Заметки к семинарам по вероятностям

https://github.com/bdemeshev/probability_pro

12 сентября 2023 г.

Содержание

При везении подсказку, ответ или решение можно найти, кликнув по номеру задачи.

Красивые и сложные олимпиадные задачи по вероятностям можно найти по ссылке https://github.com/bdemeshev/probability_dna, подборку прошлых экзаменов вшэ — https://github.com/bdemeshev/probability_hse_exams, а задачки к семинарам по статистике — https://github.com/bdemeshev/statistics_pro.

1. Вперёд, в рукопашную!

Минитеория:

а) Константы. Строчные английские буквы, a, x, z.

б) События. Заглавные английский буквы начала алфавита A, B, C, D. Вероятность $\mathbb{P}(A)$.

в) Случайные величины. Заглавные английский буквы конца алфавита X, Y, W, Z. Математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$.

Задачи:

1.1 В вазе пять неотличимых с виду конфет. Две без ореха и три — с орехом. Маша ест конфеты выбирая их наугад до тех пор, пока не съест первую конфету с орехом. Обозначим X — число съеденных конфет. Найдите $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}(X)$.

1.2 В коробке находится четыре внешне одинаковые лампочки, две из них исправны. Лампочки извлекают из коробки по одной до тех пор, пока не будут извлечены обе исправные.

а) Какова вероятность того, что опыт закончится извлечением трёх лампочек?

б) Каково ожидаемое количество извлеченных лампочек?

1.3 Маша подкидывает монетку. Если в первый раз монетка выпала орлом, то Маша подкидывает монетку ещё один раз, если решкой — то ещё два раза. Больше Маша монетку не подкидывает! Пусть X — количество выпавших орлов.

Найдите вероятности $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, …и ожидание $\mathbb{E}(X)$.

1.4 Две команды равной силы играют в волейбол до трёх побед одной из них, не обязательно подряд. Ничья невозможна. Из-за равенства сил будем считать, что вероятность победы каждой равна 0.5. Величина N — количество сыгранных партий.

Составьте табличку возможных значений N с их вероятностями.

Найдите $\mathbb{P}(N — \text{чётное})$, $\mathbb{E}(N)$.

1.5 а) Какова вероятность того, что у 30 человек не будет ни одного совпадения дней рождений?

б) Сколько человек должно собраться, чтобы вероятность хотя бы одного совпадения дней рождения превысила $1/2$?

в) Сколько в среднем человек должно войти в комнату, чтобы впервые произошло совпадения дней рождения?

1.6 Саша и Маша по очереди подбрасывают кубик до первой шестёрки. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестерку. Маша бросает кубик первой.

Какова вероятность того, что посуду будет мыть Маша? Сколько в среднем раз они будут бросать кубик?

1.7 Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков? Как изменятся ответы, если вероятность орла будет равна p?

1.8 Вы играете в следующую игру. Кубик подкидывается неограниченное число раз. Если на кубике выпадает 1, 2 или 3, то соответствующее количество монет добавляется на кон. Если выпадает 4 или 5, то игра оканчивается и Вы получаете сумму, лежащую на кону. Если выпадает 6, то игра оканчивается, а Вы не получаете ничего. Изначально на кону лежит ноль рублей.

а) Какова вероятность того, что игра рано или поздно закончится выпадением 6-ки?

б) Какова ожидаемая продолжительность игры?

в) Чему равен ожидаемый выигрыш?

г) Чему равен ожидаемый выигрыш, если изначально на кону лежит 100 рублей?

д) Изменим изначальное условие: если выпадает 5, то сумма на кону сгорает, а игра продолжается. Чему будет равен средний выигрыш в новую игру?

1.9 Саша и Маша подкидывают монетку до тех пор, пока не выпадет последовательность РОО или ООР. Если игра закончится выпадением РОО, то выигрывает Саша, если ООР, то — Маша. Случайная величина X — общее количество подбрасываний, Y — количество выпавших решек.

а) У кого какие шансы выиграть?

б) Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(Y = 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.

в) Решите аналогичную задачу для ОРО и ООР.

1.10 Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

1.11 Саша и Маша решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим X — количество детей в их семье. Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{E}(X)$.

1.12 В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.

а) Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

б) Как изменятся ответы, если вероятность движения по часовой стрелке равна p?

2. Хочу ещё задач!

2.1 Наугад из четырех тузов разных мастей выбираются два. $\mathbb{P}$(они будут разного цвета)?

2.2 События A и B несовместны, то есть не могут произойти одновременно. Известны вероятности $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$. Найдите[1] $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

2.3 Вероятность $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.8$. В каких пределах может лежать $\mathbb{P}(A \cap B)$?

2.4 Множество исходов $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 0,8$, $\mathbb{P}(\{b, c\}) = 0,7$. Найдите $\mathbb{P}(\{a\})$, $\mathbb{P}(\{b\})$, $\mathbb{P}(\{c\})$

2.5 Изначально есть одна амёба. С вероятностью $3/4$ каждая амёба делится на две амёбы, а с вероятностью $1/4$ погибает. Обозначим с помощью X количество поколений до гибели всей колонии амёб.

Найдите вероятности $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ и $\mathbb{P}(X = \infty)$.

2.6 Вася нажимает на пульте телевизора кнопку «On-Off» 100 раз подряд. Пульт старый, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью $\frac{1}{2}$, затем вероятность срабатывания падает. Какова вероятность того, что после всех нажатий телевизор будет включен, если сейчас он выключен?

2.7 Неправильная монетка выпадает орлом с вероятностью p. Чему равно ожидаемое количество орлов? Ожидаемое количество решек?

2.8 Вам предложена следующая игра. Изначально на кону 0 рублей. Раз за разом подбрасывается правильная монетка. Если она выпадает орлом, то казино добавляет на кон 100 рублей. Если монетка выпадает решкой, то все деньги, лежащие на кону, казино забирает себе, а Вы получаете красную карточку. Игра прекращается либо когда Вы получаете третью красную карточку, либо в любой момент времени до этого по Вашему выбору. Если Вы решили остановить игру до получения трех красных карточек, то Ваш выигрыш равен сумме на кону. При получении третьей красной карточки игра заканчивается и Вы не получаете ничего. Вы заинтересованы в максимальном среднем выигрыше.

а) Как выглядит оптимальная стратегия, если только что была получена вторая красная карточка? Чему равен средний выигрыш?

б) Как выглядит оптимальная стратегия, если только что была получена первая красная карточка?

в) Как выглядит оптимальная стратегия в исходной игре? Чему равен средний выигрыш?

2.9 Есть три комнаты. В первой из них лежит сыр. Если мышка попадает в первую комнату, то она находит сыр через одну минуту. Если мышка попадает во вторую комнату, то она ищет сыр две минуты и покидает комнату. Если мышка попадает в третью комнату, то она ищет сыр три минуты и покидает комнату. Покинув комнату, мышка выходит в коридор и выбирает новую комнату наугад, например, может зайти в одну и ту же. Сейчас мышка в коридоре. Сколько времени ей в среднем потребуется, чтобы найти сыр?

---

[1] Событие A^c — это событие противоположное событию A, иногда обозначается $\bar{A}$

2.10 Илье Муромцу предстоит дорога к камню. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из тех дорог снова оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем…И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью (хм, Вы не поверите!) одна третья. У Василисы Премудрой существует Чудо-Карта, на которой видно, какие Змеи Горынычи бодрствуют, а какие — нет.

Какова вероятность того, что Василиса Премудрая сможет найти на карте бесконечный жизненный путь Ильи Муромца проходящий исключительно мимо спящих Змеев Горынычей?

2.11 У Пети есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0;1)$. У Васи есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $1/2$. Они одновременно подбрасывают свои монетки до тех пор, пока у них не окажется набранным одинаковое количество орлов. В частности, они останавливаются после первого подбрасывания, если оно дало одинаковые результаты. Сколько в среднем раз им придётся подбросить монетку?

2.12 Треугольник с вершинами $(0;0)$, $(2;0)$ и $(1;1)$. Внутри него случайным образом выбирается точка, X — абсцисса точки.

Найдите $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(X \in [0.5;1])$, $\mathbb{E}(X)$

2.13 Треугольник с вершинами $(0;0)$, $(2;0)$ и $(2;1)$. Внутри него случайным образом выбирается точка, X — абсцисса точки.

а) Найдите $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(X \in [0.5;1])$;

б) Найдите $\mathbb{E}(X)$ из геометрических соображений. Что больше, $\mathbb{E}(X)$ или 1?

в) Найдите такую линию $x = a$, чтобы вероятности попадания точки правее и левее нее были равны.

2.14 Исследовательница Мишель подкидывает игральный кубик неограниченное количество раз и складывает выпадающие количества очков.

а) Чему примерно равна вероятность того, что однажды сумма в точности будет равна 123456789?

б) Чему точно равна указанная вероятность?

2.15 Упрямая исследовательница Мишель подбрасывает монетку до тех пор, пока количество орлов не окажется в точности равным удвоенному количеству решек. Монетка выпадает орлом с вероятностью p.

Какова вероятность того, что Мишель будет подкидывать монетку вечно?

2.16 Исследовательница Мишель хочет встать утром с правой ноги с вероятностью $1/\sqrt{2}$, и с левой с вероятностью $1 - 1/\sqrt{2}$. Однако для проведения случайных экспериментов у неё есть только одна правильная монетка. Как с помощью правильной монетки ей добиться цели?

2.17 Посмотрим на следующие равенства:

(1) $C_{10}^7 = C_{10}^3$

(2) $C_{10}^3 + C_{10}^4 = C_{11}^4$

(3) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4$

(4) $4C_{10}^4 = 10C_9^3$

(5) $C_{10}^3 C_7^2 = C_{10}^2 C_8^3$

(6) $1 \cdot C_5^1 + 2 \cdot C_5^2 + 3 \cdot C_5^3 + 4 \cdot C_5^4 + 5 \cdot C_5^5 = 5 \cdot 2^4$

(7) Тождество хоккейной клюшки, $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = C_7^3$

(8) Тождество Вандермонда, $C_4^0 C_5^3 + C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1 + C_4^3 C_5^0 = C_9^3$

(9) $(C_5^0)^2 + (C_5^1)^2 + (C_5^2)^2 + (C_5^3)^2 + (C_5^4)^2 = C_{10}^4$

а) Докажите каждое равенство словами, не вычисляя явно левую и правую части.

б) Обобщите каждое равенство, добавив в него n, k и суммы.

в) Докажите каждое полученное общее равенство алгебраически.

2.18 Запишите в виде одного биномиального коэффициента следующие величины:

а) количество различных слов из четырёх букв А и шести букв Б;

б) количество различных слов из четырёх букв А и шести букв Б, в которых буквы А не идут подряд;

в) число способов раздать 4 одинаковых яблока 10 разным людям, не дав никому больше одного;

г) число способов раздать 4 одинаковых яблока 10 разным людям.

2.19 В одном учебнике была предложена следующая задача. «Из ящика, в котором лежат 10 красных и 5 зелёных яблок, выбирают одно красное и два зелёных яблока. Сколькими способами это можно сделать?».

Сформулируйте несколько различных трактовок этой задачи и найдите решение каждой из них.

2.20 Случайная величина X равновероятно принимает значения 1, 2 и 3.

Найдите $\mathbb{P}(\mathbb{E}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(X = 7) = 0)) = 1)$ и $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(X = 1) = 1))))$.

2.21 Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина[2] выбирает равномерно 10 точек на отрезке $[0; 30]$.

Какова вероятность того, что между любыми точками будет расстояние не меньше единицы?

2.22 Аня хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Боря берёт мачете и с завязанными глазами разрубает верёвку в двух случайных независимых местах. Аня забирает себе тот кусок, за который держится. Боря забирает оставшийся кусок. Вся верёвка имеет единичную длину.

а) Чему равна ожидаемая длина куска верёвки, доставшегося Ане?

б) Найдите вероятность того, что у Ани верёвка длиннее.

2.23 Города Левск и Правск соединены железной дорогой. Поезда в обе стороны отправляются из них каждый час одновременно, время в пути составляет ровно час. Стрелочник, живущий в домике при железной дороге, любит подойти к окну в случайный момент времени, дождаться первого проходящего мимо поезда и записать его направление. Поезда обоих направлений в его записях встречаются одинаково часто.

