступит на бюджет.
   (c) Как изменится вероятность поступления на бюджет, если известно, что за экзамен по английскому Вася получил 4 балла?

8. Известно, что случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0; a]$. Исследователь проверяет гипотезу H_0: $a = 10$ против H_a: $a > 10$ с помощью следующего критерия: отвергнуть H_0 в пользу H_a, если $X < c$. Каким должно быть число c, если исследователь хочет осуществить проверку на уровне значимости 10%? При $c = 8$ выразите мощность критерия как функцию от a.

9. Статистик Тимофей оценивает доверительный интервал для математического ожидания по большой выборке по формуле
$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Тимофей забыл таблицы нормального распределения и не может точно вспомнить значение $z_{\alpha/2}$ для уровня доверия (доверительной вероятности) 95%. Определите, каков будет уровень доверия, если

(a) Тимофей подставит значение $z_{\alpha/2} = 2$

(b) Тимофей воспользуется следующим выражением для доверительного интервала:

$$\bar{X} - 1.5\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2.5\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

10. Посредник, торгующий подержанными автомобилями, для получения данных о предложениях продажи пользуется журналом, где публикуются цены предложения (Price), возраст автомобиля (Age), его пробег (Run), наличие сигнализации (Signal) и музыкальной системы (Music). Посреднику необходимо решить две проблемы.

(a) (Проблема 1.) У посредника сложилось впечатление, что для более старых машин величина пробега меньше интересует покупателей, чем для более новых. Какая из приведенных ниже моделей позволит ему проверить свою гипотезу и каким образом? Можно ли считать полученный результат доказательством гипотезы посредника? Посредник верит, что выполняются все основные гипотезы модели линейной регрессии, в том числе гипотеза о нормальном распределении случайной составляющей.

1. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + w_t$
2. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + c_3 Run_t Age_t + w_t$
3. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t^2 + w_t$
4. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 \ln(Run_t Age_t) + w_t$

(b) (Проблема 2.) Посреднику необходимо оценить среднестатистический автомобиль, пробег которого составляет 49,52 тыс. км. Такого автомобиля в его базе еще нет. Если он укажет неверную «вилку цен», то сделка не состоится. Посредник может позволить себе ошибиться в среднем в пяти случаях из ста. Какие границы цен он должен назначить, если для грубой оценки стоимости автомобиля посредник использует модель $\widehat{Price}_t = \underset{(0.412)}{1.304} + \underset{(0.007)}{0.054} Run_t$? Подойдет ли эта оценка для автомобиля с пробегом 80 тыс. км?

Здесь в скобках стоят стандартные ошибки оценок. Оценка стандартной ошибки случайной составляющей $s = \sqrt{s^2} \approx 1,660$. Ковариационная матрица оценок коэффициентов имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0.17 & 0 - 0.003 \\ -0.003 & 0.00005 \end{pmatrix}$$

Посредник верит, что случайная составляющая имеет нормальное распределение.

7 2014

7.1 Вариант А

1. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

Уничтожая иррациональностб в знаменателе, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{(1-\cos x)/x^2+(\sin x)/x}$$

Если $x\to 0$, то $(1+x\sin x)\to 1$, а тогда$\sqrt{1+x\sin x}\to 1$. Аналогично $\sqrt{\cos x}\to 1$ при $x\to 0$.
Далее $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}(\frac{\sin x/2}{x/2})^2\to\frac{1}{2}$ при $x\to 0$.
Следовательно, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{(1-\cos x)/x^2+(\sin x)/x}=\frac{4}{3}$

2. Дана неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases}2x_1-4x_2-x_3-x_4-2x_5=-1\\ 3x_1-6x_2-2x_3-4x_4-5x_5=-3\\ 3x_1-6x_2-4x_3-8x_4-13x_5=-9\\ x_1-2x_2-x_3-2x_4-3x_5=-2\end{cases}$$

(a) Найдите фундаментальную систему решений приведенной однородной системы.

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-4&-1&-1&-2&-1\\3&-6&-2&-4&-5&-3\\3&-6&-4&-8&-13&-9\\1&-2&-1&-2&-3&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-4&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&-2&-5&-8&-6\\1&-2&-1&-2&-3&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}0&0&1&3&4&3\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&-2&-5&-8&-6\\1&-2&-1&-2&-3&-2\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}0&0&1&3&4&3\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&-2&-1&-2&-3&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}0&0&1&3&4&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&-2&-1&0&-3&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&-1&0&-3&-2\\0&0&1&0&4&3\\0&0&0&1&0&0\end{array}\right]$$

Объявим неизвестные x_1, x_3, x_4 главными, а x_2, x_5 — свободными.

Найдем фундаментальную систему решений приведенной однородной системы

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3-3x_5=0\\ x_3+4x_5=0\\ x_4=0\end{cases}$$

Так как количество неизвестных переменных n равно 5 , а ранг r основной матрицы системы равен 3, то фундаментальная система решений содержит n-r=2 решения. Выразим главные неизвестные x_1, x_3, x_4 через свободные неизвестные x_2, x_5 :
$x_4=0$
$x_3=-4x_5$
$x_1=2x_2+x_3+3x_5=2x_2-x_5$
Свободным неизвестным придадим линейно независимые наборы значений: (1,0) и (0,1) . Тогда получим решения:
$e_1=(2,1,0,0,0)^T,\quad e_2=(-1,0,-4,0,1)^T,$
которые образуют фндаментальную систему решений системы

(b) Найдите какое-нибудь частное решение неоднородной системы.

Придавая свободным переменным значения $x_2 = 0, x_5 = 0$ и решая последовательно уравнения $x_4 = 0, x_3 + 4x_5 = 3, x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_5 = -2$,получаем значения главных неизвестных $x_1 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0$. Таким образом, частное решение неоднородной системы есть $c = (1, 0, 3, 0, 0)^T$.

(c) Найдите общее решение неоднородной системы.

Из пунктов (a) и (b) получаем общее решение неоднородной системы:
$x = (1, 0, 3, 0, 0)^T + \alpha_1(2, 1, 0, 0, 0)^T + \alpha_2(-1, 0, -1, 0, 1)^T$

(d) Какое максимальное число линейно независимых решений может иметь данная неоднородная система?

Максимальное число линейно независимых решений неоднородной системы равно $dimL+1 = 2+1 = 3$, где L — множество решений приведенной однородной системы.

(e) Укажите какой-нибудь набор таких решений.

Например, решения неоднородной системы
$f_0 = c + 0e_1 + 0e_2 = (1, 0, 3, 0, 0)^T$
$f_1 = c + 1e_1 + 0e_2 = (1, 0, 3, 0, 0)^T + (2, 1, 0, 0, 0)^T = (3, 1, 3, 0, 0)^T$
$f_2 = c + 0e_1 + 1e_2 = (1, 0, 3, 0, 0)^T + (-1, 0, -4, 0, 1)^T = (0, 0, -1, 0, 1)^T$
линейно независимы.

3. Найдите все значения параметра a, при котором квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ является положительно определенной.

Матрица квадратичной формы f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма f положительно определена тогда и только тогда, когда все её угловые миноры $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ положительны. Решая систему неравенств
$$\begin{cases} \triangle_1 = 1 > 0, \\ \triangle_2 = 1 - a^2 > 0, \\ \triangle_3 = 5 - 2a - 2a - 1 - 5a^2 > 0 \end{cases}$$
получаем, что при $-\frac{4}{5} < a < 0$ квадратичная форма f положительно определена.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$$

5. Исследуйте на экстремумы функцию:

$$F(x, y, z) = 2x^3 - 3y^2 - 2z^2 - 6xy - 12x + 4z - 37$$

Необходимые условия экстремума:
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 - 6y - 12 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -6y - 6x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = -4z + 4 = 0 \end{cases}$$
или
$$\begin{cases} x^2 - y - 2 = 0 \\ y + x = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases}$$

тогда $z = 1; y = -x; x = \{-2; 1\}$
Стационарные точки:
$M_1(1, -1, 1)$
$M_2(-2, 2, 1)$
Вторые производные:
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6$
$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -4$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -6$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$
Матрица Гессе: $G = \begin{pmatrix} 12x & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. ее главные миноры $\triangle_1 = 12x; \triangle_2 = -35(2x+1); \triangle_3 = 144(2x+1)$
Точка $M_1(1, -1, 1)$:$\triangle_1 = 12, \triangle_2 = -108, \triangle_3 = 432$ не является экстремумом точка $M_2(-2, 2, 1); \triangle_1 = -24, \triangle_2 = 1; \triangle_3 = -432$ точка максимума.
$F_max = -15$

6. Иван Петрович, для расширения производства, решил взять кредит в C=15 млн. руб. Этот кредит он планирует потратить на новое оборудование и зарплату. Выпуск продукции по оценке Ивана Петровича составит $Q = 400 - \frac{x^3}{3} - 2y^2$
где x млн. руб. - расходы на новое оборудование,
y млн. руб. - зарплата вновь нанятых работников.

   (a) Найдите максимальный объём выпуска.
   (b) Найдите предельный выпуск продукции по кредиту $(\frac{\partial Q}{\partial C})^*$ (шт./млн. руб.) при максимальном объеме выпуска.

Ищем $maxQ(x, y) = max(400 - \frac{x^3}{3} - 2y^2)$ при условии $g(x, y) = x + y = 15$
Составим функцию Лагранжа
$L = 400 - \frac{x^3}{3} - 2y^2 + \lambda(C - (x + y))$, где $C = 15$.
Необходимое условие экстремума:
$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -x^2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4y - \lambda = 0 \\ x + y = 15 \end{cases}$ Откуда $y = -\frac{\lambda}{4}$, $x = \pm\sqrt{-\lambda}$, очевидно, что смысл имеет только $x > 0, y > 0$,
следовательно $\lambda < 0$. Тогда для $x = \sqrt{-\lambda}$ имеем:
$(-\lambda) + 4\sqrt{-\lambda} - 60 = 0;$
$\sqrt{-\lambda} = 6; -10$

$$\lambda^* = -36; x^* = 6, y^* = 9$$

$d^2Q = -2x^* dx^2 - 4dy^2 \quad \rightarrow$ точка максимума.

Рассмотрим функцию Лагранжа как функцию от параметра C.
$L(C) = Q(x(C), y(C)) - \lambda(C)(C - g(x(C), y(C)))$ дифференцируем по C.

$\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C} - \lambda(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C}) + (C - g(x, y))\frac{\partial \lambda}{\partial C} + \lambda = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial C} + (\frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial C} + (C - g(x.y))\frac{\partial \lambda}{\partial C} + \lambda$ Все скобки в стационарной точке обращаются в ноль из условий первого порядка. В ней же выполняется $L(x^*, y^*, \lambda^*) = Q^*$ тогда $\frac{\partial L}{\partial C}(x^*, y^*, \lambda^*) = \frac{\partial q^*}{\partial C} = \lambda^*$
В нашем случае $\lambda^* = -36$.

7. Совместная функция плотности случайных величин (X, Y) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \in (0, 1) \quad y \in (0, 1) \\ 0, & else \end{cases}$$

Найдите:

(a) $\mathbb{P}(Y < X^2)$

$$P(Y < X^2) = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y)dy = \int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}x^4)dx = \frac{7}{20}$$

(b) Функцию плотности и математическое ожидание с.в. X.

$$f(x) = \int_0^1 (x+y)dy = 0.5 + x$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x(x+0.5)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

(c) Условную функцию плотности и условное математическое ожидание с.в. X при условии, что Y=2.

$$f(x|y=2) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{x+y}{\int_0^1 (x+y)dx} = \frac{x+y}{0.5+y} = \frac{x+2}{2.5} = \frac{2}{5}(x+2)$$

8. По данным международного агентства CNBC (www.cnbc.com, 2006 г.), среднемесячный счет за Интернет в США составил 32,79$ в расчете на одно домохозяйство. По выборке из 50 домохозяйств из южных штатов США среднемесячный счет оказался равен 30,63$. Известно также, что стандартное отклонение $.

(a) На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу о том, что среднемесячный счет за Интернет в южных штатах не отличается значимо от среднемесячного счета в целом по США против предположения, что в южных штатах счет за Интернет меньше.

Формулируем основную и альтернативную гипотезы:
$H_0 : \mu \geqslant 32.79$
$H_1 : \mu < 32.79$
Находим наблюдаемое значение статистики:

$$Z_{obs} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{30.63 - 32.79}{5.60/\sqrt{50}} \approx -2.73$$

Основная гипотеза отвергается, если $Z_{obs} < -Z_\alpha$, где число Z_α определяется из условия $P(Z > Z_\alpha) = \alpha$ для стандартной нормальной величины. В нашем случае $Z_{0.05} = 1.645$. Следовательно,$-2.73 < -1.645$,H_0 отвергается.

(b) Найдите наименьший уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается.

P-value находим из условия

$$p.v. = P(Z < \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z < -2.73) = 0.00315$$

Можно признать, что жители южных штатов на услуги Интернет тратят в среднем меньше, чем в целом по США.

9. Имеется случайная выборка из распределения Пуассона :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1...$$

X_i	0	1	2	3	4	5
Частота	7	14	12	13	6	3

Методом максимального правдоподобия найдите оценку вероятности $\mathbb{P}(X = 2)$

Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, мы знаем, что $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
Записываем функцию правдоподобия:

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

.
Логарифм функции правдоподобия:

$$lnL(x_1, ..., x_n, \lambda) = ln(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} ln(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}) = ln\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i!)$$

Тогда

$$\frac{dlnL}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$$

Откуда .$\hat{\lambda_{ML}} = \overline{x}$
По выборке рассчитываем $\overline{x} = \frac{1}{55}(0 + 14 + 24 + 39 + 24 + 15) = \frac{116}{55} \approx 2.109$
Тогда оценка вероятности $\hat{P_{ML}}(X = 2) = \frac{\overline{x}^2}{2} e^{-\overline{x}} \approx 0.27$

10. На рынке пирожков основным заменителем пирожков с капустой являются пирожки с картошкой. Исследователь, понимая это, оценивает спрос на пирожки с капустой в зависимости от их цены и от цены товара заменителя:

$$Q = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \epsilon$$

где P_1 - цена пирожка с картошкой, а P_2 - цена пирожка с капустой.
Так выглядит результат оценивания по 12 наблюдениям:

$$\hat{Q} = \underset{(6)}{10} - \underset{(0.3)}{0.8} P_1 + \underset{(0.4)}{0.9} P_2$$

причем оценка ковариации оценок коэффициентовβ_1 и β_2 равна 0.09, сумма квадратов остатков (RSS) равна 23. В скобках приведены стандартные отклонения коэффициентов регрессии.

(a) Найдите несмещённую оценку дисперсии случайной составляющей ϵ_i.

$$\hat{\sigma_\epsilon} = \frac{RSS}{n - k} = \frac{23}{12 - 3} \approx 2.56$$

(b) Постройте 95% доверительные интервалы для коэффициентов β_1 и β_2. Сделайте вывод об их статистической значимости.

$$\beta_k \in (\hat{\beta_k} - t_{\alpha/2,n-k}, \hat{\beta_k} + t_{\alpha/2,n-k}).$$

В данном случае $t_{\alpha/2,n-k} = t_{2.5,9} = 2.262$. Доверительные интервалы для коэффициентов:

$$\beta_1 \in (-0.8 - 2.262 \cdot 0.3; -0.8 + 2.262 \cdot 0.3) = (-1.48; -0.12)$$

$$\beta_2 \in (-0.0048; 1.8048)$$

$\hat{\beta_1}$ значим на уровне значимости 5%,
$\hat{\beta_2}$ незначим на уровне значимости 5%.

(c) Исследователь предполагает, что при изменении цены пирожка с картошкой на 1 рубль спрос на пирожки с картошкой останется прежним, если цена на пирожок с капустой упадет на 1 рубль. Сформулируйте данную гипотезу в терминах коэффициентов регрессии и проверьте ее на уровне значимости 5% против двусторонней альтернативной.

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$t = \frac{\hat{\beta_1} + \hat{\beta_2}}{s.e.(\hat{\beta_1} + \hat{\beta_2})} \underset{H_0}{\backsim} t_{n-k}$$

$$s.e.(\hat\beta_1+\hat\beta_2)=\sqrt{(s.e.\hat\beta_1)^2+2\hat{cov}(\hat\beta_1\hat\beta_2)+(s.e.\hat\beta_2)^2}=\sqrt{0.3^2+0.18+0.4^2}\approx 0.656$$

$$t=\frac{-0.8+0.9}{0.656}\approx 0.15$$

$$t_{2.5,9}=2.262$$

H_0 не отвергается на уровне значимости 5%.

7.2 Вариант B

Вступительная олимпиада

1. (10%) Найдите предел

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}}$$

Вариант 1: $\lim\limits_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 2014-0}\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\cdot\ln(2014-x)\right)\right\}=e^0=1$, т.к.

$$\lim_{x\to 2014-0}\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\cdot\ln(2014-x)\right)=\lim_{x\to 2014-0}\frac{\ln(2014-x)}{\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\right)^{-1}}=$$

По правилу Лопиталя

$$=\lim_{x\to 2014-0}\frac{\cos^2\frac{\pi(2015-x)}{2}}{(2014-x)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi(2015-x)}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 2014-0}\frac{\cos^2\frac{\pi(2015-x)}{2}}{2014-x}=$$

$$=\lim_{x\to 2014-0}\frac{2\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\sin\frac{\pi(2015-x)}{2}}{-1}=0$$

Вариант 2:

Обозначим $2014-x=y$. Тогда

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}}=\lim_{y\to 0+}y^{\cos\frac{\pi(1+y)}{2}}=\lim_{y\to 0+}y^{-\sin\frac{\pi y}{2}}=$$
$$=\exp\left\{\lim_{y\to 0+}\left(-\sin\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right)\right\}=e^0=1,$$

Т.к. $\lim\limits_{y\to 0+}\left(\sin\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right)=\lim\limits_{y\to 0+}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\cdot\lim\limits_{y\to 0+}\left(\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right)=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{y\to 0+}(y\cdot\ln y)=$
$=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{y\to 0+}\frac{\ln y}{y^{-1}}=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{y\to 0+}\frac{y^2}{y}=0$

Критерии:
За правильное начало решения в случае "запутывания"при применении правила Лопиталя ставилось 5-6 баллов.

За каждую грубую ошибку снимался 1 балл.

Если делалась осмысленная замена, то ставился 1 балл.

Если утверждалось что 0 в степени 0 равен 1, то ставился 1 балл.

2. (10%) Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}$, действующего в пространстве многочленов степени не выше 4.

1. Заметим, что

$$(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}(x-2014)^k = k(k-1)(x-2014)^k,\ k=0,1,2...$$

2. Выберем в качестве базиса в пространстве многочленов степени не выше 4 следующие многочлены: $1,\ (x-2014),\ (x-2014)^2,\ (x-2014)^3,\ (x-2014)^4$.
3. Матрица оператора $(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}$ в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,6\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,12 \end{pmatrix}$$

4. Т.к. матрица является диагональной, то ее собственные числа – это диагональные элементы: 0 (кратности 2), 2, 6, 12 (кратности 1), а соответствующие собственные векторы:

Для 0 - $1,\ (x-2014)$,

Для 2 - $(x-2014)^2$,

Для 6 - $(x-2014)^3$,

Для 12 - $(x-2014)^4$.

Критерии:

За правильное нахождение всех собственных чисел ставилось 6 баллов.

Если была правильно найдена часть собственных векторов и все собственные числа, то ставилось 7-8 баллов.

Если была правильно выписана матрица оператора (и указывался базис, в котором матрица имеет соответствующий вид), то ставилось 2 балла.

