Теория вероятностей: культурный код

Фольклор

19 января 2015 г.

Культурный код

Сборник восхитительных задач по элементарной теории вероятностей. Эти задачи — наша вероятностная ДНК.

Фольклор и красота

1. Задача о Сумасшедшей Старушке.

   В самолете 100 мест и все билеты проданы. Первой в очереди на посадку стоит Сумасшедшая Старушка. Сумасшедшая Старушка несмотря на билет садиться на случайно выбираемое место. Каждый оставшийся пассажир садится на своё место, если оно свободно и на случайное выбираемое место, если его место уже кем-то занято.

   (a) Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?

   (b) Чему примерно равно среднее количество пассажиров севших на свои места?

Родилась она чисто из жизни — а именно когда тогда еще юному автору приходилось часто ездить из Питера во Псков. Чаще всего билет на покупался в общий вагон поезда. На билете всегда было указано место. Но не тут-то было! Приходя в вагон, обнаруживалось, что пришедшие первыми занимали самые лучшие места (утверждая, что номера мест на билетах — это просто для статистики). И вот тут-то и начинались эти цепочные сгоняния пассажиров. В оригинале задачка звучала так: «В общем вагоне поезда Ленинград-Псков N мест... N-й пассажир, придя последним, обнаруживал, что свободно только только самое дурацкое место — около туалета...» Но в редакции Кванта решили, что писать про бардак и туалет в общем вагоне поезда Лениград-Псков как-то не очень. И самовольно переделали условие на кинотеатр, http://kvant.mccme.ru/1985/06/p34.htm, автор: Игорь Алексеев

2. Задача собирателя наклеек. Coupon collector's problem.

   Производитель чудо-юдо-йогуртов наклеивает на каждую упаковку одну из 50 случайно выбираемых наклеек. Покупатель собравший все виды наклеек получает приз от производителя. Пусть X — это количество упаковок йогурта, которое нужно купить, чтобы собрать все наклейки.

   Найдите $\mathsf{E}(X)$, $\mathsf{Var}(X)$

3. Спички Банаха. Banach's matchbox problem.

   Польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по n спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым.

   (a) Какова вероятность того, что в другом коробке в этот момент осталось ровно k спичек?

   (b) Каково среднее количество спичек в другом коробке?

4. Равновесие Харди-Вайнберга.

   Предположим, что три возможных генотипа aa, Aa и AA изначально встречаются с частотами p_1, p_2 и p_3, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Ген не сцеплен с полом, поэтому частоты p_1, p_2 и p_3 одинаковы для мужчин и для женщин.

   (a) У семейных пар из этой популяции рождаются дети. Назовём этих детей первым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов в первом поколении?

   (b) У семейных пар первого поколения тоже рождаются дети. Назовём этих детей вторым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов во втором поколении?

   (c) Каковы частоты для трёх возможных генотипов в n-ном поколении?

   (d) Заметив явную особенность предыдущего ответа сформулируйте теорему о равновесии Харди-Вайнберга. Прокомментируйте утверждение: «Любой рецессивный ген со временем исчезнет».

5. Поляризация света.

   Световая волна может быть разложена на две поляризованные составляющие, вертикальную и горизонтальную. Поэтому состояние отдельного поляризованного фотона может быть описано углом α. Поляризационный фильтр описывается углом поворота θ. Фотон в состоянии α задерживается поляризационным фильтром с параметром θ с вероятностью $p = \sin^2(\alpha - \theta)$ или проходит сквозь фильтр с вероятностью $1 - p$, переходя при этом в состояние θ.

   На самом деле внутренний мир фотона гораздо разнообразнее.

   (a) Какова вероятность того, что поляризованный фотон в состоянии α пройдёт сквозь фильтр с параметром $\theta = 0$?

   (b) Имеется два фильтра и поляризованный фотон в состоянии α. Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через оба фильтра?

   (c) Имеется три фильтра и поляризованный фотон в состоянии α. Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \beta$, третий — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через все три фильтра? При каких α и β она будет максимальной и чему при этом она будет равна?

   Как сделать «секретный монитор» своими руками, http://www.youtube.com/watch?v=-ojbykV1zyc

   (d) Объясните следующий фокус. Фокусник берет два специальных стекла и видно, что свет сквозь них не проходит. Фокусник ставит между двумя стёклами третье, и свет начинает проходить через три стекла.