а) В скольки минут пути на поезде от ближайшего города он живёт?

б) Сколько в среднем он ждёт поезда?

---

[2] ابو علی حسین بن عبدالله بن سینا

3. К чёрту условности!

3.1 Имеется три монетки. Две «правильных» и одна — с «орлами» по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает её два раза. Оба раза выпадает «орел». Какова условная вероятность того, что монетка «неправильная»?

3.2 Два охотника одновременно выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.7 независимо от первого.

а) Какова вероятность того, что в утку попала ровно одна пуля?

б) Какова условная вероятность того, что утка была убита первым охотником, если в утку попала ровно одна пуля?

3.3 Кубик подбрасывается два раза. Найдите вероятность получить сумму равную 8, если при первом броске выпало 3.

3.4 Игрок получает 13 карт из колоды в 52 карты. Какова вероятность, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть хотя бы один туз? Какова вероятность того, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть туз пик?

3.5 В урне 7 красных, 5 желтых и 11 белых шаров. Два шара выбирают наугад. Какова вероятность, что это красный и белый, если известно, что они разного цвета?

3.6 В урне 5 белых и 11 черных шаров. Два шара извлекаются по очереди. Какова вероятность того, что второй шар будет черным? Какова вероятность того, что первый шар — белый, если известно, что второй шар — черный?

3.7 Примерно 4% коров заражены «коровьим бешенством». Имеется тест, который дает ошибочный результат с вероятностью 0,1. Судя по тесту, новая партия мяса заражена. Какова вероятность того, что она действительно заражена?

3.8 В школе три девятых класса, «А», «Б» и «В», одинаковые по численности. В «А» классе 30% обожают учителя географии, в «Б» классе — 40% и в «В» классе — 70%. Девятиклассник Петя обожает учителя географии. Какова вероятность того, что он из «Б» класса?

3.9 Ген карих глаз доминирует ген синих. Следовательно, у носителя пары bb глаза синие, а у носителя пар BB и Bb — карие. У диплоидных организмов (а мы такие :)) одна аллель наследуется от папы, а одна — от мамы. В семье у кареглазых родителей два сына — кареглазый и синеглазый. Кареглазый женился на синеглазой девушке. Какова вероятность рождения у них синеглазого ребенка?

3.10 Из колоды в 52 карты извлекается одна карта наугад. Являются ли события «извлечен туз» и «извлечена пика» независимыми?

3.11 Из колоды в 52 карты извлекаются по очереди две карты наугад. Являются ли события «первая карта — туз» и «вторая карта — туз» независимыми?

3.12 Известно, что $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(C) = 0,5$. События A и B несовместны, события A и C независимы и $\mathbb{P}(B|C) = 0,1$. Найдите $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

3.13 У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из четырех ситуаций найдите условную вероятность того, что у тёти Маши есть дети обоих полов.

а) Известно, что хотя бы один ребенок — мальчик.

б) Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть учебник по теории вероятностей. Это оказывается мальчик.

в) Известно, что старший ребенок — мальчик.

г) На вопрос: «А правда ли тетя Маша, что у вас есть сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

3.14 У Ивана Грозного n бояр. Каждый боярин берёт мзду независимо от других с вероятностью $1/2$.

а) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если случайно выбранный боярин берёт мзду?

б) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если хотя бы один из бояр берёт мзду?

4. Use Julia/R/python/…or die!

4.1 Самая простая. Случайная величина N имеет пуассоновское распределение с $\lambda = 2$. С помощью симуляций оцените $\mathbb{E}(N^3)$, $\mathbb{P}(N \geqslant 4)$, $\mathbb{P}(N \geqslant 10 \mid N \geqslant 5)$, $\mathbb{E}(N \mid N \geqslant 5)$. Функция rpois может помочь :)

4.2 Случайные величины X_1, …, X_5 имеют равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$ и независимы. С помощью симуляций оцените $\mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_5\} > 0.2)$, $\mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_5\} > 0.2 \mid X_1 + X_2 < 0.5)$, $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_5\})$, $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_5\} \mid X_1 + X_2 < 0.5)$.

4.3 Случайные величины X_1, X_2 независимы и обе имеют биномиальное распределение с параметрами $n = 16$, $p = 0.7$. Величина Y задана формулой $Y = X_1/(1 + X_2)$. С помощью симуляций оцените $\mathbb{P}(Y > 0.5)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid X_1 > 10)$, $\mathbb{E}(Y \mid X_1 > 10)$. Функция rbinom в помощь!

4.4 В колоде 52 карты. Мы вытаскиваем карты из колоды до первого туза, пусть X — количество вытянутых карт. С помощью симуляций оцените $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{P}(X > 10)$, $\mathbb{P}(X > 5 \mid X < 15)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid X < 15)$.

4.5 Иван Федорович Крузенштерн случайным образом с возможностью повторов выбирает 10 натуральных чисел от 1 до 100. Пусть X — минимум этих чисел, а Y — максимум. С помощью симуляций оцените $\mathbb{P}(Y > 3X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{P}(Y > 3X \mid Y < X^2)$, $\mathbb{E}(XY \mid Y < X^2)$.

5. Эф большое и эф малое

Минитеория:

а) $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$

б) $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(a)\,da$, $f(t) = F'(t)$.

Задачи:

5.1 Функция плотности случайной величины X равна 5 при $x = 7$. Найдите примерно вероятность того, что X попадёт в отрезок $[7; 7.001]$.

5.2 Случайная величина X имеет функцию плотности f. С помощью $o(\Delta)$ и $f(x)$ запишите вероятность $\mathbb{P}(X \in [x; x + \Delta])$.

5.3 Величина X распределена на отрезке $[0; 1]$ и на нём имеет функцию плотности $f(t) = 3t^2$. Найдите функции плотности и функции распределения величин $Y = \ln X$, $Z = X^2$, $W = (X - 0.5)^2$.

5.4 Может ли функция плотности принимать значение больше 2015? Может ли предел $\lim_{x\to\infty} f(x)$ не равняться нулю?

5.5 Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{16}t^2, t \in [-2; 2] \\ 0, t \notin [-2; 2] \end{cases}$$

Найдите:

а) $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$, σ_X

б) $\mathbb{E}(X|X > 1)$, $\mathbb{E}(X^2|X > 1)$, $\mathrm{Var}(X|X > 1)$

в) Функцию распределения случайной величины X

г) Медиану величины X, 40%-ую квантиль величины X

5.6 Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} t/8, t \in [0; 4] \\ 0, t \notin [0; 4] \end{cases}$$

Найдите:

а) $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$, σ_X

б) $\mathbb{E}(X|X > 1)$, $\mathbb{E}(X^2|X > 1)$, $\mathrm{Var}(X|X > 1)$

в) Функцию распределения случайной величины X

г) Медиану величины X, 40%-ую квантиль величины X

5.7 Величина X распределена на отрезке $[0; 2]$ и имеет на нём функцию распределения $F(x) = x^2/4$. Найдите $\mathbb{P}(X \in [1; 1.5])$, $\mathbb{P}(X < 1)$, $F(-5)$, $F(10)$, функцию плотности величины X

5.8 Если возможно, найдите функцию распределения и функцию плотности величины X принимающей значения 1, 2, 3 и 4 с вероятностями 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4 соответственно.

5.9 Величина X равномерна распределена на отрезке $[-2; 1]$, а величина Y — это расстояние от числа X до числа (-1). Найдите фукнцию плотности Y, $\mathbb{E}(Y)$.

5.10 Глафира случайным образом равномерно выбирает случайную внутри треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(0; 2)$ и $(3; 3)$. Пусть X и Y — абсцисса и ордината выбранной точки. Найдите функцию плотности X, функцию плотности Y.

5.11 Прямой убыток от пожара в миллионах рублей равномерно распределен на $[0; 1]$. Если убыток оказывается больше 0.7, то страховая компания выплачивает компенсацию 0.7.

а) Найдите функцию распределения потерь от пожара.

б) Чему равны средние потери?

5.12 Пусть X — неотрицательная случайная величина с функцией плотности $f(t)$ и $\mathbb{E}(X) < \infty$. При каком c функция $g(t) = c \cdot t \cdot f(t)$ также будет функцией плотности?

5.13 Завтрашняя цена акции — случайная величина с функцией плотности $f(x) = \frac{3}{4} \max\{x(2-x), 0\}$.

а) Постройте график функции плотности;

б) Найдите функцию распределения Васиного дохода, средний доход и дисперсию дохода, если:

(a) У Васи есть 10 акций;

(b) У Васи нет акций, но есть опцион-пут, дающий ему право продать одну акцию по цене 1.2 рубля;

(c) У Васи нет акций, но есть опцион-колл, дающий ему право купить одну акцию по цене 1 рубль.

5.14 В соревнованиях по прыжкам в длину участвовали n спортсменов. Результаты их прыжков, величины X_i, независимы и одинаково распределены с функцией плотности f и функцией распределения F.

а) Найдите функцию распределения и функцию плотности длины наилучшего прыжка

б) Найдите функцию распределения и функцию плотности длины наихудшего прыжка

в) Найдите вероятность того, что Сидоров и Петров прыгнули меньше чем на t метров, Иванов прыгнул от t до $t + \Delta$ метров, а остальные прыгнули больше, чем на t метров.

г) Найдите функцию распределения и функцию плотности длины прыжка бронзового призёра соревнований

5.15 Светофор попеременно горит пешеходу то 40 секунд зелёным, то 60 секунд — красным. Законопослушный Вася Бубликов подходит к светофору в случайный момент времени. Пусть X — время ожидания до возможности перейти дорогу.

а) Найдите функцию распределения величины X и постройте её график.

б) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.

5.16 Большой Адронный Коллайдер запускают ровно в полночь. Оставшееся время до Конца Света — случайная величина X распределенная равномерно от 0 до 16 часов. Когда произойдет Конец Света, механические часы остановятся и будут показывать время Y.

а) Найдите $\mathbb{P}(Y < 2)$.

б) Постройте функцию плотности величины Y.

в) Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$.

г) Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.

5.17 Величина Y является цензурированной версией величины X,

$$Y = \begin{cases} a, \text{ если } X < a; \\ X, \text{ если } X \geqslant a. \end{cases}$$

а) Найдите производную $\partial\mathbb{E}(y)/\partial a$ и запишите ответ с помощью функции распределения.

б) Скорее всего в решении было неявно предположено, что функция плотности величины X обладает некоторым свойством. Каким?

5.18 В письме своему издателю Фивегу 16 января 1797 года Гёте пишет: «Я намерен предложить господину Фивегу из Берлина эпическую поэму «Герман и Доротея» в 2000 гексаметров... С гонораром мы поступим следующим образом: я передам господину Бёттигеру запечатанный конверт с запрашиваемой мной суммой и буду ожидать суммы, предлагаемой господином Фивегом за мой труд. Если его предложение окажется ниже запрашиваемой мной суммы, то я отзываю свой конверт нераспечатанным, а сделка считается несостоявшейся. Если же, напротив, его предложение выше, тогда я не буду запрашивать больше суммы, написанной в моём конверте, который вскроет господин Бёттигер».

Гёте оценивает поэму в G фридрихсдоров, а Фивег — в V фридрихсдоров. Величины G и V независимы и непрерывно распределены. Величину G Гёте передал Бёттигеру в запечатанном конверте.

а) Какую сумму b стоит написать Фивегу в письме Бёттигеру, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль?

Рассмотрим альтернативную схему: Гёте явно объявляет Фивегу требуемую сумму G за поэму, а затем издатель соглашается или нет.

б) В какой схеме ожидаемый выигрыш издателя выше?

в) В какой схеме выше вероятность одобрения сделки?

г) В чём преимущество оригинальной схемы Гёте?

По мотивам [MT98].

5.19 Время безотказной работы пепелаца T равно одному, двум, трём или четырём годам с вероятностями 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4 соответственно.

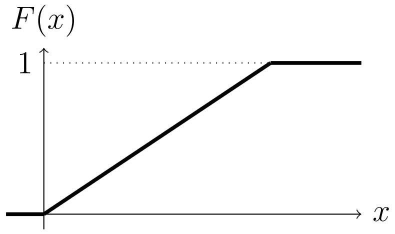
а) Нарисуйте график функции дожития $S(t) = \mathbb{P}(T > t)$.

