

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f2. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f3. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f4. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f5. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f6. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f7. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f8. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f9. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f10. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f11. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f12. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f13. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f14. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f15. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f16. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f17. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f18. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f19. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f20. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f21. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f22. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f23. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f24. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f25. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f26. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f27. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f28. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f29. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f30. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f31. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f32. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f33. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Удачи!

1. Известно истинное значение параметра, $\theta = 1$, и информация Фишера о параметре θ , заключенная в одном наблюдении, $I_1(\theta) = 8$.

Найдите примерное распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ , найденной по ста наблюдениям случайной выборки.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| a) $\mathcal{N}(1, 1/8)$ | c) $\mathcal{N}(1, 1/800)$ | e) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{800})$ |
| b) $\mathcal{N}(1, 8)$ | d) нет верного ответа | f) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{8})$ |

2. По выборке из одного наблюдения $x = 1$ с помощью критерия Колмогорова Аик тестирует гипотезу о том, что выборка была получена из стандартного нормального распределения.

Укажите, чему равняется значение тестовой статистики с точностью до двух знаков после запятой.

- | | | |
|-----------------------|---------|---------|
| a) 0.15 | c) 0.36 | e) 0.76 |
| b) нет верного ответа | d) 0.84 | f) 0.16 |

3. По выборке из пяти наблюдений $1, 0, -2, 0, 1$ рассчитайте отношение неисправленной выборочной оценки дисперсии к несмещенной (исправленной) оценке дисперсии.

- | | | |
|---------|---------|-----------------------|
| a) 1.25 | c) 0.75 | e) 1 |
| b) 0.8 | d) 1.2 | f) нет верного ответа |

4. При проверке гипотезы $H_0 : \mu = 4$ по 4 наблюдениям $X_1, \dots, X_4 \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ против двусторонней альтернативной гипотезы оказалось, что $\bar{X} = 7$.

При каком наименьшем уровне значимости нулевая гипотеза будет отвергнута?

- | | | |
|---------|-----------------------|---------|
| a) 0.32 | c) 0.13 | e) 0.24 |
| b) 0.05 | d) нет верного ответа | f) 0.45 |

5. Выберите верное определение эффективности оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ в некотором классе оценок \mathcal{K} .

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ | d) Для любой оценки T из класса \mathcal{K} и любого θ выполнено $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathbb{E}((T - \theta)^2)$ | e) $\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ |
| b) $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ | | f) $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ |
| c) нет верного ответа | | |

6. По случайной выборке размером 400 студентов из всех студентов Вышки доля любителей кричать «Халява приди» равна 0.4.

Найдите правую границу 95%-й асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбираемый студент Вышки любит кричать «Халява приди».

- | | | |
|----------|-----------------------|----------|
| a) 0.448 | c) нет верного ответа | e) 0.472 |
| b) 0.497 | d) 0.521 | f) 0.546 |

- ### Чему может быть равна тестовая статистика?

- Какое распределение имеет случайная величина $\frac{Z_1\sqrt{n-3}}{\sqrt{\sum_{i=4}^n Z_i^2}}$?

- Найдите выборочный начальный момент второго порядка.

- Какое распределение будет иметь тестовая статистика?

- Найдите длину 95%-го доверительного интервала для разницы вероятностей успеха.

- $$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

4/??

- | | | |
|-------|-----------------------|-------|
| a) 6 | c) 2 | e) 18 |
| b) 15 | d) нет верного ответа | f) 12 |

14. Винни-Пух строит доверительный интервал для разности математических ожиданий по двум независимым нормальным выборкам размера m и n при неизвестных равных дисперсиях.

Какое распределение ему можно использовать?

- | | | |
|-------------------|----------------------------|-----------------------|
| a) $t_{m-1, n-1}$ | c) $\mathcal{N}(0; m+n-2)$ | e) t_{m+n} |
| b) t_{m+n-2} | d) χ^2_{m+n-2} | f) нет верного ответа |

15. Случайные величины X и Y распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается 20 наблюдений случайной величины X и 30 наблюдений случайной величины Y .

Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

- | | | |
|------------------|------------------|-----------------------|
| a) $F_{20,30}$ | c) χ^2_{49} | e) нет верного ответа |
| b) χ^2_{48} | d) $F_{29,19}$ | f) t_{48} |

16. Найдите дисперсию выборочного среднего, построенного по случайной выборке размера n из экспоненциального распределения с $\lambda = 4$.

- | | | |
|-------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $\frac{n}{16}$ | c) нет верного ответа | e) $\frac{1}{4n^2}$ |
| b) $\frac{1}{4n}$ | d) $\frac{1}{16n}$ | f) $4n$ |

17. Величина X имеет t -распределение с 8 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^2$?

- | | | |
|--------------|-----------------------|---------------|
| a) $F_{8,8}$ | c) $F_{1,8}$ | e) t_{64} |
| b) $F_{8,1}$ | d) нет верного ответа | f) χ^2_8 |

18. Величины Z_1, Z_2, \dots, Z_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 1)$.

Какое распределение имеет случайная величина $\frac{2Z_1^2}{Z_2^2 + Z_7^2}$?

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------------|
| a) $F_{1,7}$ | c) $F_{7,2}$ | e) $F_{2,7}$ |
| b) t_2 | d) $F_{1,2}$ | f) нет верного ответа |

19. Для случайной выборки 1, 2, 3, 4, 5 из нормального распределения найдите границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания.