Если было приведено правильное определение собственных чисел и собственных векторов оператора, то ставился 1 балл.

3. (10%) Исследуйте на экстремумы функцию

$$F(x,y) = x^2y + 3y^2x + 3y^3 - 8x - 25y$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений [1 балл]:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3y^2 - 8 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy + 9y^2 - 25 = 0 \end{cases}.$$

Получим точки со следующими координатами: $(1;4/3)\,,(1;-2)\,,(-1;2)\,,(-1;-4/3)$ [4 балла].

Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции [1 балл]:

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x+6y \\ 2x+6y & 6x+18y \end{pmatrix}.$$

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозреваемых точек.

Для точки с координатами $(1;4/3)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 8/3 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$. Так как$8/3\cdot 30 - 10^2 < 0$, точка с координатами $(1;4/3)$ не является точкой экстремума [1 балл].

Для точки с координатами $(1;-2)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -10 & -30 \end{pmatrix}$. Так как$-4 < 0, 4\cdot 30 - 10^2 > 0$, точка с координатами $(1;-2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке: $F(x,y) = 28$ [1 балл].

Для точки с координатами $(-1;-4/3)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} -8/3 & -10 \\ -10 & -30 \end{pmatrix}$. Так как$8/3\cdot 30 - 10^2 < 0$, точка с координатами $(-1;-4/3)$ не является точкой экстремума [1 балл].

Для точки с координатами $(-1;2)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$. Так как$4 > 0$, $4 \cdot 30 - 10^2 > 0$, точка с координатами $(1;-2)$ является точкой минимума. Значение функции в этой точке: $F(x,y) = -28$ [1 балл].

4. (10%) Для каждого значения параметра a исследуйте функцию

$$Q(x,y;a) = \frac{(x+2y)^2 - 4a(x+a) - x^2}{y-a},$$

на условные экстремумы при ограничении $F(x,y;a) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

1. Путем алгебраических преобразований числителя получаем, что $Q(x,y;a) = 4(x+y+a), y \neq a$
2. Определяем наличие условных стационарных точек. Для этого выписываем функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda;a) = (x+y+a) + \lambda\left(x^2+y^2-a^2\right)$. Приравниваем его производные по x, y, λк нулю и получаем два решения: A: $(x_1,y_1,\lambda_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{a}\right)$ и B: $(x_2,y_2,\lambda_2) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{a}\right)$. Очевидно, что выполняется $y \neq a$.
3. Определяем тип найденных условных стационарных точек. Для этого выписываем второй дифференциал функции Лагранжа $d^2L(x,y,\lambda;a) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}L(x,y,\lambda;a)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}L(x,y,\lambda;a)\,dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}L(x,y,\lambda;a)\,dy^2$. Из ограничения следует, что $dy = -\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y;a) \middle/ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y;a)\right)dx$. Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком выражения
$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}L(x_k,y_k,\lambda_k;a) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}L(x_k,y_k,\lambda_k;a)\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x_k,y_k;a) \middle/ \frac{\partial}{\partial y}F(x_k,y_k;a)\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2}L(x_k,y_k,\lambda_k;a)\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x_k,y_k;a) \middle/ \frac{\partial}{\partial y}F(x_k,y_k;a)\right)^2.$$
В данном случае $A = 2\lambda_k + 2\lambda_k\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2\lambda_k\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)$. Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком λ_k. Знак определяется знаком параметра «а». Если $a > 0$, то первая стационарная точка А – точка максимума, вторая точка В – минимума. Если $a < 0$, то первая стационарная точка – точка минимума, вторая – максимума. Однако, как не трудно видеть, решения в первом и втором случае совпадают.

Критерии:
Выписывание функции Лагранжа - 1 балл.

Нахождение критических точек функции Лагранжа - 5 баллов.

Анализ критических точек - 5 баллов.

5. Задано дифференциальное уравнение

$$y''' + 5y'' + 11y' + 15y = 15x + 56$$

(a) (8%) Найдите общее решение дифференциального уравнения

1. [1 балл] Составляем характеристическое уравнение
$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 11\lambda + 15 = 0$$
2. [3 балла] Перебором делителей свободного члена находим отрицательный корень $\lambda = -3$. После этого находим все корни: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$. [1 балл] Решение однородного:
$$y_{hom}(x) = c_1 e^{-3x} + e^{-x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(3x))$$
3. [3 балла] По виду правой части находим частное решение, $y_{ps}(x) = x + 3$
4. Выписываем общее решение
$$y(x) = c_1 e^{-3x} + e^{-x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(3x)) + x + 3$$

(b) (2%) Найдите асимптоту при $x \to +\infty$ тех решений, у которых асимптота существует

Асимптота равна $y_{as}(x) = x + 3$

6. Васе нравятся Маша и Алёна, поэтому он ходит на лекции, чтобы пообщаться с ними. Вероятность застать Васю на лекциях равна 0.1, если девушек нет; 0.5 — если обе девушки пришли на лекции; 0.3 — если пришла только Маша и 0.2 — если пришла только Алёна. Маша и Алёна посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями 0.6 и 0.7 соответственно.

   (a) (2%) Найдите вероятность того, что на лекциях будет присутствовать ровно одна из девушек

   Обозначим: величина X — количество пришедших девушек, событие V — пришел Вася, A — пришла Алёна и M — Маша. $\mathbb{P}(X = 1) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$

   (b) (2%) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствуют все трое

   $\mathbb{P}(A \cap M \cap V) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.5 = 0.21$

   (c) (3%) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Алёна, если на лекциях присутствует Вася

   По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|V) = \mathbb{P}(A \cap V)/\mathbb{P}(V) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1} = 0.801$$

   (d) (3%) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Вася, если пришла ровно одна из девушек

   По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(V|X = 1) = \mathbb{P}(V \cap \{X = 1\})/\mathbb{P}(X = 1) = \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2}{0.46} = 0.239$$

   Если условные вероятности посчитаны неверно, но выписана правильная формула для условной вероятности, то начислялся один балл.

7. Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}y^2, \text{ если } x \in [0; 1],\ y \in [0; 1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   (a) Найдите функцию плотности величины X

   Частную функцию плотности найдем по формуле $f_X(x) = \int_0^1 x + \frac{3}{2}y^2 dy = x + \frac{1}{2}, x \in [0, 1]$ [2 балла].

   (b) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, дисперсию $\mathrm{Var}(X)$

   Математические ожидания найдем интегрированием $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$ [1 балл], $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{5}{12}$ [1 балл]. Тогда дисперсию можно рассчитать как разность $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{11}{144}$ [1 балл].

   (c) Найдите вероятности $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$ и $\mathbb{P}(Y > 2X)$.

   Условную вероятность рассчитаем по формуле как отношение [2 балла]

$$\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{2} \middle| X < \frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{2}, X < \frac{1}{2}\right)}{\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_0^{0,5}\int_0^{0,5} x + \frac{3}{2}y^2 dx dy}{\int_0^{0,5} x + \frac{1}{2} dx} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Представим требуемую вероятность как интеграл со следующими пределами интегрирования [2 балла]

$$\mathbb{P}(Y > 2X) = \int_0^{0,5} \int_{2x}^1 x + \tfrac{3}{2}y^2 dy dx = \int_0^{0,5} xy + \tfrac{1}{2}y^3\Big|_{2x}^1 dx = \\ \int_0^{0,5} x + \tfrac{1}{2} - 2x^2 - 4x^3 dx = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{11}{48}.$$

(d) Найдите константу c, если $g(x, y) = cxf(x, y)$ — это совместная функция плотности для некоторой пары случайных величин

Неизвестную константу найдем из условия $c\int_0^1\int_0^1 x^2 + \frac{3}{2}xy^2 dxdy = 1$. Получаем $c = 12/7$ [1 балл]

8. В случайной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ величины X_i независимы и принимают значения 0 и 1, вероятность события $\{X_i = 1\}$ обозначим p. Для проверки гипотезы H_0: $p = 1$ против альтернативы H_a: $p < 1$ используется критерий: отвергать H_0, если $\sum_{i=1}^n X_i < n$.

   (a) (5%) Предположим, что на самом деле $p = 1$. С какой вероятностью основная гипотеза будет отвергнута?

   Обозначим $\sum_{i=1}^n X_i < n$ как событие A. Его можно выразить словами так: «хотя бы одна из величин X_i принимает значение 0».

   При $p = 1$ вероятность отвергнуть основную гипотезу будет равна нулю. Событие A невозможно — все X_i достоверно равны единице, так что $\sum_{i=1}^n X_i = n$.

   (b) (5%) Пусть $0 < p < 1$. Выпишите мощность критерия как функцию от n и p.

   Мощность критерия – вероятность отвергнуть основную гипотезу, когда верна альтернативная. В случае $0 \leqslant p < 1$ основная гипотеза отвергается с вероятностью $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - p^n$ — это и есть функция мощности.

   За понимание того, что такое мощность, ставится 2 балла.

9. Известно, что объём порции кофе, приготовленной кофейным аппаратом, имеет нормальное распределение со стандартным отклонением 2 мл и математическим ожиданием, которое устанавливает производитель аппарата. Любительница кофе Соня не понимает, какой средний объём порции установлен на её аппарате, и решает приготовить 9 порций кофе, средний объём которых оказывается равен $\bar{X} = 51.8$ мл.

   (a) (5%) Рассчитайте 90% доверительный интервал для математического ожидания объёма.

   Пользуемся доверительным интервал для математического ожидания в случае нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией:

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   Табличное значение $z_{0.1/2} = 1.645$ (по таблицам. нормального распределения можно определить, что $1.64 < z_{0.1/2} < 1.65$). Подставляя данные из условия, получаем интервал:

$$51.8 - 1.645\frac{2}{\sqrt{9}} < \mu < 51.8 + 1.645\frac{2}{\sqrt{9}}$$

$$50.703 < \mu < 52.897$$

   За ошибку при использовании таблиц снимается 2 балла.

   (b) (5%) Предположим, что Соня решает пользоваться доверительным интервалом вида $(\bar{X} - 2; \bar{X} + 2)$. Какой доверительной вероятности он соответствует?

   Интервал $(\bar{X} - 2; \bar{X} + 2)$ — частный случай интервала из части (a), где $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$. Поэтому $z_{\alpha/2} = \frac{2\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2\sqrt{9}}{2} = 3$. Посмотрев в таблицы нормального распределения, видим, что это значение соответствует доверительной вероятности в 99.73% (правило трёх сигм).

За ошибку при использовании таблиц снимается 2 балла.

10. Менеджер Петров планирует купить подержанный автомобиль и накопил для этого некоторую сумму — 1000 у.е. Он выбрал тип автомобиля: производителя, модель и комплектацию. В качестве основного параметра для принятия решения он рассматривает пробег (переменная «Run») в тысячах километров. Петров собрал данные о ценах на 100 автомобилей выбранного типа в единицах у.е. с различным пробегом и решил для анализа своих возможностей воспользоваться линейной регрессией $Price_t = \beta_1 + \beta_2 Run_t + v_t$. Предположим, что все предпосылки классической нормальной регрессионной модели выполнены. Результаты оценивания модели по имеющимся у Петрова данным:
   - оценки значений параметров, $\hat{\beta}_1 = 2000$, $\hat{\beta}_2 = -2$
   - оценка ковариационной матрицы оценок значений параметров, $\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   - оценка дисперсии случайной составляющей $\hat{\sigma}^2 = 150$.

   (a) С вероятностью ошибки первого рода 5% проверьте гипотезу менеджера о том, что за каждую тысячу километров пробега автомобиль теряет в цене не две, а две с половиной у.е.

   Теория. Решение основано на построении доверительного интервала для нового значения зависимой переменной – цены ($Price$). С заданной доверительной вероятностью он накрывает искомое новое значение. Поскольку Петров согласен с вероятностью покупки 0.97725, то доверительная вероятность равна этой величине. Необходимо построить указанный выше доверительный интервал при произвольном значении независимой переменной – пробеге (Run). Далее, приравнивая нижний предел данного интервала к имеющейся у Петрова сумме, определяем минимальный пробег автомобиля, на который он может рассчитывать.

   Расчеты.

   Для модели линейной регрессии приближенный (на основе оценок) доверительный интервал для нового значения зависимой переменной имеет вид: $P\left(Price \in \left[(\hat{a}, x) - u_\alpha\sqrt{x'\hat{C}x + s^2}, (\hat{a}, x) + u_\alpha\sqrt{x'\hat{C}x + s^2}\right]\right) \approx \alpha$. Подставляя в это выражение имеющиеся у Петрова результаты оценивания, и учитывая указанное значение квантили, получаем нижнюю границу доверительного интервала:

$$Price_L(Run) = 2000.0 - 2.0 \cdot Run - 2 \cdot \sqrt{(2.0 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2) + 150} =$$
$$= 2000.0 - 2.0 \cdot Run - 2 \cdot \sqrt{152 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2}$$

   Приравнивая найденное выражение накопленной сумме, получаем уравнение: $500 - Run = \sqrt{152 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2}$. Выражение под знаком квадратного корня в правой части равенства всегда положительно (корней нет). Возводим левую и правую часть в квадрат. В результате получаем уравнение $Run^2 + 1002 \cdot Run - 249848 = 0$. Оно имеет два корня $Run_1 = -683.71$, $Run_2 = 182.71$. Очевидно, что второй корень равен искомой величине.

   (b) Каков минимальный пробег автомобиля выбранного типа, начиная с которого Петрову хватит денег на покупку с вероятностью 97.5%?

   Теория. Решение основано на проверке гипотезы о величине математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии. (Возможен вариант решения при неизвестной дисперсии, но для этого потребуются таблицы или их эквивалент для распределения Стьюдента. Если участник Олимпиады пойдет этим путем, можно добавить несколько баллов).

   Расчеты. Проверяется гипотеза H_0: $\beta_2 = -2.5$ против H_a: $\beta_2 \neq -2.5$. При сделанных предположениях и полученных оценках критическая область имеет вид $W = (-\infty, z_L] \cup [z_U; +\infty)$, где $z_L = -2.5 - 1.96 \cdot 1.41 \approx -5.26$, $z_U = -2.5 + 1.96 \cdot 1.41 \approx 0.26$. Полученная оценка значения параметра $\hat{\beta}_2$ не попадает в критическую область. Таким образом, гипотеза менеджера Иванова не отвергается.

   Формализация (выписывание в виде математических соотношений) любой из проблем Петрова - 2 балла. Решение любой из проблем - 5 баллов

   Конкретная величина баллов может быть иной в зависимости от полноты решения и допущенных ошибок.

Справочная информация:

Если $F()$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины, то $F(1) \approx 0.841$, $F(1.282) \approx 0.9$, $F(1.645) \approx 0.95$, $F(1.96) \approx 0.975$, $F(2.241) \approx 0.9875$, $F(3) \approx 0.9987$.

При необходимости можно использовать линейную интерполяцию для нахождения нужных квантилей.

7.3 Вариант C

1. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\ln(1+\arcsin^2 x)}{\mathrm{tg}(\pi x)}\right)^{\frac{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{|x|}}{x}}$$

2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Ортогонализировать систему собственных векторов этой матрицы и дополнить ее до ортогонального базиса в исходном линейном пространстве.

3. Исследуйте на экстремум следующую функцию: $F(x, y) = 3x^3 + 21y^3 - 18xy + 5$

4. Пусть $Q(x, y) = 4x^2 - 9y^2$ аргументы $Q(x, y)$ удовлетворяют условию$F(x, y) = c + ax + by = 0$.
При каких значениях параметров a, b, c функция $Q(x, y)$:
   (a) будет иметь ровно одну условную стационарную точку, определите, является ли данная точка экстремумом;
   (b) будет иметь более одной условной стационарной точки, определите, являются ли данные точки экстремумами;
   (c) не будет иметь стационарных точек.

   Указание. Для нахождения условных стационарных точек использовать метод множителей Лагранжа. Дополнительных исследований проводить не надо.

5. Решите дифференциальное уравнение

$$y'''(x) - 3y''(x) + y'(x) - 3y(x) + 6x + 13 + 5e^{2x} = 0$$

6. На курсе учатся две группы.
В первой группе – 20 юношей и 10 девушек.
Во второй группе – 15 юношей и 15 девушек.
Мы выбираем одного юношу из всего курса равновероятно наугад. Затем из группы, в которой учится этот юноша, выбираем наугад равновероятно еще одного человека, кроме этого юноши.
   (a) Какова вероятность того, что будут выбраны люди из первой группы?
   (b) Какова вероятность того, что оба выбранных человека будут юношами?
   (c) Какова вероятность того, что оба - юноши, если известно, что они из первой группы?
   (d) Какова вероятность того, что оба из первой группы, если известно, что это юноши?

7. Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + 4xy)/34, & \{1 \leqslant x \leqslant 2; 0 \leqslant y \leqslant 2\} \\ 0, & else \end{cases}$$

   (a) Найдите вероятности $P(Y \leqslant 2)$и $P(x \leqslant 1.5|y \leqslant 2)$
   (b) Найдите $E(X)$ и $Cov(X, Y)$

8. Производитель одежды хочет узнать, какой цвет футболок предпочитает целевая группа: малиновый или салатовый. В выборке из 225 человек 90 высказались в пользу малинового цвета, а 135 – в пользу салатового.
   (a) Рассчитайте 95% доверительный интервал для доли предпочитающих салатовый цвет.
   (b) Строгий начальник хочет, чтобы ширина доверительного интервала (разница между его верхней и нижней границей) была не больше 0.1. Какой доверительной вероятности можно добиться в таком случае?

9. При отлаженном процессе упаковки чая в одну упаковку в среднем помещается 125 граммов чая, при этом дисперсия массы чая в упаковке не должна превышать 9 (граммов в квадрате). Отдел контроля качества

отобрал 25 упаковок и рассчитал несмещённую оценку дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 13.5$$

Предполагается, что масса чая в упаковке имеет нормальное распределение.

(a) Есть ли основания считать, что дисперсия массы чая превышает допустимый предел? Используйте уровень значимости 1%.

(b) Гипотезу о равенстве средней массы 125 граммам решено проверять против двусторонней альтернативы с помощью следующего критерия: гипотеза о равенстве не отвергается, если средняя масса чая в выборке лежит в пределах [123.452;126.548]. В противном случае основная гипотеза отвергается, процесс упаковки останавливается для переналадки.

Предположим, что настоящая дисперсия массы чая в упаковке равна 9. С какой вероятностью хорошо отлаженный процесс упаковки будет остановлен для переналадки (иначе говоря, произойдёт ошибка первого рода)?

10. Директору по персоналу П. Друкеру доступны некоторые данные о семидесяти одном работнике на рынке труда (Таблица 1).

Данные	Переменная	Комментарии
Гдовой заработок	Salary	\$, непрерывная шкала измерений
Опыт работы	Experience	годы, непрерывная шкала измерений
Пол	Gender	фиктивная (dummy) переменная, женский пол кодируется единицей
Наличие уровня квалификации	Level1	фиктивная (dummy) переменная, первый, самый низкий уровень квалификации, наличие кодируется единицей
	Level2	фиктивная (dummy) переменная, средний уровень квалификации, наличие кодируется единицей.
	Level3	фиктивная (dummy) переменная, высокий уровень квалификации, наличие кодируется единицей.