б) Закрасьте на графике ожидаемое время жизни пепелаца, $\mathbb{E}(S)$.

в) Как для произвольной неотрицательной случайной величины X связаны ожидание и функция распределения?

г) Как для произвольной случайной величины Y связаны ожидание и функция распределения?

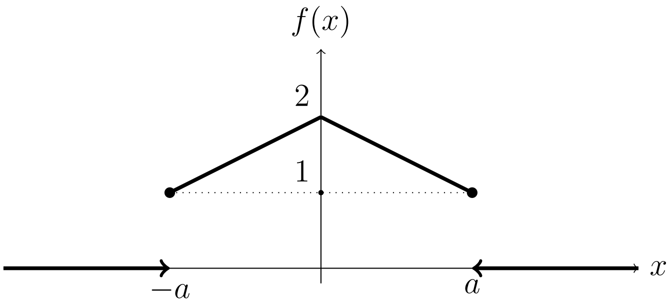
5.20 Величины X_1, X_2, … независимы и имеют нарисованную функцию распределения:



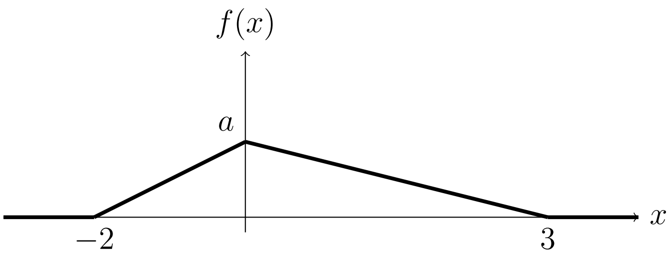
а) Нарисуйте на картинке функции распределения величин $L_2 = \min\{X_1, X_2\}$ и $R_2 = \max\{X_1, X_2\}$.

б) Как при большом n выглядят функции распределения $L_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ и $R_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$?

5.21 На картинках нарисованы функции плотности случайных величин. В каждом случае найдите константу a и математическое ожидание случайной величины.



а)



б)

5.22 Величина U распределена равномерно на отрезке $[0; 1]$. Рассмотрим две тройки случайных величин, тройку $X_1 = \tan(\pi U/2)$, $Y_1 = \tan(\pi U/2)$, $Z_1 = -2\tan(\pi U/2)$, и тройку $X_2 = \tan(\pi U/2)$, $Y_2 = \tan(\pi(1-U)/2)$, $Z_2 = -2\tan(\pi|2U-1|/2)$.

а) Найдите $\mathbb{E}(X_1 + Y_1 + Z_1)$.

б) Правда ли что одинаково распределены X_1 и X_2, Y_1 и Y_2, Z_1 и Z_2?

в) Найдите $\mathbb{E}(X_2 + Y_2 + Z_2)$.

г) Из-за чего возможен такой парадокс?

5.23 Случайная величина X принимает четыре значения с вероятностями 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4. Обозначим функцию распределения этой величины буквой F.

Какие значения принимает величина $F(X)$ и с какими вероятностями?

5.24 Рассмотрим [3] случайную величину X с функцией распределения F и число t от 0 до 1.

[3] Эта, казалось бы, абстрактная задача, постоянно используется на практике для проверки корректности AB-тестов и построения доверительных интервалов.

а) Найдите вероятности $\mathbb{P}(F(X) \leqslant t)$, $\mathbb{P}(F(X) < t)$, $\mathbb{P}(F(X) > t)$ и $\mathbb{P}(F(X) \geqslant t)$, если функция распределения F — непрерывная.

б) В каких пределах лежат указанные вероятности, если про величину X ничего не известно?

6. Рождение распределений

6.1 «Всякая вещь — или есть, или нет»

Как справедливо заметил исследователь Винни-Пух, всякая вещь — или есть, или нет. Рассмотрим случайную величину V, равную единице, если вещь — есть, и нулю иначе. Допустим вероятность того, что вещь есть равна 0.7.

а) Составьте табличку со значениями V и их вероятностями;

б) Найдите $\mathbb{E}(V)$ и $\mathrm{Var}(V)$;

в) Если возможно, нарисуйте функцию распределения и функцию плотности V;

г) Найдите $\mathbb{E}(V)$ и $\mathrm{Var}(V)$, если вероятность того, что вещь — есть равна параметру p.

Определение. Случайная величина V имеет распределение Бернулли с параметром p.

6.2 Винни-Пух и Пятачок играют в Пустяки (Poohsticks). Каждую партию Винни-Пух выигрывает с вероятностью $p = 0.7$. Всего они сыграли $n = 10$ партий. Пусть X — количество партий, выигранных Винни-Пухом .

а) Объясните правила игры Пустяки;

б) Найдите $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X = k)$;

в) Представьте X в виде суммы 10 случайных величин с распределением Бернулли, поясните, что означает каждое слагаемое.

г) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$. Здесь без доказательства можно пользоваться тем, что для независимых величин R и S дисперсия раскладывается в сумму $\mathrm{Var}(R+S) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{Var}(S)$;

д) Найдите $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$ для произвольных p, n;

Определение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p;

6.3 «Ну не то, чтобы совсем не попал...»

Храбрый Пятачок спешит с ружьём на помощь зависшему исследователю Винни-Пуху . При каждом выстреле Пятачок попадает в шарик с вероятностью $p = 0.7$ независимо от предыдущих выстрелов. Стреляет Пятачок до первого попадания. Пусть X — это количество выстрелов, Y — количество промахов по шарику[4].

а) Найдите $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = k)$.

б) Терпения Винни-Пуха хватает на 5 промахов Пятачка. Какова вероятность того, что терпения Винни-Пуха не хватит?

в) Найдите $\mathbb{P}(Y = 2)$, $\mathbb{P}(Y = 3)$, $\mathbb{P}(Y = k)$.

г) С помощью метода первого шага найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(X^2)$;

д) Найдите $\mathrm{Var}(X)$

е) Каким соотношением связаны X и Y?

ж) Как связаны $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$ и $\mathrm{Var}(Y)$?

з) Чему будут равны $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$, если при отдельном выстреле Пятачок попадает с вероятностью p?

[4]или попаданий по исследователю Винни-Пуху

Определение. Величина X имеет геометрическое распределение с параметром p.

6.4 Торопливый Пятачок

Торопливый Пятачок снова стреляет в шарик. При каждом выстреле торопливый Пятачок попадает с вероятностью p. Пятачок делает d выстрелов в минуту. Для данной задачи будем считать, что после попадания Пятачка в шарик, шарик мгновенно заменяется на новый. Пусть X — это номер выстрела первого попадания, Z — время первого попадания, а Y — количество попаданий за первую минуту.

а) Сколько раз в минуту в среднем попадает Пятачок, если вероятность попадания при отдельном выстреле равна $p = 0.7$?

б) Чему равна вероятность попадания при отдельном выстреле, если среднее количество попаданий в миниту равно $\lambda = 10$?

в) Найдите $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ для произвольного параметра p;

г) Найдите $\mathbb{P}(Z \leqslant t)$ для произвольного параметра p;

д) Найдите $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = k)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$;

Торопливый Пятачок очень торопится, поэтому величина d крайне велика. Однако когда Пятачок торопится, он чаще промахивается, и оказывается, что при любом d среднее количество попаданий в минуту постоянно и равно $\lambda = 10$.

е) Чему при большом d равны $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = k)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$?

ж) Найдите $F(t) = \lim_{d\to\infty} \mathbb{P}(Z \leqslant t)$;

з) Найдиту дифференциальную форму dF и функцию плотности $f = F'$;

и) Какова при большом d вероятность того, что Пятачок впервые попадёт в первые 5 минут? Впервые попадёт с 10-ой по 15-ую минуты, если известно, что в первые 10 минут попаданий не было?

к) Найдите $F(t)$, dF и f для произвольного λ;

л) Чему при большом d равны $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = k)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$ для произвольного λ?

Определение. Случайная величина Z при $d \to \infty$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.

Определение. Случайная величина Y при $d \to \infty$ имеет распределение Пуассона с параметром λ.

7. Разлагай и властвуй!

7.1 Из грота ведут 10 штреков, с длинами 100м, 200м, …1000м. Самый длинный штрек оканчивается выходом на поверхность. Остальные — тупиком. Вася выбирает штреки наугад, в тупиковый штрек два раза не ходит. Какова вероятность того, что Вася посетит самый короткий штрек? Какой в среднем путь он нагуляет прежде чем выберется на поверхность?

7.2 У Маши 30 разных пар туфель. И она говорит, что мало! Пёс Шарик утащил без разбору на левые и правые 17 туфель. Какова вероятность того, что у Маши останется ровно 13 полных пар? Величина X — количество полных целых оставшихся пар, Y — количество полных пар, доставшихся Шарику. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

7.3 У меня в кармане 3 рубля мелочью. Среди монет всего одна монета достоинством 50 копеек. Я извлекаю монеты по одной наугад. Я останавливаюсь после того, как извлеку монету в 50 копеек. Какую сумму в среднем я извлеку?

7.4 «Модница». В шкатулке у Маши 100 пар серёжек. Каждый день утром она выбирает одну пару наугад, носит ее, а вечером возвращает в шкатулку. Проходит год.

а) Сколько в среднем пар окажутся ни разу не надетыми?

б) Сколько в среднем пар окажутся надетыми не менее двух раз?

(с*) Как изменятся ответы, если каждый день Маша покупает себе новую пару серёжек и вечером добавляет её в шкатулку?

7.5 Вовочка получает пятерку с вероятностью 0.1, четверку — с вероятностью 0.2, тройку — с вероятностью — 0.3 и двойку с вероятностью 0.4. В этом четверти он писал 20 контрольных. Какова вероятность того, что все оценки у Вовочки одинаковые? Сколько разных оценок он в среднем получит?

7.6 «Судьба Дон Жуана» У Васи n знакомых девушек (их всех зовут по-разному). Он пишет им n писем, но, по рассеянности, раскладывает их в конверты наугад. Величина X обозначает количество девушек, получивших письма, написанные лично для них. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

7.7 Над озером взлетело 20 уток. Каждый из 10 охотников один раз стреляет в случайно выбираемую им утку. Величина Y — количество убитых уток, X — количество попавших в цель охотников. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, если охотники стреляют без промаха. Как изменится ответ, если вероятность попадания равна 0.7?

7.8 Вокруг новогодней ёлки танцуют хороводом 27 детей. Мы считаем, что ребенок высокий, если он выше обоих своих соседей. Величина X — количество высоких детей в хороводе. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$. Вероятность совпадения роста будем считать равной нулю.

7.9 По 10 коробкам наугад раскладывают 7 карандашей. Каково среднее количество пустых коробок? Дисперсия?

7.10 Внутри каждой упаковки шоколадки находится наклейка с изображением одного из 30 животных. Предположим, что все наклейки равновероятны, величина X — это количество шоколадок, которые купить, чтобы собрать полную коллекцию наклеек. Чему равны $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$?

Как это объяснить ребёнку?

7.11 Из колоды в 52 карты извлекается 5 карт. Сколько в среднем извлекается мастей? Достоинств? Тузов? Дисперсии этих величин?

7.12 За круглым столом сидят в случайном порядке n супружеских пар, всего — $2n$ человек. Величина X — число пар, где супруги оказались напротив друг друга. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.

7.13 В задачнике N задач. Из них a — Вася умеет решать, а остальные не умеет. На экзамене предлагается равновероятно выбираемые n задач. Величина X — число решенных Васей задач на экзамене. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.

7.14 Кубик подбрасывается n раз. Величина X_1 — число выпадений 1, а X_6 — число выпадений 6. Найдите $\mathrm{Corr}(X_1, X_6)$.

Пуассоновский поток событий. Обозначим: $X[a; a+\Delta]$ — количество происшествий на интервале $[a; a+\Delta]$, $X_t = X[0; t]$ — количество происшествий за период $[0; t]$.

Если:

а) На малом интервале времени вероятность одного происшествия примерно пропорциональна длине интервала, $\mathbb{P}(X[a; a+\Delta] = 1) = \lambda\Delta + o(\Delta)$.

