

ЛИСТОК 2 ТВ [2021–2022]

**Задача 1.** Докажите, что если  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$ , то  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$ .

**Задача 2.** Докажите, что если  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ , то  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$ .

**Задача 3.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Верно ли, что для всякого числа  $p \in [0; 1]$  существует событие  $A \in \mathcal{F}$ , что  $\mathbb{P}(A) = p$ ?

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{P}(A) = 1/2$  и  $\mathbb{P}(B) = 2/3$ . Покажите, что  $1/6 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/2$ . Приведите примеры, которые показывают, что значения  $1/6$  и  $1/2$  достигаются.

**Задача 5.** Какое наименьшее и наибольшее значение может принимать вероятность  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ , если  $\mathbb{P}(A) = 0.7$ ,  $\mathbb{P}(B) = 0.8$  и  $\mathbb{P}(C) = 0.9$ ?

**Задача 6.** Пусть все числа из отрезка  $[0; 1]$  представлены в виде бесконечных десятичных дробей без «9» в периоде. Из данного отрезка наудачу извлекается одна точка. Найдите вероятность того, что десятичное разложение выбранной точки не содержит цифры «6».

**Задача 7.** Какие значения может принимать величина  $p$ , если  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = p$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = p^2$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ ?

**Задача 8.** Пусть события  $A$  и  $B$  независимы. Докажите, что независимы события: (a)  $A$  и  $B^c$ ; (b)  $A^c$  и  $B^c$ .

**Задача 9.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — события, причем события  $A$  и  $B$  независимы. Верно ли, что  $\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | C) \cdot \mathbb{P}(B | C)$ ?

**Задача 10.** Пусть события  $A$ ,  $B$  и  $C$  независимы в совокупности. Докажите, что  $1 - e^{-(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C))} \leq \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$ .

**Задача 11.** Пусть события  $A$  и  $B$  независимы, а также события  $B$  и  $C$  независимы. Верно ли, что события  $A$  и  $C$  независимы?

**Задача 12.** В урне три белых шара и семь черных. Из урны наудачу достали один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны достали ещё один шар, который оказался черным. Найдите вероятность того, что шар, отложенный в сторону, также является черным.

**Задача 13.** Вася и Петя по очереди извлекают шары (без возвращения) из урны. Урна содержит 2 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто первым извлечет белый шар. Вася начинает игру первым. Найдите вероятность выигрыша Васи.