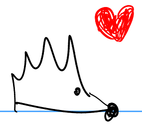
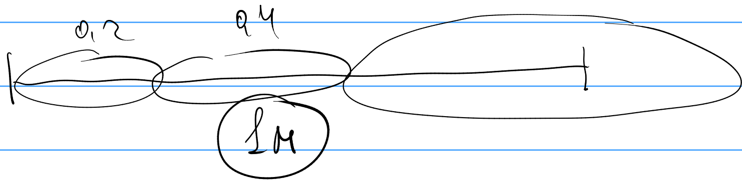


Привет

Упр.



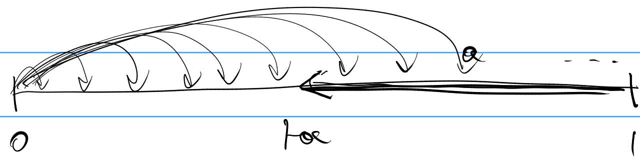
$X_i \sim U[0;1]$ и незав.

$X_1=0{,}2 \quad X_2=0{,}4 \quad X_3=0{,}7$

N – число укусов, чтобы полностью съесть багет

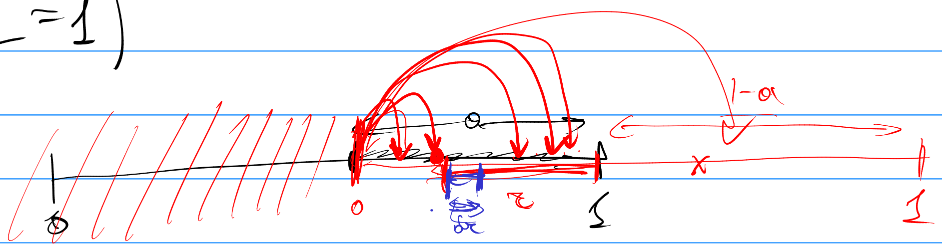
$$N = \min\{t \mid X_1+X_2+\dots+X_t \geq 1\}$$

$E(N)$? $Var(N)$?



$E(N|L=a) = \mu(a)$ $\quad$ L – ост. длина багета

$E(N|L=1)$



$$E(N|L=a) \overset{?}{=} (1-a)\cdot 1 + \int_{t=0}^{a} (E(N|L=t)+1)\cdot 1\, dt$$

$$\boxed{\mu(a) = 1-a + \int_{t=0}^{a} (\mu(t)+1)\cdot dt}$$

$\varepsilon \to 0^+$
$\mu(\varepsilon) = 1$

$$\mu'(a) = 0 - 1 + \mu(a) + 1$$

$$\int_0^{t} h(u)\,du = H(t) - H(0) \qquad H' = h$$

по t

$$\frac{d \int_0^t h(u)\,du}{dt} = h(t)$$

$$\mu'(a) = \mu(a)$$ при $a \leq 1$

нач. условие $\mu(\varepsilon) = 1$ при $\varepsilon \to 0^+$

$$\mu(a) = c \cdot \exp(a)$$

c?

$c = 1$

Итого: $$E(N \mid L = a) = \exp(a) \qquad a \leq 1$$

$$E(N) = e$$

$$\underbrace{E(N^2 \mid L = a)}_{\gamma(a)} = (1-a)\cdot 1^2 + \int_{\tau=0}^{a} E((N+1)^2 \mid L = \tau)\cdot 1 \cdot d\tau$$

$$E(N^2 \mid L=\tau) + 2E(N \mid L=\tau) + 1 = \gamma(\tau) + 2\cdot e^{\tau} + 1$$

$$\gamma(a) = 1 - a + \int_{\tau=0}^{a} (\gamma(\tau) + 2e^{\tau} + 1)\cdot d\tau$$

Идея другого описания случ-х величин.

Для целочисленной: $G(t) = E(t^X)$ $\to G'(t) = E(X \cdot t^{X-1})$

$\leftarrow$ ф-ция порожд-ая вер-сти

$E(X) = G'(1)$

probability gen-ng function

легко найти $E(X)$, $E(X^2)$, ...