6. Истеричная певица

   Начинающая певица дает концерты каждый день. Каждый ее концерт приносит продюсеру 0.75 тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью 0.5. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии она не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только цветы от продюсера. Если подарить цветы на сумму $0 \leq x \leq 1$ тысяч евро, то она выйдет из депрессии с вероятностью $\sqrt{x}$.

   Какова оптимальная стратегия продюсера?

7. Парадокс Симпсона. Simpson's Paradox.

   Два лекарства испытывали на мужчинах и женщинах. Каждый человек принимал только одно лекарство. Общий процент людей, почувствовавших улучшение, больше среди принимавших лекарство А. Процент мужчин, почувствовавших улучшение, больше среди мужчин, принимавших лекарство В. Процент женщин, почувствовавших улучшение, больше среди женщин, принимавших лекарство В.

   (a) Возможно ли это?

   (b) Какое лекарство нужно посоветовать принять пациенту, если его пол неизвестен?

8. Вовочку перевели из класса А в класс Б. Мог ли при этом возрасти средний балл по математике в обоих классах?

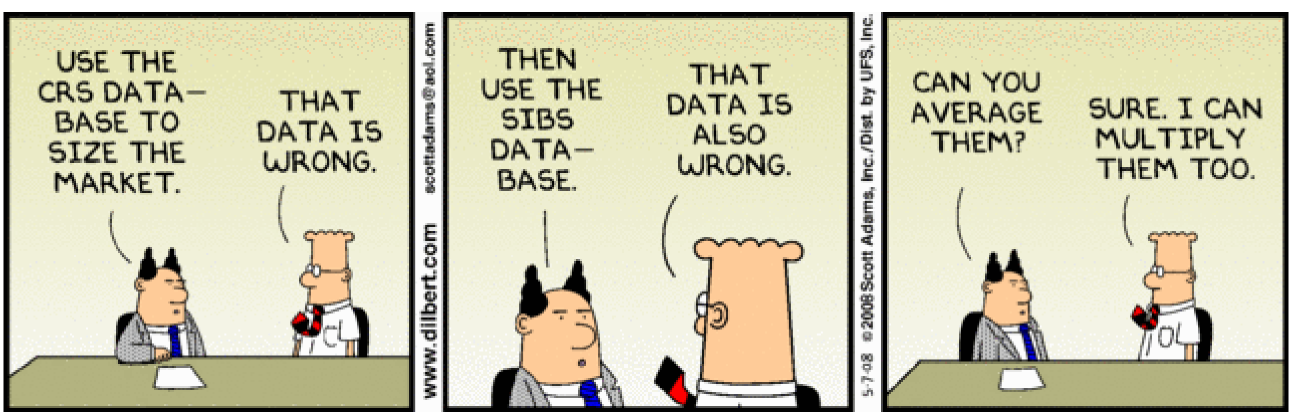

Рис. 1: Dilbert

9. Злобный дракон поймал трех гномов. И решил поиграться с ними. Каждому гному он надевает с равными вероятностями черный или белый колпак.

— Значит, дракон — это датчик случайных колпаков?

Гномы видят чужие колпаки, но не видят своих и не могут общаться после выдачи колпаков. Каждый гном может попытаться угадать цвет своего колпака, либо промолчать. Дракон отпустит гномов, если хотя бы один гном угадал цвет своего колпака, и никто не сделал ошибки. Если все одновременно промолчали, или кто-нибудь ошибся, то все гномы будут съедены. Перед игрой гномы могут договориться о стратегии игры.

(a) Как им следует играть? Какова вероятность того, что они будут спасены?

(b) Если от далекого спутника нужно получить один бит информации («да» или «нет»), то, отправив три бита, можно не бояться того, что природа «испортит» один из них. Постройте этот простой код. Проведите аналогию с предыдущим пунктом.

— Три гнома — три бита?

Идея этой задачи используется не только при космической связи. Чтобы неглубокие царапины на компакт диске не вызывали потерь данных, при записи используется код Рида-Соломона.

— А как звали третьего гнома?

