

Теория вероятностей: культурный код

Фольклор

27 октября 2016 г.

Культурный код

Сборник восхитительных задач по элементарной теории вероятностей. Эти задачи — наша вероятностная ДНК.

Фольклор и красота

Задача 1. Задача о Сумасшедшей Старушке.

В самолёте 100 мест и все билеты проданы. Первой в очереди на посадку стоит Сумасшедшая Старушка. Сумасшедшая Старушка очень переживает, что ей не хватит места, врывается в самолёт и несмотря на номер по билету садится на случайно выбираемое место. Каждый оставшийся пассажир садится на своё место, если оно свободно, и на случайное выбираемое место, если его место уже кем-то занято.

1. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?
2. Чему примерно равно среднее количество пассажиров севших на свои места?

Задача 2. На самолёт, имеющий 100 мест, проданы все билеты. Для посадки в самолёт пассажиры выстроились в очередь. Первые 99 пассажиров — сумасшедшие старушки. Они садятся на наугад выбранные места. Последний пассажир садится на то место, которое указано в его билете. Если это место занято, то он с помощью стюардессы сгоняет старушку со своего законного места. Согнанная с чужого места сумасшедшая старушка становится благоразумной и садится на свое место по билету. Возможно для этого придется согнать еще одну старушку и т.д.

1. Какова вероятность того, что потревожат старушку, стоявшую i -ой в очереди?
2. Каково ожидаемое количество потревоженных старушек?

Задача 3. Задача собирателя наклеек. Coupon collector's problem.

Производитель чудо-юдо-йогуртов наклеивает на каждую упаковку одну из 50 случайно выбираемых наклеек. Покупатель собравший все виды наклеек получает приз от производителя. Пусть X — это

Родилась она чисто из жизни — а именно когда тогда еще юному автору приходилось часто ездить из Питера во Псков. Чаще всего билет на покупался в общий вагон поезда. На билете всегда было указано место. Но не тут-то было! Приходя в вагон, обнаруживалось, что пришедшие первыми занимали самые лучшие места (утверждая, что номера мест на билетах — это просто для статистики). И вот тут-то и начинались эти цепочные сгоняния пассажиров. В оригинале задачка звучала так: «В общем вагоне поезда Ленинград-Псков N мест... N -й пассажир, придя последним, обнаруживал, что свободно только только самое дурацкое место — около туалета...» Но в редакции Кванта решили, что писать про бардак и туалет в общем вагоне поезда Ленинград-Псков как-то не очень. И самовольно переделали условие на кинотеатр, <http://kvant.mccme.ru/1985/06/p34.htm>, автор: Игорь Алексеев



Рис. 1: — Простите, пожалуйста, это место 1Б?

количество упаковок йогурта, которое нужно купить, чтобы собрать все наклейки.

Найдите $E(X)$, $\text{Var}(X)$

Задача 4. Спички Банаха. Banach's matchbox problem.

Польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по n спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым.

1. Какова вероятность того, что в другом коробке в этот момент осталось ровно k спичек?
2. Каково среднее количество спичек в другом коробке?

Задача 5. Равновесие Харди-Вайнберга.

Предположим, что три возможных генотипа aa , Aa и AA изначально встречаются с частотами p_1 , p_2 и p_3 , где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Ген не сцеплен с полом, поэтому частоты p_1 , p_2 и p_3 одинаковы для мужчин и для женщин.

1. У семейных пар из этой популяции рождаются дети. Назовём этих детей первым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов в первом поколении?
2. У семейных пар первого поколения тоже рождаются дети. Назовём этих детей вторым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов во втором поколении?
3. Каковы частоты для трёх возможных генотипов в n -ном поколении?
4. Заметив явную особенность предыдущего ответа сформулируйте теорему о равновесии Харди-Вайнберга. Прокомментируйте утверждение: «Любой рецессивный ген со временем исчезнет».

Задача 6. Поляризация света.

Световая волна может быть разложена на две поляризованные составляющие, вертикальную и горизонтальную. Поэтому состояние отдельного поляризованного фотона может быть описано углом α . Поляризационный фильтр описывается углом поворота θ . Фотон в состоянии α задерживается поляризационным фильтром с параметром θ с вероятностью $p = \sin^2(\alpha - \theta)$ или проходит сквозь фильтр с вероятностью $1 - p$, переходя при этом в состояние θ .

На самом деле внутренний мир фотона гораздо разнообразнее.

1. Какова вероятность того, что поляризованный фотон в состоянии α пройдёт сквозь фильтр с параметром $\theta = 0$?

2. Имеется два фильтра и поляризованный фотон в состоянии α . Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через оба фильтра?
3. Имеется три фильтра и поляризованный фотон в состоянии α . Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \beta$, третий — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через все три фильтра? При каких α и β она будет максимальной и чему при этом она будет равна?
4. Объясните следующий фокус. Фокусник берет два специальных стекла и видно, что свет сквозь них не проходит. Фокусник ставит между двумя стёклами третье, и свет начинает проходить через три стекла.

Как сделать «секретный монитор» своими руками, <http://www.youtube.com/watch?v=-ojbykV1zyc>

Задача 7. Истеричная певица

Начинающая певица дает концерты каждый день. Каждый ее концерт приносит продюсеру 0.75 тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью 0.5. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии она не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только цветы от продюсера. Если подарить цветы на сумму $0 \leq x \leq 1$ тысяч евро, то она выйдет из депрессии с вероятностью \sqrt{x} .

Какова оптимальная стратегия продюсера?

Задача 8. Парадокс Симпсона. Simpson's Paradox.

Два лекарства испытывали на мужчинах и женщинах. Каждый человек принимал только одно лекарство. Общий процент людей, почувствовавших улучшение, больше среди принимавших лекарство А. Процент мужчин, почувствовавших улучшение, больше среди мужчин, принимавших лекарство В. Процент женщин, почувствовавших улучшение, больше среди женщин, принимавших лекарство В.

1. Возможно ли это?
2. Какое лекарство нужно посоветовать принять пациенту, если его пол неизвестен?

Задача 9. Вовочку перевели из класса А в класс Б. Мог ли при этом возрасти средний балл по математике в обоих классах?

Задача 10. Злобный дракон поймал трех гномов. И решил поиграть с ними. Каждому гному он надевает с равными вероятностями черный или белый колпак.

Гномы видят чужие колпаки, но не видят своих и не могут общаться после выдачи колпаков. Каждый гном может попытаться угадать цвет своего колпака, либо промолчать. Дракон отпустит гномов, если хотя бы один гном угадал цвет своего колпака, и никто не сделал

— Значит, дракон — это датчик случайных колпаков?



Рис. 2: Dilbert

ошибки. Если все одновременно промолчали, или кто-нибудь ошибся, то все гномы будут съедены. Перед игрой гномы могут договориться о стратегии игры.

1. Как гномам следует играть, если Злобный дракон спрашивает их по очереди? Какова вероятность того, что они будут спасены?
2. Как гномам следует играть, если они должны дать ответ одновременно? Какова вероятность того, что они будут спасены?
3. Если от далекого спутника нужно получить один бит информации («да» или «нет»), то, отправив три бита, можно не бояться того, что природа «испортит» один из них. Постройте этот простой код. Проведите аналогию с предыдущим пунктом.

Идея этой задачи используется не только при космической связи. Чтобы неглубокие царапины на компакт диске не вызывали потерь данных, при записи используется код Рида-Соломона.

Задача 11. Париж, Людовик XIV, 1654 год, высшее общество говорит о рождении новой науки — теории вероятностей. Ах, кавалер де Мере, «fort honnête homme sans être mathématicien»... Старая задача, неправильные решения которой предлагались тысячелетиями (например, одно из неправильных решений предлагал изобретатель двойной записи, кумир бухгалтеров, Лука Пачоли) наконец решена правильно!

