1. Разработанный в порядке импортозамещения алгоритм прогнозирования погоды Глафира предсказывает шесть дней подряд, будет ли дождь на следующий день. Глафира верно угадывает погоду с неизвестной вероятностью p каждый раз независимо от других.

   Величины X_1, X_2, ..., X_6 равны 1, если Глафира угадала, и 0, если ошиблась.

   Для вступления в Российский Клуб Гадалок алгоритм Глафира проходит тест Тьюринга:

   Если $\sum_{i=1}^{6} X_i \leq 4$, то гипотеза H_0 о $p = 0.5$ не отвергается.

   Если $\sum_{i=1}^{6} X_i \geq 5$, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы о высоком мастерстве и Глафиру принимают в клуб.

   а) (5 баллов) Найдите вероятность ошибки первого рода.

   б) (5 баллов) Найдите вероятность ошибки второго рода, если альтернативная гипотеза состоит в том, что $p = 0.8$.

   в) (5 баллов) Найдите функцию мощности критерия в зависимости от значения p в альтернативной гипотезе.

2. Обновленный алгоритм Авдотья предсказывает 100 дней подряд, будет ли дождь на следующий день. Она верно угадывает погоду с неизвестной вероятностью $p \in (0.5; 1)$ каждый раз независимо от других. Авдотье удалось угадать погоду в 60 случаях.

   а) (10 баллов) Постройте асимптотический 95%-й доверительный интервал для параметра p, а затем преобразуйте его в интервал для параметра $a = p/(1-p)$ без использования дельта-метода.

   б) (10 баллов) С помощью дельта-метода постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для дисперсии числа угадываний при 10 попытках.

3. Удовлетворенность кота Матроскина рыбалкой, случайная величина X, зависит от неизвестного Шарику параметра θ, числа пойманных рыб. Плотность величины X имеет вид

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, \text{ при } x \in [0;1], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   Шарик хочет протестировать гипотезу H_0: $\theta = 2$ против альтернативной H_1: $\theta = 1$, зная лишь значение X после одной рыбалки.

   а) (10 баллов) С помощью леммы Неймана–Пирсона найдите наиболее мощный критерий, имеющий уровень значимости $\alpha = 0.05$.

   б) (5 баллов) Рассчитайте мощность найденного вами критерия.

4. (10 баллов) Три независимые случайные выборки из трёх наблюдений каждая, (X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3) и (Z_1, Z_2, Z_3), имеют нормальные распределения с разными ожиданиями и дисперсиями равными $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 2$, $\sigma_z^2 = 3$.

   Постройте 95%-й доверительный интервал для суммы ожиданий $\mu_x + \mu_y + \mu_z$, если $\bar{x} = 0.5$, $\bar{y} = 1.0$ и $\bar{z} = 1.5$.

5. Ассистенты Петя и Вася проверяют две домашки. Каждую домашку пишет ровно 45 студентов.

   Ассистенты случайно делят работы между собой, так что Пете всегда достаётся 20 работ, а Васе — 25 работ.

   Итоги проверок представлены в таблице:

Домашка	Ассистент	Выборочное среднее	Выборочная дисперсия
1	Вася	5.6	1.0^2
1	Петя	6.3	1.2^2
2	Вася	5.9	0.9^2
2	Петя	6.5	1.1^2

   Оценки, выставляемые Петей и Васей, хорошо описываются нормальным распределением.

   а) (4 балла) Используя данные по первой домашке, проверьте гипотезу о том, что разброс оценок у Пети и Васи одинаковый против гипотезы о разном разбросе.

   б) (4 балла) Предположим дополнительно, что разбросы оценок Пети и Васи равны. Используя данные по второй домашке, проверьте гипотезу об одинаковой строгости Васи и Пети против гипотезы о большей строгости Васи.

   в) (2 балла) Аккуратно выпишите предположения, использованные при проведении каждого теста.

Для проверки гипотез используйте уровень значимости 0.1.