Таблица 1: Доступные данные

(a) Во-первых, он хочет узнать, существует ли на рынке гендерная дискриминация, чтобы оптимизировать издержки по найму нового персонала женского пола.
Напомним, что гендерная дискриминация на рынке труда означает наличие неравных возможностей, в частности, в области оплаты труда у сотрудников разного пола, обладающих одинаковыми характеристиками в остальном.
a) Какое из уравнений 1 − 4 в наибольшей степени подходит для решения этой задачи Друкера?
b) Каким образом Друкер получил ответ на свой вопрос, если он верит, что случайная составляющая в наилучшей модели имеет нормальное распределение?
1.$salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2(experience_t)^2 + a_3 gender_t + \nu_t$
2. $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 gender_t + \nu_t$
3. $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 experience_t gender_t + a_3 gender_t + \nu_t$
4. $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 experience_t gender_t + \nu_t$

(b) Во-вторых, Друкер хочет узнать, в каких пределах должна находиться справедливая (рыночная) прибавка к годовому заработку женщин, достигших третьего уровня квалификации, по отношению к заработной плате женщин первого уровня квалификации, чтобы удержать их в компании и не переплатить им.
Для решения задачи Друкер построил следующую модель:

$$salary_t = c_1 + c_2 level2_t + c_3 level3_t + c_4 gender_t + c_5 gender_t level2_t + c_5 gender_t level3 + \nu_t$$

Друкер верит, что распределение случайной составляющей в модели нормальное. Решение задачи он

хочет представить в виде 95% доверительного интервала.
Результаты МНК оценивания значений коэффициентов приведены в Таблице 2

Переменные	МНК оценка	Стандартная ошибка оценки
C	45989,2	1480,0
Level2	6951,6	2750,7
Level3	8250,2	3744,1
gender	-17197,8	2750,7
gender*level2	8791,1	4182,3
gender*level3	16494,7	5846,3

Таблица 2: МНК оценки коэффициентов модели

В Таблице 3 приведены оценки значений коэффициентов ковариации полученных оценок.

	C	Level2	Level3	gender	gender*level2	gender*level3
C	2190307,0	-2190307,0	-2190307,0	-2190307,0	2190307,0	2190307,0
Level2	-2190307,0	7566515,0	2190307,0	2190307,0	-7566515,0	-2190307,0
Level3	-2190307,0	2190307,0	14017966,0	2190307,0	-2190307,0	-14017966,0
gender	-2190307,0	2190307,0	2190307,0	7566515,0	-7566515,0	-7566515,0
gender*level2	2190307,0	-7566515,0	-2190307,0	-7566515,0	17491823,0	7566515,0
gender*level3	2190307,0	-2190307,0	-14017966,0	-7566515,0	7566515,0	34178747,0

Таблица 3: МНК оценки коэффициентов модели

a) Почему Друкер использовал в модели только два уровня квалификации?
b) Помогите Друкеру найти интересующие его границы надбавки.

8 2015

8.1 Вариант А

1. Функция f задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\exp(1/x)}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(a) (8%) Найдите правую, $f'_+(0)$, и левую, $f'_-(0)$, производные функции f в точке $x = 0$

Правая:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\exp(1/x)} = 0$$

Левая:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\exp(1/x)} = 1$$

(b) (2%) Существует ли производная функции f в точке $x = 0$?

Левая и правая производные не равны, следовательно, производной в точке $x = 0$ не существует.

2. (10%) Вычислите интеграл

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$$

Используем интегрирование по частям:

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Займёмся вторым интегралом:

$$\int x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int x\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}+C$$

Итого, ответ:

$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

3. Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (6%) Найдите ранг и определитель матрицы A как функции от параметра α

Находим определитель (например, разложением по столбцу содержащему α):

$$\det A = 15\alpha$$

Определитель обращается в ноль только при $\alpha = 0$. Отсюда делаем вывод и про ранг матрицы. При $\alpha = 0$ ранг матрицы равен двум, а при $\alpha \neq 0$ он равен трём.

(b) (4%) Определите количество решений системы в зависимости от значений параметров α и β

Если $\alpha \neq 0$, то решение системы единственно вне зависимости от β. При $\alpha = 0$ строки матрицы A линейно зависимы. Матрица A необратима и система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений. Выясним зависимость между строками матрицы A, выразим третью строку матрицы через первые две:

$$(-1; 7; -1) = y_1(1; -2; 0) + y_2(2; 1; -1)$$

Решая эту систему находим, что $y_1 = -3$, а $y_2 = 1$. Если это же соотношение выполняется для столбца b, то система имеет бесконечное количество решений, иначе — ни одного.

$$2 = -3 \cdot 1 + 1 \cdot \beta$$

Следовательно, при $\alpha = 0$ и $\beta = 5$ система имеет бесконечное количество решений, а при $\alpha = 0$ и $\beta \neq 5$ — ни одного.

4. Вектор-строка a состоит из последовательных чисел от 1 до 4, $a = (1, 2, 3, 4)$. Матрица A задана соотношением $A = a^T a$.

   (a) (5%) Найдите собственные числа матрицы A

   Ранг матрицы равен количеству ненулевых собственных чисел. Ранг произведения матриц не превосходит ранга сомножителей, поэтому ранг матрицы A равен одному. Матрица A ненулевая, поэтому у неё три нулевых собственных числа и одно ненулевое.
   Заметим, что $A \cdot a^T = (a^T a)a^T = a^T(aa^T) = a^T \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 30a^T$. Следовательно, четвёртое собственное число — 30.

   (b) (3%) Для максимального собственного числа укажите хотя бы один собственный вектор

   Попутно в прошлом пункте мы нашли, что у числа 30 есть собственный вектор $a^T = (1, 2, 3, 4)^T$.

   (c) (2%) Является ли матрица A положительно определённой? Положительно полуопределённой?

   У матрицы A нулевые и положительные собственные числа. Она является положительно полуопределённой, а положительно определённой не является.

5. Задано дифференциальное уравнение

$$x\frac{dy}{dx} - xy - e^x = 0$$

   (a) (8%) Решите дифференциальное уравнение

$$y' = y + e^x/x$$

   Уравнение линейное. Решаем методом вариации постоянной. Однородное уравнение имеет вид

$$y' = y$$

   Его общее решение имеет вид (экспонента подходит, а общее решение однородного уравнения пропорционально любому частному)

$$y(x) = Ce^x$$

   поэтому в исходном уравнении делаем замену $y(x) = z(x)e^x$:

$$z'e^x + ze^x = ze^x + e^x/x$$

$$z' = 1/x$$

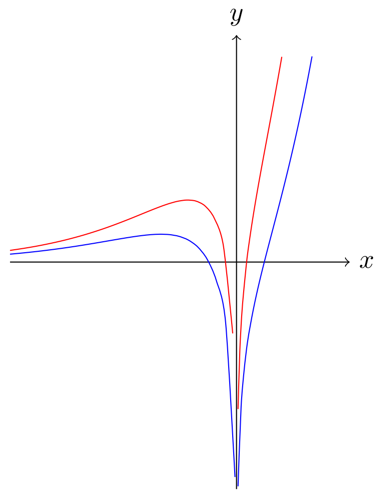
   Интегрируя получаем

$$z(x) = \ln|x| + C$$

   Возвращая подстановку, получаем решение

$$y(x) = (\ln|x| + C)e^x$$

(b) (2%) Дайте схематический рисунок интегральных кривых



6. (10%) Исследуйте на экстремумы функцию $F(x,y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 23$

Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 12y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 24y^2 - 12x = 0 \end{cases}$$

Получим точки: $(0;0)$, $(2;1)$. Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции:

$$\begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозрительных точек.

Для точки $(0;0)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$. Находим угловые миноры, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0 - 12^2 < 0$. Следовательно, точка $(0;0)$ не является точкой экстремума.

Для точки $(2;1)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$. Находим угловые миноры, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 12 \cdot 48 - 12^2 > 0$. Следовательно, точка $(2;1)$ является точкой минимума.

Значение функции в этой точке: $F(x,y) = 15$.

7. Рассмотрим функцию $Q(x,y) = 4x - y$, аргументы которой удовлетворяют условию $b + ax^2 + y^2 = 0$.

Найдите при каких значениях параметров a и b функция $Q(x,y)$:

(a) (4%) будет иметь ровно одну условную стационарную точку, определите, является ли данная точка экстремумом;

(b) (4%) будет иметь более одной условной стационарной точки, определите, являются ли данные точки экстремумами;

(c) (2%) не будет иметь стационарных точек.

Указание. Для нахождения условных стационарных точек используйте метод множителей Лагранжа. Дополнительных исследований проводить не требуется.

1. Если $a = 0, b \leqslant 0$, то ограничению удовлетворяют все значения аргумента x при $y = \sqrt{-b}$. В этом случае остается найти экстремум функции $4x - \sqrt{-b}$, которого, очевидно не существует. В данном случае стационарных точек нет.

2. Если $a \geqslant 0, b > 0$, то ограничению не удовлетворяет ни одна точка. В данном случае стационарных точек нет.
3. Остается рассмотреть два случая $a > 0$, $b < 0$ и $a < 0$, b-любое. В этом случае используем метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид $L(x, y, \lambda) = 4x - y + \lambda\left(b + ax^2 + y^2\right)$. Безусловные стационарные точки функции Лагранжа совпадают с условными стационарными точками в постановке задачи. Стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x, y, \lambda) = 4 + 2\lambda a x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} L(x, y, \lambda) = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x, y, \lambda) = b + ax^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений существует не всегда.

C.1) При условии, что $a \neq -16$ решением являются точки

$\begin{cases} x_k = -\frac{2}{\lambda a} \\ y_k = \frac{1}{2\lambda} \end{cases}$, $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{16+a}{4ab}}$. Далее решение при положительном значении λ назовем (x_1, y_1), а при отрицательном λ - (x_2, y_2). Определим их тип. Достаточным условием существования условного экстремума в условной стационарной точке является постоянство знака второго дифференциала функции Лагранжа при учете условия. Второй дифференциал имеет вид: $d^2L(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x, y, \lambda)\, dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L(x, y, \lambda)\, dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L(x, y, \lambda)\, dy^2$ Из ограничения следует, что

$$dy = -\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \middle/ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)\right) dx$$

Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком выражения

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x_k, y_k, \lambda_k) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L(x_k, y_k, \lambda_k)\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_k, y_k) \middle/ \frac{\partial}{\partial y} F(x_k, y_k)\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L(x, y, \lambda)\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_k, y_k) \middle/ \frac{\partial}{\partial y} F(x_k, y_k)\right)^2 \end{aligned}.$$

В случае $a > 0, b < 0$ или $a \in (-16, 0), b > 0$ $A = 2\lambda(16 + a)$. Тогда (x_1, y_1) является точкой минимума, а (x_2, y_2) является точкой максимума.

В случае $a < -16, b < 0$ $A = 2\lambda(16 + a)$. Тогда (x_1, y_1) является точкой максимума, а (x_2, y_2) является точкой минимума.

В случае $a \in (-16, 0), b < 0$ или $a < -16, b > 0$ выражение под корнем оказывается отрицательным и стационарных точек нет.

C.2) Если $a = -16$, то $\lambda = 0$ и в силу линейности функции $Q(x, y)$ стационарных точек нет.

Таким образом:

1. Единственной стационарной точки не существует.
2. Две стационарные точки существуют в случае:
   $a > 0, b < 0$ или $a \in (-16, 0), b > 0$. Тогда (x_1, y_1) является точкой минимума, а (x_2, y_2) является точкой максимума.
   $a < -16, b < 0$. Тогда (x_1, y_1) является точкой максимума, а (x_2, y_2) является точкой минимума.
3. Во всех остальных случаях стационарные точки отсутствуют.

8. Меткий стрелок Василиса стреляет по мишени, каждый раз поражая цель с вероятностью 0.95 независимо от других выстрелов. По условиям соревнования Василиса стреляет десять раз, причём за каждое попадание она получает три очка, а за промах теряет одно очко, так что может получить и отрицательный результат.
   (a) (5%) Каковы математическое ожидание и дисперсия числа полученных Василисой очков?

   Имеем дело с десятью испытаниями по схеме Бернулли с вероятностью успеха 0.95. Пусть X — число успехов (попаданий). Тогда $\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0.95 = 9.5$, $\mathrm{Var}(X) = 10 \cdot 0.95 \cdot 0.05 = 0.475$. Число полученных Василисой очков $Y = 3X - (10 - X) = 4X - 10$. Отсюда ответ:

$$\mathbb{E}(Y) = 4\mathbb{E}(X) - 10 = 4 \cdot 9.5 - 10 = 28,$$

$$\mathrm{Var}(Y) = 16\,\mathrm{Var}(X) = 7.6.$$

(b) (5%) На следующих соревнованиях правила другие: Василиса будет стрелять до второго промаха. С какой вероятностью она сделает ровно шесть выстрелов?

> На этот раз число испытаний не ограничено. Чтобы в стрельбе до второго промаха было сделано шесть выстрелов, нужно в первых пяти попытках промахнуться ровно один раз (вероятность этого равна $C_5^1 \cdot 0.95^4 \cdot 0.05$), а в шестом выстреле ещё раз промахнуться, что произойдёт с вероятностью 0.05. Искомая вероятность: $C_5^1 \cdot 0.95^4 \cdot 0.05 \cdot 0.05 \approx 0.01$.
>
> Разбалловка: пять баллов за пункт (а), по одному баллу за $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, связь Y и X, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$; пять баллов за пункт (б), из них два - за формулу Бернулли.

9. Случайные величины X_i независимы, а их распределение известно с точностью до параметра p:

Значения	-1	0	2
Вероятности	p	$0.8-p$	0.2

(a) (5%) Пусть $p = 0.4$. С какой вероятностью среднее в выборке $X_1, \ldots, X_{120}$ превысит значение 0.08?

> Найдём математическое ожидание и дисперсию X_i:
>
> $$\mathbb{E}(X_i) = -p + 2 \cdot 0.2 = 0.4 - p$$
>
> $$\mathbb{E}(X_i^2) = (-1)^2 p + 2^2 \cdot 0.2 = 0.8 + p,$$
> $$\mathrm{Var}(X_i) = 0.8 + p - (0.4 - p)^2 = 0.64 + 1.8p - p^2$$
>
> При $p = 0.4$ получаем $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1.2$. Объём выборки велик, так что выборочное среднее будет иметь приблизительно нормальное распределение: $\bar{X} \sim \mathcal{N}(0, 1.2/120 = 0.01)$. Рассчитываем нужную нам вероятность, нормировав выборочное среднее:
>
> $$\mathbb{P}(\bar{X} > 0.08) = \mathbb{P}\left(\bar{X}/\sqrt{0.01} > 0.08/\sqrt{0.01}\right) = \mathbb{P}(\bar{X}/0.1 > 0.8) = 0.212.$$
>
> Разбалловка: 5 баллов за пункт (а), по одному баллу за математическое ожидание, дисперсию, применение теоремы о распределении выборочного среднего (центральной предельной теоремы), нормирование, нахождение вероятности по таблицам;

(b) (5%) Докажите состоятельность оценки $\hat{p} = 0.4 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ для параметра p, где n — объём выборки.

> Для доказательства состоятельности оценки достаточно показать, что она несмещённая, а её дисперсия стремится к нулю. Проверяем несмещённость:
>
> $$\mathbb{E}(\hat{p}) = 0.4 - \mathbb{E}(\bar{X}) = 0.4 - (0.4 - p) = p.$$
>
> Ищем дисперсию:
> $$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \mathrm{Var}(\bar{X}) = (0.64 + 1.8p - p^2)/n.$$
>
> Ясно, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{p}) = 0$, так что оценка состоятельная.
>
> Можно и не искать дисперсию X_i. Достаточно знать, что она конечна, а это следует из того, что множество значений X_i конечно.
>
> Разбалловка: 5 баллов за пункт (б), из них два – за достаточное условие состоятельности.

10. Выпускник бакалавриата, изучавший эконометрику, принимает решение о поступлении в магистратуру и хочет оценить возможную прибавку к заработной плате, которую обеспечит ему диплом магистра. В его распоряжении есть данные о заработных платах (переменная *wage* — средняя почасовая заработная плата в долларах), опыте (переменная *exper* — годы опыта) и уровне образования (переменная *educ* — количество лет обучения). По 200-м наблюдениям он оценил следующее уравнение регрессии (предпосылки классической линейной регрессионной модели выполнены):

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

Результаты оценки уравнения представлены в таблице:

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка
$exper$	0.0389	0.0048
$exper^2$	-0.0007	0.0001
$educ$	0.0841	0.0070
константа	0.3905	0.1022

(a) (1%) Выпишите оценённое уравнение регрессии.

$$\ln(\widehat{wage_i}) = 0.3905 + 0.0389 exper_i - 0.0007 exper_i^2 + 0.0841 educ_i$$

(b) (6%) На уровне значимости 5%-ов проверьте гипотезу о связи образования и заработной платы против альтернативной гипотезы об отсутствии связи. Выпишите нулевую и альтернативную гипотезы, укажите используемые формулы, рассчитайте необходимую статистику, укажите точный и асимптотический вид её распределения и сделайте вывод на её основе.

H_0: $\beta_3 = 0$, H_a: $\beta_3 \neq 0$. $Z_{obs} = \frac{\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_3)} = 0.0841/0.0070 \approx 12.01$, $Z_{cr} \approx 1.95$. Расчетное значение тестовой статистики по модулю больше критического, что дает основания отвергнуть нулевую гипотезу о незначимости коэффициента при переменной $educ$. На уровне значимости 5%-ов есть основания утверждать, что существует связь между образованием и заработной платой. Точное распределение статистики — t_{196}, асимптотическое — $N(0;1)$.

(c) (3%) Перечислите модельные предпосылки, которые были использованы при решении задачи

Детерминистическая версия:

1. Линейность зависимости y от объясняющих переменных.

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

2. Нет линейной зависимости между регрессорами. Матрица X имеет полный ранг.
3. Нет систематической ошибки, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$
4. Гомоскедастичность $\operatorname{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$
5. Некоррелированность ошибок $\operatorname{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$
6. Нормальность ошибок, $\varepsilon_i \sim N(0;\sigma^2)$

Стохастическая версия:

1. Линейность зависимости y от объясняющих переменных.

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 educ_i + \varepsilon_i$$

2. С вероятностью один нет линейной зависимости между регрессорами. Матрица X имеет полный ранг с вероятностью один.
3. Эндогенность, $\mathbb{E}(\varepsilon_i|X) = 0$
4. Условная гомоскадастичность $\operatorname{Var}(\varepsilon_i|X) = \sigma^2$
5. Условная некоррелированность ошибок $\operatorname{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = 0$
6. Нормальность ошибок, $\varepsilon_i \sim N(0;\sigma^2)$

8.2 Вариант B

1. Функция f задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(a) (8%) Найдите правую, $f'_+(0)$, и левую, $f'_-(0)$, производные функции f в точке $x = 0$

Правая:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\sin t - 0}{t} = 0$$

Левая:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\sin(1/x)-0}{x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{\sin t - 0}{t} = 0$$

(b) (2%) Существует ли производная функции f в точке $x = 0$?

Левая производная равняется правой производной — производная в точке $x = 0$ равна 0.

2. (10%) Вычислите интеграл

$$\int \sin(\ln x)\,dx$$

Интегрируем два раза по частям:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

Выражаем искомый интеграл:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right)$$

3. Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & \alpha \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}.$$

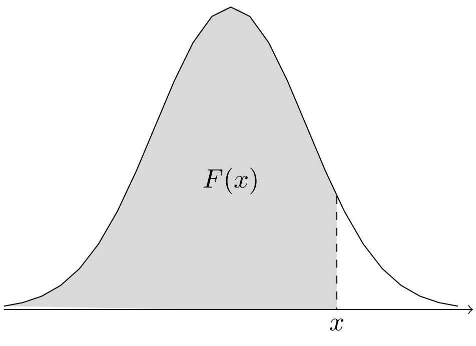
(a) (6%) Найдите ранг и определитель матрицы A как функции от параметра α

Находим определитель (например, разложением по столбцу содержащему α):

$$\det A = 5\alpha + 5$$

Определитель обращается в ноль только при $\alpha = -1$. Отсюда делаем вывод и про ранг матрицы. При $\alpha = -1$ ранг матрицы равен двум, а при $\alpha \neq -1$ он равен трём.