Два игрока играют в честную игру до шести побед. Игрок первым выигравший шесть партий (не обязательно подряд) получает 800 луидоров. К текущему моменту первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3 партии. Они вынуждены прервать игру в данной ситуации.

Как им поделить приз по справедливости?

Задача 12. На арене две команды гладиаторов, *A* и *B*. Каждый гладиатор обладает определенной силой, неизменной по ходу игры.

— Три гнома — три бита?

— А как звали третьего гнома?

«благородный человек, хотя и не математик».

Рис. 3: <http://xkcd.com/795/>

Команды могут отличаться по количеству гладиаторов и их силе. Игра проходит в виде последовательных турниров, в каждом из которых участвует по одному гладиатору от каждой стороны. Если в очередном турнире встречаются гладиаторы с силами a и b , то вероятность победы первого определяется величиной $\frac{a}{a+b}$. Гладиатор, проигравший турнир, выбывает из игры, выигравший — возвращается в команду. Гладиаторы не устают, но и не приобретают опыта. Стратегия команды предписывает, какого гладиатора выдвигать на очередной турнир в зависимости текущего состава команд. Игра ведется до полного выбывания из игры одной из команд.

Как выглядит оптимальная стратегия команды A ?

Задача 13. В отличие от обычного гладиатора, у победившего гладиатора-вампира сила увеличивается на силу побежденного им гладиатора-вампира. В остальном правила поединка такие же, как в предыдущей задаче.

Как выглядит оптимальная стратегия команды A ?

Задача 14. Маша и Саша играют в быстрые шахматы. У них одинаковый класс игры и оба предпочитают играть белыми, т.е. вероятность выигрыша белых $p > 0.5$. Партии играют до 10 побед. Первую партию Маша играет белыми. Она считает, что в следующей партии белыми должен играть тот, кто выиграл предыдущую партию. Саша считает, что ходить белыми нужно по очереди. При каком варианте правил у Маши больше шансы выиграть?

Задача 15. Гадалка

1. Сколько в среднем нужно сделать бросков до появления последовательности ОРОР? До появления последовательности РОРР?
2. Какова вероятность того, что ОРОР появится раньше РОРР?
3. Какова вероятность того, что ООО появится позже РРОО?
4. Каковы вероятности того, что ООР появится раньше ОРР? ОРР раньше РРО? РРО раньше РОО? РОО раньше ООР?

Задача 19. Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет. Какова вероятность того, что Василиса Премудрая сможет найти на карте бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?

Задача 20. У тети Маши — двое детей разных возрастов. Вероятности рождения мальчика и девочки равны.

1. Какова вероятность того, что у тётки Маши оба ребёнка — мальчики, если известно, что у неё хотя бы один ребёнок — мальчик?
2. Какова вероятность того, что у тётки Маши оба ребёнка — мальчики, если известно, что у неё хотя бы один ребёнок — мальчик водолей по гороскопу?

Задача 21. Buffon's needle problem

Плоскость разлинована параллельными линиями через каждый сантиметр. Случайным образом на эту плоскость бросается иголка длины $a < 1$.

1. Какова вероятность того, что иголка пересечёт какую-нибудь линию?
2. Предложите вероятностный способ оценки числа π

Задача 22. Мартышка и Шекспир

Мартышка наугад нажимает клавиши на печатающей машинке.

1. Какова вероятность того, что она рано или поздно напечатает полное собрание сочинений Шекспира? Льва Толстого?
2. Обозначим количество нажатий до появления слова «АБРАКАДАБРА» за X . Найдите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$.

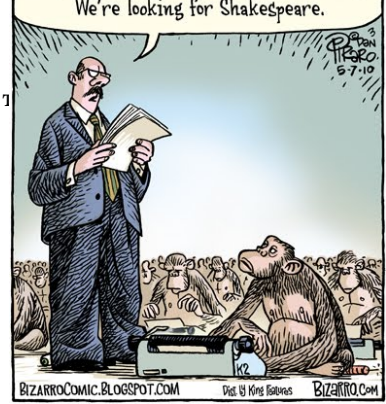


Рис. 5: Задача о «бесконечных обезьянах», infinite-monkey problem.

Задача 23. Парадокс инспектора

Автобусы приходят на остановку согласно пуассоновскому потоку в среднем один раз в час. Вася приходит на остановку в случайный момент времени и садится на первый пришедший автобус.

1. Сколько Васе в среднем предстоит ждать автобуса?
2. Сколько в среднем прошло времени от последнего пришедшего автобуса до Васиного появления?
3. Чему равна средняя продолжительность интервала между автобусом, на который сядет Вася, и предыдущим?
4. Чему равна средняя продолжительность интервала между автобусом, на который сядет Вася, и следующим?
5. Маша не любит набитые битком автобусы и никогда не торопится, поэтому, придя на остановку, всегда пропускает один автобус и садится на следующий. Она считает, что на него в среднем сядет меньше людей. Права ли она?

Задача 24. Спящая красавица

Спящая красавица согласилась принять участие в научном эксперименте. В воскресенье её специально уколют веретеном. Как только она заснёт, будет подброшена правильная монетка.

Если монетка выпадет орлом, то спящую красавицу разбудят в понедельник и спросят о том, как выпала монетка.

Если монетка выпадет решкой, то спящую царевну разбудят в понедельник, спросят о монетке, снова уколют веретеном, разбудят во вторник и снова спросят о монетке. Укол веретена вызывает легкую амнезию, и красавица не сможет определить, просыпается ли она в первый раз или во второй.

Красавица только-только проснулась. Вспомнила правила эксперимента, и услышала вопрос исследователя: «Ваше Высочество, так как же выпала монетка?»

1. Как следует отвечать красавице, если за каждый верный ответ ей дарят молодильное яблоко?
2. Как следует отвечать красавице, если за неверный ответ её тут же превращают в тыкву?
3. Отвечая на вопрос исследователя Спящая Красавица задумалась, а какова вероятность того, что сегодня понедельник. Как ты думаешь?

Задача 25. Monty-Hall

Есть три закрытых двери. За двумя из них — по козе, за третьей автомобилем. Вы выбираете одну из дверей. Допустим, Вы выбрали дверь А. Ведущий шоу, чтобы поддержать интригу, не открывает сразу выбранную Вами дверь. Сначала он открывает одну из дверей не выбранных Вами, причем снова ради интриги ведущий не открывает сразу и дверь с автомобилем. Допустим, ведущий открыл дверь В. И в этот момент он предлагает Вам изменить ваш выбор двери.

Имеет ли смысл изменить свой выбор?

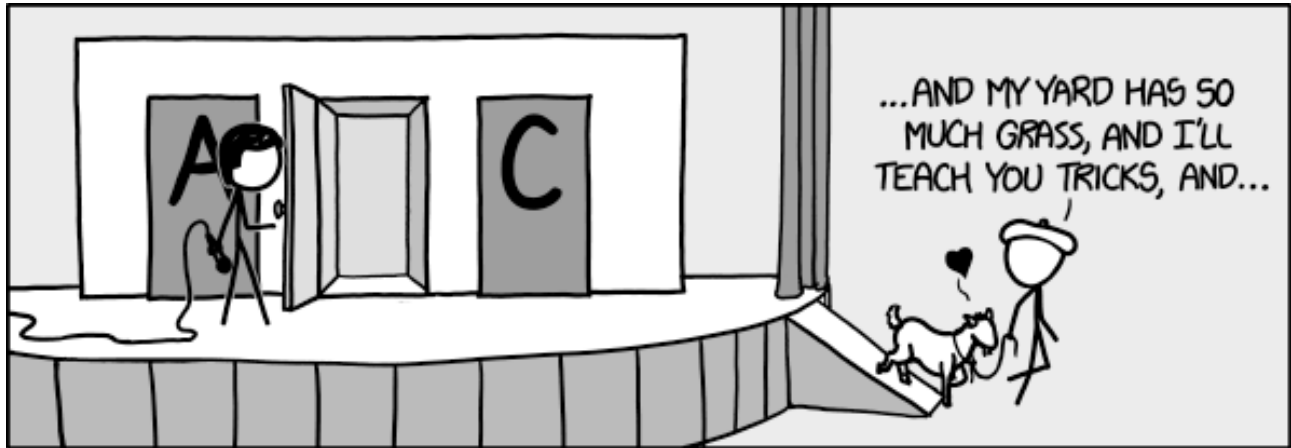


Рис. 6: A few minutes later, the goat from behind door C drives away in the car.
<http://xkcd.com/1282/>