б) На малом интервале времени несколько происшествий происходят существенно реже одного происшествия, $\mathbb{P}(X[a; a+\Delta] \geqslant 2) = o(\Delta)$.

в) Стационарность приращений. Распределение случайной величины $X[a; a+\Delta]$, количества происшествий на интервале $[a; a+\Delta t]$, зависит только от Δ, но не от a.

г) Независимость приращений. Количество происшествий на непересекающихся интервалах времени независимы.

То:

а) Время между $(i-1)$-ым и i-ым происшествием, Y_i, имеет экспоненциальное распределение $Y_i \sim exp(\lambda)$.

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, \ y \geqslant 0 \\ 0, \ y < 0 \end{cases}$$

В частности, $\mathbb{E}(Y_i) = 1/\lambda$ и $\mathrm{Var}(Y_i) = 1/\lambda^2$. Величины Y_i независимы.

б) Количество происшествий за единицу времени, X, имеет пуассоновское распределение $X \sim Pois(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

В частности, $\mathbb{E}(X) = \lambda$ и $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

Отсюда смысл λ — среднее количество событий за единицу времени, дисперсия количества событий за единицу времени

в) Количество событий за период времени $[0; t]$, величина X_t, имеет пуассоновское распределение $X_t \sim Pois(\lambda t)$,

$$\mathbb{P}(X_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

И, следовательно, $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(X_t) = \lambda t$.

г) Сумма двух независимых пуассоновских процессов с интенсивностями λ_1 и λ_2 — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_1 + \lambda_2$.

Замена $Bin(n, p)$ на $Pois(\lambda = np)$ дает погрешность не более $\min\{p, np^2\}$.

8. За время моего дежурства происшествий не было!

8.1 Маша и Саша пошли в лес по грибы. Саша собирает все грибы, а Маша — только подберезовики. Саша в среднем находит один гриб за одну минуту, Маша — один гриб за десять минут. Какова вероятность того, за 8 минут они найдут ровно 13 грибов? Какова вероятность того, что следующий гриб им попадется позже, чем через минуту, если Маша только что нашла подберезовик?

8.2 Пост майора ГИБДД Иванова И.И. в среднем ловит одного нарушителя в час. Какова вероятность того, за первые полчаса дежурства будет не меньше двух нарушителей? Какова вероятность того, что следующего нарушителя ждать еще более 40 минут, если уже целых три часа никто не превышал скорость?

8.3 Оля и Юля пишут смс Маше. Оля отправляет Маше в среднем 5 смс в час. Юля отправляет Маше в среднем 2 смс в час. Какова вероятность того, что Маша получит ровно 6 смс за час? Сколько времени в среднем проходит между смс, получаемыми Машей от подруг?

8.4 Кузнечики на большой поляне распределены по пуассоновскому закону, в среднем 3 кузнечика на квадратный метр. Какой следует взять сторону квадрата, чтобы вероятность найти в нем хотя бы одного кузнечика была равна $0,8$?

8.5 В магазине две кассирши (ах, да! две хозяйки кассы). Допустим, что время обслуживания клиента распределено экспоненциально. Тетя Зина обслуживает в среднем 5 клиентов в час, а тетя Маша - 7. Два клиента подошли к кассам одновременно.

а) Какова вероятность того, что тетя Зина обслужит клиента быстрее?

б) Как распределено время обслуживания того клиента, который освободится быстрее?

в) Каково условное среднее время обслуживания клиента тетей Зиной, если известно, что она обслужила клиента быстрее тети Маши?

8.6 Время между приходами студентов в столовую распределено экспоненциально; в среднем за 10 минут приходит 5 студентов. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение; в среднем за 10 минут столовая может обслужить 6 студентов. Столовая находится в динамическом равновесии, то есть закон распределения длины очереди стабилен (это не означает, что длина очереди не меняется).

а) Какова вероятность того, что в очереди ровно n студентов?

б) Какова средняя длина очереди?

Подсказка: если сейчас в очереди n человек, то через малый промежуток времени Δ...

8.7 The arrival of buses at a given bus stop follows Poisson law with rate 2. The arrival of taxis at the same bus stop is also Poisson, with rate 3. What is the probability that next time I'll go to the bus stop I'll see at least two taxis arriving before a bus? Exactly two taxis?

8.8 Время, которое хорошо обученная свинья тратит на поиск трюфеля — экспоненциальная случайная величина со средним в 10 минут. Какова вероятность того, что свинья за 20 минут не найдет ни одного трюфеля?

8.9 Величина X распределена экспоненциально с параметром λ, а константа $a > 0$. Как распределена величина $Y = aX$?

8.10 В гирлянде 25 лампочек. Вероятность брака для отдельной лампочки равна 0,01. Какова вероятность того, что гирлянда полностью исправна? Оцените точность ответа при использовании распределения Пуассона.

8.11 По некоему предмету незачет получило всего 2% студентов. Какова вероятность того, что в группе из 50 студентов будет ровно 1 человек с незачетом? Оцените точность ответа при использовании распределения Пуассона.

8.12 Вася испек 40 булочек. В каждую из них он кладет изюминку с $p = 0,02$. Какова вероятность того, что всего окажется 3 булочки с изюмом? Оцените точность ответа при использовании распределения Пуассона.

8.13 В офисе два телефона — зеленый и красный. Входящие звонки на красный — пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_1 = 4$ звонка в час, входящие на зеленый — с интенсивностью $\lambda_2 = 5$ звонка в час. Секретарша Василиса Премудрая одна в офисе. Перед началом рабочего дня она подбрасывает монетку и отключает один из телефонов, зеленый — если выпала решка, красный — если орел. Обозначим Y_1 время от начала дня до первого звонка.

а) Найдите функцию плотности Y_1

б) Верно ли, что процесс количества звонков, которые услышит Василиса, имеет независимые приращения?

8.14 Владелец салуна «Огненная зебра» закрывает заведение, если в течение 5 минут никто не заказывает виски. Посетители заказывают в среднем один виски в минуту. Заказы представляют собой пуассоновский поток. Пусть X — время от открытия до закрытия таверны. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

8.15 Рассмотрим определение пуассоновского процесса, а именно: вероятность ровно одного события за интервал времени $[a; a + \Delta]$ есть $\lambda\Delta + o(\Delta)$, вероятность не менее двух событий за тот же интервал времени есть $o(\Delta)$. Докажите, что время между событиями имеет экспоненциальное распределение.

8.16 Количество трапперов, заходящих в салун «Огненная зебра», — пуассоновский поток с единичной интенсивностью. Какова вероятность того, что через время t от момента открытия в салун зайдёт чётное количество трапперов?

8.17 На Краю Вселенной давным-давно работает парикмахерская. В ней счётное количество занумерованных по порядку парикмахеров. Каждый парикмахер независимо от других обслуживает клиента за экспоненциально распределенное время с параметром λ. Клиенты приходят в парикмахерскую пуассоновским потоком с интенсивностью μ. Клиент всегда выбирает свободного парикмахера с наименьшим номером.

Какую долю времени будет в среднем занят парикмахер номер n?

8.18 Множество A состоит из n элементов. На пленэр Маэстро захватил с собой случайное количество красок, X, распределённое по Пуассону с параметром $\lambda = 1$. Маэстро работает в новаторской методике и никогда не смешивает краски!

а) Сколькими способами Маэстро может раскрасить множество A, если можно любой элемент красить в любой цвет?

б) Маэстро разрезал множество A на k подмножеств, «я так вижу!». Сколькими способами Маэстро может раскрасить множество A, если каждое подмножество он хочет раскрасить в свой оригинальный цвет?

Это количество обозначается $(X)_k$ и называется *убывающим факториалом* :)

в) Найдите $\mathbb{E}((X)_k)$.

г) Как связаны между собой общее количество способов раскраски, убывающие факториалы и количества разбиений множества на k непересекающихся подмножеств?

д) Как связаны между собой $\mathbb{E}(X^n)$ и число Белла B_n, количество различных разбиений множества из n элементов?

Результат называется формулой Добинского и был опубликован в 1877 году :)

8.19 Пуассоновское распределение с раздутым нулём (zero-inflated Poisson distribution).

Исследователь Рыбкин остаётся дома с вероятностью π, а с вероятностью $(1-\pi)$ отправляется на рыбалку. Количество рыб X, которых он поймает, если пойдёт на рыбалку, имеет Пуассоновское распределение с параметром λ.

Величина Y — количество рыб, которое раздобыл Рыбкин к концу дня.

а) Найдите $\mathbb{P}(Y=0)$.

б) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathrm{Var}(Y)$.

9. Пиастры, пиастры!

9.1 Функция SHA256 превращает произвольное текстовое сообщение в последовательность длины 256 из нулей и единиц. Например, SHA256("Люблю вероятности")= 000011101001001.... Результат вычисления функции называется хэшем. Функция детерминистическая, но её внутренне устройство настолько сложно, что явное обращение функции невозможно. Другими словами, если я хочу найти фразу, которую функция SHA256 превращает в последовательность 010101010101..., то никакого способа кроме перебора всех фраз у меня нет[5]. Никаких простых закономерностей в результате вычисления функции нет.

Для внесения блока из нескольких сделок в блокчейн биткойна и многих других криптовалют необходимо добавить после блока сделок бессмысленный текст так, чтобы функция SHA256 от всего текста начиналась с заданного количества нулей.

а) Какова вероятность того, что дописав произвольный текст к блоку сделок майнер Мария получит хэш, начинающийся с 30 нулей?

б) Какова вероятность того, что перебрав 1000 бессмысленных текстовых прибавок, майнер Мария получит хэш, начинающийся с 30 нулей?

в) Почему хэш можно трактовать как равномерную на отрезке $[0;1]$ случайную величину?

Видео про блокчейн от 3blue1brown, https://youtu.be/bBC-nXj3Ng4. Статья, https://bitcoin.org/bitcoin.pdf.

9.2 Компьютер майнера Марии может перебирать 10^5 хэшей SHA256 в секунду. Других майнеров в сети нет. Обозначим время до получения первого хэша, начинающегося с 30 нулей, буквой T. Подписав блок сделок, Мария сразу переходит к подписанию очередного блока.

д) Как распределена величина T?

е) Чему равны $\mathbb{E}(T)$, $\mathrm{Var}(T)$?

ж) Какова вероятность того, что майнер Мария получит нужный хэш быстрее, чем за полчаса?

[5] Возможно он есть, но вряд ли, пока лучше домашку по вероятностям делать :)

з) Сколько блоков майнер Мария в среднем может подписать за сутки? Какова дисперсия этой величины?

и) Сколько нулей должно требоваться, чтобы на подписание одного блока майнер Мария тратила больше суток с вероятностью 0.95?

9.3 Для подписания блока в блокчейне требуется хэш SHA256, начинающийся с 30 нулей. Компьютер майнера Виктории может перебирать 10^5 хэшей в секунду, а компьютер майнера Кристины — $2 \cdot 10^5$ хэшей в секунду. Других майнеров в сети нет. Виктория и Кристина одновременно и независимо друг от друга приступили к подписанию первого блока. После того, как кто-то подпишет блок, Виктория и Кристина одновременно приступают к подписанию одного и того же нового блока. Обозначим B_V и B_K — количество блоков, подписанных за час работы Викторией и Кристиной соответственно.

а) Какова вероятность того, что Виктория подпишет первый блок раньше Кристины?

б) Как распределена величина B_V? Найдите $\mathbb{E}(B_V)$ и $\mathrm{Var}(B_V)$;

в) Найдите $\mathrm{Cov}(B_V, B_K)$;

9.4 Для подписания блока в блокчейне требуется хэш SHA256, начинающийся с 30 нулей. Компьютер майнера Виктории может перебирать 10^5 хэшей в секунду, а компьютер майнера Кристины — $2 \cdot 10^5$ хэшей в секунду. Кроме Виктории и Кристины в сети находятся прочие майнеры с совокупной мощностью 10^7 хэшей в секунду. Все майнеры одновременно и независимо друг от друга работают над одним и тем же блоком. Когда блок подписан, все майнеры начинают работу над одним и тем же новым блоком. За один блок майнер получает награду в 10 тугрикойнов. Обозначим S_V и S_K — заработок Виктории и Кристины за месяц, а $S = S_V + S_K$.