10. Париж, Людовик XIV, 1654 год, высшее общество говорит о рождении новой науки — теории вероятностей. Ах, кавалер де Мере, «fort honnête homme sans être mathématicien»... Старая задача, неправильные решения которой предлагались тысячелетиями (например, одно из неправильных решений предлагал изобретатель двойной записи, кумир бухгалтеров, Лука Пачоли) наконец решена правильно!

«благородный человек, хотя и не математик».

Два игрока играют в честную игру до шести побед. Игрок первым выигравший шесть партий (не обязательно подряд) получает 800 луидоров. К текущему моменту первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3 партии. Они вынуждены прервать игру в данной ситуации.

Как им поделить приз по справедливости?

11. На арене две команды гладиаторов, A и B . Каждый гладиатор обладает определенной силой, неизменной по ходу игры. Команды могут отличаться по количеству гладиаторов и их силе. Игра проходит в виде последовательных турниров, в каждом из которых участвует по одному гладиатору от каждой стороны. Если в очередном турнире встречаются гладиаторы с силами a и b , то вероятность победы первого определяется величиной $\frac{a}{a+b}$. Гладиатор, проигравший турнир, выбывает из игры, выигравший — возвращается в команду. Гладиаторы не устают, но

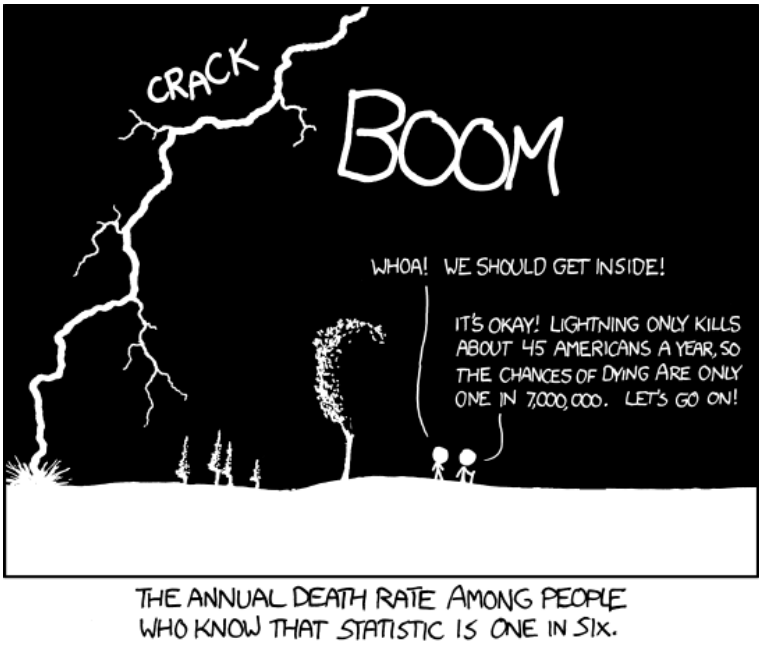

Рис. 2: http://xkcd.com/795/

и не приобретают опыта. Стратегия команды предписывает, какого гладиатора выдвигать на очередной турнир в зависимости текущего состава команд. Игра ведется до полного выбывания из игры одной из команд.

Как выглядит оптимальная стратегия команды A?

12. В отличие от обычного гладиатора, у победившего гладиатора-вампира сила увеличивается на силу побежденного им гладиатора-вампира. В остальном правила поединка такие же, как в предыдущей задаче.

    Как выглядит оптимальная стратегия команды A?

13. Маша и Саша играют в быстрые шахматы. У них одинаковый класс игры и оба предпочитают играть белыми, т.е. вероятность выигрыша белых $p > 0.5$. Партии играются до 10 побед. Первую партию Маша играет белыми. Она считает, что в следующей партии белыми должен играть тот, кто выиграл предыдущую партию. Саша считает, что ходить белыми нужно по очереди. При каком варианте правил у Маши больше шансы выиграть?

14. Гадалка

    Маша пишет на бумажках два любых различных натуральных числа по своему выбору. Одну бумажку она прячет в левую руку, а другую — в правую. Саша выбирает любую Машину руку. Маша показывает число, написанное на выбранной бумажке. Саша высказывает свою догадку о том, открыл ли он большее из двух чисел или меньшее. Если Саша не угадал, то Маша выиграла.