Задача 26. Monty-Hall версия

Трое студентов, Аня, Боря и Василиса, сдавали комиссию по теории вероятностей и ещё не знают своих оценок. Им объявили, что зачёт получили двое из трёх. В перерыве перед объявлением оценок Боря подходит к председателю:

— Иван Иванович, раз зачёт получили двое из трёх, значит хотя бы у одной из девушек есть зачёт. Вы мне можете назвать имя одной из девушек, получившей зачет?

— Василиса получила.

Какова условная вероятность того, что Боря получил зачёт, если принимать во внимание информацию от Ивана Ивановича?

Задача 27. Задача о Разборчивой Невесте, Secretary problem

К Разборчивой невесте выстроилась вереница из $n \gg 0$ потенциальных женихов. Разборчивая невеста хочет выбрать самого богатого из них и только его! Потенциальные женихи заходят к Разборчивой невесте по одному в случайном порядке. Невеста неплохо разбирается в богатстве и всегда может ранжировать всех, с кем она общалась, по величине богатства. Когда к Разборчивой невесте приходит очередной претендент, она должна сразу принять решение: выбрать данного

Докторская диссертация член-корреспондента РАН Бориса Березовского «Разработка теоретических основ алгоритмизации принятия предпроектных решений и их применения» является обобщением задачи о разборчивой невесте, http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem

кандидата или перейти к следующему. Вернуться к предыдущим кандидатам невозможно — они обижаются и уезжают.

1. Как выглядит оптимальная стратегия Разборчивой невесты? Чему равна вероятность выбора самого богатого жениха Разборчивой невестой?
2. Подруга-дурнушка Разборчивой невесты хочет выбрать второго по богатству жениха и только его! Как выглядит её оптимальная стратегия? Чему равна вероятность выбора второго по богатству жениха Подругой-дурнушкой?

Всё равно самый богатый достанется Разборчивой невесте!

Задача 28. Собрались как-то $n \gg 0$ ковбоев. Каждый из них выбрал себе из остальных своего самого главного врага случайным образом. Далее ковбои по очереди стреляют, каждый в своего главного врага. Естественно, если жив сам, и если жив самый главный враг. Ковбои стреляют без промаха.

1. Какая доля ковбоев в среднем останется в живых?
2. Какая доля ковбоев в среднем останется в живых, если треть ковбоев забыла дома свой кольт?

Задача 29. Задача Бертрана о голосовании, Bertrand's ballot theorem

За кандидата А было подано 100 голосов, а за кандидата Б — 300 голосов.

1. Какова вероятность того, что во время голосования постоянно лидировал кандидат Б?
2. Какова вероятность того, что во время всего голосования за кандидата А голосов было больше, чем в два раза, чем за кандидата Б?

Задача 30. Задача о макаронинах

В тарелке запутавшись лежат $n \gg 0$ макаронин. Я по очереди связываю попарно все торчащие концы макаронин.

1. Какова примерно вероятность того, что я свяжу все макаронины в одно большое кольцо?
2. Сколько в среднем колец образуется?
3. Каково среднее число колец длиной в одну макаронину?

Задача 31. Задача о ключах и копилках

На столе стоят n свиной-копилки. Достать содержимое копилки можно двумя способами: либо разбить копилку, либо открыть дно специальным ключиком. К каждой копилке подходит единственный

ключ. Мы раскладываем ключи по копилкам наугад, один ключ в одну копилку. Затем разбиваем k копилочек и получаем хранящиеся в них ключи. Далее мы будем копилки только открывать ключами.

1. Какова вероятность того, что мы сможем достать все ключи?
2. Какая доля ключей в среднем будет найдена?

Задача 32. Парадокс двух конвертов. Two envelope paradox

Перед тобой два внешне одинаковых конверта. В одном из них лежит ровно в два раза больше денег, чем в другом. Ты открываешь один из конвертов и видишь, что в нём лежит x рублей. У тебя есть возможность взять открытый конверт или отказаться от него и взять сумму в закрытом конверте.

1. Чему равно математическое ожидание суммы денег, лежащей в закрытом конверте?
2. Какой конверт стоит предпочесть, уже открытый или еще закрытый?
3. Предположим, что деньги в конверты кладут следующим образом: в один из конвертов кладут случайную сумму денег, имеющую экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$, а в другой конверт — в два раза больше. Как выглядит оптимальная стратегия игрока?
4. Предположим, что деньги в конверты кладут другим образом. Сначала подбрасывают правильную монетку до тех пор, пока не выпадет «орёл». Обозначим количество подбрасываний буквой N . В один из конвертов кладут 3^N рублей, а в другой конверт — в три раза больше. Как выглядит оптимальная стратегия игрока?

Задача 33. Удвоение ставки

Два игрока играют в справедливую игру. Позицию в игре в момент времени t условно можно описать числом $p_t \in [0; 1]$, вероятностью победы первого игрока. Время непрерывно. Изначально $p_0 = 1/2$. Величина p_t ведёт себя как броуновское движение. Игра оканчивается, когда p_t достигает 0 или 1.

Игрок владеющий красной меткой в любой момент игры может предложить другому удвоить ставки. Изначально красная метка находится у первого игрока. После удвоения ставок красная метка переходит к другому игроку.

В какой момент следует предлагать удвоение ставок?

Задача 34. Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй — 1, 6 и 8; на третьей — 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает

Кто первый встал, того и тапки!

рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число.

Первой пташке достается червячок, но сыр съедает вторая мышка.

1. В чью пользу эта игра?
2. Какая рулетка самая хорошая?

Задача 35. На европейской рулетке 18 черных ячеек, 18 красных ячеек и одно зелёное zero. Васиссуалий приходит в казино имея 100 рублей денег. Он ставит на чёрное по одному рублю до тех пор, пока не проиграет все деньги или его благосостояние не достигнет 200 рублей.

1. Какова вероятность того, что Васиссуалий покинет казино имея 200 рублей?
2. Как изменится ответ, если Васиссуалий играет в американскую рулетку, на которой помимо одинарного zero есть и двойное zero?

Задача 36. Санкт-Петербургский парадокс

Тебе предлагают сыграть в следующую игру. Правильную монетку подкидывают до первого выпадения «орла». Если впервые «орёл» выпадает при N -ом подбрасывании, то ты получаешь 2^N рублей.

1. Чему равно математическое ожидание выигрыша в эту игру?
2. Сколько ты согласен заплатить за однократное участие в этой игре?

Задача 37. Труэль

Три игрока решили стреляться ради самой красивой девушки и организуют труэль (дуэль для трёх игроков). Игроки стреляют по очереди, $A-B-C-A-...$. Каждый из игроков может либо целиться в одного из противников, либо стрелять в воздух. Вероятности попадания равны $p_a = 0.6$, $p_b = 0.5$ и $p_c = 0.4$, соответственно. Игра продолжается до определения единственного победителя, он и получает девушку в жёны.

1. Как выглядит оптимальная стратегия каждого игрока?
2. Чему равны вероятности выиграть для каждого игрока?