а) Найдите $\mathbb{E}(S_V)$, $\mathrm{Var}(S_V)$, $\mathbb{E}(S_K)$, $\mathrm{Var}(S_V)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$;

б) Как изменятся все найденные величины, если Виктория и Кристина объединятся в пул? При объединении в пул награду за каждый подписанный блок Виктория и Кристина будут делить пропорционально мощностям своих компьютеров.

9.5 Полученные в блоке деньги не сразу считаются подтвержденными: их можно тратить, только если за данным блоком в блокчейне подписано 50 других блоков. Красивая, умная и состоятельная мошенница Василиса Премудрая сосредоточила в своих руках 40% имеющихся вычислительных мощностей сети. Хитрая Василиса решила дважды потратить свой миллион тугрикойнов.

Она создала сделку в которой миллион тугрикойнов уходят с её счета продавцу А. Сразу после того, как блок с этой сделкой был подписан, хитрая Василиса в тайне начала рассчитывать ложную параллельную ветку блоков. В ложной ветке миллион тугрикойнов уходят другому продавцу Б за другой товар. Все майнеры кроме Василисы подписывают реально существующие сделки. Только что сделка с продавцом А была признана подтверждённой.

а) Как изменилось ожидаемое количество честных блоков подписанных сетью за единицу времени во время атаки Василисы?

б) Какова вероятность того, что Василиса сможет рано или поздно предъявить ложную последовательность блоков более длинную чем честная?

Для упрощения можно предполагать, что на подсчёт честной цепочки блоков к моменту подтверждения сделки с продавцом А ушло ожидаемое для этого время.

9.6 Совокупные вычислительные возможности сети — 10^7 хэшей в секунду. Будем трактовать каждый хэш как равномерную на отрезке $[0;1]$ случайную величину. Блок сделок считается подписанным, если полученный хэш оказался меньше константы p. Какой должна быть константа p, чтобы новый блок подписывался в среднем каждые 10 минут?

10. word2vec

Контекстом слова A во фразе называют несколько слов рядом со словом A, как до него, так и после. В модели word2vecвероятность попадания слова B на очередное место в контексте слова A определяется по формуле:

$$p(B \mid A) = \text{softmax}\{\ldots\}.$$

Модель word2vecпредполагает независимость всех слов в контексте любого слова A.

10.1 …. Какова вероятность того, что … попадёт на заданное место в контексте слова … …. Какова вероятность того, что … встретится в контексте слова …

11. Совместная плотность и вероятность

Минитеория:

а) $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$

б) $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

в) $\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int\int g(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy$

г) Если $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$, то величины X и Y независимы

11.1. Совместная вероятность

11.1 Эксперимент может окончиться одним из шести исходов:

	$X=-1$	$X=0$	$X=2$
$Y=0$	0.1	0.2	0.3
$Y=4$	0.2	0.1	0.1

Найдите: $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X,Y)$, $\text{Corr}(X,Y)$, $\text{Cov}(X,Y|X \geqslant 0)$.

11.2 Кубик подбрасывается два раза, X — сумма очков, Y — разность очков, число при первом броске минус число при втором. Найдите $\mathbb{E}(XY)$, $\text{Cov}(X,Y)$, $\text{Corr}(X,Y)$.

11.3 Пусть X равновероятно принимает значения -1, 0, +1, а $Y = X^2$

а) Найдите $\text{Cov}(X,Y)$;

б) Верно ли, что X и Y независимы?

11.4 Паук сидит в начале координат. Равновероятно он может сместиться на единицу вверх, вниз, влево или вправо (по диагонали паук не ползает). Пусть X и Y — это абсцисса и ордината паука после первого шага.

а) Найдите $\text{Cov}(X, Y)$?

б) Верно ли, что X и Y независимы?

11.5 Кубик подбрасывается n раз. Пусть X_1 — число выпадений 1, а X_6 — число выпадений 6.

Найдите $\text{Corr}(X_1, X_6)$.

Подсказка: $\text{Cov}(X_1, X_1 + \ldots + X_6) = \ldots$.

11.6 Вероятность дождя в субботу 0.5, вероятность дождя в воскресенье 0.3. Корреляция между наличием дождя в субботу и наличием дождя в воскресенье равна r.

Какова вероятность того, что в выходные вообще не будет дождя?

11.7 Пусть $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$. Можно ли определить знак $\text{Cov}(1_A, 1_B)$?

11.2. Свойства ковариаций и корреляций

11.8 Известно, что $Y = 2X - 3$, а $Z = 6 - 3X$. Найдите $\text{Corr}(X, Y)$, $\text{Corr}(X, Z)$.

11.9 Пусть X и Y независимы.

а) Найдите $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Cov}(X^3, Y^2 - 5Y)$, $\text{Corr}(X, Y)$.

б) Выразите $\text{Var}(X + Y)$ и $\text{Var}(X - Y)$ через $\text{Var}(X)$ и $\text{Var}(Y)$.

11.10 Вася наблюдает значение X, но не наблюдает значение Y; при этом он знает, что $\text{Var}(X) = 3$, $\text{Var}(Y) = 8$, $\text{Cov}(X, Y) = -3$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $\mathbb{E}(X) = 2$. Задача Васи — спрогнозировать Y с помощью линейной функции от X, т.е. построить $\hat{Y} = aX + b$.

Васю штрафуют за неправильный прогноз на сумму $(Y - \hat{Y})^2$. Вася хочет минимизировать ожидаемую величину штрафа, $\mathbb{E}((Y - \hat{Y})^2)$.

Найдите оптимальные a и b.

11.11 Случайные величины X и Y зависимы, случайные величины Y и Z зависимы. Верно ли, что случайные величины X и Z зависимы?

11.12 Пусть $\text{Cov}(X, Y) > 0$, $\text{Cov}(Y, Z) > 0$. Верно ли, что $\text{Cov}(X, Z) > 0$? $\text{Cov}(X, Z) \geqslant 0$?

11.13 Вовочка Кувалдин придумал **кувариацию**, $\text{Cuv}(X, Y)$. Кувариация симметрична, линейна по каждому аргументу и равна нулю тогда и только тогда, когда величины независимы.

Машенька Куррочкина придумала **курреляцию**, $\text{Curr}(X, Y)$, Курреляция симметрична, линейна по каждому аргументу и всегда лежит в диапазоне $[-1; 1]$.

Какие проблемы есть у кувариации и курреляции?

11.3. Совместная плотность

11.14 Величины X_1, X_2, X_3, X_4 — независимы и равномерны $U[0; 1]$. Величины Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 — это величины $\{X_i\}$, упорядоченные по возрастанию. Например, $Y_1 = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

а) Найдите $\mathbb{P}(X_1 \in [x; x + dx])$.

б) Найдите вероятность $\mathbb{P}(Y_1 \in [y_1; y_1 + dy_1])$ с точностью до $o(dy_1)$. Найдите функцию плотности Y_1;

в) Найдите примерные вероятности попадания в отрезок малой длины и функции плотности для Y_2, Y_3 и Y_4.

г) Найдите $\mathbb{P}(Y_1 \in [y_1; y_1 + dy_1]), Y_3 \in [y_3; y_3 + dy_3]$. Найдите совместную функцию плотности пары Y_1, Y_3;

д) Найдите совместную функцию плотности пары Y_1, Y_4;

е) Найдите совместную функцию плотности пары Y_2, Y_4;

ж) Найдите условные плотности $f(y_1|y_4)$, $f(y_1|y_3)$, $f(y_2|y_4)$.

11.15 На первом шаге значение X выбирается случайно равномерно на отрезке $[0; 1]$. На втором шаге значение Y выбирается случайно и равномерно от 0 до получившегося X.

а) Найдите функции плотности $f(y|x)$, $f(x)$, $f(x, y)$, $f(x|y)$, $f(y)$.

б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$.

в) Найдите $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

г) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X^2|Y)$, $\mathbb{E}(Y^2|X)$.

д) Найдите $\mathrm{Var}(Y|X)$, $\mathrm{Var}(X|Y)$.

е) Найдите $\mathbb{P}(Y > 0.2|X = 0.5)$, $\mathbb{P}(Y > 0.2|X < 0.5)$.

11.16 Величины Y_1 и Y_2 независимы и экспоненциально распределены с параметром $\lambda = 5$, а $S = Y_1 + Y_2$ и $R = Y_1/S$.

а) Выпишите и нарисуйте функцию плотности $f(y_1)$.

б) Найдите совместную функцию плотности $f(y_1, y_2)$.

в) Найдите совместную функцию плотности R и S.

г) Правда ли, что R и S независимы?

д) Найдите плотности $f(y_1, s)$, $f(y_1|s)$.

е) Правда ли, что Y_1 и S независимы?

ж) Прокомментируйте простыми словами вид функции $f(y_1|s)$.

11.17 Величины X и Y имеют совместную функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

а) Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$, $\mathbb{P}(X + Y > 0.5)$, $\mathbb{P}(X = Y + 0.2)$, $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$, $\mathbb{P}(Y > 0.5|X > 0.5)$.

б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

в) Найдите $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X)$, $\mathrm{Var}(Y|X)$.

г) Зависимы ли величины X и Y?

д) Найдите совместную функцию распределения $F(x, y)$.

11.18 Величины X и Y имеют совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, \ x > 0, \ y > 0 \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

а) Найдите $\mathbb{P}(X > 0.5)$, $\mathbb{P}(X = Y + 0.2)$, $\mathbb{P}(Y > 0.5|X > 0.5)$;

б) Найдите частные функции распределения $F(x)$, $F(y)$.

в) Найдите совместную функцию плотности $f(x, y)$;

г) Найдите $\mathbb{P}(X + Y > 0.5)$, $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$;

д) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

е) Зависимы ли величины X и Y?

11.19 Точка случайно равномерно выбирается внутри треугольника с вершинами в $(0; 0)$, $(3; 3)$ и $(1; 2)$. Пусть X и Y — абсцисса и ордината этой точки.

а) Найдите совместную функцию плотности пары (X, Y);

б) Найдите $f(x|y)$, $f(y|x)$.

11.20 Приведите пример пары X и Y у которой нет совместной функции плотности, однако X и Y равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$.

11.21 Величина X равномерно распределена на $[-1; 1]$ и $Y = X^2$.

а) Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$;

б) Верно ли, что X и Y независимы?

11.22 Кольцо задавается системой неравенств: $x^2 + y^2 \geqslant 1$ и $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Случайным образом, равномерно на этом кольце, выбирается точка, X и Y — её координаты.

Чему равна корреляция X и Y? Зависимы ли X и Y?

11.23 Совместная функция плотности величин X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{если } x, y \in [0; 1]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Выпишите дифференциальную форму вероятностей для пары X и Y.

б) Найдите дифференциальную форму для $S = X + Y$ и $R = X/(X + Y)$.

в) Найдите совместную функцию плотности для $S = X + Y$ и $R = X/(X + Y)$.

11.24 Величины U_1 и U_2 независимы и равномерны $U[0; 1]$. Рассмотрим пару величин $Y_1 = R \cdot \cos\alpha$, $Y_2 = R \cdot \sin\alpha$, где $R = \sqrt{-2\ln U_1}$, а $\alpha = 2\pi U_2$.

а) Выпишите дифференциальную форму для пары U_1, U_2.

б) Выпишите дифференциальную форму для пары Y_1, Y_2.

в) Найдите совместный закон распределения Y_1 и Y_2;

г) Верно ли, что Y_1 и Y_2 независимы?

д) Как распределены Y_1 и Y_2 по отдельности?

11.25 В пуассоновском потоке с интенсивностью λ время наступления k-го события распределено согласно гамма-распределению $Gamma(k, \lambda)$ и имеет вероятностную дифференциальную форму

$$\mathbb{P}(Y \in [y; y + dy]) = const \cdot y^{k-1} \cdot \exp(-\lambda y)\, dy, \text{ при } y \geqslant 0;$$

До прихода Ёжика Медвежонок сидел на крылечке один и насчитал k_1 падающую звезду. А после прихода Ёжика Медвежонок насчитал ещё k_2 падающих звёзд. Пусть Y_1 и Y_2 — время, которое которое наблюдал за звёздами Медвежонок до и после прихода Ёжика.

а) Выпишите совместную дифференциальную форму для Y_1 и Y_2.

