

Основная часть

1. (5 баллов) Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{при } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Используя центральный момент второго порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ .

2. (10 баллов) Случайные величины X, Y, Z независимы и нормально распределены, $N(0, 4)$.

$$\gamma_1 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$\gamma_2 = \frac{X}{\sqrt{Y^2 + Z^2}}.$$

Найдите $\mathbb{E}(\gamma_1)$, $\mathbb{E}(\gamma_2)$, $\text{Var}(\gamma_1)$, $\text{Var}(\gamma_2)$, $\mathbb{P}\{\gamma_1 > 2.34\}$, $\mathbb{P}\{\gamma_2 < 0.75\}$.

- 3.1. (5 баллов) Случайный опрос показал, что 87 студентов из 100 с симпатией относятся к Джокеру. Постройте доверительный интервал для истинной доли симпатизирующих Джокеру. Можно ли утверждать, что 90% студентов симпатизируют Джокеру?
- 3.2. (5 баллов) С помощью ЦПТ и теоремы Слуцкого обоснуйте выбор распределения для построения доверительного интервала в предыдущем пункте.
4. (5 баллов) Студенты Петя, Вася и Маша пообедали в «Груше» и в столовой. В таблице приведены стоимости обедов. Считая, что расходы на обед хорошо описываются нормальным распределением, постройте доверительный интервал для разницы математических ожиданий стоимостей обеда в «Груше» и столовой.

	«Груша»	Столовая
Петя	380	350
Вася	600	450
Маша	250	350

5. (30 баллов) По выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ из нормального распределения, $N(0, \theta)$
- (7 баллов) методом максимального правдоподобия оцените параметр θ ,
 - (8 баллов) вычислите математическое ожидание и дисперсию найденной оценки,
 - (2 балла) проверьте несмещенность оценки,
 - (1 балл) проверьте, будет ли оценка асимптотически несмещена,
 - (2 балла) проверьте состоятельность оценки,
 - (2 балла) вычислите информацию Фишера, содержащуюся в выборке,
 - (2 балла) проверьте, является ли найденная оценка эффективной в соответствующем классе,
 - (2 балла) найдите оценку максимального правдоподобия для стандартного отклонения X_1 ,
 - (4 балла) найдите асимптотическую дисперсию оценки из предыдущего пункта.