Задача 38. Игра Паррондо

В игре A ты с вероятностью 0.45 выигрываешь один рубль и с вероятностью 0.55 проигрываешь один рубль.

Игра B чуть более хитрая. Если сумма в твоём кошельке делится на три, то ты выигрываешь один рубль с вероятностью 0.05 и проигрываешь один рубль с вероятностью 0.95. Если же сумма в твоём

кошельке не делится на три, то ты выигрываешь один рубль с вероятностью 0.7 и проигрываешь один рубль с вероятностью 0.3.

Изначально у тебя в кошельке 100 рублей. Что произойдёт с твоим благосостоянием, если:

1. Ты будешь бесконечное количество раз играть в игру A ?
2. Ты будешь бесконечное количество раз играть в игру B ?
3. Ты будешь бесконечное количество раз равновероятно выбирать игру A или игру B ?

Задача 39. Во время Второй Мировой войны американские военные собрали статистику попаданий пуль в фюзеляж самолёта. По самолётам, вернувшимся из полёта на базу, была составлена карта повреждений среднестатистического самолёта. С этими данными военные обратились к статистiku Абрахаму Вальду с вопросом, в каких местах следует увеличить броню самолёта.

Что посоветовал Абрахам Вальд и почему?

Задача 40. Задача о немецких танках

Предположим, что все выпущенные танки имеют порядковый номер. От самого первого выпущенного танка, имеющего номер 1, до самого последнего танка, имеющего номер n . В бою удалось подбить танки с номерами 15, 29 и 23.

1. Постройте оценку количества танков методом моментов
2. Постройте оценку количества танков методом максимального правдоподобия
3. Постройте несмещенную оценку количества танков с наименьшей дисперсией

Незадолго до высадки союзников в Нормандии, 6 июня 1944 года, в распоряжении союзников было всего два (!) немецких танка «Пантера V». По серийным номерам на шасси танков союзники оценили выпуск в феврале 1944 в 270 танков. Фактический выпуск «Пантер V» согласно немецким документам в феврале 1944 составил 276 танков, [1].

Задача 41. Саша и Маша хорошо перетасовали колоду в 52 карты и удалили из неё все оёры («картинки»), так что остались одни фоски (числовые карты). Саша выбирает одну из первых 10 карт наугад. Узнав значение этой карты, он открывает соответствующую следующую по счёту карту. Открыв новую карту и руководствуясь её значением, Саша открывает ещё одну новую карту и т.д. до тех пор, пока хватает колоды.

Не перемешивая колоду Маша повторяет Сашин алгоритм действий. С помощью симуляций определите, какова примерно вероятность того, что Саша и Маша остановятся на одной карте.

Задача 42. Парчовую ленту длиной 1 км разрезают в $(n - 1)$ -ом случайно равномерно распределённом месте, чтобы поделить её на n принцесс. Скромнице Василисе достаётся самый короткий кусочек ленты.

1. Какова ожидаемая длина Василисиного куска?
2. Какова ожидаемая длина самого короткого кусочка кроме Василисиного?

Задача 43. Роковая дама играет в азартную игру. Перед дамой хорошо перетасованная колода в 52 карты. Дама открывает карты одну за одной. В любой момент дама может сделать пророчество «Следующая карта будет дамой». Если пророчество сбывается, то дама получает 100 рублей.

1. Какова оптимальная стратегия дамы?
2. Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

Задача 44. Ветреная Машенька пишет романтические смс Андрею и Борису. Первое смс она пишет Андрею, второе — Борису и третье — Борису. Далее каждое следующее смс она пишет Андрею с вероятностью равной доле ранее отправленных Андрею смс. Всего за день Машенька отправила 100 смс.

1. Какова вероятность того, что четвёртое смс она напишет Борису?
2. Какова вероятность того, что 100-ое смс она напишет написано Борису?
3. Какова вероятность того, что последние три смс она напишет Борису?
4. Сколько в среднем смс она напишет Борису?
5. Какова вероятность того, что ровно 20 смс она напишет Борису?
6. Какова вероятность того, что ровно k смс она напишет Борису?
7. Машенька продолжает писать смс Андрею и Борису, не остановившись на $n = 100$. Она загадала, что если тысячу раз подряд напишет смс Борису, то выйдет за него замуж. Какова вероятность, того, что Машенька выйдет замуж за Бориса? Сколько в среднем смс всего до замужества она напишет?

Задача 45. Злобный Дракон поймал принцесс Настю и Сашу и посадил в разные башни. Перед каждой из принцесс Злобный Дракон подбрасывает один раз правильную монетку. А дальше даёт каждой из них шанс угадать, как выпала монетка у её подруги. Если хотя бы одна из принцесс угадает, то Злобный Дракон отпустит принцесс на волю. Если обе принцессы ошибутся, то они навсегда останутся у него в заточении.

Подобная практика у Злобного Дракона исследователями была отмечена уже давно, поэтому принцессы имели достаточно времени договориться на случай вероятного похищения.

Как следует поступать принцессам при подобных похищениях?

Задача 46. Удав Анатолий любит французские багеты. Длина французского багета равна 1 метру. За один загллот Удав Анатолий заглатывает кусок случайной длины равномерно распределенной на отрезке $[0; 1]$. Для того, чтобы съесть весь багет удаву потребуется случайное количество N заглотов.

1. Найдите $E(N)$ и $\text{Var}(N)$
2. Как поменяются ответы, если багет имеет длину 2 метра?



Рис. 7: Удав Анатолий и Гюрза Леопольдина

Задача 47. Жозеф Луи Франсуа Бертран подкидывает правильную монетку n раз. Пафнутий Львович Чебышёв¹ подкидывает правильную монетку $(n + 1)$ раз. Какова вероятность того, что у Пафнутия Львовича выпадет больше «орлов», чем у Жозефа Луи Франсуа?

¹ Да, да, предпоследняя буква в окончании именно «ё»

Задача 48. Сломанный пульт

Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта сели, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью $1/2$. Далее вероятность срабатывания кнопки падает. Какова вероятность, что после 100 нажатий телевизор окажется включён?

Задача 49. Киллер

Правила игры «Киллер» просты. Игроки пишут на бумажках, как их зовут, и кладут бумажки в шляпу. Каждый тянет из шляпы имя

своей первой жертвы. Если первой жертвой игрока является он сам, то он совершает «самоубийство» и дальше не играет². Чтобы убить жертву, надо остаться с ней наедине и сказать: «Ты убит!». Убийца забирает себе все бумажки, набранные убитым, и начинается охотиться за тем, за кем охотился убитый. Побеждает тот, кто наберёт больше всех бумажек к концу игры. Заметим, что в «Киллере» каждый игрок оказывается втянут в одну из нескольких цепочек.

В «Киллера» играют 30 человек, из них 20 девушек.

1. Какова вероятность того, что в цепочке, начинающейся с Маши Сидоровой ровно 5 человек?
2. Какова вероятность того, что в цепочке, начинающейся с Маши Сидоровой ровно 5 девушек?
3. Какова вероятность того, что все девушки попадают в одну цепочку убийц и жертв?
4. Какова вероятность того, что все игроки попадают в общую цепочку?
5. Сколько в среднем цепочек в «Киллере»?
6. Сколько в среднем «самоубийц»?
7. Рассмотрим вариант, в котором нет самоубийств, то есть раздача бумажек организована так, что ни один игрок не может получить свою бумажку при раздаче. Как изменятся ответы?

Задача 50. Ной Палмер Чепмэн³ рассыпал фишки для игры в пятнашки и расставляет их на поле в случайном порядке. Какова вероятность того, что он сможет решить получившуюся головоломку?

² В некоторых вариантах правил, если игрок вытянул из шляпы своё имя, то он должен вытянуть другую бумажку.

