

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f2. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f3. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f4. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f5. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f6. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f7. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f8. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f9. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f10. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f11. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f12. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f13. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f14. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f15. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f16. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f17. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f18. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f19. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f20. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f21. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f22. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f23. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f24. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f25. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f26. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f27. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f28. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f29. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f30. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f31. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f32. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f33. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Удачи!

1. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из распределения Бернулли с параметром θ .

Выберите верное утверждение об эффективности оценки $\hat{\theta} = \bar{X}$, дисперсии и информации Фишера.

- | | | |
|---|---|--|
| a) оценка неэффективна,
$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ | c) оценка неэффективна,
$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$ | e) нет верного ответа |
| b) оценка эффективна,
$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ | d) оценка эффективна,
$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{n}{p(1-p)}$ и $I(\theta) = \frac{p(1-p)}{n}$ | f) оценка неэффективна,
$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$ и $I(\theta) = np(1-p)$ |

2. Величина X имеет F -распределение с 2 и 12 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^{-1}$?

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|
| a) $F_{12,2}$ | c) нет верного ответа | e) χ^2_{14} |
| b) $F_{1/2,1/12}$ | d) $F_{2,12}$ | f) $F_{1/12,1/2}$ |

3. По случайной выборке размером 100 студентов из всех студентов Вышки доля любителей кричать «Халява приди» равна 0.5.

Найдите правую границу 95%-й асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбираемый студент Вышки любит кричать «Халява приди».

- | | | |
|-----------------------|----------|----------|
| a) 0.698 | c) 0.598 | e) 0.748 |
| b) нет верного ответа | d) 0.648 | f) 0.798 |

4. Выберите верное определение эффективности оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ в некотором классе оценок \mathcal{K} .

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ | полнено $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathbb{E}((T - \theta)^2)$ | d) нет верного ответа |
| b) Для любой оценки T из класса \mathcal{K} и любого θ вы- | c) $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ | e) $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ |
| | | f) $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ |

5. По выборке X_1, \dots, X_n из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием, проверяется гипотеза о дисперсии $H_0: \sigma^2 = 30$ против $H_a: \sigma^2 \neq 30$.

Какое распределение будет иметь тестовая статистика?

- | | | |
|-------------------|------------------------|-----------------------|
| a) χ^2_{n-1} | c) t_n | e) нет верного ответа |
| b) t_{n-1} | d) $\mathcal{N}(0, 1)$ | f) χ^2_n |

6. Отличница Машенька получает только 8, 9 или 10. За все годы обучения Маша получила 40 восьмёрок, 30 девяток и 50 десятков.

Найдите значение статистики Пирсона для проверки гипотезы о том, все отличные оценки имеют равную вероятность.

- | | | |
|--------|--------|-----------------------|
| a) 0 | c) 1.2 | e) нет верного ответа |
| b) 0.5 | d) 1.5 | f) 1 |

12. Пусть X_1, X_2 — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2 .

Найдите значение константы c , при котором оценка $\hat{\mu} = cX_1 + (1 - c)X_2$ является наиболее эффективной.

- | | | |
|-----------------------|--------|--------|
| a) нет верного ответа | c) 2/5 | e) 1/2 |
| b) 1/4 | d) 1/5 | f) 1/3 |

13. Ковариационная матрица вектора $X = (X_1, X_2)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию разности элементов вектора, $\text{Var}(X_1 - X_2)$.

- | | | |
|-------|-------|-----------------------|
| a) 6 | c) 2 | e) нет верного ответа |
| b) 15 | d) 12 | f) 18 |

14. Величины Z_1, Z_2, \dots, Z_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 1)$.

Какое распределение имеет случайная величина $\frac{Z_1\sqrt{n-3}}{\sqrt{\sum_{i=4}^n Z_i^2}}$?

- | | | |
|-----------------------|-------------------|------------------------|
| a) t_{n-3} | c) χ_{n-4}^2 | e) t_{n-1} |
| b) нет верного ответа | d) $F_{1,n-2}$ | f) $\mathcal{N}(0, 1)$ |

15. Пусть $X \sim \chi_2^2$ и $Y \sim \chi_3^2$ — независимые случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X + Y$?

- | | | |
|-----------------------|---------------|------------------------|
| a) нет верного ответа | c) χ_1^2 | e) $\mathcal{N}(0; 2)$ |
| b) χ_6^2 | d) χ_5^2 | f) χ_5 |

16. Величины Z_1, Z_2, \dots, Z_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 1)$.

Какое распределение имеет случайная величина $\frac{2Z_1^2}{Z_2^2 + Z_7^2}$?

- | | | |
|--------------|-----------------------|--------------|
| a) $F_{7,2}$ | c) нет верного ответа | e) $F_{1,2}$ |
| b) $F_{1,7}$ | d) $F_{2,7}$ | f) t_2 |

17. При каком условии последовательность оценок \hat{a}_n параметра a является состоятельной?

- a) $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ c) нет верного ответа e) $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} a$
 b) $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} \hat{a}_n$ d) $\hat{a}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ f) $\mathbb{E}((\mathbb{E}(\hat{a}_n) - a)^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} \hat{a}_n$

18. По 100 наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной с известной дисперсией, Вася проверял гипотезу $H_0 : \mu = 10$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \mu > 10$.

Оказалось, что выборочное среднее $\bar{X} = 12$. Вася рассчитал тестовую статистику и Р-значение. После этого Вася решил попробовать изменить альтернативную гипотезу на $H_1 : \mu \neq 10$.

Как при этом изменилось Р-значение?

- a) Выросло, насколько - неизвестно e) нет верного ответа
 b) Упало, насколько - неизвестно c) Упало вдвое
 d) Не изменилось f) Выросло вдвое

19. Величина X имеет t -распределение с 9 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^2$?