б) Найдите совместную дифференциальную форму для $S = Y_1 + Y_2$ и $Z = Y_1/S$.

в) С точностью до сомножителя выпишите дифференциальную форму для доли времени, в течение которого Медвежонок наблюдал звёзды один.

г) Выпишите функцию плотности бета-распределения.

11.26 Случайным образом на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ равномерно выбирается точка. Её координаты — случайные величины X, Y и Z.

а) Найдите функцию плотности величины X;

б) Найдите совместную функцию плотности пары величин X и Y.

12. Геометрия

Минитеория:

а) Скалярное произведение, $\langle R, S\rangle = \mathbb{E}(XY)$.

б) Длина, $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$.

в) Косинус угла между, $\cos(X, Y) = \frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}$.

12.1 Дайте геометрическую интепретацию следующим величинам:

а) $\mathbb{E}(X)$

б) $\mathrm{Var}(X)$

в) σ_X

г) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

12.2 Дайте геометрическую интепретацию тождества $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

12.3 Известно, что $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathbb{E}(X^2) = 20$, $\mathbb{E}(X^3) = 10$, $\mathbb{E}(X^4) = 10000$.

а) Найдите проекцию величины X на множество констант.

б) Найдите проекцию величины X на множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием.

в) Найдите $\cos(X, X^2)$.

г) Обозначим проекции X и X^2 на множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием буквами R и S. Найдите $\cos(R, S)$. Как он связан с корреляцией $\mathrm{Corr}(X, X^2)$?

12.4 Случайные величины Y и X имеют совместное распределение

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	0.1	0.2	0.3
$Y = 2$	0.1	0.1	0.2

Потомственная ясновидящая Агафья знает значение X, но не знает значение Y. Агафья хочет построить прогноз $\hat{Y}$, зависящий от X так, чтобы в среднем квадрат ошибки прогноза $\mathbb{E}((Y - \hat{Y})^2)$ был минимален.

а) Найдите наилучший прогноз вида $\hat{Y} = a \cdot X$.

б) Найдите наилучший прогноз вида $\hat{Y} = a + b \cdot X$.

в) Найдите наилучший прогноз $\hat{Y}$ произвольного вида.

г) Проинтепретируйте задачи нахождения наилучшего прогноза геометрически.

д) Представим себе, что Маланья, подруга Агафьи, наоборот, знает Y и не знает X. Маланья пытается построить наилучший прогноз $\hat{X} = c + d \cdot Y$. Найдите c и d. Как связаны b, d и корреляция X и Y?

12.5 Исследователь Василий оценивает неизвестную константу θ с помощью случайной величины $\hat{\theta}$. Проинтерпретируйте геометрически тождество

$$\mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

13. Всё нормально!

13.1 Величины X_1, ..., X_n распределены нормально $\mathcal{N}(4, 100)$ и независимы.

а) Найдите вероятности $\mathbb{P}(X_1 > 4)$, $\mathbb{P}(X_1 \in [2; 20])$, $\mathbb{P}(X_1 < -5)$

б) Найдите вероятности $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > 10)$, $\mathbb{P}(\bar{X}_{36} \in [0; 5])$

в) Найдите такое число a, что $\mathbb{P}(X_1 > a) = 0.3$

г) Найдите такое число b, что $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} \in [4 - b; 4 + b]) = 0.5$

Решите эту задачу двумя способами: с использованием компьютера и с помощью таблиц. В R можно использовать функции pnorm и qnorm. В python можно использовать scipy.stats.norm.cdf и scipy.stats.norm.ppf.

13.2 Величина W имеет функцию плотности $f(w) = c \cdot \exp(5w - 2w^2)$. Найдите $\mathbb{E}(W)$, $\mathrm{Var}(W)$, c.

13.3 Величина X нормальна $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

а) Выпишите функцию плотности случайной величины X, $f(x)$.

б) Найдите точку максимума и точки перегиба функции f.

13.4 Величина X распределена нормально $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

а) Найдите $\mathbb{E}(|X|)$.

б) Найдите функцию плотности $|X|$.

13.5 Известно, что $\ln Y \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, медиану и моду величины Y.

13.6 Величина X имеет стандартное нормальное распределение.

а) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ для $Y = \max\{X, 0\}$.

б) Найдите $\mathbb{E}(X|X < 0)$ и $\mathrm{Var}(X|X < 0)$.

13.7 Величина X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, а функция $g(t)$ дифференцируема и не слишком быстро растёт при $t \to \infty$.

а) Докажите, что $\mathbb{E}((X - \mu)g(X)) = \sigma^2 \mathbb{E}(g'(X))$.

б) Найдите $\mathbb{E}(X^4)$ и $\mathbb{E}(X^6)$ для $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

в) Какое формальное условие на g достаточно записать вместо нестрогого «не слишком быстро растёт»?

13.8 Для величины X, имеющей стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$, докажите, что

$$\mathbb{E}(X|X \in [a; b]) = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{\Phi(b) - \Phi(a)}.$$

Здесь ϕ — функция плотности X, а Φ — функция распределения.

Верен ли этот результат для другого распределения?

14. Долой неравенство Чебышёва и Маркова

14.1 С помощью неравенства Чебышева оцените вероятности

а) $\mathbb{P}(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma)$, если $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

б) $\mathbb{P}(8 < Y < 12)$, если $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathrm{Var}(Y) = 400/12$

в) $\mathbb{P}(-2 < Z - \mathbb{E}(Z) < 2)$, если $\mathbb{E}(Z) = 1$, $\mathrm{Var}(Z) = 1$

г) Найдите точные значения, если дополнительно известно, что $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, $Y \sim U[0; 20]$ и $Z \sim Exp(1)$.

14.2 Известно, что $\mathbb{E}(X) = 100$, какой должна быть дисперсия величины X, чтобы вне зависимости от закона распределения величины X можно было бы гарантировать, что $\mathbb{P}(X \in [90; 110]) \geqslant 0.95$? А как решить аналогичный вопрос для $\mathbb{P}(X \in [90; 100]) \geqslant 0.95$?

14.3 Известно, что X — неотрицательная случайная величина с $\mathbb{E}(X) = 10$. В каких пределах может лежать вероятность $\mathbb{P}(X < 20)$?

14.4 Сравните:

а) $\mathbb{E}(X^2)$ и $(\mathbb{E}(X))^2$;

б) $\ln(\mathbb{E}(X))$ и $\mathbb{E}(\ln X)$;

в) $\mathbb{E}(1/X)$ и $1/\mathbb{E}(X)$;

14.5 Дискретная случайная величина X обладает интересным свойством $\mathbb{E}(1/X) = 1/\mathbb{E}(X)$. В каких пределах может лежать $\mathrm{Var}(X)$?

14.6 Весна, половодье. На пеньках ждут спасения зайцы. Их очень много. У Деда Мазая две стратегии.

Стратегия А: перевозить зайцев на своей старой лодке, вмещающей 10 зайцев.

Стратегия Б: написать в Whatsapp Золотой рыбке и попросить новую лодку. Золотая рыбка забирает старую лодку деда Мазая и взамен выдаёт новую, равновероятно вмещающую от 1 до 19 зайцев.

При какой стратегии у Деда Мазая в среднем будет меньше перевозок?

14.7 Пёс Шарик и Кот Матроскин каждый день в течение месяца покупают молоко в розлив. Цена молока в i-ый день — константа m_i. Средняя цена молока за прошедший месяц оказалась равной 40 рублям. Пёс Шарик каждый день покупал литр молока. Кот Матроскин каждый день покупал молока на 40 рублей. Кто больше потратил денег? Кто больше молока купил?

14.8 Кот Матроскин забрасывает удочку 10 раз. Вероятность поймать рыбку при одном забрасывании равна p. Пёс Шарик забрасывает удочку случайное пуассоновское количество раз, N, под настроение. Известно, что $\mathbb{E}(N) = 10$. У кого шансы поймать хотя бы одну рыбку выше?

15. Полный беспредел

Предел по вероятности, $\mathrm{plim}_{n\to\infty} X_n = X$:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0, \ \forall \varepsilon > 0$$

Вероятностные о-малые. Запись $Z_n = o_{\mathbb{P}}(X_n)$ означает, что

$$\mathrm{plim}\, \frac{Z_n}{X_n} = 0.$$

Закон Больших Чисел (формулировка Хинчина): Если X_i независимы, одинаково распределены и математическое ожидание $\mathbb{E}(X_i)$ существует, то $\mathrm{plim}\, \bar{X}_n = \mathbb{E}(X_1)$

Центральная Предельная Теорема (формулировка Линдеберга-Леви): Если X_i независимы, одинаково распределены с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \to \mathcal{N}(0;1) \text{ (строго)}$$

$$\bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ (практично)}$$

Дельта-метод:

Если Z_n асимптотически нормальны, то есть

$$\frac{Z_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \to \mathcal{N}(0;1), \text{ (строго)}$$

$$Z_n \approx \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ (практично)}$$

и f — дифференциируемая функция, такая что $f'(\mu) \neq 0$,

то:
$$\frac{f(Z_n)-f(\mu)}{\sqrt{\frac{(f'(\mu))^2\sigma^2}{n}}}\to\mathcal{N}(0;1)\text{ (строго)}$$
$$f(Z_n)\approx\mathcal{N}\left(f(\mu);\frac{(f'(\mu))^2\sigma^2}{n}\right)\text{ (практично)}$$

15.1 Величины X_1, ..., X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;1]$. Найдите $\operatorname{plim}\bar{X}_n$, $\operatorname{plim}1/(1+\bar{X}_n)$, $\operatorname{plim}\sum_{i=1}^n \ln X_i/n$, $\operatorname{plim}\sqrt[n]{X_1\cdot\ldots\cdot X_n}$, $\operatorname{plim}(X_1\cdot\ldots\cdot X_n)$, $\operatorname{plim}\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, $\operatorname{plim}\min\{X_1,\ldots,X_n\}$, $\operatorname{plim}\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}$, $\operatorname{plim}X_1/\bar{X}$.

15.2 Величины X_1, ..., X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;1]$.

а) Найдите примерный закон распределения величин $\bar{X}_{100}$, $S_{100}=X_1+\ldots+X_{100}$.

б) Найдите примерно $\mathbb{P}(\bar{X}_{100}>0.55)$, $\mathbb{P}(S_n\in[50;60])$, $\mathbb{E}(\bar{X}_{100}|\bar{X}_{100}>0.6)$.

в) Найдите такое число a, для которого $\mathbb{P}(S_n<a)=0.65$.

15.3 Количество смс за сутки, посылаемое каждым из 160 абонентов, имеет пуассоновское распределение со средним значением 5 смс в сутки. Какова вероятность того, что за двое суток абоненты пошлют в сумме более 1700 сообщений?

15.4 Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей.

Найдите вероятность того, что через сто дней акция будет стоить больше 1030 рублей.

15.5 Вероятность выпадения монетки «орлом» равна 0.63.

а) Какова вероятность, что в 100 испытаниях выборочная доля выпадения орлов будет отличаться от истинной вероятности менее, чем на 0.07?

б) Каким должно быть минимальное количество испытаний, чтобы вероятность отличия выборочной доли и истинной вероятности менее чем на 0.02 была больше 0.95?

15.6 Вася хочет посчитать сумму 100 случайных слагаемых. Слагаемые независимы и равномерны распределены с математическим ожиданием равным единице. Васе достаточно оценить сумму с точностью до 0.1% с вероятностью больше 99%.

Сколько знаков после запятой достаточно записывать Васе у каждого слагаемого?

15.7 «В пятницу 13-го»

В пятницу 13 сентября 2019 года в Атланте перевернулся грузовик с 216 тысячами игральных кубиков. К счастью, никто не пострадал.

а) Какова вероятность того, что в сумме выпало больше 740000, если все кубики выпали на дорогу?

б) Какая часть кубиков выпала на дорогу, если вероятность того, что сумма на кубиках, выпавших на дорогу, больше суммы на кубиках, оставшихся в грузовике, равна $2/3$?

https://kotaku.com/truck-carrying-gaming-dice-spills-onto-highway-rolls-a-1838218869

15.8 Задача из [Gra](*).

