Содержание

1. Quick start

При определении функции плотности рассказывать единицы измерения. Длина пойманного удава, случайная величина измеряется в метрах, dx измеряется в метрах. Вероятность — безразмерная, значит плотность должна быть в метрах$^{-1}$.

Бета распределение логично вводить после равномерного на отрезке.

А второй раз — как отношение гамма-распределений.

И бета и гамма удобнее сначала ввести в качестве частного случая с помощью техники о-малых.

Метод Ван-Гога! Как правильно отрезать уши на графе?

Задача про камень-ножницы-бумагу. Задача про число шестёрок при парных бросках кубика. Что будет раньше?

От аксиом Гершеля-Максвелла легко выйти на нормальность линейной комбинации нормальных! Берём и дополняем нужную нам линейнейную комбинацию до ортонормированного базиса! Всё!

Давать два определения ковариации! И дисперсии!

https://math.stackexchange.com/questions/2423658/covariance-of-increasing-functions-of-

Одно — с парами величин и делением на два!

Гибридная функция плотности (название?) для пары дискретная-непрерывная. Тут можно много задач создать! https://math.stackexchange.com/questions/887128/find-the-distribution-when-parameter-is-random https://math.stackexchange.com/questions/1622003/joint-cdfs-of-both-continuous-and-discrete-random-variables

Мартингал в дискретном времени лучше определять через $\mathbb{E}(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$, а равенство для $\mathbb{E}(M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$ лучше доказывать как свойство. Слабым студентам проще понять, что достаточно проверить мартингальное свойство только для шага в единицу времени.

Определение 1.1 (Случайная величина)**.** *Случайная величина* — это функция из множества исходов эксперимента Ω в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

По европейской традиции случайные величины обычно обозначают с помощью заглавных букв, в российской традиции обычно используют греческие буквы.

Если случайная величина моделирует время наступления какого-то события, то с помощью особого значения $+\infty$ описывают сценарий, в котором событие не наступило. В этом случае множеством значений случайной величины может быть $\{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Теорема 1.2 (Критерий независимости)**.** Случайные величины X и Y независимы, если и только если события $A = \{X \leq x\}$ и $B = \{Y \leq y\}$ независимы для любых действительных чисел x и y.

Теорема 1.3 (Критерий независимости)**.** Случайные величины X и Y независимы, если и только если для любых[1] действительных функций f и g

$$\mathbb{E}(f(X) \cdot g(Y)) = \mathbb{E}(f(X)) \cdot \mathbb{E}(g(Y)).$$

[1] Для которых левая и правая части формулы определены.

В частности, из критерия следует, что для независимых случайных величин X и Y верно равенство $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Теорема 1.4 (Критерий независимости дискретных величин)**.** Дискретные случайные величины X и Y независимы, если и только если события $A = \{X = x\}$ и $B = \{Y = y\}$ независимы для любых действительных чисел x и y.

Метатеорема 1.1 (О доказательствах про дискретные величины.)**.** Все доказательства утверждений о дискретных случайных величинах доказываются перегруппировкой слагаемых.

Определение 1.5. Монета выпадает решкой с вероятностью p при каждом броске независимо от других бросков. Мы подбрасываем монету n раз.

Случайная количество выпавших решек X имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и p.

Биномиальное распределение, $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Определение 1.6. У нас есть монета, выпадающая решкой с вероятностью p при каждом броске независимо от других. Мы подбрасываем монету до выпадения r орлов.

Случайная количество выпавших решек X имеет *отрицательное биномиальное распределение* с параметрами r и p.

Отрицательное биномиальное распределение, $X \sim \mathrm{NBin}(r, p)$

Сходимости случайных величин

Определение 1.7. Последовательность случайных величин (R_n) сходится к случайной величине R, если

$R_n \overset{\text{dist}}{\to} R$

$$\lim \mathbb{P}(R_n \in A) = \mathbb{P}(R \in A)$$

для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ с нулевой вероятностью попадания R в его край, $\mathbb{P}(R \in dA) = 0$.

Классическое определение из типичного учебника немного отличается по формулировке:

Определение 1.8. Рассмотрим последовательность случайных величин R_n с функциями распределения $F_n(x)$ и случайную величину R с функцией распределения $F(x)$. Последовательность случайных величин (R_n) сходится к случайной величине R, если

$R_n \overset{\text{dist}}{\to} R$

$$\lim F_n(x) = F(x)$$

во всех точках непрерывности функции $F()$.

Определения полностью эквивалентны.

Доказательство. Заметим, что классическое определение получается из первого в виде частного случая. Если рассмотреть множество A вида $A = (-\infty, x]$, то граница A — это просто одна точка, $dA = \{x\}$. В этом случае условие $\mathbb{P}(R \in dA) = 0$ превращается в непрерывность функции F в точке x.

В обратную сторону доказательство более техническое и следует из того, что любое множество A можно сконструировать из множеств вида $(-\infty, x]$. При конструировании можно не обращать внимания на границу, в силу требования $\mathbb{P}(R \in dA) = 0$. Например,

для которого вероятность $\mathbb{P}(R \in A)$ определена

$$[5; 6] = (-\infty, 6]\ (-\infty, 5] \cup \{5\}.$$

□

2. Пуассоновский поток

Представим себе Нестареющего Кащея. Он смертен, но исключительно из-за внешних причин, не связанных со своим здоровьем. Скажем, какой-нибудь Иван-Дурак может случайно сломать иглу, спрятанную в яйце. Продолжительность жизни Нестареющего Кащея обозначим величиной X. Если Нестареющий Кащей проживёт s лет, то это никак не изменит его шансы прожить ещё дополнительно t лет. Другими словами, условная вероятность

$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s)$ зависит только от t и не зависит от s. Можно записать это свойство нестарения Кащея в виде уравнения:

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \text{ для любых } s, t > 0.$$

В реальности это свойство бывает выполнено примерно. Если лампочка проработает ещё сутки, то её шансы перегореть за следующий час практически не изменятся. Свойство нестарения или медленного старения встречается довольно часто, и для него существует специальный термин.

Определение 2.1 (Экспоненциальное распределение, отсутствие памяти)**.** Случайная величина X имеет *экспоненциальное распределение*, если X удовлетворяет *условию отсутствия памяти*

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \text{ для любых } s, t > 0.$$