

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
2. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
3. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
4. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
5. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
6. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
7. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
8. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
9. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
10. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
11. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
12. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
13. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
14. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
15. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
16. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
17. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

18. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
19. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
20. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
21. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
22. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
23. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
24. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
25. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
26. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
27. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
28. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
29. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
30. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
31. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
32. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
33. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Удачи!

1. Пусть X, Y, Z — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X^2 + Y^2 + Z^2$?

- | | | |
|---------------|-----------------------|---------------|
| a) χ_1^2 | c) нет верного ответа | e) χ_2^2 |
| b) t_3 | d) χ_3^2 | f) χ_2 |

2. По 100 наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной с известной дисперсией, Вася проверял гипотезу $H_0 : \mu = 10$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \mu > 10$.

Оказалось, что выборочное среднее $\bar{X} = 12$. Вася рассчитал тестовую статистику и Р-значение. После этого Вася решил попробовать изменить альтернативную гипотезу на $H_1 : \mu \neq 10$.

Как при этом изменилось Р-значение?

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| a) Выросло, насколько - неизвестно | e) Упало вдвое |
| b) Упало, насколько - неизвестно | c) нет верного ответа |
| d) Не изменилось | f) Выросло вдвое |

3. Величины X и Y одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 3. Вектор (X, Y) имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.6.

Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 3)$.

- | | | |
|---------|--------|-----------------------|
| a) 1.8 | c) 0 | e) 1.92 |
| b) 0.64 | d) 0.6 | f) нет верного ответа |

4. Ковариационная матрица вектора $X = (X_1, X_2)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию разности элементов вектора, $\text{Var}(X_1 - X_2)$.

- | | | |
|-------|-----------------------|-------|
| a) 6 | c) нет верного ответа | e) 12 |
| b) 15 | d) 18 | f) 2 |

5. Величины Z_1, Z_2, \dots, Z_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 1)$.

Какое распределение имеет случайная величина $\frac{2Z_1^2}{Z_2^2 + Z_7^2}$?

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------------|
| a) $F_{1,2}$ | c) $F_{7,2}$ | e) $F_{1,7}$ |
| b) $F_{2,7}$ | d) t_2 | f) нет верного ответа |

6. По случайной выборке размером 400 студентов из всех студентов Вышки доля любителей кричать «Халява приди» равна 0.2.

Найдите правую границу 95%-й асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбираемый студент Вышки любит кричать «Халява приди».

- a) 0.259 c) 0.239 e) 0.319
b) 0.279 d) нет верного ответа f) 0.299

7. Случайные величины X_1, \dots, X_n независимы и имеют функцию плотности

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-x/\sqrt{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$.

Найдите оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

- a) $(\sum_{i=1}^n X_i/2n)^2$ c) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/n}$ e) $\sum_{i=1}^n X_i/n$
b) $\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}/n$ d) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/2n}$

8. Дана реализация выборки: -1, 1, 0, 2.

Найдите выборочный начальный момент второго порядка.

- a) 1.5 c) нет верного ответа e) 1
b) 0.5 d) 0 f) 1.2

9. Пусть X_1, \dots, X_7 — выборка из распределения Бернулли с параметром θ .

Найдите информацию Фишера о параметре θ , содержащуюся в выборке.

- a) $\frac{1}{\theta^2 - \theta}$ c) 7θ e) $7\theta(1 - \theta)$
b) $\frac{1}{\theta - \theta^2}$ d) нет верного ответа f) $\frac{7}{\theta - \theta^2}$

10. Величина X имеет F -распределение с 6 и 13 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^{-1}$?

- a) $F_{6,13}$ c) χ_{19}^2 e) $F_{1/13,1/6}$
b) $F_{1/6,1/13}$ d) $F_{13,6}$ f) нет верного ответа

11. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из распределения Бернулли с параметром θ .

Выберите верное утверждение об эффективности оценки $\hat{\theta} = \bar{X}$, дисперсии и информации Фишера.

- a) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$ c) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = np(1-p)$ e) оценка эффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$
b) оценка неэффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ d) оценка эффективна, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$ f) нет верного ответа

- 5/??

- a) $4n$ c) $\frac{1}{4n^2}$ e) нет верного ответа
 b) $\frac{n}{16}$ d) $\frac{1}{16n}$ f) $\frac{1}{4n}$

19. По выборке X_1, \dots, X_n из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием, проверяется гипотеза о дисперсии $H_0 : \sigma^2 = 30$ против $H_a : \sigma^2 \neq 30$. Известно, что $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 270$.

Чему может быть равна тестовая статистика?

- a) 9 c) 15 e) 27
 b) 6 d) нет верного ответа f) 3

20. Для случайной выборки 1, 2, 3, 4, 5 из нормального распределения найдите границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания.

- a) [3.08, 5.92] c) нет верного ответа e) [1.04, 4.96]
 b) [1.54, 5.46] d) [0.86, 5.14] f) [-4.02, 1, 02]

21. При проверке гипотезы $H_0 : \mu = 4$ по 4 наблюдениям $X_1, \dots, X_4 \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ против двусторонней альтернативной гипотезы оказалось, что $\bar{X} = 7$.

