Привет !! 2021-12-03

Вероятности: Q + A.

4b. Обозначим количество дней до искоренения преступности буквой D. Замечаем, что искомая функция $f(n,w) = \mathbb{E}(D)$ пропорциональна n. Чтобы изловить всех преступников, надо сначала поймать первого и его последователей, потом второго и его последователей и так далее. Методом первого шага получаем уравнение

$$f(1,w) = 1 + 0.05wf(1,w).$$

Отсюда

$$f(n,w) = \frac{n}{1-0.05w}.$$

Альтернативное решение 4b.

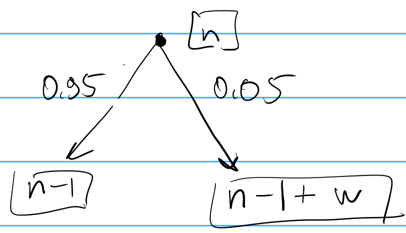
Замечаем, что за каждый день число преступников в среднем падает на $1 - 0.05w$. Получаем

$$\mathbb{E}(D) = n/(1-0.05w).$$

Оценивание: пункт а = 5 баллов, пункт б = 10 баллов.

$$\boxed{\mathbb{E}(D) = f(n,w) = n\cdot ?}$$

$\boxed{\text{сообрази } 1}$



$$f(n,w) = 0{,}95\cdot\left[f(n-1,w)+1\right] + 0{,}05\cdot\left[f(n-1+w,w)+1\right]$$

$$f(1,w) = \alpha$$

$$n\alpha = 0{,}95\left((n-1)\alpha+1\right) + 0{,}05\left((n-1+w)\cdot\alpha + 1\right)$$

$$n\alpha = (n-1)\alpha + 1 + 0{,}05\cdot w\cdot\alpha$$

$$n\alpha - (n-1)\alpha - 0{,}05w\alpha = 1$$

$$\alpha\cdot(1 - 0{,}05w) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{1-0{,}05w} = f(1,w)$$

$$f(n,\alpha) = \frac{n}{1-0{,}05w}$$

[Неверная* логика с верными ответами]

* можно испр-ить

X_i — сокращение числ. преступников за i-ый день.

$$E(X_i) = 0.95(1) + 0.05(1-w) = 1 - 0.05w$$

$$\boxed{E(X_1 + \dots + X_d) = d \cdot (1 - 0.05w)}$$

d — конст

[логич. провал]

$$E(D) = d$$

!

D зависит от $X_1, X_2, \dots$

[оч. тонкий лёд, спасает тождество Вальда]

$$d \cdot (1 - 0.05w) = n \qquad d = \frac{n}{1 - 0.05w}$$

$$(X_7 \mid D = 7)$$

$$P(X_7 = 1 \mid D = 7) = 1 \quad \text{без.} \; 0.95$$

$$P(X_7 = 1 - w \mid D = 7) = 0 \quad 0.05$$

Тождество Вальда: Если [текст] „D не дом. в будущее"

соб $\{D = k\}$ можно выразить через $X_1, X_2, \dots X_k$, X_i ~ одинак-во распр-ые

То

$$E(\overbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_D}^{n}) = \underbrace{E(D)}_{?} \cdot \underbrace{E(X_1)}_{1 - 0.05w}$$

число случ. слаг.

1. Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, равномерно распределённых на интервале $(0;2)$. Найдите пределы:

а) (2 балла)

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}; = 0$$

$U[0;2]$

$X_n \sim U[0;2]$ (здр. смысл)

б) (2 балла)

$$0 = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\ldots+X_{10}}{n};$$

$\in [0;20]$

$X_1+\ldots+X_{10} \not\sim U$

в) (2 балла)

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)^2;$$

г) (4 балла)

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n} - \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right).$$

$\boxed{\varepsilon > 0 \text{ фиксируем!}}$

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right] = P[X_n > n\cdot\varepsilon] \longrightarrow 0$$

начиная с некоторого номера $n\cdot\varepsilon$ станет >2

$n \to \infty$

X_n 0 2

начиная с $n = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$

$$\operatorname{plim} \frac{X_n}{n} = 0$$

начиная с $n=2$

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) = P\left(1 - \frac{X_n}{n} > \varepsilon\right) = P\left(\frac{X_n}{n} < 1-\varepsilon\right) \to 1$$

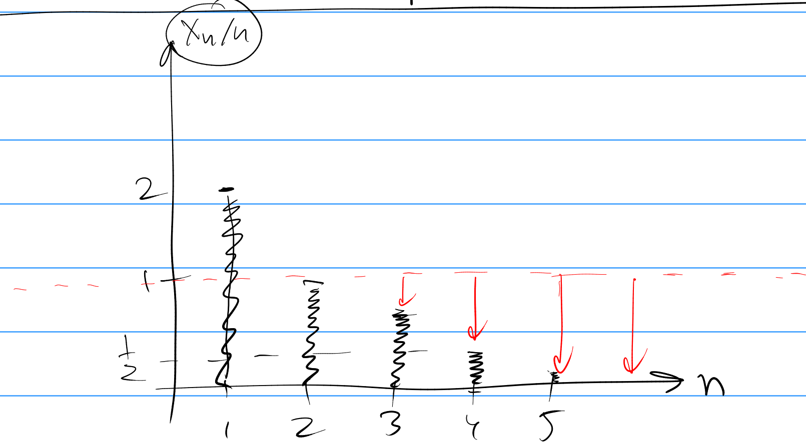
$X_n \in [0;2]$

$\frac{2}{n}$ $1-\varepsilon$ 1

$\frac{X_n}{n} \in \left[0; \frac{2}{n}\right]$

$$\operatorname{plim} R_n = R$$

С ростом n вероятность отличия R_n от R больше чем на ε стремится к 0.