(b) (4%) Определите количество решений системы в зависимости от значений параметров α и β



x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0.050	0.520	0.750	0.773	1.450	0.926	2.150	0.984
0.100	0.540	0.800	0.788	1.500	0.933	2.200	0.986
0.150	0.560	0.850	0.802	1.550	0.939	2.250	0.988
0.200	0.579	0.900	0.816	1.600	0.945	2.300	0.989
0.250	0.599	0.950	0.829	1.650	0.951	2.350	0.991
0.300	0.618	1.000	0.841	1.700	0.955	2.400	0.992
0.350	0.637	1.050	0.853	1.750	0.960	2.450	0.993
0.400	0.655	1.100	0.864	1.800	0.964	2.500	0.994
0.450	0.674	1.150	0.875	1.850	0.968	2.550	0.995
0.500	0.691	1.200	0.885	1.900	0.971	2.600	0.995
0.550	0.709	1.250	0.894	1.950	0.974	2.650	0.996
0.600	0.726	1.300	0.903	2.000	0.977	2.700	0.997
0.650	0.742	1.350	0.911	2.050	0.980	2.750	0.997
0.700	0.758	1.400	0.919	2.100	0.982	2.800	0.997

Рис. 1: Таблица значений функции распределения для стандартной нормальной величины

Если $\alpha \neq -1$, то решение системы единственно вне зависимости от β. При $\alpha = -1$ строки матрицы A линейно зависимы. Матрица A необратима и система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений. Выясним зависимость между строками матрицы A, выразим третью строку матрицы через первые две:

$$(-1; 7; -1) = y_1(1; -2; 0) + y_2(2; 1; -1)$$

Решая эту систему находим, что $y_1 = -3$, а $y_2 = 1$. Если это же соотношение выполняется для столбца b, то система имеет бесконечное количество решений, иначе — ни одного.

$$2 = -3 \cdot 1 + 1 \cdot \beta$$

Следовательно, при $\alpha = -1$ и $\beta = 5$ система имеет бесконечное количество решений, а при $\alpha = -1$ и $\beta \neq 5$ — ни одного.

4. Вектор-строка b состоит из последовательных чисел от 4 до 1, $b = (4, 3, 2, 1)$. Матрица B задана соотношением $B = b^T b$.

   (a) (5%) Найдите собственные числа матрицы B

   Ранг матрицы равен количеству ненулевых собственных чисел. Ранг произведения матриц не превосходит ранга сомножителей, поэтому ранг матрицы B равен одному. Матрица B ненулевая, поэтому у неё три нулевых собственных числа и одно ненулевое.
   Заметим, что $B \cdot b^T = (b^T b)b^T = b^T(bb^T) = b^T \cdot (16 + 9 + 4 + 1) = 30b^T$. Следовательно, четвёртое собственное число — 30.

   (b) (3%) Для максимального собственного числа укажите хотя бы один собственный вектор

   Попутно в прошлом пункте мы нашли, что у числа 30 есть собственный вектор $b^T = (4, 3, 2, 1)^T$.

   (c) (2%) Является ли матрица B положительно определённой? Положительно полуопределённой?

   У матрицы B нулевые и положительные собственные числа. Она является положительно полуопределённой, а положительно определённой не является.

5. Задано дифференциальное уравнение

$$x\frac{dy}{dx} - y = (x + y)\ln\left(\frac{x + y}{x}\right)$$

   (a) (8%) Решите дифференциальное уравнение

   Уравнение однородно (сохраняет вид при одновременном умножении x и $y(x)$ на постоянный множитель), поэтому можно использовать замену $y(x) = z(x)x$.
   Заметим, что в области определения уравнения $x \neq 0$, поэтому решения при такой замене не теряются.

$$x(z' + z) - zx = (x + zx)\ln\frac{x + zx}{x}$$

$$z' = \frac{(1 + z)\ln(1 + z)}{x}$$

   Переменные разделяются

$$\frac{dz}{(1 + z)\ln(1 + z)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{(1 + z)\ln(1 + z)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln(1 + z)| = \ln|x| + \ln C_0,\ C_0 > 0$$

постоянную интегрирования, которая может иметь любой знак, удобно в данном случае записать как логарифм положительной постоянной

$$|\ln(1+z)| = C_0|x|,\ C_0 > 0$$

Снимая модуль в левой части получаем постоянную любого знака

$$\ln(1+z) = C|x|$$

или

$$1 + z = e^{C|x|}$$

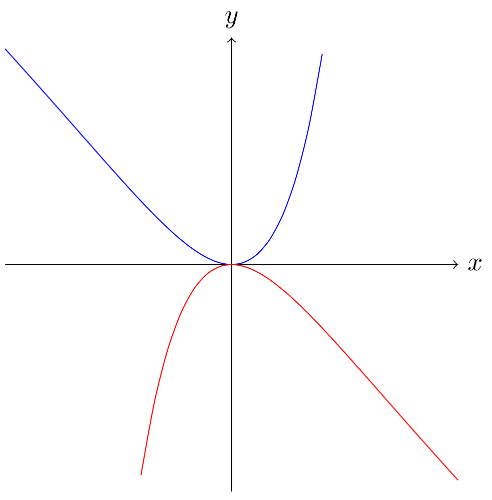
При $x = 0$ уравнение не имеет смысла, и постоянные интегрирования при положительных и при отрицательных значениях x можно выбирать независимо. Иначе говоря, найденное множество интегральных кривых можно перечислить выражением

$$1 + z = e^{Cx}$$

Возвращая подстановку, получаем решение

$$y(x) = \left(e^{Cx} - 1\right) x$$

(b) (2%) Дайте схематический рисунок интегральных кривых



6. (10%) Исследуйте на экстремумы функцию $F(x, y) = 16x^3 + 2y^3 - 24xy - 15$

Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 48x^2 - 24y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 24x = 0 \end{cases}$$

Получим точки: $(0; 0)$, $(1; 2)$. Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции:

$$\begin{pmatrix} 96x & -24 \\ -24 & 12y \end{pmatrix}.$$

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозрительных точек.

Для точки $(0; 0)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$. Находим угловые миноры, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0 - 24^2 < 0$. Следовательно, точка $(0; 0)$ не является точкой экстремума.

Для точки $(1;2)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$. Находим угловые миноры, $\Delta_1 = 96 > 0$, $\Delta_2 = 96 \cdot 24 - 24^2 > 0$. Следовательно, точка $(1;2)$ является точкой минимума.

Значение функции в этой точке: $F(x,y) = -31$.

7. Рассмотрим функцию $Q(x,y) = x - 2y$, аргументы которой удовлетворяют условию $b + ax^2 + y^2 = 0$. Найдите при каких значениях параметров a и b функция $Q(x,y)$:
   (a) (4%) будет иметь ровно одну условную стационарную точку, определите, является ли данная точка экстремумом;
   (b) (4%) будет иметь более одной условной стационарной точки, определите, являются ли данные точки экстремумами;
   (c) (2%) не будет иметь стационарных точек.

   Указание. Для нахождения условных стационарных точек используйте метод множителей Лагранжа. Дополнительных исследований проводить не требуется.

1. Если $a = 0, b \leqslant 0$, то ограничению удовлетворяют все значения аргумента x при $y = \sqrt{-b}$. В этом случае остается найти экстремум функции $x - 2\sqrt{-b}$, которого, очевидно не существует. В данном случае стационарных точек нет.
2. Если $a \geqslant 0, b > 0$, то ограничению не удовлетворяет ни одна точка. В данном случае стационарных точек нет.
3. Остается рассмотреть два случая $a > 0$, $b < 0$ и $a < 0$, b-любое. В этом случае используем метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид $L(x,y,\lambda) = x - 2y + \lambda\left(b + ax^2 + y^2\right)$. Безусловные стационарные точки функции Лагранжа совпадают с условными стационарными точками в постановке задачи. Стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda a x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} L(x,y,\lambda) = -2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x,y,\lambda) = b + ax^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений существует не всегда.

C.1) При условии, что $a \neq -16$ решением являются точки

$\begin{cases} x_k = -\frac{1}{2\lambda a} \\ y_k = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$, $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{1+4a}{ab}}$. Далее решение при положительном значении λ назовем (x_1, y_1), а при отрицательном λ - (x_2, y_2). Определим их тип. Достаточным условием существования условного экстремума в условной стационарной точке является постоянство знака второго дифференциала функции Лагранжа при учете условия. Второй дифференциал имеет вид: $d^2L(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x,y,\lambda)\, dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L(x,y,\lambda)\, dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L(x,y,\lambda)\, dy^2$ Из ограничения следует, что

$$dy = -\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) \Big/ \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right) dx$$

Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком выражения

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x_k, y_k, \lambda_k) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L(x_k, y_k, \lambda_k)\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_k, y_k) \Big/ \frac{\partial}{\partial y} F(x_k, y_k)\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L(x,y,\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_k, y_k) \Big/ \frac{\partial}{\partial y} F(x_k, y_k)\right)^2$$

В случае $a > 0, b < 0$ или $a \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), b > 0$ $A = 2\lambda(\frac{1}{4} + a)$. Тогда (x_1, y_1) является точкой минимума, а (x_2, y_2) является точкой максимума.

В случае $a < -\frac{1}{4}, b < 0$ $A = 2\lambda(\frac{1}{4} + a)$. Тогда (x_1, y_1) является точкой максимума, а (x_2, y_2) является точкой минимума.

В случае $a \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), b < 0$ или $a < -16, b > 0$ выражение под корнем оказывается отрицательным и стационарных точек нет.

C.2) Если $a = -\frac{1}{4}$, то $\lambda = 0$ и в силу линейности функции $Q(x,y)$ стационарных точек нет.

Таким образом:

1. Единственной стационарной точки не существует.
2. Две стационарные точки существуют в случае:
   $a > 0, b < 0$ или $a \in (-16, 0), b > 0$. Тогда (x_1, y_1) является точкой минимума, а (x_2, y_2) является точкой максимума.
   $a < -16, b < 0$. Тогда (x_1, y_1) является точкой максимума, а (x_2, y_2) является точкой минимума.
3. Во всех остальных случаях стационарные точки отсутствуют.

8. В лотерее каждый десятый билет выигрывает, причём цена билета равна десяти рублям, а выигрыш составляет семьдесят рублей. Билетов очень-очень много, поэтому выигрыши по ним можно считать независимыми.

   (a) (5%) Каковы математическое ожидание и дисперсия выигрыша при покупке восьми билетов? Имеется в виду выигрыш с учётом затрат на приобретение, так что он может быть отрицательным.

   Имеем дело с восемью испытаниями по схеме Бернулли с вероятностью успеха 0.1. Пусть X — число успехов (выигрышей). Тогда $\mathbb{E}(X) = 8 \cdot 0.1 = 0.8$, $\mathrm{Var}(X) = 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.72$. Сумма выигрыша с учётом стоимости билетов $Y = 70X - 80$ (здесь 80 — стоимость восьми билетов). Получаем ответ:

   $$\mathbb{E}(Y) = 70\mathbb{E}(X) - 80 = 70 \cdot 0.8 - 80 = -24,$$

   $$\mathrm{Var}(Y) = 70^2 \,\mathrm{Var}(X) = 3528.$$

   Разбалловка: 5 баллов за пункт (a), по одному баллу за $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, связь Y и X, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

   (b) (5%) Некто покупает лотерейные билеты до третьего выигрыша. С какой вероятностью ему придётся купить ровно двенадцать билетов?

   На этот раз число испытаний не ограничено. Чтобы двенадцатый билет был третьим выигрышным, он должен сам быть выигрышным (вероятность этого - 0.1), а одиннадцать предыдущих должны содержать ровно два выигрыша, вероятность чего равна $C_1 1^2 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^9$. Искомая вероятность: $C_1 1^2 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^9 \cdot 0.1 \approx 0.02$.
   Разбалловка: 5 баллов за пункт (б), из них два за формулу Бернулли.

9. Случайные величины X_i независимы, а их распределение известно с точностью до параметра p:

Значения	-3	0	1
Вероятности	0.1	$0.9 - p$	p

   (a) (5%) Пусть $p = 0.3$. С какой вероятностью среднее в выборке $X_1, \ldots, X_{480}$ превысит значение 0.05?

   Найдём математическое ожидание и дисперсию X_i:

   $$\mathbb{E}(X_i) = -3 \cdot 0.1 + 1 \cdot p = p - 0.3$$

   $$\mathbb{E}(X_i^2) = (-3)^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot p = 0.9 + p,$$
   $$\mathrm{Var}(X_i) = 0.9 + p - (p - 0.3)^2 = 0.81 + 1.6p - p^2$$

   При $p = 0.3$ получаем $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1.2$. Объём выборки велик, так что выборочное среднее будет иметь приблизительно нормальное распределение: $\bar{X} \sim \mathcal{N}(0, 1.2/480 = 0.0025)$. Рассчитываем нужную нам вероятность, нормировав выборочное среднее:

   $$\mathbb{P}(\bar{X} > 0.05) = \mathbb{P}\left(\bar{X}/\sqrt{0.0025} > 0.05/\sqrt{0.0025}\right) = \mathbb{P}(\bar{X}/0.05 > 1) = 0.159.$$

   Разбалловка: 5 баллов за пункт (a), по одному баллу за математическое ожидание, дисперсию, применение теоремы о распределении выборочного среднего (центральной предельной теоремы), нормирование, нахождение вероятности по таблицам;

   (b) (5%) Докажите состоятельность оценки $\hat{p} = 0.3 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ для параметра p, где n — объём выборки.

Для доказательства состоятельности оценки достаточно показать, что она несмещённая, а её дисперсия стремится к нулю. Проверяем несмещённость:

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = 0.3 + \mathbb{E}(\bar{X}) = 0.3 + (p - 0.3) = p.$$

Ищем дисперсию:

$$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \mathrm{Var}(\bar{X}) = (0.81 + 1.6p - p^2)/n.$$

Ясно, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{p}) = 0$, так что оценка состоятельная.

Можно и не искать дисперсию X_i. Достаточно знать, что она конечна, а это следует из того, что множество значений X_i конечно.

Разбалловка: 5 баллов за пункт (б), из них два – за достаточное условие состоятельности.

10. Исследователь решил выяснить, есть ли связь между гендерной принадлежностью и доходами индивида. В его распоряжении есть данные о заработных платах (переменная *wage* — средняя почасовая заработная плата в долларах), опыте (переменная *exper* — годы опыта) и поле (дамми-переменная *gender* принимает значение 1 для женщин). По 300-м наблюдениям он оценил следующее уравнение регрессии (предпосылки классической линейной регрессионной модели выполнены):

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 gender_i + \varepsilon_i$$

Результаты оценки уравнения представлены в таблице:

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка
exper	0.0400	0.0134
$exper^2$	-0.0008	0.0004
gender	-0.0534	0.0847
константа	-0.4860	0.2136

(a) (1%) Выпишите оценённое уравнение регрессии.

$$\widehat{\ln(wage_i)} = -0.4860 + 0.0400 exper_i - 0.0008 exper_i^2 - 0.0534 gender_i$$

(b) (6%) На уровне значимости 5%-ов проверьте гипотезу о значимости связи гендерной принадлежности и заработной платы против альтернативной об отсутствии связи. Выпишите нулевую и альтернативную гипотезы, укажите используемые формулы, рассчитайте необходимую статистику, укажите точный и асимптотический вид её распределения и сделайте вывод на её основе.

H_0: $\beta_3 = 0$, H_a: $\beta_3 \neq 0$. $Z_{obs} = \frac{\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_3)} = -0.0534/0.0847 \approx -0.6305$, $Z_{cr} \approx 1.95$. Расчетное значение тестовой статистики по модулю меньше критического, что не дает оснований отвергнуть нулевую гипотезу о незначимости коэффициента при переменной $kid6$. На уровне значимости 5%-ов нет оснований утверждать, что существует связь между образованием и заработной платой. Точное распределение статистики — t_{296}, асимптотическое — $N(0;1)$.

(c) (3%) Перечислите модельные предпосылки, которые были использованы при решении задачи

Детерминистическая версия:

1. Линейность зависимости y от объясняющих переменных.

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 gender_i + \varepsilon_i$$

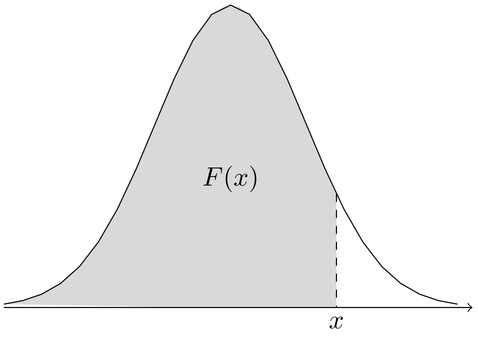
2. Нет линейной зависимости между регрессорами. Матрица X имеет полный ранг.
3. Нет систематической ошибки, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$
4. Гомоскедастичность $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$
5. Некоррелированность ошибок $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$
6. Нормальность ошибок, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$

Стохастическая версия:

1. Линейность зависимости y от объясняющих переменных.

$$\ln(wage_i) = \alpha + \beta_1 exper_i + \beta_2 exper_i^2 + \beta_3 gender_i + \varepsilon_i$$

2. С вероятностью один нет линейной зависимости между регрессорами. Матрица X имеет полный ранг с вероятностью один.
3. Эндогенность, $\mathbb{E}(\varepsilon_i|X) = 0$
4. Условная гомоскадастичность $\text{Var}(\varepsilon_i|X) = \sigma^2$
5. Условная некоррелированность ошибок $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = 0$
6. Нормальность ошибок, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$



x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0.050	0.520	0.750	0.773	1.450	0.926	2.150	0.984
0.100	0.540	0.800	0.788	1.500	0.933	2.200	0.986
0.150	0.560	0.850	0.802	1.550	0.939	2.250	0.988
0.200	0.579	0.900	0.816	1.600	0.945	2.300	0.989
0.250	0.599	0.950	0.829	1.650	0.951	2.350	0.991
0.300	0.618	1.000	0.841	1.700	0.955	2.400	0.992
0.350	0.637	1.050	0.853	1.750	0.960	2.450	0.993
0.400	0.655	1.100	0.864	1.800	0.964	2.500	0.994
0.450	0.674	1.150	0.875	1.850	0.968	2.550	0.995
0.500	0.691	1.200	0.885	1.900	0.971	2.600	0.995
0.550	0.709	1.250	0.894	1.950	0.974	2.650	0.996
0.600	0.726	1.300	0.903	2.000	0.977	2.700	0.997
0.650	0.742	1.350	0.911	2.050	0.980	2.750	0.997
0.700	0.758	1.400	0.919	2.100	0.982	2.800	0.997

Рис. 2: Таблица значений функции распределения для стандартной нормальной величины.