При каком наименьшем уровне значимости нулевая гипотеза будет отвергнута?

- a) 0.13 c) 0.05 e) 0.32
 b) 0.24 d) 0.45 f) нет верного ответа

22. Величина $\hat{\theta}$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(2; 0.01^2)$.

Какое примерное распределение имеет $\hat{\theta}^2$ согласно дельта-методу?

- a) нет верного ответа c) $\mathcal{N}(4; 2 \cdot 0.01^2)$ e) $\mathcal{N}(4; 16 \cdot 0.01^2)$
 b) $\mathcal{N}(4; 8 \cdot 0.01^2)$ d) $\mathcal{N}(4; 4 \cdot 0.01^2)$ f) $\mathcal{N}(2; 4 \cdot 0.01^2)$

23. По выборке X_1, \dots, X_n из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием, проверяется гипотеза о дисперсии $H_0 : \sigma^2 = 30$ против $H_a : \sigma^2 \neq 30$.

Какое распределение будет иметь тестовая статистика?

- a) χ_{n-1}^2 c) t_n e) t_{n-1}
 b) нет верного ответа d) $\mathcal{N}(0, 1)$ f) χ_n^2

24. Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$.

Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ .

- a) $\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ c) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ e) $\frac{2}{3}\bar{X}$
 b) $\sqrt{\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ d) $\frac{3}{2}\bar{X}$ f) нет верного ответа

25. Отличница Машенька получает только 8, 9 или 10. За все годы обучения Маша получила 40 восьмёрок, 50 девяток и 30 десятков.

Найдите значение статистики Пирсона для проверки гипотезы о том, все отличные оценки имеют равную вероятность.

- a) 35 c) 5 e) 25
 b) 15 d) 55 f) нет верного ответа

26. Есть два неизвестных параметра, θ и γ . Вася проверяет гипотезу $H_0: \theta = 1$ и $\gamma = 2$ против альтернативной гипотезы о том, что хотя бы одно из равенств нарушено.

Выберите верное утверждение об асимптотическом распределении статистики отношения правдоподобия, LR .

- a) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_2^2$ c) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_1^2$ e) нет верного ответа
 b) Если верна H_a , то $LR \sim \chi_2^2$ d) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_1^2$ f) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_2^2$

27. Пусть X_1, X_2 — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2 .

Найдите значение константы c , при котором оценка $\hat{\mu} = cX_1 + (1 - c)X_2$ является наиболее эффективной.

- a) 1/2 c) 1/4 e) 2/5
 b) нет верного ответа d) 1/3 f) 1/5

28. Пусть $X \sim \chi_2^2$ и $Y \sim \chi_3^2$ — независимые случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X + Y$?

- a) χ_1^2 c) χ_5^2 e) χ_5
 b) нет верного ответа d) χ_6^2 f) $\mathcal{N}(0; 2)$

29. Величина X имеет t -распределение с 5 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^2$?

- a) $F_{1,5}$ c) нет верного ответа e) $F_{5,5}$
 b) χ_5^2 d) $F_{5,1}$ f) t_{25}

30. Имеются две случайных выборки X_1, \dots, X_{31} и Y_1, \dots, Y_{41} из нормальных распределений. Известно, что $\sum_{i=1}^{31} (X_i - \bar{X})^2 = 120$ и $\sum_{i=1}^{41} (Y_i - \bar{Y})^2 = 400$.

Найдите возможное значение статистики, проверяющей гипотезу о равенстве дисперсий данных распределений.

- | | | |
|--------|---------|-----------------------|
| a) 0.3 | c) 2.52 | e) нет верного ответа |
| b) 2.5 | d) 3.33 | f) 2 |

31. Выборочные доли, вычисленные по двум независимым выборкам из распределений Бернулли с неизвестными вероятностями успеха, оказались равны 0.75. Каждая выборка содержит 100 наблюдений.

Найдите длину 95%-го доверительного интервала для разницы вероятностей успеха.

- | | | |
|---------|-----------------------|---------|
| a) 0.06 | c) нет верного ответа | e) 0.24 |
| b) 0.19 | d) 0.94 | f) 0.61 |

32. Винни-Пух строит доверительный интервал для разности математических ожиданий по двум независимым нормальным выборкам размера m и n при неизвестных равных дисперсиях.

Какое распределение ему можно использовать?

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $\mathcal{N}(0; m + n - 2)$ | c) $t_{m-1, n-1}$ | e) χ^2_{m+n-2} |
| b) t_{m+n} | d) нет верного ответа | f) t_{m+n-2} |

33. Известно истинное значение параметра, $\theta = 1$, и информация Фишера о параметре θ , заключенная в одном наблюдении, $I_1(\theta) = 8$.

Найдите примерное распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ , найденной по ста наблюдениям случайной выборки.

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| a) $\mathcal{N}(1, 1/8)$ | c) $\mathcal{N}(1, 1/800)$ | e) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{800})$ |
| b) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{8})$ | d) $\mathcal{N}(1, 8)$ | f) нет верного ответа |