Привет !! ☺

сем брат 1 | сем брат 2 → ? → сем уник | Q + A

Q + A | сем уник

$E(X)$ умеем считать !! ☺

группа

дисперсия (разброс) — $\mathrm{Var}(X)$ variance $= D(X)$

ковариация — $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (сила связи)

Пример 2

	$Y=0$	$Y=2$
$X=0$	0.1	0.2
$X=1$	0.3	0.4

вер-сти

M – мат

D – дисп

E – exp.

Var – variance

группа

$H(X)$ – энтропия X (объём инфо)

$H(Y|X)$ – сколько (доп.) инфо Y даёт после уг-го X

$KL(X||Y)$ – див. Кульбака-Лейблера (сколько лишних вопросов зададим, чтобы узнать Y, думая, что угадываем X)

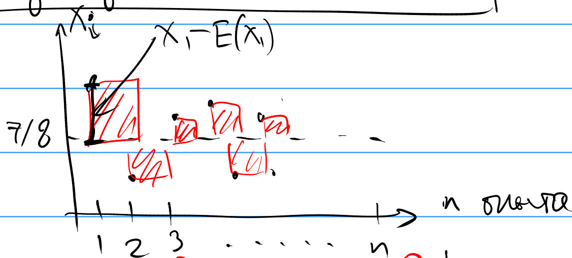
Пример 1

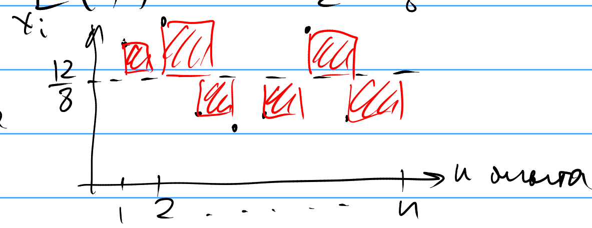
x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) \overset{?}{=} 7/8$

$E(Y) \overset{?}{=} 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{12}{8}$





$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

(т. Пифагора)

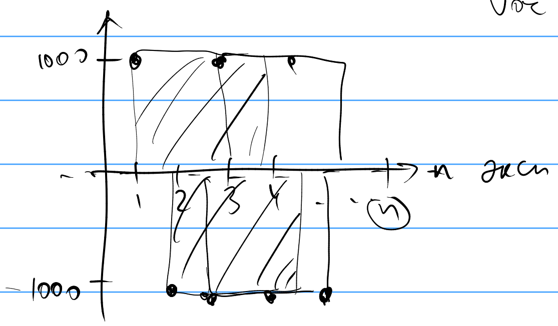
$$Var(X) = E(X^2) = 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{8} - \frac{7^2}{8^2} =$$

$$= \frac{120-49}{64} = \frac{71}{64}$$

$$Var(Y) = 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} - 1.5^2 = \frac{14}{4} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \frac{80}{64}$$

$$Var(X) < Var(Y)$$



z	-1000	1000
$P(Z=z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\underbrace{Var(Z)}_{\parallel} > Var(Y)$$

$$1000^2 = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 1000^2 - 0^2 = 1000^2$$

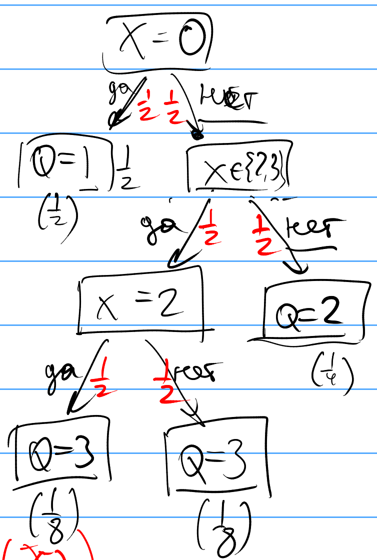
$H(X)$ – сколько бит инфо несёт наблюдение X.

[! сколько $\boxed{\text{в среднем}}$ вопросов нужно задать, чтобы отгадать значение X, зная закон распр-ия при опт-ой стр-ии]

$$H(X) = E(Q) =$$
$$= 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} =$$
$$= \frac{6+4+4}{8} = \frac{14}{8}$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$1 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$	$2 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$	$3 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

w	0	1	2	3
$P(W=w)$	0,1	0,4	0,2	0,3



def $\quad H(X) = E(\log_{1/2} p(X)) = -E(\log_2 p(X))$

где $p(t) = P(X=t)$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$H(X)$ $\qquad$ $H(Y) = 2$

$$\parallel$$

$$\frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Упр

$W^2 = W$ $\qquad$ $R^2 = R$

w	0	1
$P(W=w)$	$1/2$	$1/2$

r	0	1
$P(R=r)$	0,9	0,1

$$E(W^2) - (E(W))^2 = Var(W)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= 0{,}09$$

$$= 1^2 \cdot 0{,}1 - (0{,}1)^2$$

$$Var(R) = E(R^2) - (E(R))^2 =$$

$$H(W) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$\boxed{W=0?}$$

да $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ нет

$Q=1$ $\qquad$ $Q=1$

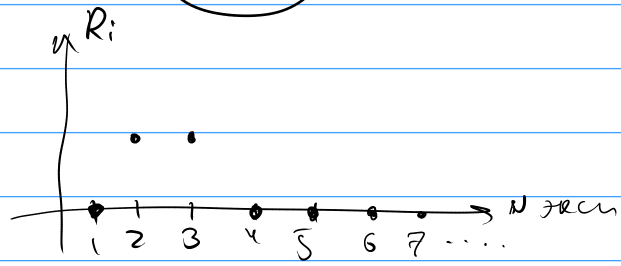
$$E(Q) = 1$$

$$H(R) =$$

$$= 0{,}9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0{,}9 + 0{,}1 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0{,}1 =$$

$$H(X) = \sum_x P(X=x) \cdot \log_{\frac{1}{2}} P(X=x)$$

$$\approx 0{,}47$$



$Cov(X,Y)$

„сила зависимости"

$Cov(X,Y) \neq 0$ значит X и Y зависимы

$Cov(X,Y) = 0$ X и Y могут быть зависимы, а может и нет.

чем удобна Cov?

$\rightarrow$ $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$\rightarrow$ $Cov(X+Z, Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right]$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) \overset{?}{=}$$

$$E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]$$

$$E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

$\boxed{\text{Пример.}}$

	$Y=0$	$Y=2$
$X=0$	0,1	0,2
$X=1$	0,3	0,4

$X\cdot Y=0$

$X\cdot Y=0$

$X\cdot Y=0$

$X\cdot Y=2$

$$E(X) = 0{,}1\cdot 0 + 0{,}2\cdot 0 + 0{,}3\cdot 1 + 0{,}4\cdot 1 = 0{,}7$$

$$E(Y) = 0{,}1\cdot 0 + 0{,}2\cdot 2 + 0{,}3\cdot 0 + 0{,}4\cdot 2 = 1{,}2$$

$$E(X\cdot Y) = 0{,}1\cdot 0 + 0{,}2\cdot 0 + 0{,}3\cdot 0 + 0{,}4\cdot 2 = 0{,}8$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0{,}8 - 1{,}2\cdot 0{,}7 =$$

$$= 0{,}8 - 0{,}84 = -0{,}04$$