

Блок 1. Задачи для БП + ИП. Время написания: 50 минут.

1. Подбросили две игральные кости. Введем следующие события:  $A$  — на первой кости выпала тройка,  $B$  — сумма очков является четным числом,  $C$  — на второй кости выпало больше очков, чем на первой.

- а) Найдите вероятность каждого из событий  $A$ ,  $B$  и  $C$ .
- б) Найдите условную вероятность  $\mathbb{P}\{A|C\}$ .
- в) Проверьте, будут ли события  $A$ ,  $C$  и  $B \cap C$  попарно независимыми.

2. Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{36} + \frac{1}{4}, & \text{если } x \in [-3; 3], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите  $\mathbb{P}\{\xi \in [0; 2]\}$ .
- б) Найдите  $\mathbb{P}\{\xi \in [2; 4]\}$ .
- в) Найдите  $\mathbb{P}\{\xi = 1.5\}$ .
- г) Найдите  $\mathbb{E}[\xi]$ .
- д) Найдите  $\mathbb{E}[\xi^2]$ .

3. Пусть  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  — пространство элементарных событий. Рассмотрим систему множеств  $\mathcal{G} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$ .

- а) Объясните, почему система  $\mathcal{G}$  не является  $\sigma$ -алгеброй.
  - б) Добавим к  $\mathcal{G}$  множество  $\{c\}$ . В результате мы получим  $\mathcal{H} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c\}\}$ . Является ли система  $\mathcal{H}$   $\sigma$ -алгеброй? Почему?
  - в) Если  $\mathcal{H}$  не является  $\sigma$ -алгеброй, то дополните систему  $\mathcal{H}$  множествами так, чтобы она стала  $\sigma$ -алгеброй.
  - г) Бонусный пункт. Случайная величина  $\xi$  имеет функцию плотности  $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(5 + 4x + x^2)}$ , причем  $x \in \mathbb{R}$ . Если возможно, найдите моду, медиану и математическое ожидание  $\xi$ .
-

Блок 2. Задачи для БП + ИП. Время написания 60 минут.

1. Основано на реальных событиях. Муж и жена заболели коронавирусом и поправились.

Для выписки необходимо, чтобы два подряд проведенных анализа на коронавирус у каждого из них оказались отрицательными. Результаты анализа известны на третий день после сдачи. Супруги заинтересованы в том, чтобы как можно скорее выйти на работу.

Если первые анализы у обоих отрицательные, на следующий день они сдают анализ повторно, если хотя бы у одного из них анализ положительный, им приходится сидеть на карантине 2 недели, после чего алгоритм выписки повторяется. Известно, что чувствительность тестов (вероятность отрицательного результата, если человек не болен) составляет 0.9.

- а) Найдите вероятность того, что супругам удастся выписаться не раньше, чем через месяц;
  - б) Найдите математическое ожидание дней до выписки, если считать с дня первого теста.
2. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Они выходят на каждом этаже начиная со второго равновероятно и независимо друг от друга.
- а) Найдите вероятность того, что с третьего по шестой этаж не выйдет ни один пассажир.
  - б) Найдите ожидаемое число пассажиров, которые выйдут с третьего по шестой этаж.
  - в) Найдите дисперсию числа пассажиров, которые выйдут с третьего по шестой этаж.
  - г) Найдите наиболее вероятное число пассажиров, которые выйдут с третьего по шестой этаж.
3. Известно, что случайная величина  $\xi$  принимает значения на отрезке  $[0; 1]$ . Для любых точек  $0 \leq a \leq b \leq 1$  вероятности описываются формулой  $\mathbb{P}\{a \leq \xi \leq b\} = (b + a) \cdot (b - a)$ .
- Найдите плотность случайной величины  $\xi$ .
-

Блок 2. Задачи для ИП. Необходимо решить две из четырех задач. Время написания 140 минут. Выдаются одновременно с общими задачами.

4. В 1786 году Лаплас для оценки числа  $N$  жителей Франции предложил следующий метод. Выберем некоторое число, скажем,  $M$ , элементов популяции и пометим их. Затем возвратим их в основную совокупность и предположим, что они «хорошо перемешаны» с немаркированными элементами. Возьмем из «перемешанной» популяции  $n$  элементов. Обозначим через  $X$  число маркированных элементов в этой выборке из  $n$  элементов.

- а) Найдите распределение случайной величины  $X$ .
- б) Полагая  $M$ ,  $n$  и  $m$  заданными, найдите наиболее правдоподобный объём всей популяции – значение  $N$ , дающее наибольшую вероятность получить число маркированных элементов, равное  $m$ .

5. Чеканщик визиря долгие годы потихонечку скромно подделывал золотые монеты. Из ста монет одну делал из меди, а не из золота, а золото забирал себе. После доноса на чеканщика визирь решил проверить, действительно ли чеканщик подделывает монеты.

Для этого каждый день решено проверять один мешок из 1000 монет: выбирать случайным образом 50 монет и проверять, есть ли среди них фальшивые. Если будет обнаружена одна фальшивая монета, то на первый раз чеканщик прощается, и на следующий день проверка продолжается. При повторном обнаружении фальшивой монеты чеканщика казнят. Если при проверке будут обнаружены сразу две и более фальшивых монеты, чеканщика в тот же день казнят.

Число мешков бесконечно.

- а) Найдите распределение количества дней жизни чеканщика  $T$ , начиная с первого дня проверки.
  - б) Найдите математическое ожидание  $T$ .
6. Андрей, Белла, Вера и Гриша — студенты. Любые два студента знакомы друг с другом с вероятностью  $p$  независимо от других. Только что Андрей прочитал новую задачку по теории вероятностей. Если студент узнал о новой задачке, то он обязательно поделится ею со всеми знакомыми.

- а) Какова вероятность того, что Гриша узнает о новой задачке?
- б) Какова вероятность того, что Гриша узнает о новой задачке, если Вера не узнала о ней?

7. Ровно 40 лет назад, 22 октября 1980 года папа римский отменил вердикт, осуждающий Галилея!

Как всем известно, Земля — плоская и имеет форму круга радиуса 1. Папа римский и Галилей равномерно и независимо выбирают две точки на краю Земли.

- а) Найдите функцию плотности расстояния от папы римского до Галилея.
  - б) Найдите функцию плотности квадрата расстояния.
-