- | | | |
|---------------------|-------------------|-----------------------|
| a) $[3.08, 5.92]$ | c) $[1.54, 5.46]$ | e) нет верного ответа |
| b) $[-4.02, 1, 02]$ | d) $[1.04, 4.96]$ | f) $[0.86, 5.14]$ |

20. Пусть X, Y, Z — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X^2 + Y^2 + Z^2$?

- | | | |
|---------------|-------------|-----------------------|
| a) χ_1^2 | c) χ_2 | e) нет верного ответа |
| b) χ_2^2 | d) t_3 | f) χ_3^2 |

21. Имеются две случайных выборки X_1, \dots, X_{31} и Y_1, \dots, Y_{41} из нормальных распределений. Известно, что $\sum_{i=1}^{31} (X_i - \bar{X})^2 = 120$ и $\sum_{i=1}^{41} (Y_i - \bar{Y})^2 = 400$.

Найдите возможное значение статистики, проверяющей гипотезу о равенстве дисперсий данных распределений.

- | | | |
|---------|-----------------------|--------|
| a) 2 | c) нет верного ответа | e) 2.5 |
| b) 3.33 | d) 2.52 | f) 0.3 |

22. Случайные величины X_1, \dots, X_n независимы и имеют функцию плотности

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-x/\sqrt{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$.

Найдите оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/n}$ | c) $\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}/n$ | e) $\sum_{i=1}^n X_i/n$ |
| b) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/2n}$ | d) $(\sum_{i=1}^n X_i/2n)^2$ | |

23. Пусть X_1, X_2 — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2 .

Найдите значение константы c , при котором оценка $\hat{\mu} = cX_1 + (1-c)X_2$ является наиболее эффективной.

- | | | |
|--------|-----------------------|--------|
| a) 1/2 | c) 1/4 | e) 2/5 |
| b) 1/3 | d) нет верного ответа | f) 1/5 |

24. Пусть $X \sim \chi_2^2$ и $Y \sim \chi_3^2$ — независимые случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X + Y$?

- | | | |
|------------------------|---------------|-----------------------|
| a) χ_1^2 | c) χ_6^2 | e) нет верного ответа |
| b) $\mathcal{N}(0; 2)$ | d) χ_5^2 | f) χ_5 |

25. Есть два неизвестных параметра, θ и γ . Вася проверяет гипотезу $H_0: \theta = 1$ и $\gamma = 2$ против альтернативной гипотезы о том, что хотя бы одно из равенств нарушено.

Выберите верное утверждение об асимптотическом распределении статистики отношения правдоподобия, LR .

- | | | |
|---|---|---|
| a) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_2^2$ | c) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_1^2$ | e) нет верного ответа |
| b) Если верна H_a , то $LR \sim \chi_2^2$ | d) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_2^2$ | f) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_1^2$ |

26. Величины X и Y одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 2. Вектор (X, Y) имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.6. Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 2)$.

- a) 0.64 c) 0 e) нет верного ответа
b) 1.2 d) 0.6 f) 1.28

27. Величина X имеет F -распределение с 9 и 16 степенями свободы. Какое распределение имеет величина $Y = X^{-1}$?

- a) χ^2_{25} c) $F_{9,16}$ e) $F_{1/9,1/16}$
b) $F_{16,9}$ d) нет верного ответа f) $F_{1/16,1/9}$

28. По 100 наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной с известной дисперсией, Вася проверял гипотезу $H_0 : \mu = 10$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \mu > 10$. Оказалось, что выборочное среднее $\bar{X} = 12$. Вася рассчитал тестовую статистику и Р-значение. После этого Вася решил попробовать изменить альтернативную гипотезу на $H_1 : \mu \neq 10$. Как при этом изменилось Р-значение?

- a) Выросло вдвое c) Не изменилось e) Упало вдвое
b) Упало, насколько - неизвестно d) Выросло, насколько - неизвестно f) нет верного ответа

29. Пусть X_1, \dots, X_7 — выборка из распределения Бернулли с параметром θ . Найдите информацию Фишера о параметре θ , содержащуюся в выборке.

- a) $\frac{1}{\theta^2 - \theta}$ c) $7\theta(1 - \theta)$ e) нет верного ответа
b) $\frac{7}{\theta - \theta^2}$ d) 7θ f) $\frac{1}{\theta - \theta^2}$

30. Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$.

Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ .

- a) нет верного ответа c) $\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ e) $\sqrt{\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2}$
b) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ d) $\frac{3}{2} \bar{X}$ f) $\frac{2}{3} \bar{X}$

31. Величина $\hat{\theta}$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(2; 0.01^2)$.

Какое примерное распределение имеет $\hat{\theta}^2$ согласно дельта-методу?

- a) $\mathcal{N}(4; 8 \cdot 0.01^2)$ c) $\mathcal{N}(4; 4 \cdot 0.01^2)$ e) $\mathcal{N}(4; 2 \cdot 0.01^2)$
 b) $\mathcal{N}(2; 4 \cdot 0.01^2)$ d) нет верного ответа f) $\mathcal{N}(4; 16 \cdot 0.01^2)$

32. Отличница Машенька получает только 8, 9 или 10. За все годы обучения Маша получила 40 восьмёрок, 70 девяток и 40 десятков.

Найдите значение статистики Пирсона для проверки гипотезы о том, все отличные оценки имеют равную вероятность.

- a) 12 c) нет верного ответа e) 32
 b) 42 d) 62 f) 22

33. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из распределения Бернулли с параметром θ .

Выберите верное утверждение об эффективности оценки $\hat{\theta} = \bar{X}$, дисперсии и информации Фишера.

- a) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = np(1-p)$ c) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$
 b) оценка эффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ d) нет верного ответа f) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$
 e) оценка эффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$