Существует ли у Саши стратегия, гарантирующая ему выигрыш с вероятностью строго более 50%, даже будучи известной Маше?

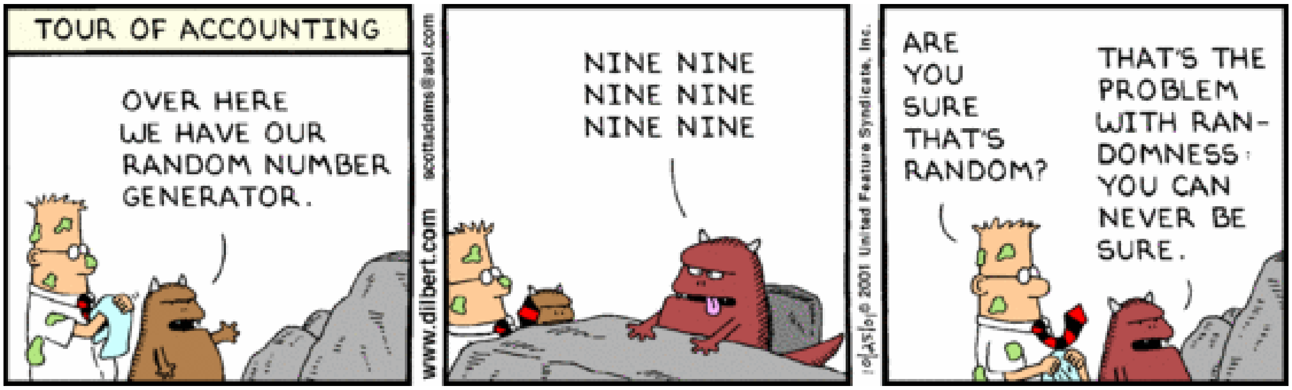

Рис. 3: Dilbert, «We guarantee that each number is random individually, but we don't guarantee that more than one of them is random», http://en.wikipedia.org/wiki/RANDU

15. Больший кусок окружности

    Аня хватается за верёвку в форму окружности в любой точке. Дальше мы делаем в случайных местах два разреза веревки. Аня забирает себе тот кусок, за который держится. Боря забирает оставшийся кусок. Выигрыш каждого равен длине полученной им верёвки.

    (a) Чему равен средний выигрыш каждого игрока?

    (b) Вероятность того, что у Ани верёвка длиннее?

16. Судьба Дон-Жуана.

    У Дон-Жуана n знакомых девушек, и их всех зовут по-разному. Он пишет им n писем, но по рассеянности раскладывает их в конверты наугад. Случайная величина X обозначает количество девушек, получивших письма, адресованные лично им.

    (a) Найдите $\mathsf{E}(X)$, $\mathsf{Var}(X)$

    (b) Какова при большом n вероятность того, что хотя бы одна девушка получит письмо, адресованное ей?

17. Саша и Маша подкидывают монетку до тех пор, пока не выпадет последовательность РОО или ООР. Если игра закончится выпадением РОО, то выигрывает Саша, если ООР, то — Маша.

    (a) Какова вероятность того, что победит Маша?

    (b) Сколько бросков в среднем продолжается игра?

18. Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем. . . И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет. Какова вероятность того, что Василиса Премудрая сможет найти на карте бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?

19. У тети Маши — двое детей разных возрастов. Вероятности рождения мальчика и девочки равны.

    (a) Какова вероятность того, что у тёти Маши оба ребёнка — мальчики, если известно, что у неё хотя бы один ребёнок — мальчик?

    (b) Какова вероятность того, что у тёти Маши оба ребёнка — мальчики, если известно, что у неё хотя бы один ребёнок — мальчик водолей по гороскопу?

20. Buffon's needle problem

    Плоскость разлинована параллельными линиями через каждый сантиметр. Случайным образом на эту плоскость бросается иголка длины $a < 1$.

    (a) Какова вероятность того, что иголка пересечёт какую-нибудь линию?

    (b) Предложите вероятностный способ оценки числа π

21. Мартышка и Шекспир

    Мартышка наугад нажимает клавиши на печатающей машинке.