³ почтмейстер из Канастоты, вероятно, изобретатель игры «пятнашки»

Задача 51. Задача о 100 заключенных

У ста узников тюрьмы есть последний шанс на спасение. В комнате стоит шкаф в котором сто занумерованных ящичков. Палач кладёт в каждый ящичек бумажку с номером ровно одного из заключенных в случайном порядке и задвигает все ящички. Узники заходят в комнату один за другим. Каждый узник может открыть любые 50 ящичков. После каждого узника все ящички задвигаются в исходное положение. Если каждый узник находит свой номер, то все узники будут помилованы. Если хотя бы один из узников не найдёт свой номер, то все будут казнены.

Узники могут предварительно договориться о стратегии.

1. Какова оптимальная стратегия?
2. Какую вероятность выигрыша она обеспечивает?

Задача 52. Андрей Абрикосов, Борис Бананов и Вова Виноградов играют одной командой в игру. В комнате три закрытых внешне неотличимых коробки: с абрикосами, бананами и виноградом. Общаться после начала игры они не могут, но могут заранее договориться о стратегии. Они заходят в комнату по очереди. Каждый из них может открыть две коробки по своему выбору. Перед следующим игроком коробки закрываются. Если Андрей откроет коробку абрикосами, Борис — с бананами, а Вова — с виноградом, то они выигрывают. Если хотя бы один из игроков не найдет свой фрукт, то их команда проигрывает.

1. Какова оптимальная стратегия?
2. Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

Задача 53. Дед Мороз развешивает новогодние гирлянды. Аллея состоит из 1000 елок. Каждой гирляндой Дед Мороз соединяет две елки (не обязательно соседние). В результате Дед Мороз повесил 500 гирлянд и все елки оказались украшенными. Какова вероятность того, что существует хотя бы одна гирлянда, пересекающаяся с каждой из других?

Например, гирлянда 5-123 (гирлянда соединяющая 5-ую и 123-ю елки) пересекает гирлянду 37-78 и гирлянду 110-318.

Задача 54. Птички на проводе

На телеграфный провод равномерно и независимо друг от друга садятся случайным образом $n \gg 0$ птичек. Маляр-электрик Степан Грибоедов красит белой краской отрезок провода от каждой птички до ближайшей. Каждый участок провода оказывается в результате либо ни разу не покрашенным, либо покрашенным один, либо два раза.

Найдите среднюю длину непокрашенной части провода, части, покрашенной один раз, и части, покрашенной два раза.

Задача 55. В углу шахматной доски стоит конь. Мы перемещаем коня наугад, выбирая каждый допустимый ход равновероятно. Сколько в среднем пройдет ходов прежде чем он вернется в исходную клетку?

Задача 56. Китайский ресторан

Каждую минуту в китайский ресторан приходит новый посетитель. Если в ресторане сидит n человек, а за конкретным столиком сидит b человек, то вероятность того, что новый посетитель присоединится к этому столику равна $\frac{b}{n+\theta}$. С вероятностью $\frac{\theta}{n+\theta}$ посетитель сядет за отдельный столик.

Каково ожидаемое число занятых столиков через t минут после открытия?

Задача 57. Правильную монетку подкидывают 1000 раз.

1. Найдите вероятность того, что ни разу не выпало два орла подряд
2. При чём тут числа Фибоначчи?

Задача 58. Двигаемся вверх-вниз или влево-вправо по фрактальному множеству.

1. Вероятность когда либо дойти до точки А?
2. Вероятность вернуться в начало координат?
3. Вероятность дойти до точки А раньше, чем до В?

Задача 59. На заводе тортиков очень любят праздники! Если хотя бы у одного работника день рождения, то на заводе никто не работает, все празднуют и кушают тортики. Сколько работников нужно нанять, чтобы среднее количество рабочих дней в году было максимально?

Задача 60. Аргонавты разного роста, n человек, высадились на остров и идут по узкой тропинке друг за другом. Каждый аргонавт видит вперёд не далее спины более высокого аргонавта. Внезапно впереди самого первого аргонавта показалась Медуза Горгона, и все, кто видел её, Z аргонавтов, обратились в камни.

1. Какова вероятность того, что в камень обратился последний аргонавт?
2. Найдите $E(Z)$
3. Ясон идёт посреди аргонавтов. Пусть X и Y — количество аргонавтов, обратившихся в камень до и после Ясона. Найдите $\text{Var}(X, Y)$.
4. Найдите $\text{Var}(Z)$

Задача 61. На планету Плюк, окружность, в случайных точках садятся n пепелацев. Радиосвязь между двумя точками на планете Плюк возможна, если центральный угол между этими двумя точками меньше $\pi/2$.

1. Какова вероятность того, что из любой точки планеты можно связаться хотя бы с одним пепелацем?
2. Какова вероятность того, что при $n = 3$ все три пепелаца смогут поддерживать связь друг с другом (необязательно напрямую, возможно через посредника)?
3. Как изменятся ответы, если планета Плюк — это сфера?

Задача 62. Как распределена случайная величина $(XY)^Z$ если X, Y, Z независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$?

Задача 63. На Краю Вселенной давным-давно работает парикмахерская. В ней счётное количество занумерованных по порядку парикмахеров. Каждый парикмахер независимо от других обслуживает клиента за экспоненциально распределенное время с параметром λ . Клиенты приходят в парикмахерскую пуассоновским потоком с интенсивностью μ . Клиент всегда выбирает свободного парикмахера с наименьшим номером.

Какую долю времени будет в среднем занят парикмахер номер n ?

Задача 64. Между Землей и Марсом вокруг Солнца по эллиптической орбите вращается плоский чайник Рассела с площадью 42 см^2 . Летящий Макаронный Монстр проецирует чайник Рассела на случайную плоскость.

Чему равна ожидаемая площадь проекции?

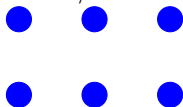
Задача 65. В ряд друг за другом за бесконечным столом сидит счётное количество Мудрецов, постигающих Истину. Первым сидит Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина.

Каждый Мудрец может постигнуть Истину самостоятельно с вероятностью $1/9$ или же от соседа⁴. Независимо от способа постижения Истины, просветлённый Мудрец поделится Истиной с соседом слева с вероятностью $2/9$ и с соседом справа также с вероятностью $2/9$ (независимо от соседа слева).

1. Какова вероятность того, что Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина постигнет Истину?
2. Как изменится ответ, если ряд Мудрецов бесконечен в обе стороны?

Задача 66. Мост через реку Квай

Мост через реку Квай состоит из нескольких секций. При подрыве моста каждая из секций разрушается независимо от других с вероятностью $1/2$.



Какова вероятность того, что после подрыва моста, по нему можно будет перебраться с одного берега на другой?

Задача 67. Академик Андрей Дмитриевич Сахаров увлечённо рубит капусту. Капусту рубят так: сначала качан разрезают на тонкие круглые почти плоские «блины», затем полученные «блины» рубят ножом. После длительной рубки капусты в случайных направлениях Андрей Дмитриевич выбирает случайно один из полученных многоугольников капусты.

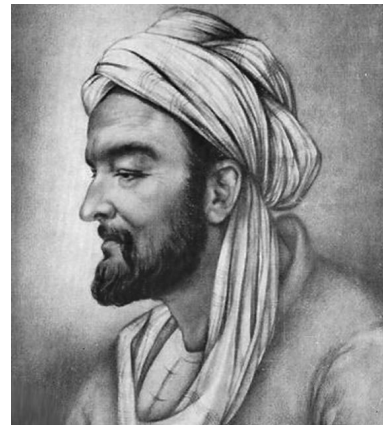


Рис. 8: «Коль смолоду избрал к заветной правде путь, С невеждами не спорь, советы их забудь».

⁴ Студенты постигают Истину примерно также!

1. Чему равно математическое ожидание числа сторон этого многоугольника?
2. ...

