Д. А. Борзых, НИУ ВШЭ, ФЭН

ЛИСТОК 3 ТВ [2021–2022]

Задача 1. Вася играет в следующую игру. В урне пять белых и пять черных шаров. Из урны наудачу извлекают два шара. Если извлеченные шары оказались одного цвета, то Вася получает 10000 руб., а если — разных цветов, то теряет 10000 рублей. Найдите математическое Васиного выигрыша. Выгодно ли ему играть в эту игру?

Задача 2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2, \\ \frac{x+2}{4} & \text{при } -2 \le x < 0, \\ 1 - x & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

Найдите

(a) $\mathbb{E}[X]$;

(b) медиану случайной величины X;

(c) $F_X(x)$.

Задача 3. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{3}{x^4} & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

(a) Найдите функцию распределения случайной величины $Y = 1/X$.

(b) Найдите плотность распределения случайной величины $Y = 1/X$.

Задача 4. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(0;1)$. Пусть $Y = -\ln(1-X)$. Найдите

(a) функцию распределения случайной величины Y;

(b) плотность распределения случайной величины Y;

(c) математическое ожидание случайной величины Y.

Задача 5. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{при } x < 0, \\ e^{-2x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

(a) Найдите математическое ожидание случайной величины X.

(b) Найдите функцию распределения случайной величины X.

Задача 6. Пусть случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина Y имеет дискретное распределение с таблицей распределения

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}_Y$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

Задача 7. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$, а случайная величина Y имеет плотность распределения

$$f_Y(y)=\begin{cases}6y(1-y) & \text{при } y\in[0;1],\\ 0 & \text{при } y\notin[0;1].\end{cases}$$

Известно, что случайные величины X и Y независимы. Найдите

(a) $\mathbb{E}[X+Y]$,

(b) $\mathrm{D}(X+Y)$,

(c) $f_{X+Y}(z)$.

Задача 8. Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с параметрами $\mu=1$ и $\sigma^2=4$. Найдите

(a) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$,

(b) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$,

(c) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$,

(d) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

Задача 9. Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с плотностью распределения $f(x)=2e^{-2x}$ при $x\geq 0$. Найдите

(a) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$,

(b) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$,

(c) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}}$,

(d) $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

Задача 10. Общая выручка фирмы за 100 дней складывается из однодневных доходов, которые имеют равномерное распределения от 100 до 200 тыс. руб. Общие расходы фирмы также складываются из однодневных расходов, которые имеют равномерное распределение от 50 до 150 тыс. руб.

(a) Приближенно рассчитайте вероятность того, что общая выручка фирмы за 100 дней превысит 18 млн. руб.

(b) Приближенно рассчитайте вероятность того, что прибыль фирмы за 100 дней превысит 7 млн. руб.

(c) С помощью неравенства Берри–Эссеена оцените погрешность вычислений из пункта (a).

Задача 11. Для независимых равномерно распределенных на отрезке $[-2;2]$ случайных величин $X_1,\dots,X_n,\dots$ найдите предел $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{|X_1+\ldots+X_n|>\sqrt{3n}\right\}\right)$.

Задача 12. Пусть X_n и Y_n — независимые пуассоновские случайные величины с параметром n. Найдите предел $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left\{X_n-Y_n\le\sqrt{2n}\right\}\right)$.

Задача 13. Пусть $X\sim\mathrm{Bi}(2,\,p)$ и $Y\sim\mathrm{Bi}(3,\,p)$ — независимые случайные величины. С помощью производящих функций докажите, что $X+Y\sim\mathrm{Bi}(5,\,p)$.

Задача 14. Пусть $X\sim\mathrm{Pois}(2)$ и $Y\sim\mathrm{Pois}(3)$ — независимые случайные величины. С помощью производящих функций докажите, что $X+Y\sim\mathrm{Pois}(5)$.

Задача 15. Найдите законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

(a) $\frac{1}{2-t}$;

(b) $\exp(3(t-1))$;

(c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\right)^{2021}$.