Случайные величины X и Y независимы и равновероятно принимают значения от 1 до n. Вероятность того, что сумма $X+Y$ является квадратом натурального числа, обозначим p_n.

Найдите предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}p_n$.

15.9 Задача из [Gra](*).

Величины X_1, ..., X_n независимы и равномерны на отрезке $[0;1]$. Вероятность того, что сумма любых двух соседних иксов меньше единицы, обозначим p_n.

Найдите предел $\lim_{n\to\infty} p_n^{1/n}$.

16. Дельта-метод

16.1 Величины X_1, ..., X_n независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием 10 и дисперсией 20. Найдите примерный закон распределения величин $\bar{X}^2$, $(1+\bar{X})/(\bar{X}^2+5)$ при большом n.

16.2 Величина X имеет биномиальное распределение $Bin(n,p)$ и n велико. Какое распределение примерно имеют величины $\ln(X/n)$? $X/(n-X)$?

16.3 Величины X и Y независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(5, 0.001)$ и $\mathcal{N}(10, 0.002)$.

Найдите примерно ожидания и дисперсии для величин $R = X/Y$ и $Z = X \cdot Y$.

16.4 Кот Леопольд строит параболу $f(x) = R_2x^2 + R_1x + R_0$ со случайными коэффициентами R_2, R_1 и R_0. Коэффициенты имеют совместное нормальное распределение

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & -0.001 \\ 0 & -0.001 & 0.003 \end{pmatrix} \right).$$

Найдите примерно закон распределение абсциссы и ординаты вершины[6].

17. Условное математическое ожидание

17.1 Совместное распределение X и Y задано таблицей:

	$X=-1$	$X=1$
$Y=-1$	1/8	4/8
$Y=2$	2/8	1/8

а) Найдите $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathrm{Var}(Y|X)$.

б) Убедитесь, что $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$.

17.2 Монетка выпадает орлом с вероятностью p. Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе монетку подкидывают 100 раз и записывают число орлов, Z. На втором этапе монетку подбрасывают до тех пор пока не выпадет столько орлов, сколько выпало на первом этапе. Обозначим число подбрасываний монетки на втором этапе буквой X.

Найдите $\mathbb{E}(X|Z)$, $\mathrm{Var}(X|Z)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

17.3 Автобусы приходят на остановку через случайные промежутки времени (пуассоновский поток с параметром λ). В первый день Вася приходит на остановку и замеряет время до первого автобуса. Пусть это время X. На следующий день Вася приходит на остановку и считает, сколько автобусов придет в течении времени X. Он получает количество автобусов N.

[6]Это простейшая модель, подходящая, например, для поиска оптимальной дозировки лекарства.

а) Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\text{Var}(N)$.

б) Найдите $\mathbb{P}(N > 0)$.

17.4 Известно, что $U \sim U[0;1]$, а величина X имеет распределение Рэлея (Rayleigh density):
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \text{ если } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

а) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$

б) Найдите $\hat{X} = aY + b$ так, чтобы $E[(X - \hat{X})^2]$ была минимальной.

17.5 Маша собрала n грибов в лесу наугад. В лесу есть рыжики, мухоморы и лисички. Рыжики попадаются с вероятностью $p_R > 0$, лисички — с вероятностью $p_L > 0$, мухоморы — с вероятностью $p_M > 0$, $p_R + p_M + p_L = 1$. Пусть R — количество собранных рыжиков, L — лисичек, а M — мухоморов. Найдите:

а) $\mathbb{E}(R + L|M)$, $\mathbb{E}(M|R + L)$

б) $\mathbb{E}(R|L)$

в) $\text{Var}(R|L)$

г) $\mathbb{E}(R + L|L + M)$

д) $\mathbb{E}(R|R - L)$ (? похоже не решается в явном виде)

е) $\text{Var}(R|L)$

ж) $\mathbb{P}(\mathbb{E}(R|L) = 0)$

з) $\mathbb{P}(R = 0|L)$

и) $\mathbb{E}\left(\left(\frac{p_M}{p_R+p_M}\right)^{100-L}\right)$

17.6 Пусть X и Y — независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_1 и λ_2. Найдите $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

17.7 Вася, Петя и Коля играют в карточного «дурака» втроём. Вася проигрывает с вероятностью p_1, Петя — с вероятностью p_2, Коля — с вероятностью p_3. Естественно, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Всего они сыграли n партий. Обозначим количества проигранных ими партий X_1, X_2 и X_3, соответственно. Найдите $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$. Может получится найти и $\text{Var}(X_1|X_1 + X_2)$?

17.8 Пусть X_1, ..., X_{100} независимы и равномерны на $[0;1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{80}\}$ а $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \ldots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \ldots, X_{100}\}$.

а) Найдите вероятности $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$.

б) Найдите ожидания $\mathbb{E}(X_1|L)$, $\mathbb{E}(X_1|\min\{X_1, \ldots, X_{100}\})$.

в) Найдите ожидание $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_{100}\}|\max\{X_1, \ldots, X_{100}\})$.

г) Найдите ожидание $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_{100}\}|X_1)$.

д) Нарисуйте условную функцию распределения $\mathbb{P}(X_1 \leqslant t|L)$.

17.9 Величины X_1, X_2, ...независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(2;9)$. Мы складываем случайное количество N слагаемых. Величина N независима от X_i и распределена по Пуассону с параметром $\lambda = 10$. Обозначим сумму буквой $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Найдите $\mathbb{E}(S)$, $\text{Var}(S)$ и $Cov(S, N)$

17.10 Неправильный кубик выпадает с вероятностью 0.5 шестеркой вверх. Остальные пять граней выпадают равновероятно. Случайная величина X — остаток от деления номера грани на два, Y — остаток от деления номера грани на три.

а) Найдите закон распределения $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

б) Выразите $\mathbb{E}(Y \mid X)$ через X, а $\mathbb{E}(X \mid Y)$ через Y.

в) Найдите $\mathrm{Cov}(\mathbb{E}(Y \mid X), \mathbb{E}(X \mid Y))$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{E}(Y \mid X), X)$, $\mathrm{Cov}(Y, X)$.

17.11 Цена литра молока, X, распределена равномерно на отрезке $[1; 2]$. Количество молока, которое дает корова Мурка, Y, распределено экспоненциально с $\lambda = 1$. Надои не зависят от цены. Величина Z — выручка кота Матроскина от продажи всего объема молока.

а) Найдите $E(Z|X)$, $\mathrm{Var}(Z|X)$, корреляцию Z и X.

б) Найдите акон распределения $E(Z|X)$.

в) Найдите функцию плотности величины $\mathrm{Var}(Z|X)$.

17.12 Кубик подбрасывают бесконечное количество раз. Величина X — номер подбрасывания, когда впервые выпала единица, а Y — номер подбрасывания, когда впервые выпала шестерка. Найдите $\mathbb{E}(Y|X)$.

17.13 The random variables $X_1, X_2, \ldots$are independent uniformly distributed on $[0; 1]$. I am summing them until the first X_i greater than 0.5 is added. After this term I stop. Let's denote by S the total sum and by N — the number of terms added. Find $\mathbb{E}(S|N)$, $\mathrm{Var}(S|N)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$

17.14 Известно, что $X = (Z_1 + Z_2)^2 + Z_3$ и $Y = (Z_1 + Z_2)^3 + Z_3$, величины Z_i независимы, $Z_1 \sim U[0; 2]$, $Z_2 \sim N(1, 4)$, $Z_3 \sim N(-2, 9)$. Найдите

а) $\mathbb{E}(X \mid Z_1)$, $\mathbb{E}(X \mid Z_2)$, $\mathbb{E}(X \mid Z_3)$

б) $\mathbb{E}(Y \mid Z_1)$, $\mathbb{E}(Y \mid Z_2)$, $\mathbb{E}(Y \mid Z_3)$

17.15 Вася случайно выбирает между 0 и 1 число X_1, затем случайно выбирает между 0 и X_1 число X_2, затем X_3 между 0 и X_2, и так до бесконечности.

а) Найдите $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathrm{Var}(X_n)$;

б) Найдите функцию плотности распределения X_n;

в) Найдите $\mathbb{E}(X_2|X_1, X_3)$;

г) Найдите $\operatorname{plim} X_n$.

17.16 Приведите примеры:

а) зависимых величин X и Y с $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;

б) зависимых величин X и Y с $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$;

в) величин X и Y с $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, но $\mathbb{E}(Y|X) \neq \mathbb{E}(Y)$.

17.17 Пусть X — равномерна на отрезке $[0; 1]$. В шляпе лежат две свернутые бумажки. На одной бумажке написано X, на другой X^2. Вы тяните одну бумажку наугад. Пусть Z — число, написанное на вытянутой Вами бумажке, а W — число на другой бумажке. Увидев число Вы решаете, оставить себе эту бумажку, или отказаться от этой и забрать оставшуюся. Ваш выигрыш — число на оставшейся у Вас бумажке.

а) Найдите $\mathbb{E}(W|Z)$.

б) Максимально подробно (кубическое уравнение там будет суровое, не решайте его) опишите стратегию максимизирующую Ваш выигрыш.

в) Как изменится результат, если на одной бумажке написано значение X, а на второй — значение случайной величины имеющей такое же распределение, как и X^2, но независимой от X?

18. А энтропия никогда не убывала!

18.1 Марсоход передаёт на Землю информацию о массе найденного камня, X.

Закон распределения массы X представлен в таблице

x	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = x)$	1/2	1/8	1/8	1/4

а) Какое количество бит используется на передачу каждого значения X в оптимально кодировке?

б) Предложите одну из возможных оптимальных кодировок.

в) Найдите ожидаемое количество бит, которое марсоход тратит на одно сообщение, энтропию вероятности $\mathbb{P}$.

18.2 Марсоход передаёт на Землю информацию о массе найденного камня, X.

При разработке оптимальной кодировки для передачи значений X предполагалось, что вероятности определяются мерой Q. Именно эту кодировку и использует марсоход. Однако фактические вероятности камня каждой массы на Марсе определяются мерой $\mathbb{P}$.

x	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = x)$	1/2	1/8	1/8	1/4
$Q(X = x)$	1/4	1/2	1/8	1/8

а) Найдите ожидаемое количество бит, которое марсоход тратит на одно сообщение, кросс-энтропию из $\mathbb{P}$ в Q.

б) Найдите дивергенцию Кульбака-Ляйблера из $\mathbb{P}$ в Q. Что она измеряет?

18.3 Немного о единицах измерения:

а) Сколько бит в одном байте? Сколько бит в одном нате?

б) Сколько нат в одном бите? Сколько нат в одном мегабайте?

в) По какому основанию нужно брать логарифм в формуле для энтропии, чтобы получить ответ в мегабайтах?

18.4 Обозначим буквой p — функцию плотности экспоненциального распределения с параметром λ_1, а буквой q — функцию плотности экспоненциального распределения с параметром λ_2.

а) Найдите кросс-энтропию $CE(p||q)$.

б) Постройте линии уровня функции кросс-энтропии в осях λ_1, λ_2.

в) Постройте график кросс-энтропии $CE(p||q)$ как функции от λ_2 при фиксированном λ_1.

г) При каком значении λ_2 кросс-энтропия $CE(p||q)$ достигает своего минимума при фиксированном λ_1?

18.5 Обозначим буквой p — функцию плотности нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_1, 1)$, а буквой q — функцию плотности нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_2, 1)$.

а) Найдите кросс-энтропию $CE(p||q)$.

б) Постройте линии уровня функции кросс-энтропии в осях μ_1, μ_2.

в) Постройте график кросс-энтропии $CE(p||q)$ как функции от μ_2 при фиксированном μ_1.

г) При каком значении λ_2 кросс-энтропия $CE(p||q)$ достигает своего минимума при фиксированном μ_1?

18.6 Найдите энтропию X, спутанность (perplexity) X и в дискретном случае индекс Джини X, если

а) величина X равновероятно принимает значения 1, 7 и 9;

б) величина X равновероятно принимает $k \geqslant 2$ значений;

в) величина X равномерно распределена на отрезке $[0; a]$;

г) величина X нормальна $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

18.7 У Васи есть дискретная случайная величина X, принимающая натуральные значения. Вася равновероятно прибавляет к величине X число 0.1 или -0.1 и получает величину Y.