Оригинал статьи? вопрос про отношение площади к чему-то там?

Задача 68. Летом в большом-большом городе в случайных местах открылось много киосков с мороженым. Каждый житель выбирает всегда ближайший к своему дому киоск. Получается, что каждому киоску с мороженым соответствует обслуживаемый им участок.

Чему равно математическое ожидание числа сторон участка обслуживаемого случайным киоском?

Задача 69. На одной из улиц в ряд стоит много уютных домиков для одиноких мудрых старцев. Каждый день на улицу приезжает очередной одинокий мудрый старец. Одинокий мудрый старец никогда не поселится в домике, если в соседнем домике уже кто-то живёт. Других предпочтений у одиноких мудрых старцев нет, и они селятся по одному в случайный из подходящих домиков.

Какая доля домиков будет в среднем занята?

Задача 70. Во дворе вдоль тротуара идёт неразмеченная парковка для мотоциклов. Общая длина парковки — a метров. Тру мотоциклисты всегда паркуются перпендикулярно тротуару. Чтобы припарковаться одному мотоциклисту требуется один метр длины парковки. Если бы парковка была размечена и каждый мотоциклист парковался бы по разметке, то на парковку влезло бы a мотоциклов. Однако парковка не размечена, а тру мотоциклисты не заморачиваются и паркуются на свободном пространстве в случайных местах, равномерно по доступной для парковки длине.

Сколько в среднем мотоциклов влезет на парковку?

Задача 71. Накануне войны Жестокий Тиран очень большой страны издал указ. Отныне за каждого новорождённого мальчика семья получает денежную премию, но если в семье рождается вторая девочка, то всю семью убивают. Бедные жители страны запуганы и остро нуждаются в деньгах, поэтому в каждой семье дети будут появляться до тех пор, пока не родится первая девочка.

1. Каким будет среднее число детей в семье?
2. Какой будет доля мальчиков в стране?
3. Какой будет средняя доля мальчиков в случайной семье?
4. Сколько в среднем мальчиков в случайно выбираемой семье?

Задача 72. Задача про Stein paradox

Задача 73. Задача про распределение Бенфорда

красивые задачи из старой версии задачника...

Чуть менее классические задачи

1. Стрелок попадает по мишени с вероятностью 0.3. Какова вероятность того, что до третьего промаха у него будет 5 выстрелов?
2. Расстояние от пункта А до В автобус проходит за 2 мин, а пешеход — за 20 мин. Интервал движения автобусов 30 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту А и отправляетесь в В пешком.
 - (a) Какова вероятность того, что в пути Вас догонит очередной автобус?
 - (b) Сколько в среднем времени Вы будете добираться, если проходящий мимо автобус обязательно Вас подбирает?
3. Для простоты предположим, что ген карих глаз доминирует ген синих. Т.е. у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb — карие. У диплоидных организмов одна аллель наследуется от папы, а одна — от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына — кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке. Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?
4. Задача о полосе невезения
За неделю Аннушка семь раз пролила масло. Какова вероятность того, что она проливала масло каждый день?

А мы тут все диплоидные :)

Решения

- 1 Решение раз. Рассмотрим последовательность пересаживаний, начинающуюся с сумасшедшей старушки. В этой последовательности последний пассажир и сама сумасшедшая старушка равновероятно опережают друг друга. Следовательно, искомая вероятность равна $1/2$.
Решение два. Решаем задачу для $n = 2$, $n = 2$, получаем вероятность $1/2$. База индукции есть. Предположим, что для $1, 2, \dots, n - 1$ пассажира вероятность равна $1/2$. В случае n пассажиров первым ходом старушка может занять своё место, место последнего, какое-то другое место. Если она заняла своё, то последний точно сядет на своё место. Если она заняла место последнего, то он точно не сядет на своё место. Если она сядет на одно из оставшихся мест, то вскоре очередь дойдёт до того пассажира, чьё место она заняла. В этот момент можно считать, что он превратится в сумасшедшую старушку. Для меньшего

количество пассажиров задача решена и даёт вероятность $1/2$. В силу симметрии получаем вероятность $1/2$ и для n пассажиров.

2

3 Количество наклеек можно разложить в сумму независимых случайных величин,

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

где Z_i — количество наклеек, которые нужно докупить, чтобы найти i -ый новый вид наклейки, когда в коллекции уже есть наклейки $i - 1$ вида. Конечно, $Z_1 = 1$.

Замечаем, что $E(Z_i) = \dots$, $\text{Var}(Z_i) = \dots$

4

5

6

7

8 Да, возможно. Если пол неизвестен, то лучше принимать B .

9 Да, возможно, если уровень Вовочки ниже среднего уровня класса А, но выше среднего уровня класса Б.

10

11 Проведём ещё 3 партии. Первый игрок проиграет только если все три выиграны вторым игроком, то есть с вероятностью $1/8$. Стало быть 800 луидоров надо поделить на 100 и 700.

12

13

14

15 Да. Например, такая. До общения с Машей подкидывать монетку до выпадения первого орла и запомнить число потребовавшихся подбрасываний. Пусть это будет число X . Открыть равновероятно левую или правую Машину руку. Если открытое число больше X , то сказать, что оно большее, иначе сказать, что меньшее.

16 1. Мысленно отметим на окружности три точки: места ударов Бориса и точку, где схватилась Анна. Можно считать, что эти три точки равномерно и независимо распределены по окружности. Следовательно, среднее расстояние между соседними точками равно $1/3$. Аня берёт два кусочка, слева и справа от своей точки. Значит ей в среднем достаётся $2/3$ окружности.

2. Объявим точку, где схватилась Аня нулём. Координаты двух ударов изобразим на плоскости. Закрашиваем подходящий участок. Вероятность того, что Анин кусок длиннее равна $3/4$.

17 Раскладываем X в сумму $X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Получаем, $E(X) = 1$, $\text{Var}(X) = 1$.

18

19 Пусть дорога к первому камню — дорога a ; эта дорога соединяет начальное положение ИМ и первый камень. От первого камня идут три дороги: c , d , и e . Ищем вероятность p_a — вероятность пройти бесконечный жизненный путь, начиная с дороги a .

Заметим, что существование бесконечного жизненного пути, начинающегося дорогой a — пересечение двух независимых событий: на дороге a ЗГ спит и существует бесконечный жизненный путь, начинающийся хотя одной из дорог c , d , e .

$$\mathbb{P}\{\text{на дороге } a \text{ ЗГ спит}\} = \frac{2}{3}$$

Пусть p_c , p_d и p_e — вероятности того, что существуют бесконечный жизненный путь, начинающийся дорогой c , d , e соответственно. Теперь заметим, что $p_a = p_c = p_d = p_e$, т. к. рассматривается возможность идти бесконечно. Обозначим $p = p_a$; получаем уравнение:

$$p = \frac{2}{3} (1 - (1 - p)^3)$$

У него три решения, одно из которых больше 1. Два других:

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

Определим, каким из этих двух значений может быть равна искомая вероятность p_a ⁵.

Пусть ЗГ появляется на дороге с вероятностью α . Уравнение примет вид:

$$p = \alpha (1 - (1 - p)^3)$$

Одним из решений уравнения всегда будет $p = 0$, другим (всегда лежащим в интервале $(0; 1)$) — $p = \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}$, ($\alpha \neq 0$).

Такое решение монотонно возрастает, является положительным на промежутке $\alpha \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$. При $\alpha = 1$ $p = 1$.

Теперь вернёмся к функции $p(\alpha)$. Поскольку она означает зависимость вероятности существования бесконечного пути от вероятности того, что ЗГ спит, ясно, что эта функция монотонна, непрерывна и неотрицательна, а так же должна принимать значение 0 при $\alpha = 0$ и значение 1 при $\alpha = 1$.