9 2016

9.1 Демо-версия вступительного экзамена

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right),$$

где последнее равенство использует теорему о предельном переходе для непрерывных функций. Далее используем разложение в ряд Маклорена.

$$\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=\frac{\ln(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2))}{x}=\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=-\frac{1}{2},$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. (10%) Find and classify the discontinuity points of the following function:

$$f(x)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

Точки, в которых данная функция может иметь разрыв: $x=0$, поскольку в ней равен нулю знаменатель аргумента функции, и точки $x=1/k, k\in\mathbb{Z}$, поскольку в них $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ меняет знак. В точках $x=1/k, k\in\mathbb{Z}$ функция имеет разрывы первого рода, так как существуют не равные между собой односторонние пределы. Например, рассмотрим $k=1$. Существует правосторонняя окрестность точки $x=1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ положительна. В самом деле, для $x\in(1,2)$ имеет место $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{x}<\pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x)=1$, следовательно, $\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$. С другой стороны, существует левосторонняя окрестность точки $x=1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ отрицательна. В самом деле, для $x\in(1/2,1)$ имеет место $\pi<\frac{\pi}{x}<2\pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x)=-1$, следовательно, $\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1$. Аналогичные окрестности могут быть найдены для всех рассматриваемых точек.

В точке $x=0$ функция имеет разрыв второго рода, поскольку не существует односторонних пределов. Действительно, рассмотрим последовательности $a_n=\frac{2}{1+4n}, n\in\mathbb{N}$ и $b_n=\frac{2}{3+4n}, n\in\mathbb{N}$, стремящиеся к нулю справа. Тогда $f(a_n)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{1+4n}}\right)\right)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)=1$ и $f(b_n)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3+4n}}\right)\right)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\right)=-1$. Тем самым показано, что правостороннего предела $f(x)$ при x стремящемся к нулю не существует. Аналогично можно показать, что не существует левостороннего предела, например, рассмотрев последовательности $-a_n$ и $-b_n$.

3. Let A, B and C be square matrix of size $n\times n$. Prove the following statements or provide counterexample:
   (a) (2%) If $B=C^{-1}AC$, then $\det(A)=\det(B)$

   $$\det(B)=\det(C^{-1}AC)=\det(C^{-1})\det(C)\det(A)=\det(C^{-1}C)\det(A)=\det(A)$$

   (b) (3%) $\det((A+B)^2)=\det(A^2+2AB+B^2)$

Неверно, контрпример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В этом случае $\det((A+B)^2) = -2$, но $\det(A^2 + 2AB + B^2) = -3$.

(c) (3%) $\det((A+B)^2) = \det(A^2 + B^2)$

Неверно, контрпример: $A = I$, $B = I$. Тогда $\det((A+B)^2) = 16$, $\det(A^2 + B^2) = 4$.

(d) (2%) If A is invertible, then $(I + A^{-1})^{-1} = A(A+I)^{-1}$

$$(I + A^{-1})^{-1} = (AA^{-1} + A^{-1})^{-1} = \left((A+I)A^{-1}\right)^{-1} = A(A+I)^{-1}$$

4. Let S be the $n \times n$ «shipbuilding timber» matrix, i.e. the square matrix with all elements equal to 1.

(a) (2%) Express S^2 in terms of S

Перемножаем в лоб:

$$S \cdot S = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nS$$

(b) (3%) Find the eigenvalues of S

Допустим, что $Sv = \lambda v$

Домножим обе стороны на S. Получим:

$$S^2 v = \lambda S v$$

С другой стороны $S^2 v = nSv$. Значит:

$$nSv = \lambda S v$$

Отсюда, либо $\lambda = n$, либо $Sv = 0$, что означает, что $\lambda = 0$.

(c) (3%) For each eigenvalue of S find at least on eigenvector

Разберёмся с собственными векторами для матрицы S. Ищем собственный вектор для $\lambda = 0$. Получаем, что

$$(1, 1, 1, \ldots, 1) \cdot v = 0$$

Значит подходит любой ненулевой вектор с суммой компонент, равной нулю. Например, подойдёт

$$v = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$$

Ищем собственный вектор для $\lambda = n$. Все строки матрицы S одинаковы, поэтому все элементы вектора Sv одинаковы. Значит в v должны быть одинаковые элементы. Например, подойдёт

$$v = (1, 1, 1, 1, \ldots, 1)$$

(d) (2%) Find all the eigenvalues of the matrix $A = aI + bS$, where I is the identity matrix.

Когда мы домножаем матрицу S на число b собственные числа домножаются на b. Если мы прибавляем константу a по диагонали, то собственные числа увеличиваются на a. Значит собственные числа матрицы A равны $a + bn$ и a.

Кстати, при домножении матрицы S на константу собственные векторы не изменяются, равно как и при прибавлении константы a по диагонали.

5. Solve the differential equation:

$$y''' - 4y'' + y' = 2x^2 + 1.$$

Сначала запишем решение однородного дифференциального уравнения:

$$y''' - 4y'' + y' = 0.$$

Составим к нему характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda = 0.$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}.$$

То есть общее решение дифференциального уравнения может быть записано как

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Найдем частное решение этого дифференциального уравнения. В данной задаче – резонансный случай, поскольку $\left(2x^2+1\right)e^0 = 2x^2 + 1$. То есть будем искать частное решение в виде $y = (ax^2 + bx + c)x$. Тогда

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

Следовательно,

$$6a - 4(6ax + 2b) + 3ax^2 + 2bx + c = 2x^2 + 1$$

$$3ax^2 + 2bx - 24ax + 6a - 8b + c = 2x^2 + 1.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 6a - 8b + c = 1 \\ 2b - 24a = 0 \\ 3a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 61 \\ b = 8 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \frac{2}{3}x^3 + 8x^2 + 61x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

6. (10%) Solve the differential equation

$$2xyy' - y'\ln y + y^2 + \ln x = 0$$

Домножим на dx

$$(y^2 + \ln x)dx + (2xy - \ln y)dy = 0$$

Убеждаемся, что это уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + \ln x) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - \ln y)$$

И решаем его по стандартной схеме.

Находим интеграл функции при dx по x

$$F(x, y) = \int y^2 + \ln x \, dx = xy^2 + x(\ln x - 1) + C(y)$$

Теперь приравниваем функцию при dy и $F'_y(x, y)$:

$$2xy + C'(y) = 2xy - \ln y$$

Отсюда находим $C(y)$:

$$C(y) = \int -\ln y \, dy = y(1 - \ln y) + C, \text{ где } C \in \mathbb{R}$$

Итого:

$$xy^2 + x(\ln x - 1) + y(1 - \ln y) = C, \text{ где } C \in \mathbb{R}$$

7. (10%) Find the points of maximum of the function

$$F(u, v) = \sqrt{u}\left(\sqrt{u} - 2\right) - \sqrt{v}\left(\sqrt{v} - 2\right),$$

given that $\sqrt{u} \leqslant 2, \ \sqrt{v} \leqslant 2$

1. Выполняем замену переменных $x = \sqrt{u}, \ y = \sqrt{v}$. Далее путем несложных алгебраических преобразований выражения для целевой функции приводим ее к виду:$G(x, y) = (x-1)^2 - (y-1)^2 + 3$. При этом ограничения принимают вид $x \in [0, 2], \ y \in [0, 2]$
2. Определяем наличие экстремумов внутри области поиска, определенной ограничениями.

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = 2(x-1), \ \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = -2(y-1), \ \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Используя критерий Сильвестра, легко проверить, что в точке (1,1) у функции $G(x, y)$ нет экстремумов.
3. Проанализируем наличие экстремумов на границах области поиска.
   Граница$\{x = 0, \ y \in [0, 2]\}, \ G(0, y) = 1 - (y-1)^2$. В точке (0, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{y = 0, \ x \in [0, 2]\}, \ G(x, 0) = (x-1)^2 - 1$. В точке (1, 0) достигается минимум равный − 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{x = 2, \ y \in [0, 2]\}, \ G(0, y) = 1 - (y-1)^2$. В точке (2, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{y = 2, \ x \in [0, 2]\}, \ G(x, 2) = (x-1)^2 - 1$. В точке (1, 2) достигаетсяминимум равный − 1, в конечных точках функция равна 0.
4. Возвращаемся к начальному преобразованию.

Ответ: Точки максимума: (0, 1) и (4, 1)

Неполная попытка решить задачу не выполняя преобразование — не более 8 баллов за верный ответ.

8. Consider a function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ if } c_1 < x < c_2 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

(a) (5%) Find all c_1 and c_2 such that the function f is a density function for some random variable X

> Чтобы функция была функцией плотности:
>
> $$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{x^2} dx = 1$$
> $$-\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} = 1$$
> $$c_1 = \frac{c_2}{1+c_2}$$

(b) (5%) Calculate the expected value and variance of the random variable X for $c_2 = 9$

> Математическое ожидание:
>
> $$\mathbb{E}(X) = \int_{0.9}^{9} \frac{1}{x^2} x dx = \int_{0.9}^{9} \frac{1}{x} dx = \ln(9) - \ln(0.9)$$
>
> Дисперсия:
>
> $$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
> $$\mathbb{E}(X^2) = \int_{0.9}^{9} \frac{1}{x^2} x^2 dx = 9 - 0.9 = 8.1$$
> $$\text{Var}(X) = 8.1 - (\ln(9) - \ln(0.9))^2$$

9. You have height measurements of a random sample of 100 persons, $y_1, \ldots, y_{100}$. It is known that $\sum_{i=1}^{100} y_i = 15800$ and $\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 2530060$.

(a) (3%) Calculate unbiased estimate of population mean and population variance of the height

> Оценка среднего: $\bar{y} = 15800/100 = 158$.
> Несмещённая оценка дисперсии
>
> $$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = 340$$

(b) (3%) At 4% significance test the null-hypothesis that the population mean is equal to 155 cm, against two-sided alternative.

> Наблюдаемое значение Z-статистики
>
> $$Z_{obs} = \frac{158 - 155}{\sqrt{340}/\sqrt{100}} = 1.63$$
>
> Критическое значение $Z_{crit} = 2.05$.
> Вывод: гипотеза H_0 не отвергается.

(c) (2%) Find the p-value

> Находим по таблице, что площадь справа от 1.63 примерно равна 5%. Значит P-значение равно 10%.

(d) (2%) Find the 96% confidence interval for the population mean

> Интервал имеет вид
>
> $$[158 - 2.05 \cdot \sqrt{340/100}; 158 + 2.05 \cdot \sqrt{340/100}]$$
>
> Итого: $[154.2; 161.8]$

10. Density function of a random variable Y is given by

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} y e^{-y/\theta}, & \text{if } y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

You have 3 observations on Y: $y_1 = 48, y_2 = 50, y_3 = 52$.

(a) (4%) Using maximum likelihood, find the estimate of θ

Нахождение оценки:

$$\begin{aligned} &\ln(L) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-\ln(\theta^2) + \ln(y_i) - \frac{y_i}{\theta}) \\ &\ln(L) = -2n\ln(\theta) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta} \\ &\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta^2} = 0 \\ &\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{2n} = \frac{\overline{y}}{2} \end{aligned}$$

Подставляя наши данные, получаем $\widehat{\theta} = 25$.

(b) (3%) Is the estimator $\hat{\theta}$ unbiased?

Несмещенность:

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \frac{\mathbb{E}(y_i)}{2}$$

Найдём математическое ожидание y_i:

$$\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} y^2 e^{-y/\theta} dy$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} \frac{2y}{\theta} e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} 2e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = 2\theta \end{aligned}$$

Тогда $\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \frac{\mathbb{E}(y_i)}{2} = \theta$. Оценка несмещенная.

(c) (3%) Calculate the variance of $\hat{\theta}$

Для расчёта дисперсии вычислим $\mathbb{E}(y_i^2)$:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} y^3 e^{-y/\theta} dy$$

Аналогично предыдущему случаю, интегрируем по частям. Получаем:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = 6\theta^2$$

Тогда

$$\operatorname{Var}(y_i) = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2$$

И дисперсия оценки

$$\operatorname{Var}(\widehat{\theta}) = \operatorname{Var}(\frac{\overline{y}}{2}) = \frac{1}{4n} \operatorname{Var}(y_i) = \frac{\theta^2}{2n}$$

9.2 Олимпиада

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Сделаем замену $y=\frac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}\left(\sin y+\cos y\right)^{\frac{1}{y}}=\exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln\left(\sin y+\cos y\right)\right).$$

Разложим в ряд Маклорена функцию под логарифмом:

$$\sin y+\cos y=1+y-\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Тогда

$$\ln\left(\sin y+\cos y\right)=y+o(y).$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln\left(\sin y+\cos y\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y+o(y)}{y}=1$$

и поэтому

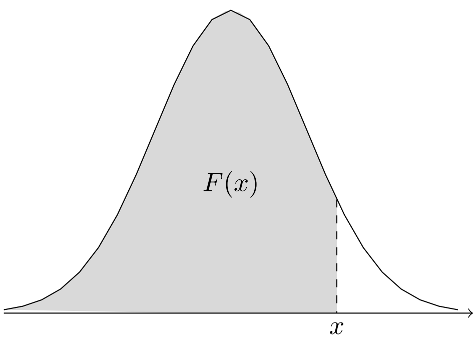
$$\exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln\left(\sin y+\cos y\right)\right)=\mathrm{e}.$$

Разбалловка

- в большинстве случаев индивидуальна
- штраф за арифметическую ошибку — 1 балл

2. (10%) Find and classify the discontinuity points of the following function:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}.$$



x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0.050	0.520	0.750	0.773	1.450	0.926	2.150	0.984
0.100	0.540	0.800	0.788	1.500	0.933	2.200	0.986
0.150	0.560	0.850	0.802	1.550	0.939	2.250	0.988
0.200	0.579	0.900	0.816	1.600	0.945	2.300	0.989
0.250	0.599	0.950	0.829	1.650	0.951	2.350	0.991
0.300	0.618	1.000	0.841	1.700	0.955	2.400	0.992
0.350	0.637	1.050	0.853	1.750	0.960	2.450	0.993
0.400	0.655	1.100	0.864	1.800	0.964	2.500	0.994
0.450	0.674	1.150	0.875	1.850	0.968	2.550	0.995
0.500	0.691	1.200	0.885	1.900	0.971	2.600	0.995
0.550	0.709	1.250	0.894	1.950	0.974	2.650	0.996
0.600	0.726	1.300	0.903	2.000	0.977	2.700	0.997
0.650	0.742	1.350	0.911	2.050	0.980	2.750	0.997
0.700	0.758	1.400	0.919	2.100	0.982	2.800	0.997

Рис. 3: Distribution function of a standard normal random variable

Знаменатели обращаются в ноль в точках -1, 0, 1, следовательно, в этих точках функция имеет разрывы (**3 балла**). Чтобы классифицировать эти точки, рассмотрим соответствующие пределы:

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \lim_{x\to y} \frac{x(x-1)}{x(x+1)}, y \in \{-1, 0, 1\}.$$

Этот предел конечен в точках $y = 0$ и $y = 1$ и бесконечен в точке $y = -1$. Следовательно, 0 и 1 есть точки устранимого разрыва (первого рода), -1 есть точка бесконечного разрыва (второго рода) (**7 баллов**).

3. Let S be the $n \times n$ «shipbuilding timber» matrix, i.e. the square matrix with all elements equal to 1 and I be the $n \times n$ identity matrix. Let $A = aI + bS$ where a and b are scalar parameters.

(a) (7%) Find the inverse of A if it is known that it exists and can be represented as a linear combination of I and S

Допустим обратная к A матрица имеет вид $A^{-1} = cI + dS$.

$$(aI + bS)(cI + dS) = acI + (ad + bc + bdn)S$$

Чтобы этот результат равнялся I нам нужно чтобы:

$$\begin{cases} ac = 1 \\ ad + bc + bdn = 0 \end{cases}$$

Выражаем c и d через a и b:

$$\begin{cases} c = 1/a \\ d = -b/(a^2 + abn) \end{cases}$$

Итого,

$$A^{-1} = a^{-1}I - \frac{b}{a^2 + abn}S$$

(b) (3%) Using your result in previous part or otherwise find the inverse of

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь $A = -2I + S$. Значит

$$A^{-1} = -0.5I - \frac{1}{4-8}S = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}$$

Кстати, $A^{-1} = A/4$:)

Разбалловка:

- Арифметическая ошибка при нахождении обратной матрицы — штраф в 1 балл
- Упоминание какого либо способа (без доведения до конца) — 1 балл

4. Matrices A, B and M are $n \times n$ real matrices, A' denotes the transpose of A, I is $n \times n$ identity matrix.

(a) (5%) Solve the matrix equation for Y and simplify the answer

$$A'(Y')^{-1}A^2 - B = M.$$

You may assume that all necessary inverse matrices exist.

$$A'\left(Y'\right)^{-1}A^2 = B + M$$

$$\left(Y'\right)^{-1}A^2 = \left(A'\right)^{-1}\left(B + M\right)$$

$$\left(Y'\right)^{-1} = \left(A'\right)^{-1}\left(B + M\right)\left(A^2\right)^{-1}$$

$$Y' = \left(\left(A'\right)^{-1}\left(B + M\right)\left(A^2\right)^{-1}\right)^{-1}$$

$$Y' = A^2\left(B + M\right)^{-1}A'$$

$$Y = A\left(B' + M'\right)^{-1}\left(A^2\right)'$$

Разбалловка:

- За полностью корректное решение — 5 баллов
- За корректное, но не полностью упрощенное уравнение — 3 балла
- Некорректные решения оцениваются индивидуально

(b) (5%) The matrix H is $m \times n$ real matrix of full rank with $m > n$. The matrices X and Z are defined by $X = H(H'H)^{-1}H'$ and $Z = I - X$. Prove that $X = X' = X^2$ and $Z = Z' = Z^2$.

Докажем, что $X = X'$

$$X' = \left(H\left(H'H\right)^{-1}H'\right)' = \left(H'\right)'\left(\left(H'H\right)^{-1}\right)'H' = H\left(\left(H'H\right)'\right)^{-1}H' = H\left(H'H\right)^{-1}H' = X$$

Докажем, что $X = X^2$

$$X^2 = X \cdot X = H\left(H'H\right)^{-1}H' \cdot H\left(H'H\right)^{-1}H' = H\left(H'H\right)^{-1}H' = X$$

Докажем, что $Z = Z'$

$$Z' = \left(I - H\left(H'H\right)^{-1}H'\right)' = I' - X' = I - X$$

Докажем, что $Z = Z^2$

$$Z^2 = Z \cdot Z = (I - X) \cdot (I - X) = I \cdot I - I \cdot X - X \cdot I + X \cdot X = I - X - X + X = I - X = Z$$

Разбалловка

- За доказательство $Z' = Z$ — 2 балла
- За доказательство $Z = Z^2$ — 1 балл
- За доказательство $X = X'$ — 1 балл
- За доказательство $X = X^2$ — 1 балл

5. (10%) For all values of a find and classify the conditional extremum of

$$G\left(x, y; a\right) = \frac{-6a^2y + 12axy - 9ay^2 + 2a^2x + 18xy^2 - a^3}{3y + a}$$

subject to $x + y = 1$

Прежде всего, отметим, что у функции $G\left(x, y; a\right)$ есть особенность на прямой $y = \frac{a}{3}$.
Путем несложных преобразований числителя данной функции ее можно привести к виду

$$G\left(x, y; a\right) = \frac{\left(2x - a\right)\left(3y + a\right)^2}{\left(3y + a\right)} = \left(2x - a\right)\left(3y + a\right),\ y \neq \frac{a}{3}.$$

Далее, делаем замену переменных $u = 2x - a,\ v = 3y + a$ и переходим к простой задаче на условный экстремум — проанализировать наличие и тип условных экстремумов у функции $G(x, y; ; a)$ при условии, что $3u + 2v = 6 - a$. Решение можно получить любым путем — подстановкой или с помощью метода множителей Лагранжа. Ответ $x = \frac{6-5a}{12},\ y = \frac{6-5a}{12}$ — точка максимума. Однако, $y \neq \frac{a}{3}$. Это условие будет нарушаться, если $\frac{6-5a}{12} = \frac{a}{3}$. Равенство выполняется при $a = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. Таким образом, функция имеет условный максимум при всех значениях параметра кроме двух третей.