[достат. условие]

З.Б.Ч. Если $X_1, X_2, \dots$ незав и один. распр и $E(X_i)=\mu$ то

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right) = E(X_1)$$

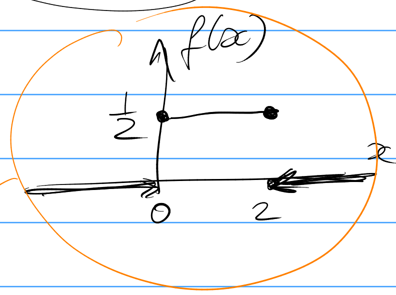
$$1 = E(X_i) = \frac{0+2}{2}$$

б) $$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\boxed{\text{Если } f \text{ непр, то } \operatorname*{plim}_{n\to\infty} f(R_n) = f\left(\operatorname*{plim}_{n\to\infty} R_n\right)}$$

г) $$\operatorname{plim} \left(\frac{X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2}{n} - \frac{X_1+X_2+X_3+\dots+X_n}{n}\right) =$$

$$= E(X_1^2) - \underbrace{E(X_1)}_{1}$$



$$E(X_1^2) = \int_0^2 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{2\cdot 3}\right|_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{\sum X_i^2}{n} - \frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$R_n \xrightarrow{P} R \qquad R_n \xrightarrow{dist} R \qquad R_n \xrightarrow{L^2} R \qquad R_n \xrightarrow{a.s.} R$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} R_n = R$$

* добавить! в 11.3

11.3 Известно, что $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathbb{E}(X^2) = 20$, $\mathbb{E}(X^3) = 10$, $\mathbb{E}(X^4) = 10000$.

1. Найдите $\boxed{\text{проекцию}}$ величины X на множество констант. Отв: 4
2. Найдите проекцию величины X на множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Отв $X-4$
3. Найдите $\cos(X, X^2)$.
4. Обозначим проекции X и X^2 на множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием буквами R и S. Найдите $\cos(R, S)$. Как он связан с корреляцией $\text{Corr}(X, X^2)$?

Опр. $$\text{dist}(X,Y) = \sqrt{E\left((X-Y)^2\right)}$$

x, y, $\mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}$$

Упр. X_1 и X_2 незав

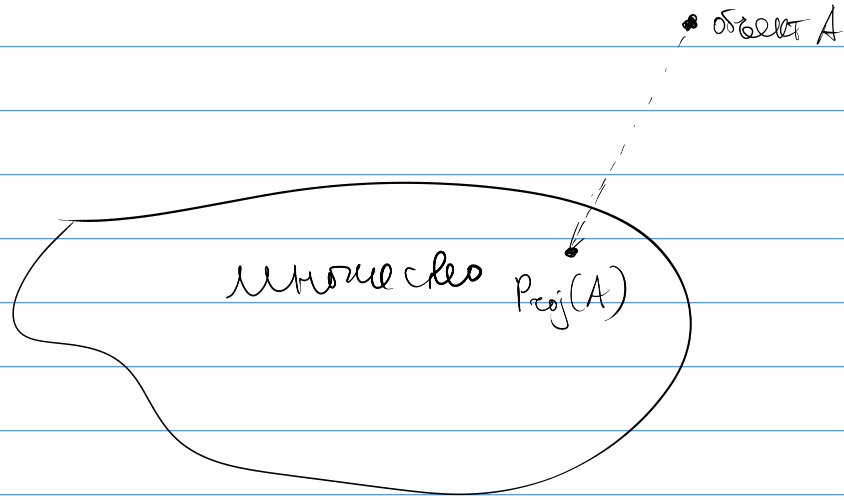
u	0	1
$P(X_i = u)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	$X_2=0$	$X_2=1$
$X_1=0$	$1/4$	$1/4$
$X_1=1$	$1/4$	$1/4$

$$\text{dist}(X_1, X_2) = \sqrt{E\left((X_1-X_2)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}1 + \frac{1}{4}1 + \frac{1}{4}\cdot 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E(Z^2) = \text{Var}(Z) + (E(Z))^2$$



$$\min_c \sqrt{E\left((X-c)^2\right)} \iff \min_c E\left((X-c)^2\right)$$

c — const.

$$Q(c) = E\left((X-c)^2\right) =$$

X — с.в.
c — const

$$= E\left(X^2 - 2cX + c^2\right) = 20 - 2c\cdot E(X) + c^2$$

$$= 20 - 2c\cdot 4 + c^2 \to \min_c$$

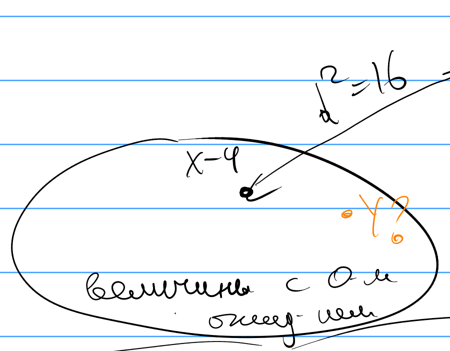
$$c^* = \boxed{-\frac{b}{2a}} = \frac{8}{2\cdot 1} = 4$$

$$\text{dist}^2(X,Y) = \langle X-Y, X-Y\rangle$$

$$\cos(X,Y) = \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|}$$

$$E\left[(X-(X-4))^2\right] = E[16] = 16 = dist^2(X, X-4)$$

есть ли Y? т. что $E(Y)=0$ $dist^2(X,Y) < 16$?



$$dist^2(X,Y) = E\left((X-Y)^2\right) = Var(X-Y) + \left(E(X-Y)\right)^2 =$$

$$= Var(X-Y) + (4-0)^2 = Var(X-Y) + 16$$

Ближе к X чем $(X-4)$ никого нет!