Следовательно, функция $p(\alpha)$ будет иметь следующий вид:

⁵ Интуитивно понятно, что $p_1 = 0$ едва ли может быть решением задачи, поскольку такое решение уравнения не зависит от вероятности встретить бодрствующего ЗГ. Если бы вероятность встретить его была бы 0, т. е. если бы бесконечный жизненный путь точно бы существовал, у уравнения всё равно был бы корень $p = 0$. Однако докажем строго, что решением будет положительная величина.

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0, \alpha \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}, \alpha \in \left(\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases}$$

Получаем, что при данном в этой задаче $\alpha = \frac{2}{3}$, искомая вероятность составит $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

20

21 Поскольку $a < 1$ количество пересечений равно либо 0, либо 1, следовательно, вероятность пересечения равна математическому ожиданию числа пересечений. Обозначим X — количество пересечений. Если иголку удлинить в n раз, то $E(X)$ изменится в n раз, так как фактически мы имеем n иголок равной длины. Если иголку согнуть в ломаную, то $E(X)$ не меняется, так как снова иголка разрезается на отдельные иголки. Отсюда получаем, что $E(X)$ зависит только от длины иголки, но не от формы. Сгибаем иголку в окружность. Если длина равна π , то пересечений будет два. Значит при длине a ожидаемое количество пересечений равно $2a/\pi$.

22

23 Да, Маша права, на «следующий» в среднем садиться меньше пассажиров.

24 «Сегодня понедельник» — это не событие. Вероятность не определена. Это функция от времени.

Вероятность того, что монетка выпала орлом, равна 0,5. Поэтому ей всё равно, как отвечать, если наказанием является превращение в тыкву, и нужно отвечать: «Решка!» — если наградой является молодильное яблоко. Предположим, что красавица максимизирует ожидаемое количество молодильных яблок.

25

26

27

28

29 http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_ballot_theorem
<http://webspace.ship.edu/msrenault/ballotproblem/monthly358-363-renault.pdf>

30

31

32

33

34

35

36 Математическое ожидание выигрыша равно бесконечности:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^3 + \dots = +\infty$$

Оплата за однократное участие — субъективна.

37

38

39 На базу будут возвращаться только самолёты, имеющие не критичные повреждения. Поэтому чем больше попаданий в какое-то место самолёта, тем менее данное место важно для живучести самолёта. Абрахам Вальд посоветовал укреплять те места, где не было попаданий.

40 Оценка метода моментов:

$$\hat{n}_{MM} = 2\bar{X} - 1$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\hat{n}_{ML} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$$

41

42 Найдём вероятность того, что минимальная длина больше d . Представим себе большую колоду из N карт, в которой $(n - 1)$ отмеченная карта. Нам нужна вероятность того, что при вытягивании карт по очереди между ними будет минимум dN карт. Однако при вытягивании меченой карты, можно следующие dN карт вытягивать с конца колоды. Это не повлияет на случайность порядка, а вероятность будет считать проще. Нам нужна фактически вероятность того, что в конце колоды будет $(n - 1)dN$ немеченных карт и dN немеченных карт в начале колоды.

В случае k -го по счёту минимального куска:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{k} \right)$$

Идея доказательства:

$$E(X) + \frac{1 - nE(X)}{(n - 1)^2} = \dots = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n - 1} \right)$$

43 Вместо того, чтобы делать ставку на следующую карту, можно делать ставку на последнюю карту, т.к. информация о них одинаковая. А для последней карты не важно, когда делать пророчество, поэтому все стратегии приносят вероятность выигрыша $4/52$.

44

45 Настя может угадывать в случае, если монетки выпали одинаково, а Саша — если по-разному.

46 $E(N) = e$.

Заметим, что верно следующее соотношение

$$\min\{n : X_1 + X_2 + \dots \geq 1\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}\{\sum_{k=1}^i X_k < 1\} + 1$$

В правой части мы будем суммировать единицы пока сумма случайных величин меньше 1 и потом прибавляем один, чтобы учесть n , на котором сумма перепрыгнет единицу. Математическое ожидание суммы — это сумма математических ожиданий. Математическое ожидание индикатора — это вероятность. Получаем:

$$E(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_i < 1) + 1$$

Посчитаем такие вероятности. Для случая $i = 1$ вероятность равна 1. При $i = 2$ мы можем нарисовать квадрат соответствующий совместному распределению X_1 и X_2 . Плоскость $X_1 + X_2 < 1$ отсекает половину площади, значит вероятность равна $1/2$.

Как посчитать все остальные вероятности? Рассмотрим S_n . Совместному распределению n равномерных случайных величин соответствует n -мерный куб. Плоскость $\sum X_i = 1$ проходит через все точки типа: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0)$. Посчитаем объём фигуры, которая образована такой плоскостью и точкой $(0, 0, \dots, 0)$ — это и будет искомая вероятность. Воспользуемся формулой объёма n -мерной пирамиды: $V = \frac{1}{n}SH$. В качестве вершины возьмём точку $(1, 0, \dots)$. Заметим, что расстояние от неё до плоскости $x_1 = 0$ в которой лежат остальные точки равно 1.

Площадь основания, это объём такой же фигуры, только образованной $n - 1$ точкой. Получаем соотношение:

$$\mathbb{P}(S_n < 1) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(S_{n-1} < 1)$$

Тогда искомый ряд равен:

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} + 1$$

Его сумма равна e , как ряд Маклорена для e^x .

Ещё решение. Рассмотрим багет длины $x < 1$. Заметим формулу для вероятности,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(x_1 + \dots + x_{n-1} \leq x) - \mathbb{P}(x_1 + \dots + x_n \leq x)$$

По индукции можем показать, что $\mathbb{P}(x_1 + \dots + x_n \leq x) = \frac{x^n}{n!}$

Поэтому

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}$$

Далее можно решать через ряд Тейлора:

$$E(N) = e^x, \text{Var}(N) = e^x(1 + 2x) - e^{2x}$$

И ещё решение:

Пусть сейчас Удав уже съел суммарно багетов на $a < 1$ метров.

Обозначим $N(a)$ — число оставшихся шагов до съедения x метров.

Введём две функции $f(a) = E(N(a))$ и $g(a) = E(N^2(a))$.

Методом первого шага можно получить уравнения:

$$\begin{cases} f(a) = \int_a^x f(t)dt \\ g(a) = 1 + \int_a^x g(t)dt + 2 \int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

И начальные условия $f(x) = g(x) = 1$ Далее дифференцируем и получаем решаемые дифференциальные уравнения.

47 Допустим, что после n подбрасываний Пафнутий лидирует с вероятностью p . Тогда в силу симметрии задачи, вероятность равенства числа «орлов» после n подбрасываний равна $1 - 2p$. Следовательно, вероятность победы Пафнутия равна $p + (1 - 2p)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

48 Можно попробовать посчитать вероятности для нескольких первых нажатий и по индукции получить ответ $1/2$.

49 1.

$$\mathbb{P}(\text{ровно 5 человек}) = \frac{29}{30} \frac{28}{29} \frac{27}{28} \frac{26}{27} \frac{1}{26} = \frac{1}{30}$$

2. Желаемая цепочка обязательно имеет вид: Маша — Парни — Девушка — Парни — Девушка...Каждый блок из парней может иметь нулевую длину. Нам полностью безразлично, что происходит в блоках из парней, нам важно лишь, чтобы при выходе из блока парней жертвой была новая девушка. Поэтому мы и перемножаем только вероятности для выбора девушек:

$$\mathbb{P}(\text{ровно 5 девушек}) = \frac{19}{20} \frac{18}{19} \frac{17}{18} \frac{16}{17} \frac{1}{16} = \frac{1}{20}$$

Вариация без самоубийц

1.

$$\mathbb{P}(\text{ровно 5 человек}) = 1 \cdot \frac{28}{29} \frac{27}{28} \frac{26}{27} \frac{1}{26} = \frac{1}{29}$$

50 Легко экспериментально установить, что все фишки кроме двух последних можно поставить на свои места. Например, сначала выставляются 1–4, затем 5–8, затем 9, 13 и всё оставшееся кроме 14 и 15. Один вариант не сводится к другому, так как любое движение в пятнашках не изменяет четность перестановки. Чётных и нечётных перестановок одинаковое количество, поэтому вероятность равна $1/2$.