Разбалловка:

- Отсутствие указания на наличие особенности у исследуемой функции — оценка задачи не превышает пяти баллов
- Решение без предварительного преобразования числителя — снижение на два балла

6. (10%) Solve the nonhomogeneous differential equation of the fourth order:

$$y'''' - 3y''' + 4y' = 4\cos 2x$$

Сначала запишем решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'''' - 3y''' + 4y' = 0.$$

Составим к нему характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda = 0.$$

Очевидно, что $\lambda_1 = 0$ является корнем.

Тогда получим уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$.

Методом подбора можно увидеть, что корнем этого уравнения является -1. Значит поделив выражение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ на $\lambda + 1$ получим выражение $\lambda^2 - 4\lambda + 4$.

Тогда корнями будут $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, \lambda_3 = 2$

То есть общее решение дифференциального уравнения может быть записано как

$$y = C_1 + C_2e^{-1x} + C_3e^{2x} + C_4xe^{2x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные действительные константы.

Найдем частное решение этого дифференциального уравнения. В данной задаче — нерезонансный случай, поскольку все корни являются действительными. То есть будем искать частное решение в виде $y = a \cdot \sin 2x + c \cdot \cos 2x$. Тогда:

$$y' = 2a\cos 2x - 2c\sin 2x$$

$$y'' = -4a\sin 2x - 4c\cos 2x$$

$$y''' = -8a\cos 2x + 8c\sin 2x$$

$$y'''' = 16a\sin 2x + 16c\cos 2x$$

Следовательно,

$$16a\sin 2x + 16c\cos 2x - 3(-8a\cos 2x + 8c\sin 2x) + 4(2a\cos 2x - 2c\sin 2x) = 4\cos 2x$$

$$(16a - 32A)\sin 2x + (32a + 16c)\cos 2x = 4\cos 2x$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 16a - 32c = 0 \\ 32a + 16c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2c \\ 2a + c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ c = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Поэтому решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-1x} + C_3 e^{2x} + C_4 x e^{2x} + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные действительные константы.

Разбалловка:

- За составление характеристического уравнения для однородного уравнения — 2 балла
- За расчет корней характеристического уравнения — 1 балл
- За запись общего решения дифференциального уравнения — 2 балла
- За получение частного решения — 4 балла
- За запись итогового решения — 1 балл
- Арифметическая ошибка — штраф 1 балл

7. (10%) Solve the differential equation

$$y' + xy = 2xy^2$$

Разделим уравнение на y^2

$$y'y^{-2} + xy^{-1} = 2x$$

Сделаем замену $z = y^{-1}$, тогда $z' = -y'y^{-2}$ и

$$-z' + xz = 2x$$

Замена была опасной, проверяем и убеждаемся, что $y = 0$ — это решение.

Решим однородное уравнение $z' = xz$:

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = xdx$$

Решением однородного является функция $z_{hom}(x) = ce^{x^2/2}$.

Далее можно либо решать с помощью вариации постоянной, но проще угадать частное решение в виде константы: $z_{pi}(x) = 2$.

Отсюда, $z(x) = 2 + ce^{x^2/2}$ и

$$y(x) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2+ce^{x^2/2}} \end{array}\right.$$

Если решение следует указанной схеме, то разбалловка такая:

- замена — 3 балла
- особое решение $y = 0$ — 1 балл
- решение однородного уравнения — 4 балла
- частное решение — 1 балл
- комбинирование всего в ответ — 1 балл

Если решение идёт по другой схеме, то разбалловка индивидуальна. В любом случае, полный балл можно получить вне зависимости от схемы решения.

8. The great wizard Theodore of N-sk knows that aliens spy on him! There are two alien satellites (the red one and the blue one) and one alien battleship flying around the Earth. Aliens can attack Theodore and try to steal his magical power: the red satellite will succeed in stealing with probability 0.1, the blue with probability 0.2, the battleship with probability 0.9. If there is more than one spacecraft, they attack him independently and simultaneously. It is possible that more than one spacecraft succeed in stealing his power. Aliens have one problem: satellites can attack only when they are flying above Theodore (it happens with probabilities 0.7 and 0.4 for red and blue satellites, respectively), and battleship can attack if both satellites are above Theodore and can not attack in other cases.

   (a) (1%) What is the probability that the battleship can attack Theodore?

   > Он может атаковать, когда оба спутника пролетают над Теодором. Вероятность: $P(two\ satellites) = P(red) \cdot P(blue) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$.

   (b) (2%) What is the probability that aliens will steal the power of Theodore, if there are two satellites above him?

   > $P(will\ steal) = P(at\ least\ one\ succeeded) = 1 - P(no\ one\ succeeded) = 1 - 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.1 = 0.928$

   (c) (2%) What is the probability that exactly one satellite is flying above Theodore?

   > $P(one) = P(blue) \cdot P(no\ red) + P(red) \cdot P(no\ blue) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.12 + 0.42 = 0.54$

   (d) (2%) Theodore knows that there is at least one satellite above him. What is the probability that the battleship can attack him?

   > Это вероятность того, что над ним два спутника при условии, что есть хотя бы один. Тогда по формуле условной веростности:
   > $P(2\ satellites|at\ least\ 1) = \frac{P(2\ satellites \cap at\ least\ 1\ satellite)}{P(at\ least\ 1)} = \frac{P(2\ satellites)}{P(at\ least\ 1)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.54 + 0.7 \cdot 0.4} = \frac{0.28}{0.82} = 0.341$

   (e) (3%) Someone has stolen the power of Theodore. What is the probability that only the red satellite succeeded?

   > Вероятность того, что у него украдут силу:
   > $P(S) = P(no\ satellites) \cdot P(S|no\ satellites) + P(only\ red) \cdot P(S|red) + P(only\ blue) \cdot P(S|blue) + P(both) \cdot P(S|both)$
   > В числах:
   > $P(S) = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.928 = 0.326$
   > Только красный смог — либо когда был только красный, либо когда были оба, но синий и корабль не смогли. Тогда:
   > $P(only\ red\ succeeded) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.1 = 0.04424$
   > Тогда искомая вероятность:
   > $P(only\ red|S) = \frac{0.04424}{0.326} = 0.1357$

9. Manager desires to estimate the expected value m of the demand for apples. The firm operates n points of sale. Let's denote the demand in the points of sale by $X_1, X_2, \ldots, X_n$, the average demand by $\bar{X}$ and the sample variance by S^2.

   From the previous experience it's known that the distribution of $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m}{\sqrt{S^2}}$ is not normal but is well approximated by the density function:

   $$f(z) = \frac{1}{a}\begin{cases} 0, & z \leqslant -a \\ \frac{1}{a}z + 1, & -a < z \leqslant 0 \\ -\frac{1}{a}z + 1, & 0 < z \leqslant a \\ 0, & z > a \end{cases}, \text{ for some } a > 0.$$

   (a) (7%) Find the length of the shortest 90% confidence interval for m in terms of a

   > Из условия задачи следует, что в данном случае для построения доверительного интервала следует использовать метод центральной статистики. В качестве центральной статистики, очевидно, следует использовать функцию $G\left(\overline{X}, m\right) = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m}{\sqrt{S^2}}$, где n – возможное количество измерений. В данном

случае n – количество точек продаж. Она зависит от неизвестного параметра m, при каждом значении $\overline{X}$ это монотонная функция от данного параметра и ее распределение абсолютно непрерывно и не зависит от m.

Шаг 1. Общий вид кратчайшего доверительного интервала (возможно, известный факт)

В соответствие с выбранным методом построения доверительного интервала он уровня доверия α имеет вид: $\triangle_\alpha\left(\overline{X}\right)=\left(\overline{X}-\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}g_1,\ \overline{X}+\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}g_2\right)$, где $g_1,\ g_2$ – решения уравнения $F\left(g_2\right)-F\left(g_1\right)=\int_{g_1}^{g_2}f\left(x\right)dx=\alpha,\ F\left(.\right),\ f\left(.\right)$— функция и плотность распределения $G\left(\overline{X},m\right)$. Плотность распределения указана в постановке задачи. Длина доверительного интервала имеет вид:$I_\alpha\left(g_1,\ g_2\right)=\left(g_2-g_1\right)\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}$. Таким образом, для того чтобы найти интервал с наименьшей длинной, необходимо решить задачу: $I_\alpha\left(g_1,\ g_2\right)\to min$, при условии, что $F\left(g_2\right)-F\left(g_1\right)=\alpha$. Поскольку распределение центральной статистики симметрично относительно нуля, используя метод множителей Лагранжа, несложно показать, что $g_1=-g_2$ и g_2 — квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ распределения $F\left(.\right)$.

Шаг 2. Вычисление границ доверительного интервала

Используя формулу для плотности распределения из постановки задачи, несложно получить вид функции распределения:

$$F\left(z\right)=\begin{cases} 0,\ z\leqslant -a \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}+1\right)^2,\ -a<z\leqslant 0 \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}-1\right)^2,\ 0<z\leqslant a \\ 1,\ z>a \end{cases}.$$

Из определения квантили следует, что $1-\frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{a}-1\right)^2=\frac{1+0.9}{2}$, т.е. $\left(\frac{g_2}{a}-1\right)^2=0.1$ и $g_2=a\left(1+\sqrt{0.1}\right)$. Таким образом, длина кратчайшего доверительного интервала для n точек продаж имеет вид: $I_\alpha\left(g_1,\ g_2\right)=a\left(1+\sqrt{0.1}\right)\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}$.

(b) (3%) Describe what happens with the length with the increase of a

С возрастанием a длина интервала будет возрастать.

10. Random variable Y is uniformly distributed on $[a,b]$.

You have 5 observations on Y: $y_1=y_2=y_3=y_4=4, y_5=9$.

(a) (4%) Calculate first and second raw sample moments and sample estimate of population variance

Первый момент: $\bar{Y}=25/5=5$ (1 балл)

Второй момент: $\bar{Y}^2=(64+81)/5=29$ (1 балл)

Выборочная оценка дисперсии (2 балла):

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{1+1+1+1+16}{5}=4$$

(b) (6%) Using sample mean and sample variance calculate method of moments estimates of parameters a and b.

Находим истинные значения моментов:

Математическое ожидание:

$$E(Y)=\int_a^b\frac{1}{b-a}xdx=\frac{a+b}{2}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2=\int_a^b\frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Получаем систему:

$$\begin{gathered}\bar{Y}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}\\ \hat{\sigma}^2=\frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}\end{gathered}$$

Решая её, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{b} &= 2\bar{Y} - \hat{a} \\
\hat{\sigma}^2 &= \tfrac{(2\bar{Y}-2\hat{a})^2}{12} \\
\hat{a} &= \bar{Y} - \tfrac{\sqrt{12\hat{\sigma}^2}}{2} \\
\hat{b} &= \bar{Y} + \tfrac{\sqrt{12\hat{\sigma}^2}}{2}
\end{aligned}$$

Тогда $\hat{a} = 5 - \frac{\sqrt{48}}{2} \approx 1.54$, $\hat{b} = 5 + \frac{\sqrt{48}}{2} \approx 8.46$

May the Force be with You!

10 2017

10.1 Демо олимпиады

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right),$$

где последнее равенство использует теорему о предельном переходе для непрерывных функций. Далее используем разложение в ряд Маклорена.

$$\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \frac{\ln(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2))}{x} = \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = -\frac{1}{2},$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. (10%) Find and classify the discontinuity points of the following function:

$$f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

Точки, в которых данная функция может иметь разрыв: $x = 0$, поскольку в ней равен нулю знаменатель аргумента функции, и точки $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$, поскольку в них $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ меняет знак. В точках $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$ функция имеет разрывы первого рода, так как существуют не равные между собой односторонние пределы. Например, рассмотрим $k = 1$. Существует правосторонняя окрестность точки $x = 1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ положительна. В самом деле, для $x \in (1, 2)$ имеет место $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{x} < \pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x) = 1$, следовательно, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$. С другой стороны, существует левосторонняя окрестность точки $x = 1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ отрицательна. В самом деле, для $x \in (1/2, 1)$ имеет место $\pi < \frac{\pi}{x} < 2\pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x) = -1$, следовательно, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = -1$. Аналогичные окрестности могут быть найдены для всех рассматриваемых точек.

В точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода, поскольку не существует односторонних пределов. Действительно, рассмотрим последовательности $a_n = \frac{2}{1+4n}, n \in \mathbb{N}$ и $b_n = \frac{2}{3+4n}, n \in \mathbb{N}$, стремящиеся к нулю справа. Тогда $f(a_n) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1+4n}\right)\right) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = 1$ и $f(b_n) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3+4n}\right)\right) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = -1$. Тем самым показано, что правостороннего предела $f(x)$ при x стремящемся к нулю не существует. Аналогично можно показать, что не существует левостороннего предела, например, рассмотрев последовательности $-a_n$ и $-b_n$.

3. It is known, that the 2×2 matrix A has $\operatorname{tr}(A) = -7$ (matrix trace, the sum of diagonal elements) and $\det(A) = 0$.
   (a) (5%) Find the eigenvalues of A

   Let λ_1, λ_2 be the eigenvalues of A. Then $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Hence, $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0$

   (b) (5%) Find B^{2017} for $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

   The matrix B has eigenvalues $\lambda_1 = -7$ and $\lambda_2 = 0$ and corresponding eigenvectors $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$.
   Then B can be represented as $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
   Hence, $B^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-7)^{2017} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

4. It is known that A is a square matrix and

$$A^T X A = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix},$$

   (a) (3%) Find $\operatorname{rank}(X)$

   $\det(A^T X A) = \det(A) \cdot \det(X) \cdot \det(A) = 18 \cdot (-3 \cdot 3) = -162 \neq 0$ (since $\det(AB) = \det(A)\det(B)$). Hence, $\det(X) \neq 0$ and $\operatorname{rank}(X) = 3$.

   (b) (2%) For given matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ find the determinant $\det(X)$

   $\det(A) = 9$, $\det(A)^2 \cdot \det(X) = -162$, hence, $\det(X) = -2$.

   (c) (5%) For given matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ find the matrix X and test it for positive and negative definiteness.

   It is not hard to find that $X = \begin{pmatrix} 2 & -22/9 & 2/3 \\ -22/9 & 724/27 & -145/9 \\ 2/3 & -145/9 & 10 \end{pmatrix}$.
   Check the principal minors signs: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$. Using Sylvester's criterion, we conclude that X is indefinite.

5. (10%) Solve the differential equation:

$$y''' - 4y'' + y' = 2x^2 + 1.$$

Сначала запишем решение однородного дифференциального уравнения:

$$y''' - 4y'' + y' = 0.$$

Составим к нему характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda = 0.$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}.$$

То есть общее решение дифференциального уравнения может быть записано как

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Найдем частное решение этого дифференциального уравнения. В данной задаче – резонансный случай, поскольку $\left(2x^2 + 1\right) e^0 = 2x^2 + 1$. То есть будем искать частное решение в виде $y = (ax^2 + bx + c)x$. Тогда

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

Следовательно,

$$6a - 4(6ax + 2b) + 3ax^2 + 2bx + c = 2x^2 + 1$$

$$3ax^2 + 2bx - 24ax + 6a - 8b + c = 2x^2 + 1.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 6a - 8b + c = 1 \\ 2b - 24a = 0 \\ 3a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 61 \\ b = 8 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \frac{2}{3}x^3 + 8x^2 + 61x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

6. (10%) Find the points of maximum of the function

$$F(u, v) = \sqrt{u}\left(\sqrt{u} - 2\right) - \sqrt{v}\left(\sqrt{v} - 2\right),$$

given that $\sqrt{u} \leqslant 2,\ \sqrt{v} \leqslant 2$

1. Выполняем замену переменных $x = \sqrt{u},\ y = \sqrt{v}$. Далее путем несложных алгебраических преобразований выражения для целевой функции приводим ее к виду:$G(x, y) = (x-1)^2 - (y-1)^2 + 3$. При этом ограничения принимают вид $x \in [0, 2]\,,\ y \in [0, 2]$
2. Определяем наличие экстремумов внутри области поиска, определенной ограничениями.

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = 2(x-1)\,,\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = -2(y-1)\,,\ \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя критерий Сильвестра, легко проверить, что в точке (1,1) у функции $G(x, y)$ нет экстремумов.

3. Проанализируем наличие экстремумов на границах области поиска.
   Граница$\{x = 0,\ y \in [0, 2]\}$, $G(0, y) = 1 - (y - 1)^2$. В точке (0, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{y = 0,\ x \in [0, 2]\}$, $G(x, 0) = (x - 1)^2 - 1$. В точке (1, 0) достигается минимум равный − 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{x = 2,\ y \in [0, 2]\}$, $G(0, y) = 1 - (y - 1)^2$. В точке (2, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.
   Граница $\{y = 2,\ x \in [0, 2]\}$, $G(x, 2) = (x - 1)^2 - 1$. В точке (1, 2) достигаетсяминимум равный − 1, в конечных точках функция равна 0.
4. Возвращаемся к начальному преобразованию.

Ответ: Точки максимума: (0, 1) и (4, 1)

Неполная попытка решить задачу не выполняя преобразование — не более 8 баллов за верный ответ.

7. There are three coins in the bag. Two coins are unbiased, and for the third coin the probability of «head» is equal to 0.8. James Bond chooses one coin at random from the bag and tosses it

   (a) (5%) What is the probability that it will show «head»?

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{head}) = \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.8 = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6$$

   (b) (5%) What is the conditional probability that the coin is unbiased if it shows «head»?

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.5}{0.6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

8. The pair of random variables X and Y with $\mathbb{E}(X) = 0$ and $\mathbb{E}(Y) = 1$ has the following covariance matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) (5%) Find $\operatorname{Var}(X+Y)$, $\operatorname{Corr}(X,Y)$, $\operatorname{Cov}(X-2Y+1, 7+X+Y)$

$$\operatorname{Var}(X+Y) = 10 + 9 - 2 \cdot 2 = 15$$

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{-2}{\sqrt{10 \cdot 9}}$$

$$\operatorname{Cov}(X-2Y+1, 7+X+Y) = \operatorname{Var}(X) - 2\operatorname{Cov}(Y,X) + \operatorname{Cov}(X,Y) - 2\operatorname{Var}(Y) = 10 - (-2) - 18 = -6$$

   (b) (5%) Find the value of a if it is known that X is independent of $Y - aX$.

For independent variables the covariance is equal to zero: $\operatorname{Cov}(X, Y - aX) = 0$. Hence, $a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)} = -0.2$.

9. You have height measurements of a random sample of 100 persons, $y_1, \ldots, y_{100}$. It is known that $\sum_{i=1}^{100} y_i = 15800$ and $\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 2530060$.

   (a) (3%) Calculate unbiased estimate of population mean and population variance of the height

Оценка среднего: $\bar{y} = 15800/100 = 158$.

Несмещённая оценка дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = 340$$

   (b) (3%) At 4% significance test the null-hypothesis that the population mean is equal to 155 cm, against two-sided alternative.

Наблюдаемое значение Z-статистики

$$Z_{obs} = \frac{158 - 155}{\sqrt{340}/\sqrt{100}} = 1.63$$

Критическое значение $Z_{crit} = 2.05$.

Вывод: гипотеза H_0 не отвергается.

   (c) (2%) Find the p-value

Находим по таблице, что площадь справа от 1.63 примерно равна 5%. Значит P-значение равно 10%.