    (a) Какова вероятность того, что она рано или поздно напечатает полное собрание сочинений Шекспира? Льва Толстого?

    (b) Обозначим количество нажатий до появления слова «АБРАКАДАБРА» за X. Найдите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{Var}(X)$.

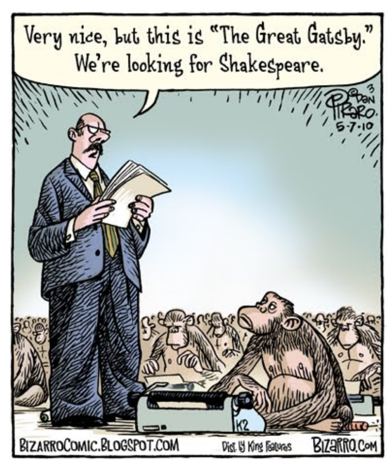

Рис. 4: Задача о «бесконечных обезьянах», infinte-monkey problem.

22. Парадокс инспектора

    Автобусы приходят на остановку согласно пуассоновскому потоку в среднем один раз в час. Вася приходит на остановку в случайный момент времени и садится на первый пришедший автобус.

(a) Сколько Васе в среднем предстоит ждать автобуса?

(b) Сколько в среднем прошло времени от последнего пришедшего автобуса до Васиного появления?

(c) Чему равна средняя продолжительность интервала между автобусом, на который сядет Вася, и предыдущим?

(d) Чему равна средняя продолжительность интервала между автобусом, на который сядет Вася, и следующим?

(e) Маша не любит набитые битком автобусы и никогда не торопится, поэтому, придя на остановку, всегда пропускает один автобус и садится на следующий. Она считает, что на него в среднем сядет меньше людей. Права ли она?

23. Спящая красавица

Спящая красавица согласилась принять участие в научном эксперименте. В воскресенье её специально уколют веретеном. Как только она заснёт, будет подброшена правильная монетка.

Если монетка выпадет орлом, то спящую красавицу разбудят в понедельник и спросят о том, как выпала монетка.

Если монетка выпадет решкой, то спящую царевну разбудят в понедельник, спросят о монетке, снова уколют веретеном, разбудят во вторник и снова спросят о монетке. Укол веретена вызывает легкую амнезию, и красавица не сможет определить, просыпается ли она в первый раз или во второй.

Красавица только-только проснулась. Вспомнила правила эксперимента, и услышала вопрос исследователя: «Ваше Высочество, так как же выпала монетка?»

(a) Как следует отвечать красавице, если за каждый верный ответ ей дарят молодильное яблоко?

(b) Как следует отвечать красавице, если за неверный ответ её тут же превращают в тыкву?

(c) Отвечая на вопрос исследователя Спящая Красавица задумалась, а какова вероятность того, что сегодня понедельник. Как ты думаешь?

Решение:

«Сегодня понедельник» — это не событие. Вероятность не определена. Это функция от времени.

Вероятность того, что монетка выпала орлом, равна 0,5. Поэтому ей всё равно, как отвечать, если наказанием является превращение в тыкву, и нужно отвечать: «Решка!» — если наградой является молодильное яблоко. Предположим, что красавица максимизирует ожидаемое количество молодильных яблок.

24. Monty-Hall

Есть три закрытых двери. За двумя из них — по козе, за третьей автомобиль. Вы выбираете одну из дверей. Допустим, Вы выбрали дверь A. Ведущий шоу, чтобы поддержать интригу, не открывает сразу выбранную Вами дверь. Сначала он открывает одну из дверей не выбранных Вами, причем снова ради интриги ведущий не открывает сразу и дверь с автомобилем. Допустим, ведущий открыл дверь B. И в этот момент он предлагает Вам изменить ваш выбор двери.

Имеет ли смысл изменить свой выбор?