51 Открыть ящичек со своим номером, далее открывать ящички с номером, написанным на вытащенной бумажке. Вероятность выигрыша, $1 - (H_{100} - H_{50}) \approx 1 - \ln 2$, где H_n — гармоническое число, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

52 $2/3$ 53 $2/3$, [2]

54 <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/BOW4.shtml>
<http://math.stackexchange.com/questions/227990/> $2/18$, $5/18$, $11/18$

55 168

56

57 $\frac{F_{1000}}{2^{1000}}$

58

59

60 Разбиваем Z в сумму индикаторов, $Z = Z_1 + \dots + Z_n$. Замечаем, что Z_k равно единице, если k -ый аргонавт выше чем, аргонавты 1, 2, ..., $k-1$. Но максимум из первых k величин равновероятно приходится на каждую из них, значит $E(Z_k) = \mathbb{P}(Z_k = 1) = 1/k$. Отсюда $E(Z) = \sum_{k=1}^n 1/k$. Замечаем, что Z_i и Z_j независимы. Следовательно, $\text{Var}(X, Y) = 0$, а $\text{Var}(Z) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(Z_k)$.

61 $(\pi + 2)/4\pi$

62 Можно сделать через интегралы: найти плотность $W = \ln X + \ln Y$, найти вероятность $\mathbb{P}(ZW \leq a)$.

Интуитивное решение основанное на нескольких фактах:

1. Величина X равномерна распределена если $-\ln X$ экспоненциально распределена с параметром 1.
2. В Пуассоновском потоке время между событиями распределено экспоненциально

3. В Пуассоновском потоке при фиксированном известном времени наступления второго события a время наступления первого события равномерно на отрезке $[0; a]$.

Надо доказать, что $-Z(\ln XY)$ распределено экспоненциально с параметром 1. Замечаем, что $-\ln X - \ln Y$ — экспоненциально распределена с параметром 2, значит это время наступления второго события в Пуассоновском потоке. Домножили на Z , равномерную $[0; 1]$, значит получили время наступления первого события, а оно экспоненциально с параметром 1.

63

- 64 Вспомним для начала, что площадь круга равна πr^2 , а площадь сферы равна $4\pi r^2$. Составим из маленьких треугольничков многогранник очень похожий на сферу с единичным радиусом. Площадь этого многогранника будет примерно равна 4π . Проекция многогранника представляет собой примерно круг единичного радиуса. Проекция имеет два слоя. С учётом обоих слоёв площадь проекции равна 2π . Значит отношение площади проекции к площади многогранника равно $1/2$.

От взаимного расположения треугольничков в пространстве ожидаемая площадь проекции не зависит в силу аддитивности математического ожидания.

Ответ: 21 см^2 .

- 65 Если γ — вероятность самостоятельного познания Истины, а α — передачи Истины отдельно в каждую из сторон, то

$$p = \gamma + (1 - \gamma)p\alpha.$$

То есть $p = \gamma / (1 - \alpha(1 - \gamma))$.

Для решения второго пункта наложим на Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина обет молчания. Это не повлияет на вероятность постижения им Истины, однако превратит задачу в две уже решённых :) Получаем

$$q = \gamma + (1 - \gamma)(2p\alpha - p^2\alpha^2)$$

- 66 Рассмотрим двойственный граф, получаем $1/2$.

- 67 Если изначально кусок капусты был n -угольником и было сделано r разрезов, то у всех поверхностей в сумме будет $n + 4r$ сторон. Значит математическое ожидание числа сторон у случайно выбираемого кусочка равно $E(X_r) = (4r + n) / (r + 1)$. Эта величина стремится к 4 независимо от стартового n .

68 По формуле Эйлера $f - e + v = 2$, кроме того $2e = 3v$. Математическое ожидание равно $E(X_f) = 2e/f = (6f - 12)/f$. При большом числе киосков f получаем 6.

69 Обозначим a_n — ожидаемое количество занятых домиков, если всего в деревне n домиков. Для малых n : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1, \dots$

Последовательность a_n удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-2} a_i$$

Обозначим также $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, тогда окажется, что

$$\begin{cases} a_n = 1 + \frac{2}{n} s_{n-2} \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$$

Рассмотрим производящие функции $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ и $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$.

Домножаем уравнения на x^n и складываем, получаем:

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1}{1-x} + 2B(x) \\ S(x) = xS(x) + A(x) \\ B'(x) = xS(x) \end{cases}$$

Получаем одно дифференциальное уравнение

$$(1-x)S'(x) - S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + 2xS(x)$$

Из $s_0 = 0$ следует начальное условие $S(0) = 0$. Решение уравнения имеет вид

$$\begin{cases} S(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2(1-x)^3} \\ A(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2(1-x)^2} \end{cases}$$

Исследуем асимптотику функции. Разложим числитель $A(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x = 1$:

$$A(x) = \frac{1+e^{-2}}{2}(1-x)^{-2} + e^{-2}(1-x)^{-1} + R(x)$$

Раскладывая в ряд Тейлора $(1-x)^{-2}$, $(1-x)^{-1}$ и $R(x)$ получаем:

$$a_n = \frac{1+e^{-2}}{2}n + \frac{1-3e^{-2}}{2} + r_n$$

Здесь r_n убывает быстро, поэтому доля занятых домиков сходится к $\frac{1+e^{-2}}{2} \approx 0.4323$.

<http://fivethirtyeight.com/features/can-you-solve-the-puzzle-of-your-misanthropic-neighbors/>

70

71 1. 2

2. $1/2$ 3. $\sum 0.5^{i \frac{i-1}{i}} = \sum 0.5^i - \sum 0.5^{i \frac{1}{i}} = 1 + \ln(1/2) = 1 - \ln 2$

4. 1

72

73

Источники мудрости

Источники мудрости, кои автор подборки постарался не замутиль.
Смело направляйте к ним верблюдов своего любопытства!

Список литературы

- [1] Richard Ruggles и Henry Brodie. «An empirical approach to economic intelligence in World War II». В: *Journal of the American Statistical Association* 42.237 (1947), с. 72—91. Подробности про то, как захватив всего два танка, можно оценить ежемесячный выпуск с точностью в пару процентов.
- [2] Janko Gravner. *Twenty problems in probability*. URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135A/resources/chpr.pdf>.
- [3] Вильям Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. URSS: Либроком, 2010. Очень старый и очень классный учебник по теории вероятностей в двух томах.
- [4] Габор Секей. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. Москва, Мир, 1990. Парадоксы с решениями и историей.
- [5] Peter Winkler. «Games people don't play». В: *Puzzler's Tribute: a Feast for the Mind* (2002), с. 301—313. URL: <http://www.teorver.ru/newkatalog/1193689162.pdf>. Несколько красивейших задач с решениями!
- [6] *Колмогоровские студенческие олимпиады по теории вероятностей*. URL: <http://new.math.msu.su/departament/probab/olimpia/olimpia.htm>.
- [7] *Свойства случайных перестановок*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Random_permutation_statistics.

- [8] Gunnar Blom. *Problems and Snapshots from the World of Probability*. Springer, 1994. Задачи с решениями и небольшими исследованиями.
- [9] С.М. Гусейн-Заде. *Разборчивая невеста*. МЦНМО, 2003. Задача в изложении для девятиклассников, <http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.25.pdf>.