(d) (2%) Find the 96% confidence interval for the population mean

Интервал имеет вид

$$[158 - 2.05 \cdot \sqrt{340/100}; 158 + 2.05 \cdot \sqrt{340/100}]$$

Итого: $[154.2; 161.8]$

10. Density function of a random variable Y is given by

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} y e^{-y/\theta}, & \text{if } y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

You have 3 observations on Y: $y_1 = 48, y_2 = 50, y_3 = 52$.

(a) (4%) Using maximum likelihood, find the estimate of θ

Нахождение оценки:

$$\begin{aligned} &\ln(L) = \sum_{i=1}^n (-\ln(\theta^2) + \ln(y_i) - \tfrac{y_i}{\theta}) \\ &\ln(L) = -2n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \tfrac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta} \\ &\tfrac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = -\tfrac{2n}{\theta} + \tfrac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta^2} = 0 \\ &\widehat{\theta} = \tfrac{\sum_{i=1}^n y_i}{2n} = \tfrac{\overline{y}}{2} \end{aligned}$$

Подставляя наши данные, получаем $\widehat{\theta} = 25$.

(b) (3%) Is the estimator $\hat{\theta}$ unbiased?

Несмещенность:

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \tfrac{\mathbb{E}(y_i)}{2}$$

Найдём математическое ожидание y_i:

$$\mathbb{E}(y_i) = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{\theta^2} y^2 e^{-y/\theta} dy$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(y_i) = \int_0^{+\infty} \tfrac{2y}{\theta} e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = \int_0^{+\infty} 2e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = 2\theta \end{aligned}$$

Тогда $\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \frac{\mathbb{E}(y_i)}{2} = \theta$. Оценка несмещенная.

(c) (3%) Calculate the variance of $\hat{\theta}$

Для расчёта дисперсии вычислим $\mathbb{E}(y_i^2)$:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} y^3 e^{-y/\theta} dy$$

Аналогично предыдущему случаю, интегрируем по частям. Получаем:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = 6\theta^2$$

Тогда

$$\mathrm{Var}(y_i) = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2$$

И дисперсия оценки

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = \mathrm{Var}(\frac{\overline{y}}{2}) = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}(y_i) = \frac{\theta^2}{2n}$$

10.2 Олимпиада

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right).$$

The function may be written in the following way $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^{-1/2}}-1\right)$. Using substituion $x^{-1/2}=y$ one may find the Taylor expansion of the expression inside brackets. This will give **(7 points)**

$$\sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}+o\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\right)-1\right).$$

The limit is equal to **(3 points)**

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}+o\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

There is also another approach: multiply and divide by conjugate expression $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$. Idea is worth **(5 points)**. All the rest is worth **(5 points)**.

2. (10%) Let $D(x)$ be so-called Dirichlet function, which equals 1 if its argument is rational and 0 otherwise, and let k be a natural number.

   Prove that the function $x^kD(x)$ is nowhere differentiable if $k=1$ and is differentiable only at $x=0$ if $k=2017$.

For every k the function $x^kD(x)$ is continuous only at $x=0$. To see it one may sketch the graph of the function. So the function is not differentiable for $x\neq 0$. **(3 points)**

Let's consider the derivative at $x=0$ for $k=1$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x D(\Delta x)-0\cdot D(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}D(\Delta x).$$

If all Δx are rational then $D(\Delta x)=1$. If all Δx are irrational then $D(\Delta x)=0$. The derivative does not exist at $x=0$. **(3 points)**

Let's consider the derivative at $x=0$ for $k=1$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{2017}D(\Delta x)-0\cdot D(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^{2016}D(\Delta x).$$

As $D(\Delta x)$ is bounded and Δx^{2016} tends to zero, their product tends to zero. So, the limit exists and the function is differentiable at $x=0$. **(4 points)**

3. The matrices A and B are symmetric 3×3 matrices. Eigenvalues of the matrix A are $\lambda_1^A=4, \lambda_2^A=2, \lambda_3^A=1$, eigenvalues of the matrix B are $\lambda_1^B=11, \lambda_2^B=5, \lambda_3^B=1$.

   (a) (2%) Find the trace (the sum of diagonal elements) of the matrix $A+B$.

   We note that $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$. Hence,

$$\mathrm{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^A+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^B=7+17=24$$

   (b) (3%) Let the matrix C be 3×3 matrix with $\det(C)=1$. Find $\mathrm{tr}(C^{-1}AC)$.

Using the properties of trace, we get: $\mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(AC^{-1}C) = \mathrm{tr}(A) = 7$.

(c) (5%) Prove that $\mathrm{tr}(A^k) = \sum_i \lambda_i^k$.

Diagonalize the matrix A: $A = P\Lambda P^{-1}$, where P — the matrix of eigenvectors, Λ — the diagonal matrix with eigenvalues on the diagonal. Hence, $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, where Λ^k — diagonal matrix with k-th powers of eigenvalues on the diagonal. Then $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(P\Lambda^k P^{-1}) = \mathrm{tr}(\Lambda^k) = \sum_i \lambda_i^k$.

4. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -18 & 18 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) (4%) Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix A.

$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(8-\lambda) = 0$. Therefore, eigenvalues: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$. Eigenvectors are $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,2), v_3 = (0,0,1)$ respectively.

(b) (6%) Find the matrix $A^{1/3}$. By definition, $A^{1/3}$ is such a matrix that $(A^{1/3})^3 = A$.

Diagonalize matrix A: $A = P\Lambda P^{-1}$, where P — matrix of eigenvectors, Λ — diagonal matrix with eigenvalues on the diagonal. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{1/3} = P\Lambda^{1/3}P^{-1}$, where $\Lambda^{1/3}$ is a diagonal matrix with $\lambda^{1/3}$ on the diagonal. Hence,

$$A^{1/3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (10%) Solve the differential equation:

$$(3x^2y^4 + 2xy)\,dx + (2y^2 - 3x^2)\,dy = 0$$

Заметим, что $y = 0$ является решением уравнения. Запомнив это, поделим левую и правую часть исходного уравнения на y^4. Это интегрирующий множитель. Полученное уравнение имеет вид:

$$\left(3x^2 + \frac{2x}{y^3}\right) dx + \left(\frac{2}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$$

Тогда, если $P\left(x,y\right) = \left(3x^2 + \frac{2x}{y^3}\right)$ и $Q\left(x,y\right) = \left(\frac{2}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -6\frac{x}{y^4}$. Имеем уравнение в полных дифференциалах.

Составляем и решаем систему уравнений для нахождения потенциала $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + \frac{2x}{y^3} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $u\left(x,y\right) = x^3 + \frac{x^2}{y^3} + h(y)$, где $h(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от y. Подставляем найденное во второе уравнение:

$$u'_y\left(x,y\right) = \frac{-3x^2}{y^4} + h'(y)$$

$$\frac{-3x^2}{y^4} + h'\left(y\right) = \frac{2}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$

$$h\left(y\right) = -\frac{2}{y} - C$$

C — произвольная константа.

Тогда решение исходного уравнения

$$x^3 + \frac{x^2}{y^3} - \frac{2}{y} = C$$

6. Let $F(x, y) = xy$ and $G(x, y; a, b) = y + bx - a$.

(a) (3%) For each value of parameters (a, b) find the conditional extremum if it exists, classify it and find the extremal value $F^*(a, b)$.

One may use the Lagrange multiplier method or direct substitution or graphical analysis. There is no extremum for $b = 0$. For $b > 0$ there is one conditional maximum $(x^*, y^*) = (a/2b, a/2)$. For $b < 0$ the same point is the conditional minimum of F. The optimal value is $F^*(a, b) = a^2/4b$.

(b) (4%) Find all possible values of $F^*(a, b)$ in the region

$$D_1 = \begin{cases} a \geqslant b \\ a \in (0, 1) \end{cases}$$

We need to find the range of the fraction $a^2/4b$ in the region D_1.
Using negative values of b we may set F^* to arbitrary negative value.
As $a \neq 0$ we note that F^* can't be equal to zero.
Let's consider positive b. If it exists, the minimal value of F^* should be when $a = b$. In this case $F^* = b^2/4b = b/4$. We can take arbitrary small value of b, so on the line $a = b$ we may reach $F^* \in (0, 1/4)$.
If we fix the value of a and consider all $b \leqslant a$ then $F^* \in [1/4, +\infty)$.
Finally, $F^* \in (-\infty; 0) \cap (0; +\infty)$.

(c) (3%) Find all possible values of $F^*(a, b)$ in the region

$$D_2 = \begin{cases} a \geqslant b \\ a \in (0, 1) \\ b \geqslant 0.5 \end{cases}$$

We need to find the range of the fraction $a^2/4b$ in the region D_2.
The minimum will be achieved on the line $a = b$, so $F^*_{min} = b^2/4b = b/4$. As $b \geqslant 0.5$ we see that $F^*_{min} = 1/8$.
The supremum will be achieved for $a = 1$ and $b = 0.5$, so $F^*_{sup} = a^2/4b = 1/2$.
Finally, $F^* \in [1/8; 1/2)$.

7. The island is populated with knights and knaves. Each sentence of a knight is true with probability 0.9 independently of other sentences. Each sentence of a knave is true with probability 0.2 independently of other sentences. The proportion of knights on the island is equal to 0.7. You meet one person on the island at random and asked him, whether he is a knight.

   (a) (2%) What is the probability that he will say «I am a knight»?

   $$\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.8 = 0.87$$

   (b) (4%) What is the conditional probability that he is a knight given that he said «I am a knight»?

   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.7 \cdot 0.9}{0.87} = \frac{63}{87} \approx 0.72$$

   (c) (4%) What is the conditional probability that he is a knight given that he said «I am a knight», paused and said «I am not a knight»?

   $$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.1}{0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \frac{63}{111} \approx 0.57$$

8. The joint density of random variables X and Y is given by the function

   $$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x \in [0; 1],\ y \in [0; 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

   (a) (2%) Are X and Y independent? Give short argument.

   No, the density function can not be represented as a product $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

   (b) (4%) Find $\mathbb{P}(Y > 2X)$ and $\mathbb{E}(XY)$

   $$\mathbb{P}(Y > 2X) = \int_0^{1/2} \int_{2x}^1 x + y \, dy \, dx = \int_0^{1/2} x + 0.5 - 4x^2 \, dx = \frac{5}{24}$$
   $$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) \, dx \, dy = \frac{1}{3}$$

   (c) (4%) Find marginal density $f_X(x)$ and conditional density $f_{Y|X}(y|x)$

   $$f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy = \begin{cases} x + 0.5, & \text{if } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

   $$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{x+0.5}, & \text{if } x \in [0; 1],\ y \in [0; 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

9. Boris loves hunting Pokemons. Today he randomly captured three Pokemons.

   Boris has sorted Pokemons by their height in ascending order and obtained their ranks H_i. The lowest Pokemon gets the rank $H_i = 1$, the tallest gets the rank $H_i = 3$. After sorting Pokemons by their combat power Boris obtained the ranks C_i in the same manner. Height and combat power of Pokemons are continuously distributed, so ties are impossible.

   Boris would like to test the hypothesis H_0: height and combat power are independent. He calculates $\hat{\rho}$, sample Pearson correlation coefficient between ranks C_i and H_i.

   (a) (6%) Find the distribution of $\hat{\rho}$ under H_0, that is find all possible values of $\hat{\rho}$ and their probabilities.

Let's sort Pokemons by H_i and consider possible orderings of C_i:

Ordering of C_i	Value of $\hat{\rho}$	Probability
1, 2, 3	1	1/6
1, 3, 2	0.5	1/6
2, 1, 3	0.5	1/6
3, 2, 1	-1	1/6
2, 3, 1	-0.5	1/6
3, 1, 2	-0.5	1/6

So the distribution of $\hat{\rho}$ is

$\hat{\rho}$	-1	-0.5	0.5	1
Probability	1/6	2/6	2/6	1/6

(b) (4%) Find the minimal threshold value ρ^* that will be exceeded by $\hat{\rho}$ with probability less or equal to 0.2 under H_0.

From the distribution table we find that $\rho^* = 0.5$. Indeed $\mathbb{P}(\hat{\rho} > 0.5) = 1/6 \leqslant 0.2$. The value of ρ^* can't be decreased further as probability would jump to 3/6.

10. (10%) You estimated two models using 47 observations:

A. $\hat{y}_i = 40 + 0.3x_i + 0.8z_i - 1.8w_i$, $R^2 = 0.82$
B. $\hat{y}_i = 65 + 0.6x_i + 0.51z_i$, $R^2 = 0.7$

Test the hypothesis $\beta_w = -1$ against $\beta_w \neq -1$ on 5% significance level. Here β_w is the coefficient before the variable w in the first regression.

Поскольку необходимо проверить гипотезу, что $\beta_w = -1$, то необходимо использовать t-тест (F-тест для проверки одной гипотезы эквивалентен t-статистике в квадрате). Необходимая t-статистика рассчитывается по формуле $\frac{\hat{\beta}_w + 1}{se(\hat{\beta}_w)}$, где нам не известен знаменатель.

Теперь обратимся к условию. Вторая модель является ограниченной (restricted) версией первой модели при ограничении $\beta_w = 0$. Поэтому на основе данных об R^2 можно проверить гипотезу $\beta_w = 0$ с помощью соответствующего F-теста. $F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1-R^2_{UR})/(n-k)} = \frac{(0.82-0.7)/1}{(1-0.82)/(47-4)} = \frac{0.12}{0.18/43} = 29.27$.

Как было сказано выше для тестирования одного ограничения $F(1, n-k) = t^2_{n-k}$, следовательно $t_{43} = -5.41$. Мы берём отрицательное значение, так как сама оценка коэффициента отрицательная. Отсюда можно получить $se(\hat{\beta}_w)$, так как $\frac{\hat{\beta}_w}{se(\hat{\beta}_w)} = -5.41$, следовательно

$$se(\hat{\beta}_w) = \frac{\hat{\beta}_w}{-5.41} = \frac{-1.8}{-5.41} = 0.333.$$

Исходя из полученных значений, необходимая t-статистика равна $\frac{-1.8+1}{0.333} = -2.403$. Критическое значение равно -2.018, соответственно нулевая гипотеза отвергается на 5% уровне значимости.

11 2018

11.1 demo-2018

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right),$$

In the last equality we interchanged limit and continuous function. Now we use Taylor's expansion:

$$\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \frac{\ln(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2))}{x} = \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}$$

It follows that

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = -\frac{1}{2},$$

And finally

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. (10%) Find and classify the discontinuity points of the following function:

$$f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

The discontinuity points are: the point $x = 0$, as denominator is zero, and the points $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$, as $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ changes sign.

At the points $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$ the function has first order discontinuities, as one-side limits exist but are not equal.

For example, let's consider $k = 1$. In a small right neighbourhood of the point $x = 1$, the function $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ is positive, as for $x \in (1, 2)$ one has $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{x} < \pi$. For all points of this neighbourhood one has $f(x) = 1$, hence, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$.

In a small right neighbourhood of the point $x = 1$, the function $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ is negative as for $x \in (1/2, 1)$ one has $\pi < \frac{\pi}{x} < 2\pi$. For all points of this neighbourhood one has $f(x) = -1$, hence, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = -1$. Similar neighbourhoods may be found for other values of k.

At the point $x = 0$ the function has second order discontinuity, as one sided limits do not exist. Let's consider the sequences $a_n = \frac{2}{1+4n}, n \in \mathbb{N}$ and $b_n = \frac{2}{3+4n}, n \in \mathbb{N}$, convergint to zero from the right side. Then

$$f(a_n) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{1+4n}}\right)\right) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = 1$$

And

$$f(b_n) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3+4n}}\right)\right) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = -1.$$

We have shown that the limit of $f(x)$ for x converging to zero from the right does not exist. One may prove that the limit from the left does not exist by considering sequences $-a_n$ and $-b_n$.

3. Matrix A is given by

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

(a) (6%) Find the eigenvalues and eigenvectors of A;

First, we solve the equation $\det(A - \lambda I) = 0$. The roots are $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 10$.

The eigenvectors are

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(b) (4%) Find the eigenvalues of $4A^{-1} + 2I$, where I is identity matrix.

Eigenvalues of A^{-1} are 0.5, 0.2 and 0.1. So the eigenvalues of $4A^{-1} + 2I$ are 4, 2.8 and 2.4.

4. The characteristic polynomial of a matrix B is given by $f(\lambda) = 6\lambda - 5\lambda^2 - \lambda^3$.

(a) (6%) Find dimensions of B, rank$B$, $\det B$, sum of diagonal elements of B;

The highest power of λ is 3, so the dimension of B is 3×3. We can solve for λ and find $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -6$. So, $\det B = 0$ and $\operatorname{tr} B = \sum b_{ii} = 0 + 1 - 6 = -5$.

(b) (2%) Suppose additionaly that B is symmetric. Can we find random variables with covariance matrix B?

The quadratic form B is indefinite, so B is not a valid covariance matrix.

(c) (2%) Suppose additionaly that B is symmetric. How many solutions does equation $v^T B v = -2018$ has?

The quadratic form B is indefinite, so the equation has infinitely many solutions.

5. (10%) Solve the following differential equations

(a) (5%) $y'' - 2y' - 8y = 0$,

Let us solve the characteristic equation

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

corresponding to the differential equation (a). It is easy to see that $\lambda_1 = 4$ and $\lambda_2 = -2$ are the solutions of this characteristic equation. Hence, the general solution of the differential equation (a) is

$$y_a(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}, \quad \text{where } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) (5%) $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$.

To solve the differential equation (b) we have to find the particular solutions of the following differential equations

$$y'' - 2y' - 8y = e^x, \tag{3}$$

and

$$y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x. \tag{4}$$

We seek the particular solution of the differential equation (3) in the form

$$y(x) = Ae^x. \tag{5}$$

Substituting expression (5) into equation (3), we obtain $A = -1/9$.
We seek the particular solution of the differential equation (4) in the form

$$y(x) = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x. \tag{6}$$

Substituting expression (6) into equation (4), we obtain $B_1 = 3/5$ and $B_2 = 1/5$.
The particular solution of the differential equation (b) is a sum of particular solutions of equations (3) and (4). Thus, the particular solution of the differential equation (b) is

$$y(x) = -\frac{1}{9}e^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x.$$

Therefore, the general solution of equation (b) is

$$y_b(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{9}e^x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x, \quad \text{where } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6. (10%) Find the points of maximum of the function

$$F(u,v) = \sqrt{u}\left(\sqrt{u}-2\right) - \sqrt{v}\left(\sqrt{v}-2\right),$$

given that $\sqrt{u} \leqslant 2,\ \sqrt{v} \leqslant 2$

1. We use the change of variables $x = \sqrt{u},\ y = \sqrt{v}$. Using algebraic manipulations we transform G into: $G(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2 + 3$. Now constraints have the form $x \in [0,2],\ y \in [0,2]$
2. First we check for internal extrema:
$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 2(x-1), \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = -2(y-1), \quad \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Using Sylvester's criterion we find that the point $(1,1)$ is not a maximum of $G(x,y)$.
3. Now we check for corner solutions.
Line $\{x=0,\ y \in [0,2]\},\ G(0,y) = 1-(y-1)^2$. At the point (0, 1) we have a **maximum** equal to 1, with values at the borders equal to 0.
Line $\{y=0,\ x \in [0,2]\},\ G(x,0) = (x-1)^2 - 1$. At the point (1, 0) we have a minimum equal to (-1), with values at the borders equal to 0.
Line $\{x=2,\ y \in [0,2]\},\ G(0,y) = 1-(y-1)^2$. At the point (2, 1) we have a **maximum** equal to 1, with values at the borders equal to 0.
Line $\{y=2,\ x \in [0,2]\},\ G(x,2) = (x-1)^2 - 1$. At the point (1, 2) we have a minimum equal to (-1), with values at the borders equal to 0.
4. Now we do inverse substitution.

