Задачки из культурного кода

Марина Завалина

12 июня 2017 г.

Задача 56. Китайский ресторан

Вероятность образовать новый стол не зависит от количества имеющихся столов и равна $\frac{\theta}{n+\theta}$, где n – количество гостей ресторана без учета пришедшего.

Это утверждение можно записать в виде рекуррентной формулы (по условию в момент времени k в ресторане k людей с учетом пришедшего):

$$E(X_k) - E(X_{k-1}) = \frac{\theta}{k-1+\theta},$$

где X_k – количество занятых столов в момент времени k.

Тогда

$$E(X_t) = \sum_{k=1}^{t} \frac{\theta}{k-1+\theta} = \theta(\psi(\theta+t) - \psi(\theta)),$$

где $\psi(\cdot)$ – дигамма-функция (логарифмическая производная гамма-функции).

Задача 37. Труэль

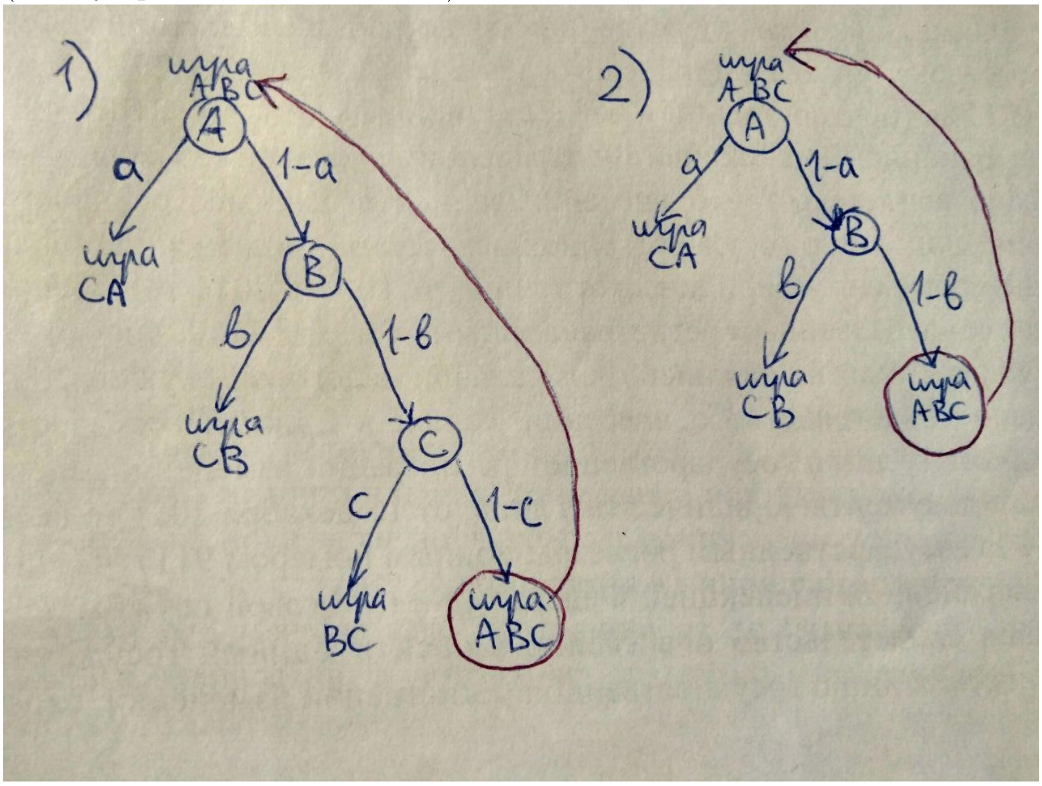
A, B, C – игроки, вероятности попадания $a = 0.6, b = 0.5, c = 0.4$ соответственно. Игроки стреляют в алфавитном порядке.

1. Если игрок решил стрелять, то ему выгодно стрелять в более сильного соперника.

2. Стрелять в воздух может быть выгодно игроку, который стреляет плохо; в нашем случае это игрок C. Он стреляет в воздух до тех пор, пока не останется A или B; так он дает сильным игрокам возможность "разобраться"друг с другом, и если один убивает другого, то следующим ходом игрок C первым имеет возможность стрелять первым. В противном случае, если игрок C убивает игрока A, то следующим ходом с большой вероятность игрок B убьет его самого.

Итого, возможно два варианта стратегий: 1) A стреляет в B, B стреляет в A, C стреляет в A; 2) A стреляет в B, B стреляет в A, C стреляет в воздух.

(я могу красиво сделать потом)



Для того, чтобы определить наиболее оптимальный набор стратегий, сравним вероятности выигрыша игрока C. Введем обозначения: $p_{A|ABC}$ – вероятность того, что выиграет A в игре, где сначала ходит A, затем B, потом C.