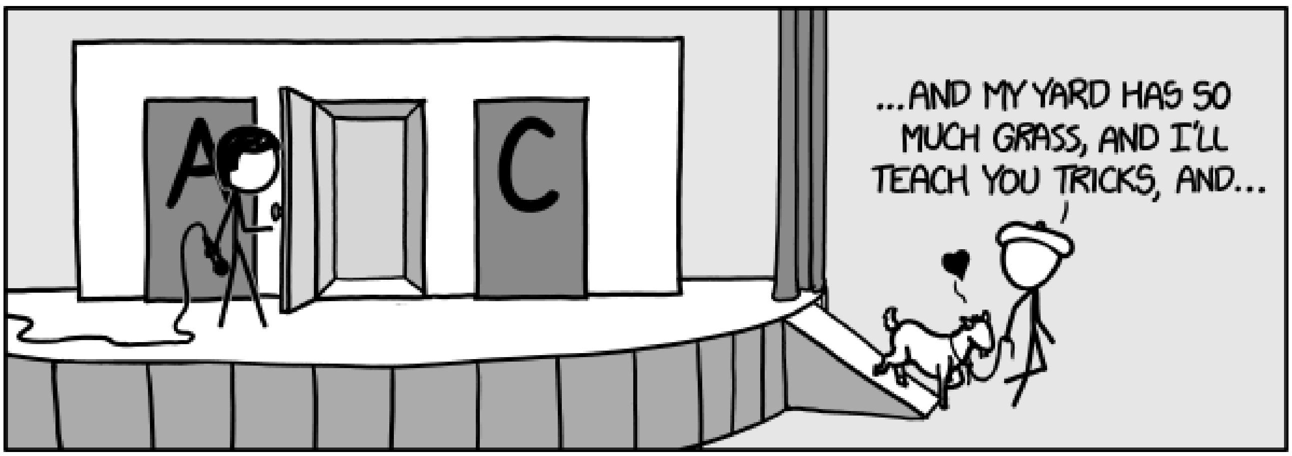

Рис. 5: A few minutes later, the goat from behind door C drives away in the car. http://xkcd.com/1282/

25. Monty-Hall версия

Трое студентов, Аня, Боря и Василиса, сдавали комиссию по теории вероятностей и ещё не знают своих оценок. Им объявили, что зачёт получили двое из трёх. В перерыве перед объявлением оценок Боря подходит к председателю:

— Иван Иванович, раз зачёт получили двое из трёх, значит хотя бы у одной из девушек есть зачёт. Вы мне можете назвать имя одной из девушек, получившей зачет?

— Василиса получила.

Какова условная вероятность того, что Боря получил зачёт, если принимать во внимание информацию от Ивана Ивановича?

26. Задача о Разборчивой Невесте, Secretary problem

К Разборчивой невесте выстроилась вереница из $n >> 0$ потенциальных женихов. Разборчивая невеста хочет выбрать самого богатого из них и только его! Потенциальные женихи заходят к Разборчивой невесте по одному в случайном порядке. Невеста

Докторская диссертация член-корреспондента РАН Бориса Березовского «Разработка теоретических основ алгоритмизации принятия предпроектных решений и их применения» является обобщением задачи о разборчивой невесте, http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem неплохо разбирается в богатстве и всегда может ранжировать всех, с кем она общалась, по величине богатства. Когда к Разборчивой невесте приходит очередной претендент, она должна сразу принять решение: выбрать данного кандидата или перейти к следующему. Вернуться к предыдущим кандидатам невозможно — они обижаются и уезжают.

(a) Как выглядит оптимальная стратегия Разборчивой невесты? Чему равна вероятность выбора самого богатого жениха Разборчивой невестой?

(b) Подруга-дурнушка Разборчивой невесты хочет выбрать второго по богатству жениха и только его! Как выглядит её оптимальная стратегия? Чему равна вероятность выбора второго по богатству жениха Подругой-дурнушкой?

Всё равно самый богатый достанется Разборчивой невесте!

27. Собрались $n >> 0$ ковбоев. Каждый из них выбрал себе из остальных своего самого главного врага случайным образом. Далее ковбои по очереди стреляют, каждый в своего главного врага. Естественно, если жив сам, и если жив самый главный враг. Ковбои стреляют без промаха.

(a) Какая доля ковбоев в среднем останется в живых?

(b) Какая доля ковбоев в среднем останется в живых, если треть ковбоев забыла дома свой кольт?

28. Задача Бертрана о голосовании, Betrand's ballot theorem

За кандидата А было подано 100 голосов, а за кандидата Б — 300 голосов.

(a) Какова вероятность того, что во время голосования постоянно лидировал кандидат Б?