Answer: Maxumum points: (0, 1) и (4, 1)

7. There are three coins in the bag. Two coins are unbiased, and for the third coin the probability of «head» is equal to 0.8. James Bond chooses one coin at random from the bag and tosses it
   (a) (5%) What is the probability that it will show «head»?

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{head}) = \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.8 = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6$$

   (b) (5%) What is the conditional probability that the coin is unbiased if it shows «head»?

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.5}{0.6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

8. The pair of random variables X and Y with $\mathbb{E}(X) = 0$ and $\mathbb{E}(Y) = 1$ has the following covariance matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) (5%) Find $\operatorname{Var}(X+Y)$, $\operatorname{Corr}(X,Y)$, $\operatorname{Cov}(X-2Y+1, 7+X+Y)$

$$\operatorname{Var}(X+Y) = 10 + 9 - 2 \cdot 2 = 15$$

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{-2}{\sqrt{10 \cdot 9}}$$

$$\operatorname{Cov}(X-2Y+1, 7+X+Y) = \operatorname{Var}(X) - 2\operatorname{Cov}(Y,X) + \operatorname{Cov}(X,Y) - 2\operatorname{Var}(Y) = 10 - (-2) - 18 = -6$$

   (b) (5%) Find the value of a if it is known that X is independent of $Y - aX$.

For independent variables the covariance is equal to zero: $\operatorname{Cov}(X, Y-aX) = 0$. Hence, $a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)} = -0.2$.

9. You have height measurements of a random sample of 100 persons, $y_1, \ldots, y_{100}$. It is known that $\sum_{i=1}^{100} y_i = 15800$ and $\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 2530060$.
   (a) (3%) Calculate unbiased estimate of population mean and population variance of the height

Sample mean: $\bar{y} = 15800/100 = 158$.
Unbiased estimate of the variance:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = 340$$

   (b) (3%) At 4% significance test the null-hypothesis that the population mean is equal to 155 cm, against two-sided alternative.

Observed value of Z-statistics

$$Z_{obs} = \frac{158 - 155}{\sqrt{340}/\sqrt{100}} = 1.63$$

Critical value of Z-statistics $Z_{crit} = 2.05$.
Conclusion: hypothesis H_0 is not rejected.

   (c) (2%) Find the p-value

Using tables we find that the area under the curve to the right of 1.63 is approximately 5%. Hense p-value is equal to 10%.

   (d) (2%) Find the 96% confidence interval for the population mean

The confidence interval has the form

$$[158 - 2.05 \cdot \sqrt{340/100}; 158 + 2.05 \cdot \sqrt{340/100}]$$

Finally: $[154.2; 161.8]$

10. Let $X = (X_1, \ldots, X_n)$ be a random sample from normal distribution with zero mean and unknown variance $\sigma^2 > 0$.

If $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, then $\mathbb{E}[\xi^4] = 3\sigma^2$.

(a) (2%) Derive the log-likelihood function of a random sample X.

The likelihood function of a random sample X is

$$L(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}}.$$

Hence, the log-likelihood function of a random sample X is

$$l(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) := \ln \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}.$$

(b) (2%) Find the estimator of the parameter σ^2 using maximum likelihood method.

Let us write the likelihood equation:

$$\frac{\partial l(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2)}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^4} = 0.$$

Solving this equation with respect to σ^2, we find $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Hence, the maximum likelihood estimator of the parameter σ^2 is $\widehat{\sigma^2}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(c) (2%) Using the realization of a random sample $x = (1, -2, 0, 1)$ find the maximum likelihood estimate of the parameter σ^2 derived in (b).

The maximum likelihood estimate of the parameter σ^2 is

$$\widehat{\sigma^2}_{ML} = \tfrac{1}{4}\left(1^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2\right) = \tfrac{3}{2}.$$

(d) (2%) Find the Fisher information $I_n(\sigma^2)$ about the parameter σ^2 contained in n observations of a random sample.

Considering that $l(x_1; \sigma^2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{x_1^2}{2\sigma^2}$, we arrive at

$$\frac{\partial l(x_1; \sigma^2)}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{x_1^2}{2\sigma^4} = \frac{x_1^2 - \sigma^2}{2\sigma^4}.$$

Therefore, the Fisher information $I_1(\sigma^2)$ about the parameter σ^2 contained in a single observation of a random sample is

$$I_1(\sigma^2) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial l(X_1; \sigma^2)}{\partial(\sigma^2)}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\left(X_1^2 - \sigma^2\right)^2}{4\sigma^8}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\left(X_1^2 - \sigma^2\right)^2\right]}{4\sigma^8} \overset{\mathbb{E}[X_1^2]=\sigma^2}{=}$$

$$= \frac{\mathrm{D}(X_1^2)}{4\sigma^8} = \frac{\mathbb{E}[X_1^4] - \left(\mathbb{E}[X_1^2]\right)^2}{4\sigma^8} = \frac{3\sigma^4 - \left(\sigma^2\right)^2}{4\sigma^8} = \frac{2\sigma^4}{4\sigma^8} = \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Thus, $I_n(\sigma^2) = n \cdot I_1(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}$.

(e) (2%) Is the estimator $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ an unbiased estimator of the parameter σ^2?

The estimator $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ is unbiased, since

$$\mathbb{E}[\widehat{\sigma^2}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2.$$

(f) (2%) Is the estimator $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ an efficient estimator of the parameter σ^2?

The estimator $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ is efficient, as

$$\mathrm{D}(\widehat{\sigma^2}) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{D}(X_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n 2\sigma^4 = \frac{1}{n^2}n2\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n},$$

and

$$I_n^{-1}(\sigma^2) = \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{-1} = \frac{2\sigma^2}{n} = \mathrm{D}(\widehat{\sigma^2}).$$

(g) (2%) Is the estimator $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ a consistent estimator of the parameter σ^2?

As random variables $X_1^2, \ldots, X_n^2, \ldots$ are independent, have the same distribution, and have finite means, then the we can apply the law of large numbers, according to which we have

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2 \qquad \text{as } n \to \infty.$$

(h) (2%) Find the following probability limit $\operatorname{plim}_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$.

As $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$, and the function $g(x) = \sqrt{x}$ is continuous, by Slutsky's theorem we derive

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2} = g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\sigma^2) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma \qquad \text{as } n \to \infty.$$

11.2 olymp 2018

1. (10%) For the function

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

If possible find the following limits:

(a) (2%) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right)$;

Fix some $x_0 \neq 0$ and consider $f(x_0, y)$ as a function of y. Then $\lim\limits_{y\to 0} f(x_0, y) = \frac{0}{x_0^2} = 0$, hence $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

(b) (2%) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right)$;

Similarly, fixing some $y_0 \neq 0$ and considering $f(x, y_0)$ as a function of x, we conclude that $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0$.

(c) (6%) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

> Now consider a case when x and y tend to zero simultaneously. For example, let $x=y$. In this case $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^4}{x^4} = 1$ **(3 points)**. Combining this to the results above, we conclude that $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ does not exist **(3 points)**.

2. (10%) Find the discontinuity points of the following function

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

and find the limits of $f(x)$ as x tends to these discontinuity points.

> The discontinuity points are 0, 1 and -1, because at least one of the denominators is zero at these points **(2 points)**. In order to classify them, rewrite the function in the following way:
>
> $$f(x) = \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{x(x-1)}{x(x+1)}$$
>
> **(2 points)**. From this representation it is clear that 0 and 1 are the points of removable discontinuity, because the limit of $f(x)$ exists as x tends to 0 or 1. Indeed, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$, which can be found by applying the L'Hôpital's rule **(2 points)**, and $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ can be found by direct substitution **(2 points)**. Finally, -1 is a point of essential discontinuity and $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$, as the nominator tends to non-zero finite number and denominator tends to zero **(2 points)**.

3. Matrix A is given by

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 6 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) (6%) Find the space V of all eigenvectors of A corresponding to the eigenvalue $\lambda = 1$;

> Subtract $\lambda = 1$ from the diagonal and do the Gauss elimination.
> After Gaussian elimination we have the matrix
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
>
> Fundamental set of solutions is
>
> $$V = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -2\\ -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ -3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
>
> Grading: 2 points for the system of linear equations, 2 points for the elimination, 2 points for the answer;

(b) (4%) Find one vector that is orthogonal to the space V;

> Any solution to the system
>
> $$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> For example, $a = (0,1,1,3)$ or any row of $A - I$ will do, but many other vector are also ok.
> Grading. Solution with explicit system: 2 points for the system of two linear equations; 2 points for the answer. Quick solution based on idea that any row of $A - I$ is ok gives 4 points.

4. The 3×3 matrix A has eigenvalues 0, 1 and 2. If there is enough information find

(a) (3%) The determinant $A^T A$;

The $\det(A)$ is zero, so $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = 0$;

(b) (4%) The eigenvalues of $A^T A$;

It is not possible to find eigenvalues of $A^T A$. Consider two matrices. The matrix A_1 has 0, 1 and 2 on the main diagonal and 0 elsewhere. The matrix A_2 has 0, 1 and 2 on the main diagonal, $A_{12} = 1$ and 0 elsewhere. The resulting matrices $A_1^T A_1$ and $A_2^T A_2$ will have different eigenvalues.

(c) (3%) The eigenvalues of $(A^3 - 2I)^{-1}$, where I is the identity matrix;

Eigenvalues of $A^3 - 2I$ are -2, -1 and 6. So eigenvalues of $(A^3 - 2I)^{-1}$ are -1, $-1/2$ and $1/6$.

5. (10%) Find the point and the value of conditional maximum of the function $F(x,\ y) = \max(2x + 3y, 3x + 2y)$ subject to $x^2 + y^2 = 1$.

Considers the functions $f_1(x,y) = 2x + 3y,\ f_2(x,y) = 3x + 2y$. Equality $f_1(x,y) = f_2(x,y)$ is fulfilled on the line $y = x$. Thus, for example $F(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y)\,, & y \geqslant x \\ f_2(x,y)\,, & y < x \end{cases}$.

One may consider three cases and compare the maximum values:

1. Find conditional maximum of $f_1(x,y)$, given $x^2 + y^2 = 1$ and $y > x$.
2. Find conditional maximum of $f_2(x,y)$, given $x^2 + y^2 = 1$ and $y < x$.
3. Find conditional maximum of $f_1(x,y)$, given $y = x$, $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Case 1

It may be done in various ways. Let's use the method of Lagrange multipliers.

$$L(x,y,\lambda) = 2x + 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Potential extremum is reached at the point $y = -\frac{3}{2\lambda}$, $x = -\frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$

Inequality $y > x$ is fulfilled if $\lambda = -\sqrt{\frac{13}{4}}$. In this case the bordered Hessian is greater than zero: $\det\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = -8\lambda\left(x^2 + y^2\right)$.

Thus, there is conditional maximum at the point $x = \sqrt{\frac{4}{13}}, y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{13}}$, which is equal to $\frac{13}{2}\sqrt{\frac{4}{13}} \approx 3,6$.

Case 2.

$$L(x,\ y,\ \lambda) = 3x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Potential extremum is reached at the point $x = -\frac{3}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$.

Inequality $y < x$ must be met. Thereby, again $\lambda = -\sqrt{\frac{13}{4}}$ and there is conditional maximum at the point $y = \sqrt{\frac{4}{13}}, x = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{13}}$ which is equal to $\frac{13}{2}\sqrt{\frac{4}{13}} \approx 3,6$ again.

Case 3.

It is obvious that in this case conditional maximum is reached at the point $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, which is equal to $5\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3.5$

Thus, there are two points of conditional maximum $x = \sqrt{\frac{4}{13}}, y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{13}}$ and $y = \sqrt{\frac{4}{13}}, x = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{13}}$, which is equal to $\frac{13}{2}\sqrt{\frac{4}{13}} \approx 3,6$.

Grading: decomposition into cases — 3 points, solution of the cases 1 and 2 — 3 points for each, case 3 — 1 point.

6. (a) (4%) Find the general solution of $y'' - 2y' + 10y = 0$,

Let us solve the characteristic equation

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

corresponding to the differential equation (a). We find that $\lambda_1 = 1 + 3i$ and $\lambda_2 = 1 - 3i$ are the solutions of this characteristic equation. Hence, the general solution of the differential equation (a) is

$$y(x) = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x, \quad \text{where } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) (2%) Find any particular solution of $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x$,

We seek the particular solution of the differential equation (b) in the form

$$y(x) = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x. \tag{7}$$

Substituting expression (7) into equation (b), we obtain $A_1 = \frac{6}{37}$ and $A_2 = \frac{1}{37}$. Therefore, the particular solution of the differential equation (b) is

$$y(x) = \frac{6}{37} \cos 3x + \frac{1}{37} \sin 3x.$$

(c) (2%) Find any particular solution of $y'' - 2y' + 10y = e^x$,

We seek the particular solution of the differential equation (c) in the form

$$y(x) = Be^x. \tag{8}$$

Substituting expression (8) into equation (c), we obtain $B = \frac{1}{9}$. Consequently, the particular solution of the differential equation (c) is

$$y(x) = \frac{1}{9} e^x.$$

(d) (2%) Find the general solution of $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

The particular solution of the differential equation (d) is a sum of particular solutions of equations (b) and (c). Thus, the particular solution of the differential equation (d) is

$$y(x) = \frac{6}{37} \cos 3x + \frac{1}{37} \sin 3x + \frac{1}{9} e^x.$$

Therefore, the general solution of equation (d) is

$$y_b(x) = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x + \frac{6}{37} \cos 3x + \frac{1}{37} \sin 3x + \frac{1}{9} e^x, \quad \text{where } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

7. Time before the first screen break of IPhone 11 is a random variable, X, with exponential distribution: $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$. The mean time before break is 10 months.

   (a) (3%) Find the probability that a new IPhone screen will not be broken during the first 15 months.

   $\mathbb{E}(X) = 10$, so $\lambda = 1/10$, $\mathbb{P}(X > 15) = \int_{15}^{\infty} f(x)dx = \exp(-3/2)$

   (b) (3%) Find the variance of the time before the first screen break.

   $$\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2 = 100$$

   (c) (4%) You have an IPhone with screen which was not broken during the first 10 months since purchase. Find the probability that the screen for this IPhone will be ok for at least additional 15 months.

   Using memoryless property of exponential distribution or explicitely calculating conditional probability we obtain the same probability $\exp(-3/2)$.

8. Joint probability density function of random variables X and Y is:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y), & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

   (a) (2%) Find c

   $\int_0^1 \int_0^2 c(x^2 + y)dxdy = \frac{11}{3}c = 1$. Hence, $c = \frac{3}{11}$

   (b) (3%) Check whether X and Y are independent

   $f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{11}(x^2 + y)dy = \frac{3}{22}(2x^2 + 1)$, $f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{11}(x^2 + y)dx = \frac{2}{11}(3y + 4)$. $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y)$, hence, variables are not independent.

   (c) (2%) Find $\mathbb{E}(X)$

   $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 \frac{3}{22}(2x^2 + 1)xdx = \frac{15}{11}$

   (d) (3%) Find probability $\mathbb{P}(XY > 1)$

   $\mathbb{P}(XY > 1) = \int_1^2 \int_{1/x}^1 \frac{3}{11}(x^2 + y)dydx = \frac{13}{44}$

9. Let $X = (X_1, \ldots, X_n)$ be a random sample from the distribution with density function

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & x \in [0; \theta], \\ 0, & x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

   where $\theta > 0$ is an unknown parameter.

   (a) (2%) Find the estimator of the parameter θ using method of moments. Use first initial moment condition.

   The first initial moment condition is $\mu_1 = \widehat{\mu}_1$. Let us find $\mu_1 := \mathbb{E}[X_i]$. We have

$$\mu_1 = \mathbb{E}[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_i}(x)dx = \int_0^\theta x\frac{2x}{\theta^2}dx = \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}dx = \frac{2\theta^3}{3\theta^2} = \frac{2}{3}\theta.$$

   As $\widehat{\mu}_1 = \overline{X}$, the moment condition takes the form $\frac{2}{3}\theta = \overline{X}$. Solving this equation with respect to θ, we find $\theta = \frac{3}{2}\overline{X}$. Hence, the method of moments estimator of the parameter θ is $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}\overline{X}$.

(b) (2%) Is the estimator from (a) an unbiased estimator of the parameter θ?

As
$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_{MM}) = \frac{3}{2}\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{3}{2}\mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{2}\frac{2}{3}\theta = \theta,$$
the estimator $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}\overline{X}$ is an unbiased estimator of the parameter θ.

(c) (2%) Is the estimator from (a) a consistent estimator of the parameter θ?

As random variables $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ are independent, have the same distribution, and have finite means, we can apply the law of large numbers, according to which we have $\overline{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{3}\theta$ as $n \to \infty$. Hence, $\hat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}\bar{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{3}{2}\frac{2}{3}\theta = \theta$ as $n \to \infty$. The last condition means that the estimator $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}\overline{X}$ is consistent.

(d) (2%) Find the following probability limit $\operatorname{plim}_{n\to\infty} e^{\overline{X}}$.

As $\overline{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{3}\theta$, and the function $g(x) = e^x$ is continuous, by Slutsky's theorem we derive $e^{\overline{X}} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{\frac{2}{3}\theta}$.

(e) (2%) Find the estimator of the parameter θ using maximum likelihood method.

The likelihood function of a random sample X is
$$\mathcal{L}(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \theta) = f_{X_1,\ \ldots,\ X_n}(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \theta) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2}\mathbb{I}_{[0;\ \theta]}(x_i) = \frac{2^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0;\ \theta]}(x_i) =$$
$$= \frac{2^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[x_i;\ +\infty)}(\theta) = \frac{2^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta^{2n}} \mathbb{I}_{[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i;\ +\infty)}(\theta).$$
As likelihood function $\mathcal{L}(\theta)$ vanishes, when $\theta < \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$, and strictly decreases, when $\theta \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$, the point $\theta = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ is a maximum point of likelihood function. Hence, $\widehat{\theta}_{ML} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

10. $X_1, \ldots, X_n$ is independent identically distributed sample from Bernoulli distribution with probability θ. Additionally, it is known, that $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$.

(a) (2%) Find the method of moments estimator of the parameter θ.

$\mathbb{E}(X_i) = \theta$, $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}$

(b) (2%) Compute mean squared error of $\hat{\theta}_{MM}$

$MSE(\hat{\theta}_{MM}) = \mathbb{E}((\hat{\theta}_{MM} - \theta)^2) = \mathbb{E}((\overline{X} - \theta)^2) = \operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ (as $\mathbb{E}(\overline{X}) = \theta$).

(c) (4%) Find maximum likelihood estimator of parameter θ

Likelihood function $L = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$ is maximized by θ that satisfied inequality $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$. It can be easily shown that when $\overline{X} > 1/2$, it is the maximum likelihood estimator of θ.
When $\overline{X} < 1/2$, likelihood function is decreasing for $\theta > \overline{X}$ as the first derivative of log likelihood function is $\frac{\sum x - n\theta}{\theta(1-\theta)}$ and it is negative when $\theta > \overline{X}$. Hence, likelihood reaches its maximum at $\theta = 1/2$.
So, $\hat{\theta}_{ML} = \max(1/2, \overline{X})$

(d) (2%) Compute mean squared error of $\hat{\theta}_{ML}$ at $\theta = 1$

With $\theta = 1$, $X_i = 1$ with probability 1. Hence, $\overline{X} = 1, \hat{\theta}_{ML} = 1$ and $MSE(\hat{\theta}_{ML}) = \mathbb{E}((1-1)^2) = 0$.