

1.



Протрезвел я в цветах, а вокруг уже ночь,  
 Лепестков облетевших одежда полна.  
 Вдоль ручья побреду я куда-нибудь прочь,  
 Где ни птиц, ни людей, только в небе луна.

Ли Бо

Бессмертный гений поэзии Ли Бо очнулся в случайной равномерно распределенной точке круглой поляны радиусом в один ли. В центре поляны находится розовый куст.

- а) Найдите функцию плотности расстояния от Ли Бо до розового куста в ли.
- б) Найдите математическое ожидание и дисперсию этого расстояния.

2. Величина  $X$  распределена нормально  $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ .

- а) Найдите  $\mathbb{E}(|X|)$ .
- б) Найдите функцию плотности  $|X|$ .
- в) Представьте себе, что вы видите только значения  $X$ , большие 1. Найдите функцию плотности наблюдаемой случайной величины и вычислите её математическое ожидание.

3. Кот Матроскин забрасывает удочку 10 раз. Вероятность поймать рыбку при одном забрасывании равна  $p$ . Пёс Шарик забрасывает удочку случайное пуассоновское количество раз,  $N$ , под настроение. Известно, что  $\mathbb{E}(N) = 10$ .

У кого шансы поймать хотя бы одну рыбку выше?

4. Пёс Шарик и Кот Матроскин каждый день в течение месяца покупают молоко в розлив. Цена молока в  $i$ -ый день — константа  $m_i$ . Средняя цена молока за прошедший месяц оказалась равной 40 рублям. Пёс Шарик каждый день покупал литр молока. Кот Матроскин каждый день покупал молока на 40 рублей.
- а) Кто больше потратил денег?
  - б) Кто больше молока купил?
5. Случайным образом на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  равномерно выбирается точка. Её координаты — случайные величины  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .
- а) Найдите функцию плотности величины  $X$ .
  - б) Найдите совместную функцию плотности пары величин  $X$  и  $Y$ .
  - в) Найдите ковариацию величин  $X$  и  $Y$ .
6. Компания кабельного телевидения НВТ, Новая Вершина Телевидения, анализирует возможность присоединения к своей сети пригородов N-ска. Опросы показали, что в среднем каждые 3 из 12 семей жителей пригородов хотели бы стать абонентами сети. Стоимость работ, необходимых для организации сети в любом пригороде оценивается величиной 2 000 000 у.е. При подключении каждого пригорода НВТ надеется получить 1 000 000 у.е. в год от рекламодателей. Планируемая чистая прибыль от оплаты за кабельное телевидение одной семьей в год равна 120 у.е.
- Каким должно быть минимальное количество семей в пригороде для того, чтобы с вероятностью 0.95 расходы на организацию сети в этом пригороде окупились за год?
7. Неправильный кубик выпадает с вероятностью 0.5 шестеркой вверх. Остальные пять граней выпадают равновероятно. Случайная величина  $X$  — остаток от деления номера грани на два,  $Y$  — остаток от деления номера грани на три.
- а) Найдите закон распределения  $\mathbb{E}(X | Y)$ ,  $\mathbb{E}(Y | X)$ .
  - б) Выразите  $\mathbb{E}(Y | X)$  через  $X$ , а  $\mathbb{E}(X | Y)$  через  $Y$ .
  - в) Найдите  $\text{Cov}(\mathbb{E}(Y | X), \mathbb{E}(X | Y))$ ,  $\text{Cov}(\mathbb{E}(Y | X), X)$ ,  $\text{Cov}(Y, X)$ .
8. Величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием 10 и дисперсией 20. Найдите примерный закон распределения величин  $\bar{X}^2$ ,  $(1 + \bar{X})/(\bar{X}^2 + 5)$  при большом  $n$ .