1) $P_1 = P(C\ wins\ if\ C\ shoots) =$

$$a \cdot p_{C|CA} + (1-a)\Big(b \cdot p_{C|CB} + (1-b)\big(c \cdot p_{C|BC} + (1-c)P_1\big)\Big) =$$
$$a(c + (1-c)(1-a)c + (1-c)^2(1-a)^2c + ...)+$$
$$(1-a)(b(c + (1-c)(1-b)c + (1-c)^2(1-b)^2c + ...)+$$
$$(1-b)(c((1-b)c + (1-b)(1-c)(1-b)c + (1-b)^2(1-c)^2(1-b)c + ...)+$$
$$(1-c) \cdot P_1)) = a \cdot \frac{c}{1-(1-c)(1-a)} + (1-a)\Big(b \cdot \frac{c}{1-(1-c)(1-b)} +$$
$$(1-b)\big(c \cdot \frac{(1-b)c}{1-(1-c)(1-b)} + (1-c) \cdot P_1\big)\Big) =$$
$$\frac{ac}{a+c-ac} + (1-a)\Big(\frac{bc}{b+c-bc} + (1-b)\big(\frac{(1-b)c^2}{b+c-bc} + (1-c) \cdot P_1\big)\Big) =$$
$$\frac{ac}{a+c-ac} + \frac{(1-a)bc}{b+c-bc} + \frac{(1-a)(1-b)^2c^2}{b+c-bc} + (1-a)(1-b)(1-c) \cdot P_1$$

$$P_1 = \frac{1}{1-(1-a)(1-b)(1-c)} \cdot \Big(\frac{ac}{a+c-ac} + \frac{(1-a)bc}{b+c-bc} + \frac{(1-a)(1-b)^2c^2}{b+c-bc}\Big) = 0.51$$

2) $P_2 = P(C\ wins\ if\ C\ doesn't\ shoot) =$

$$a \cdot p_{C|CA} + (1-a)\Big(b \cdot p_{C|CB} + (1-b)P_2\Big) =$$
$$a(c + (1-c)(1-a)c + (1-c)^2(1-a)^2c + ...)+$$
$$(1-a)(b(c + (1-c)(1-b)c + (1-c)^2(1-b)^2c + ...) + (1-b)P_2) =$$
$$a \cdot \frac{c}{1-(1-c)(1-a)} + (1-a)\Big(b \cdot \frac{c}{1-(1-c)(1-b)} + (1-b)P_2\Big) =$$
$$\frac{ac}{a+c-ac} + (1-a)\Big(\frac{bc}{b+c-bc} + (1-b)P_2\Big) =$$
$$\frac{ac}{a+c-ac} + \frac{(1-a)bc}{b+c-bc} + (1-a)(1-b) \cdot P_2$$

$$P_2 = \frac{1}{1-(1-a)(1-b)} \cdot \Big(\frac{ac}{a+c-ac} + \frac{(1-a)bc}{b+c-bc}\Big) = 0.54$$

Значит, игроку C лучше стрелять в воздух.
Теперь можно посчитать вероятности выиграть для каждого игрока.

$$P(C\ \ wins)\ \ =\ \ \frac{1}{1-(1-a)(1-b)}\ \cdot\ \Big(\frac{ac}{a+c-ac}+\frac{(1-a)bc}{b+c-bc}\Big)\ \ =\ \ 0.54$$

$$\begin{aligned} P(A\ wins) = a\cdot p_{A|CA} + (1-a)\Big((1-b)P(A\ wins)\Big) = \\ a\cdot(1-\frac{c}{1-(1-c)(1-a)}) + (1-a)\Big((1-b)P(A\ wins)\Big) = \\ \frac{a^2(1-c)}{a+c-ac} + (1-a)(1-b)P(A\ wins) \end{aligned}$$

$$P(A\ wins) = \frac{1}{1-(1-a)(1-b)}\cdot\frac{a^2(1-c)}{a+c-ac} = 0.35$$

$$\begin{aligned} P(B\ wins) = (1-a)\Big(b\cdot p_{B|CB} + (1-b)P(B\ wins)\Big) = \\ (1-a)\Big(b\cdot(1-\frac{c}{1-(1-c)(1-b)}) + (1-b)P(B\ wins)\Big) = \\ \frac{(1-a)b^2(1-c)}{b+c-bc} + (1-a)(1-b)P(B\ wins) \end{aligned}$$

$$P(B\ wins) = \frac{1}{1-(1-a)(1-b)}\cdot\frac{(1-a)b^2(1-c)}{b+c-bc} = 0.11$$

Задача 55. Про коня

Ходы коня - цепь Маркова (ЦМ). Представим шахматную доску в виде графа с 64 вершинами. Из каждой вершины можно попасть в любую другую с ненулевой вероятностью. Поэтому этот граф связный, то есть наша ЦМ представляет собой один класс эквивалентности, в котором все состояния возвратны.

Найдем стационарное распределение π нашей ЦМ (оно единственно, так как ЦМ положительно возвратна, то есть среднее время первого возвращения в ту же вершину конечно). Можно заметить, что $\pi_i \sim d_i$, где d_i – количество различных клеток, в которые можно попасть из клетки i (степень свободы вершины). Так как если поместить в каждую вершину i массу, равную d_i, и запустить цепь, то из вершины по каждому ребру "утечет"1 и "притечет"1. То есть это распределение масс стационарно. Осталось только нормировать формулу, чтобы $\sum\limits_i \pi_i = 1$. Тогда

$$\pi_i = \frac{d_i}{\sum\limits_j d_j}.$$

Мы имеем 4 клетки, для которых $d = 2$, 8 клеток, для которых $d = 3$, 20 клеток, для которых $d = 4$, 16 клеток, для которых $d = 6$, 16 клеток, для которых $d = 8$.

Тогда

$$\pi_i = \frac{d_i}{\sum\limits_j d_j} = \frac{d_i}{4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8} = \frac{d_i}{336}$$

Так как стационарное распределение единственно, по теореме среднее количество ходов до возвращения можно найти по формуле:

$$n_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Для угловой клетки $d_1 = 2$, значит,

$$n_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{336}{d_i} = \frac{336}{2} = 168.$$