- a) нет верного ответа c) $F_{9,1}$ e) t_{81}
 b) $F_{1,9}$ d) $F_{9,9}$ f) χ^2_9

20. Случайные величины X_1, \dots, X_n независимы и имеют функцию плотности

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-x/\sqrt{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$.

Найдите оценку неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.

- a) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/n}$ c) $\sum_{i=1}^n X_i/n$ e) $(\sum_{i=1}^n X_i/2n)^2$
 b) $\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}/n$ d) $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i/2n}$

21. Случайные величины X и Y распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается 20 наблюдений случайной величины X и 30 наблюдений случайной величины Y .

Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

- a) $F_{20,30}$ c) t_{48} e) χ^2_{48}
 b) нет верного ответа d) $F_{29,19}$ f) χ^2_{49}

22. Пусть X, Y, Z — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Какое распределение имеет случайная величина $X^2 + Y^2 + Z^2$?

- a) χ_1^2 c) χ_2^2 e) χ_2
b) t_3 d) нет верного ответа f) χ_3^2

23. Известно истинное значение параметра, $\theta = 1$, и информация Фишера о параметре θ , заключенная в одном наблюдении, $I_1(\theta) = 8$.

Найдите примерное распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ , найденной по ста наблюдениям случайной выборки.

- a) $\mathcal{N}(1, 8)$ c) $\mathcal{N}(1, 1/8)$ e) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{800})$
b) $\mathcal{N}(1, 1/800)$ d) $\mathcal{N}(1, 1/\sqrt{8})$ f) нет верного ответа

24. Величина $\hat{\theta}$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(2; 0.01^2)$.

Какое примерное распределение имеет $\hat{\theta}^2$ согласно дельта-методу?

- a) $\mathcal{N}(4; 2 \cdot 0.01^2)$ c) $\mathcal{N}(2; 4 \cdot 0.01^2)$ e) нет верного ответа
b) $\mathcal{N}(4; 8 \cdot 0.01^2)$ d) $\mathcal{N}(4; 16 \cdot 0.01^2)$ f) $\mathcal{N}(4; 4 \cdot 0.01^2)$

25. Величины X и Y одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 4. Вектор (X, Y) имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.7.

Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 3)$.

- a) нет верного ответа c) 0.51 e) 2.1
b) 0.7 d) 2.04 f) 0

26. Пусть X_1, \dots, X_7 — выборка из распределения Бернулли с параметром θ .

Найдите информацию Фишера о параметре θ , содержащуюся в выборке.

- a) $7\theta(1 - \theta)$ c) $\frac{1}{\theta - \theta^2}$ e) $\frac{1}{\theta^2 - \theta}$
b) $\frac{7}{\theta - \theta^2}$ d) 7θ f) нет верного ответа

27. При проверке гипотезы $H_0 : \mu = 4$ по 4 наблюдениям $X_1, \dots, X_4 \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ против двусторонней альтернативной гипотезы оказалось, что $\bar{X} = 7$.

При каком наименьшем уровне значимости нулевая гипотеза будет отвергнута?

- a) нет верного ответа c) 0.32 e) 0.45
b) 0.05 d) 0.24 f) 0.13

28. Для случайной выборки 1, 2, 3, 4, 5 из нормального распределения найдите границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания.

- a) [1.54, 5.46] c) [0.86, 5.14] e) [−4.02, 1, 02]
b) [3.08, 5.92] d) нет верного ответа f) [1.04, 4.96]

29. Выборочные доли, вычисленные по двум независимым выборкам из распределений Бернулли с неизвестными вероятностями успеха, оказались равны 0.75. Каждая выборка содержит 100 наблюдений.

Найдите длину 95%-го доверительного интервала для разницы вероятностей успеха.

- | | | |
|-----------------------|---------|---------|
| a) нет верного ответа | c) 0.61 | e) 0.06 |
| b) 0.94 | d) 0.24 | f) 0.19 |

30. Найдите дисперсию выборочного среднего, построенного по случайной выборке размера n из экспоненциального распределения с $\lambda = 4$.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------|
| a) $\frac{1}{4n^2}$ | c) $4n$ | e) $\frac{n}{16}$ |
| b) $\frac{1}{16n}$ | d) нет верного ответа | f) $\frac{1}{4n}$ |

31. Есть два неизвестных параметра, θ и γ . Вася проверяет гипотезу $H_0: \theta = 1$ и $\gamma = 2$ против альтернативной гипотезы о том, что хотя бы одно из равенств нарушено.

Выберите верное утверждение об асимптотическом распределении статистики отношения правдоподобия, LR .

- | | | |
|---|---|---|
| a) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_1^2$ | c) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_2^2$ | e) нет верного ответа |
| b) И при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_1^2$ | d) Если верна H_a , то $LR \sim \chi_2^2$ | f) Если верна H_0 , то $LR \sim \chi_2^2$ |

32. По выборке из пяти наблюдений 1, 0, -2, 0, 1 рассчитайте отношение неисправленной выборочной оценки дисперсии к несмещенной (исправленной) оценке дисперсии.

- | | | |
|--------|-----------------------|---------|
| a) 0.8 | c) 0.75 | e) 1.2 |
| b) 1 | d) нет верного ответа | f) 1.25 |

33. Винни-Пух строит доверительный интервал для разности математических ожиданий по двум независимым нормальным выборкам размера m и n при неизвестных равных дисперсиях.

Какое распределение ему можно использовать?

- | | | |
|-------------------|--------------------------------|-----------------------|
| a) t_{m+n} | c) $\mathcal{N}(0; m + n - 2)$ | e) нет верного ответа |
| b) $t_{m-1, n-1}$ | d) t_{m+n-2} | f) χ_{m+n-2}^2 |