для непрерывной:

→ ф-ция порожд-ая моменты $\boxed{M(t) = E(e^{tX})}$ $E(X) = M'(0)$

→ хар-ая ф-ция $\varphi(t) = E(e^{itX})$ $E(X) = \dfrac{\varphi'(0)}{i}$

[всегда сущ-т]

x	2	4	8	16	....
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

Вещь $= E(\text{♔}^X)$

♔ → t, → e^t, → $e^{it} =$

$= (\cos t + i \sin t)$

Упр. как найти $E(X)$ из этих ф-ций?

$M_X(t) = \exp(\exp(t) - 1)$ $\xrightarrow{d/dt,\ t=0}$ $E(X)\ ? = 1$

$\varphi_Y(t) = (1 - it)^{-1}$ $E(Y)\ ?$

$G_Z(t) = \dfrac{2}{3-t}$ $E(Z)\ ?$

начинаем Тейлора $\exp(u) = 1 + u + ...$

$\exp(t) = 1 + t + o(t)$

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = E(X \cdot e^{tX}) \qquad \left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=0} = E(X \cdot e^0) = E(X)}$$

$M'_t = \exp(\exp(t) - 1) \cdot \exp(t) \Big|_{t=0} = e^0 \cdot e^0 = 1$

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_0 = E(iY e^{itY}) = E(iY)$$

$\varphi = E(e^{itY})$

$M(t) = 1 + (\underbrace{\exp(t)}_{1+t} - 1) + o(u) = 1 + t + o(t) =$

$= 1 + (1 + t - 1) + o(t)$

$M'(0)$

$$\boxed{E(Y) = \frac{\varphi'(0)}{i}}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - it} = 1 + it + (it)^2 + (it)^3 + ... = 1 + i \cdot t + i^2 t^2 + i^3 \cdot t^3 + ...$$

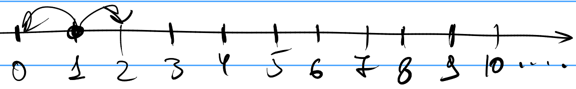
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) t + \frac{\varphi''(0)}{2!} t^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!} t^3 + ...$$

$\varphi'(0) = i$

$E(Y^2) = \dfrac{\varphi''(0)}{i^2}$ $\qquad E(Y) = \dfrac{\varphi'(0)}{i} = 1$ $\qquad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2!$

$E(Y^2) = \dfrac{\varphi''(0)}{i^2} = 2$

Упр. Gambler's ruin problem. 17 век !!



с вер 0.6 +1 рубль.
с вер 0.4 −1 рубль

$S_0 = 1$

$S_t = S_{t-1} + Z_t$

Z_t — незав. один. распр

u	$+1$	-1
$P(Z_t = u)$	0.6	0.4

P(разорюсь на k-м шаге)

$\boxed{P(S_k = 0)\ ?}$

$P(S_1=0)=0.4$ $P(S_2=0)=0$

$P(S_3=0)=0.6\cdot 0.4^2$

Все последов-сти приводящие из 1 в 0? L/R

многочлен от R и L (некомм)

RL^2

$s = L + RLL + R^2L^3 + \ldots$

$L + RLL + \ldots$

$\{L, RLL, \ldots\} = s$

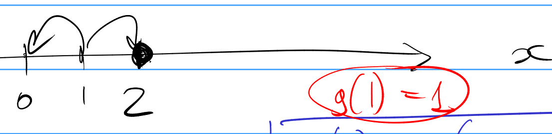
$P(R^2L^3) = 0.6^2 0.4^3$

$\boxed{\text{Первый шаг!}}$

$s = L + R \cdot$ (послед-сти вед-ие из 2 в 1) $\cdot$ (послед-сти вед-ие из 1 в 0)

s s

$s(L,R)$ кодирует последов-сти!



!

$g(1) = 1$

$E(t^X)$

$\boxed{g(t) = s(0.4t, 0.6t)}$

2 → 0

$RLL|RLRLL$

$2 \to 1$ $1 \to 0$

$g(t) = 0.4t + 0.6\cdot 0.4^2 t^3 + 0.6^2 0.4^3 t^5 + \ldots$

$(1+\alpha)^n =$

$s = L + R\cdot s^2$

$g(t) = 0.4t + 0.6t\cdot g^2(t)$

... $g(t) = \ldots$ [дорешать]