(b) Какова вероятность того, что во время всего голосования за кандидата А голосов было больше, чем в два раза, чем за кандидата Б?

http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_ballot_theorem

http://webspace.ship.edu/msrenault/ballotproblem/monthly358-363-renault.pdf

29. Задача о макаронах

В тарелке запутавшись лежат $n >> 0$ макаронин. Я по очереди связываю попарно все торчащие концы макаронин.

(a) Какова примерно вероятность того, что я свяжу все макаронины в одно большое кольцо?

(b) Сколько в среднем колец образуется?

(c) Каково среднее число колец длиной в одну макаронину?

30. Задача о ключах и копилках

На столе стоят n копилок. Достать содержимое копилки можно двумя способами: либо разбить копилку, либо открыть дно специальным ключиком. К каждой копилке подходит единственный ключ. Мы раскладываем ключи по копилкам наугад, один ключ в одну копилку. Затем разбиваем k копилок и получаем хранящиеся в них ключи. Далее мы будем копилки только открывать ключами.

(a) Какова вероятность того, что мы сможем достать все ключи?

(b) Какая доля ключей в среднем будет найдена?

31. Парадокс двух конвертов. Two envelope paradox

Перед тобой два внешне одинаковых конверта. В одном из них лежит ровно в два раза больше денег, чем в другом. Ты открываешь один из конвертов и видишь, что в нём лежит x рублей. У тебя есть возможность взять открытый конверт или отказаться от него и взять сумму в закрытом конверте.

(a) Чему равно математическое ожидание суммы денег, лежащей в закрытом конверте?

(b) Какой конверт стоит предпочесть, уже открытый или еще закрытый?

(c) Предположим, что деньги в конверты кладут следующим образом: в один из конвертов кладут случайную сумму денег, имеющую экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$, а в другой конверт — в два раза больше. Как выглядит оптимальная стратегия игрока?

(d) Предположим, что деньги в конверты кладут другим образом. Сначала подбрасывают правильную монетку до тех пор, пока не выпадет «орёл». Обозначим количество подбрасываний буквой N. В один из конвертов кладут 3^N рублей, а в другой конверт — в три раза больше. Как выглядит оптимальная стратегия игрока?

32. Удвоение ставки

Два игрока играют в справедливую игру. Позицию в игре в момент времени t условно можно описать числом $p_t \in [0;1]$, вероятностью победы первого игрока. Время непрерывно. Изначально $p_0 = 1/2$. Величина p_t ведёт себя как броуновское движение. Игра оканчивается, когда p_t достигает 0 или 1.

Игрок владеющий красной меткой в любой момент игры может предложить другому удвоить ставки. Изначально красная метка находится у первого игрока. После удвоения ставок красная метка переходит к другому игроку.

В какой момент следует предлагать удвоение ставок?

33. Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй — 1, 6 и 8; на третьей — 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число.

Кто первый встал, того и тапки!

Первой пташке достается червячок, но сыр съедает вторая мышка.

    (a) В чью пользу эта игра?

    (b) Какая рулетка самая хорошая?

34. На европейской рулетке 18 черных ячеек, 18 красных ячеек и одно зелёное зеро. Васиссуалий приходит в казино имея 100 рублей денег. Он ставит на чёрное по одному рублю до тех пор, пока не проиграет все деньги или его благосостояние не достигнет 200 рублей.

    (a) Какова вероятность того, что Васиссуалий покинет казино имея 200 рублей?

    (b) Как изменится ответ, если Васиссуалий играет в американскую рулетку, на которой помимо одинарного зеро есть и двойное зеро?

35. Санкт-Петербургский парадокс

Тебе предлагают сыграть в следующую игру. Правильную монетку подкидывают до первого выпадения «орла». Если впервые «орёл» выпадает при N-ом подбрасывании, то ты получаешь 2^N рублей.

    (a) Чему равно математическое ожидание выигрыша в эту игру?

    (b) Сколько ты согласен заплатить за однократное участие в этой игре?

36. Труэль

Три игрока решили стреляться ради самой красивой девушки и организуют труэль (дуэль для трёх игроков). Игроки стреляют по очереди, A-B-C-A-$\ldots$. Каждый из игроков может либо целиться в одного из противников, либо стрелять в воздух. Вероятности попадания равны $p_a = 0.6$, $p_b = 0.5$ и $p_c = 0.4$, соответственно. Игра продолжается до определения единственного победителя, он и получает девушку в жёны.

(a) Как выглядит оптимальная стратегия каждого игрока?

(b) Чему равные вероятности выиграть для каждого игрока?

37. Игра Паррондо

В игре A ты с вероятностью 0.45 выигрываешь один рубль и с вероятностью 0.55 проигрываешь один рубль.

Игра B чуть более хитрая. Если сумма в твоём кошельке делится на три, то ты выигрываешь один рубль с вероятностью 0.05 и проигрываешь один рубль с вероятностью 0.95. Если же сумма в твоем кошельке не делится на три, то ты выигрываешь один рубль с вероятностью 0.7 и проигрываешь один рубль с вероятностью 0.3.

Изначально у тебя в кошельке 100 рублей. Что произойдёт с твоим благосостоянием, если:

(a) Ты будешь бесконечное количество раз играть в игру A?

(b) Ты будешь бесконечное количество раз играть в игру B?

(c) Ты будешь бесконечное количество раз равновероятно выбирать игру A или игру B?

38. Во время Второй Мировой войны американские военные собрали статистику попаданий пуль в фюзеляж самолёта. По самолётам, вернувшимся из полёта на базу, была составлена карта повреждений среднестатистического самолёта. С этими данными военные обратились к статистику Абрахаму Вальду с вопросом, в каких местах следует увеличить броню самолёта.

Что посоветовал Абрахам Вальд и почему?

39. Задача о немецких танках

Предположим, что все выпущенные танки имеют порядковый номер. От самого первого выпущенного танка, имеющего номер 1, до самого последнего танка, имеющего номер n. В бою удалось подбить танки с номерами 15, 29 и 23.

(a) Постройте оценку количества танков методом моментов

Незадолго до высадки союзников в Нормандии, 6 июня 1944 года, в распоряжении союзников оказалось всего два (!) немецких танка «Пантера V». По серийным номерам на шасси танков союзники оценили выпуск в феврале 1944 в 270 танков. Фактический выпуск «Пантер V» согласно немецким документам в феврале 1944 составил 276 танков.

(b) Постройте оценку количества танков методом максимального правдоподобия

(c) Постройте несмещенную оценку количества танков с наименьшей дисперсией

Чуть менее классические задачи

1. Стрелок попадает по мишени с вероятностью 0.3. Какова вероятность того, что до третьего промаха у него будет 5 выстрелов?

2. Расстояние от пункта A до B автобус проходит за 2 мин, а пешеход — за 20 мин. Интервал движения автобусов 30 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту A и отправляетесь в B пешком.

   (a) Какова вероятность того, что в пути Вас догонит очередной автобус?

   (b) Сколько в среднем времени Вы будете добираться, если проходящий мимо автобус обязательно Вас подбирает?

3. Для простоты предположим, что ген карих глаз доминирует ген синих. Т.е. у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb — карие. У диплоидных организмов одна аллель наследуется от папы, а одна — от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына — кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке. Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?

   А мы тут все диплоидные :)

4. Задача о полосе невезения

   За неделю Аннушка семь раз пролила масло. Какова вероятность того, что она проливала масло каждый день?

Источники мудрости

Источники мудрости, кои автор подборки постарался не замутить. Смело направляйте к ним верблюдов своего любопытства!

Список литературы

[1] Вильям Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. URSS: Либроком, 2010. Очень старый и очень классный учебник по теории вероятностей в двух томах.

[2] Габор Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва, Мир, 1990. Парадоксы с решениями и историей.

[3] Peter Winkler. «Games people don’t play». в: Puzzler’s Tribute: a Feast for the Mind (2002), с. 301—313. url: http://www.teorver.ru/newkatalog/1193689162.pdf. Несколько красивейших задач с решениями!

[4] Janko Gravner. Twenty problems in probability. url: https://www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135A/resources/chpr.pdf.

[5] Колмогоровские студенческие олимпиады по теории вероятностей. url: http://new.math.msu.su/department/probab/olimpia/olimpia.htm.

[6] Gunnar Blom. Problems and Snapshots from the World of Probability. Springer, 1994.