Насколько у X и Y отличаются энтропия, спутанность (perplexity) и индекс Джини?

18.8 Найдите дивергенцию Кульбака-Лейблера

а) из биномиального $Bin(n = 2, p = 1/3)$ в равновероятное на 0, 1, 2;

б) из равновероятного на 0, 1, 2 в биномиальное $Bin(n = 2, p = 1/3)$;

в) из $\mathcal{N}(0; l)$ в $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$;

г) из $\mathcal{N}(0; 1)$ в экспоненциальное с $\lambda = 1$;

д) из $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ в $\mathcal{N}(0; l)$;

е) из экспоненциального с $\lambda = 1$ в $\mathcal{N}(0; 1)$;

18.9 Совместное распределение X и Y задано таблицей:

	$X = -1$	$X = 1$
$Y = -1$	1/8	4/8
$Y = 2$	2/8	1/8

а) Найдите энтропию $H(X)$ и $H(Y)$.

б) Найдите условную энтропию $H(Y \mid X)$ и $H(X \mid Y)$.

в) Найдите совместную энтропию $H(X, Y)$.

г) Каким всегда неравенством связаны $H(Y)$ и $H(Y \mid X)$?

д) Как связаны между собой $H(X)$, $H(Y \mid X)$ и $H(X, Y)$?

19. Многомерное нормальное

19.1 Рассмотрим две предпосылки:

Rot Распределение вектора не изменяется при любом повороте вектора.

Ind Компоненты вектора независимы.

Определите, каким предпосылкам удовлетворяют следующие распределения:

а) Вектор $(X, Y)'$ равномерно распределён на множестве $\{x^2 \leqslant 1,\ y^2 \leqslant 1\}$.

б) Вектор $(X, Y)'$ равномерно распределён на множестве $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

в) Вектор $(X, Y)'$ имеет функцию плотности $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/2)/2\pi$.

19.2 Какими свойствами должна обладать матрица V, чтобы быть матрицей поворота? То есть при умножении на V должны сохраняться длины векторов и углы между векторами.

19.3 Теорема Хершела-Максвелла

Рассмотрим замкнутую плоскую фигуру внутри которой случайно летают частицы. Обозначим $Z = (X, Y)'$ — вектор скоростей случайно выбираемой частицы.

Максвелл предположил, что:

а) Распределение вектора не должно меняться при повороте вектора на любой угол.

б) Вертикальная и горизонтальная составляющая скорости должны быть независимы.

а) Какой вектор получится, если вектор Z поверхнуть на 90° по часовой стрелке?

б) Докажите, что X распределена так же, как Y и также как $-Y$.

в) Чему равное $\mathbb{E}(X)$? Верно ли, что $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$?

г) Докажите, что совместная функция плотности $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

д) Докажите, что совместная функция плотности $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = g(x^2) \cdot g(y^2)$$

е) Докажите, что отношение $h'(t)/h(t)$ равно константе.

ж) Найдите функцию $h(t)$ с точностью до константы.

з) Пусть U — угол, а $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найдите совместную функцию плотности U и R с точностью до константы.

и) Найдите функцию плотности X, если единицы измерения скорости выбраны так, что $\mathrm{Var}(X) = 1$.

19.4 Пара X и Y имеет двумерное нормальное распределение

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

а) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(X+3Y-7)$, $\mathrm{Var}(X+3Y-7)$, $\mathrm{Cov}(X-Y, 2X+3Y)$, $\mathrm{Corr}(X-9, X+3Y)$.

б) Найдите $\mathbb{P}(X > 5)$, $\mathbb{P}(X + Y > 5)$.

в) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$, $\text{Var}(X|Y)$, $\mathbb{P}(X > 1|Y = 1)$.

г) Найдите $\mathbb{E}(Y - 3|X)$, $\text{Var}(2X + 7Y + 2|Y)$, $\mathbb{P}(Y + X > 1|X = 2)$.

19.5 Ермолай Лопахин решил приступить к вырубке вишневого сада. Однако выяснилось, что растут в нём не только вишни, но и яблони. Причём, по словам Любови Андреевны Раневской, среднее количество деревьев (а они периодически погибают от холода или жары, либо из семян вырастают новые) в саду распределено в соответствии с нормальным законом (X — число яблонь, Y — число вишен) со следующими параметрами:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 25 \\ 125 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\right) \tag{1}$$

Найдите вероятность того, что Ермолаю Лопахину придется вырубить более 150 деревьев. Каково ожидаемое число подлежащих вырубке вишен, если известно, что предприимчивый и последовательный Лопахин, не затронув ни одного вишнёвого дерева, начал очистку сада с яблонь и все 35 яблонь уже вырубил?

Авторы: Кирилл Фурманов, Ира Чернухина

19.6 В самолете пассажирам предлагают на выбор «мясо» или «курицу». В самолет 250 мест. Каждый пассажир с вероятностью 0.6 выбирает курицу, и с вероятностью 0.4 — мясо. Сколько порций курицы и мяса нужно взять, чтобы с вероятностью 99% каждый пассажир получил предпочитаемое блюдо, а стоимость «мяса» и «курицы» для компании одинаковая?

Как изменится ответ, если компания берет на борт одинаковое количество «мяса» и «курицы»?

19.7 Сэр Фрэнсис Гальтон — учёный XIX-XX веков, один из основоположников как генетики, так и статистики — изучал, среди всего прочего, связь между ростом детей и родителей. Он исследовал данные о росте 928 индивидов. Обозначим X_1 — рост случайного человека, а X_2 — среднее арифметическое роста его отца и матери. По результатам исследования Гальтона:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 68.1 \\ 68.3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6.3 & 2.1 \\ 2.1 & 3.2 \end{pmatrix}\right]$$

а) Обратите внимание на то, что дисперсия роста детей выше дисперсии среднего роста родителей. С чем это может быть связано? Учтите, что рост детей измерялся уже по достижении зрелости, так что разброс не должен быть связан с возрастными различиями.

б) Рассчитайте корреляцию между X_1 и X_2

в) Один дюйм примерно равен 2.54 сантиметра. Пусть X_1' и X_2' — это те же X_1 и X_2, только измеренные в сантиметрах. Найдите вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу вектора $X' = (X_1', X_2')$.

г) Определите, каков ожидаемый рост и дисперсия роста человека, средний рост родителей которого составляет 72 дюйма?

д) Найдите вероятность того, что рост человека превысит 68 дюймов, если средний рост его родителей равен 72 дюймам. Подсказка: используйте предыдущий пункт и нормальность распределения!

Авторы: Кирилл Фурманов, Ира Чернухина

19.8 «Регрессия к среднему»

Каждый день независимо от других муж дарит Машке случайное количество роз. Логарифм количества роз (в тысячах цветов), подаренных мужем в день t, ε_t, имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Улыбчивость Машки в день t, обозначаемая Y_t, зависит от количества цветов, подаренных в этот и в предыдущей день, $Y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$. Подружка Машки не наблюдает подарки Машкиного мужа, ε_t, однако видит улыбчивость Машки, Y_t. Машкина подружка хочет спрогнозировать завтрашнюю улыбчивость Машки, исходя из прошлой информации.

а) Найдите $\operatorname{Corr}(Y_t, Y_{t-1})$

б) Найдите прогноз Машкиной улыбчивости завтра при известной сегодняшней улыбчивости $\mathbb{E}(Y_t|Y_{t-1})$

в) Проинтерпретируйте величину коэффициента при Y_{t-1}, становится ли Машка в среднем улыбчивей или грустней со временем?

г) Исследователь Вениамин собрал данные по 1000 семей и изобразил диаграмму рассеяния в осях (рост мамы в 20 лет, рост дочки в 20 лет). Далее он провел наиболее похожую на эти точки прямую. Наклон этой прямой скорее всего будет около 1, меньше 1, больше 1?

д) Если Вовочка плохо пишет контрольную, то его лишают мороженого. После этого успеваемость Вовочки как правило улучшается. В чём сходство этой ситуации с данной задачей?

е) Найдите прогноз $\mathbb{E}(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2})$.

19.9 Пара случайных величин X и Y имеет совместное нормальное распределение:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\right)$$

а) Найдите корреляцию X и Y

б) Найдите собственные числа и собственные векторые ковариационной матрицы

в) Постройте линии уровня совместной функции плотности

19.10 Случайная величина X нормально распределена, $\mathcal{N}(0;4)$. При фиксированном X случайная величина Y нормально распределена, $\mathcal{N}(2X-1,9)$.

а) Найдите безусловный закон распределения величины Y.

б) Найдите $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

в) Найдите $\mathbb{P}(Y > 2)$.

г) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$, $\operatorname{Var}(X|Y)$, $\operatorname{Var}(Y|X)$.

19.11 Маша прячется от Медведей в случайной точке на числовой прямой. Место, где спряталась Маша — случайная величина X, имеющая нормальное распределение, $\mathcal{N}(0;4)$. Каждый из n Медведей, обнюхав числовую прямую, имеет своё мнение о том, где спряталась Маша. Эти мнения — случайные величины Y_i. При фиксированном X случайные величины Y_1, ..., Y_n условно независимы и нормально распределены, $\mathcal{N}(X,9)$.

а) Михаилу Потапычу, Медведю номер 1, кажется, что Машей сильнее всего пахнет в точке Y_1. Где ему следует искать Машу, т.е. чему равно $\mathbb{E}(X|Y_1)$?

б) Теперь n Медведей объединились и зная Y_1, Y_2, ..., Y_n хотят понять, где же разумнее всего искать Машу. Помогите им посчитать $\mathbb{E}(X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$:

(a) Найдите безусловный закон распределения вектора Y_1, ..., Y_n.

(b) Маленькое техническое задание. Пусть I — единичная матрица, а S — матрица строевого леса, то есть матрица, в которой все элементы равны единицам. Найдите $(aI + bS)^{-1}$. Подсказка: ответ имеет вид $cI + dS$.

(c) Найдите $\mathbb{E}(X|Y_1, \ldots, Y_n)$.

19.12 Величины X_1 и X_2 независимы и нормальны $\mathcal{N}(0, 9)$.

Найдите вероятность $\mathbb{E}(X_1^2 - X_1X_2 - 6X_2^2 \geqslant 0)$.

19.13 Величины X_1 и X_2 имеют совместное нормальное распределение, причем каждая из них имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$, а корреляция между ними равна ρ. Найдите $\mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0)$.

19.14 Величина X имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$. Храбрая исследовательница Мишель подкидывает правильную монетку. Если монетка выпадает орлом, то Мишель домножает величину X на единицу, а иначе — на минус единицу, и получает величину Y.

а) Какое распределение имеет величина Y?

б) Верно ли, что пара X и Y имеет совместное нормальное распределение?

в) Чему равна корреляция X и Y?

г) Приведите пример таких случайных величин Z и W, что каждая из них имеет нормальное распределение, корреляция между ними равна 0.5, однако распределение пары (Z, W) не является совместным нормальным.

19.15 Василий нарисовал на плоскости нормальный стандартный вектор $X = (X_1, X_2)$. Затем Василий повернул его на 60° по часовой стрелке, а затем отразил относительно прямой $x_1 + 2x_2 = 0$. Как распределён получившийся вектор $W = (W_1, W_2)$?

20. Случайные вектора

20.1 Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Var}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\operatorname{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

а) $y = x - \mathbb{E}(x)$;

б) $y = \operatorname{Var}(x)x$;

в) $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;

г) $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;

д) $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$;

е) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;

ж) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;

з) $z = x' \operatorname{Var}(x)x$;

и) $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1}x$.

20.2 Известно, что случайные величины x_1, x_2 и x_3 имеют следующие характеристики:

а) $\mathbb{E}(x_1) = 5$, $\mathbb{E}(x_2) = 10$, $\mathbb{E}(x_3) = 8$;

б) $\text{Var}(x_1) = 6$, $\text{Var}(x_2) = 14$, $\text{Var}(x_3) = 1$;

в) $\text{Cov}(x_1, x_2) = 3$, $\text{Cov}(x_1, x_3) = 1$, $\text{Cov}(x_2, x_3) = 0$.

Пусть случайные величины y_1, y_2 и y_3, представляют собой линейные комбинации случайных величин x_1, x_2 и x_3:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 7x_1 - 4x_2 + x_3 \\ y_3 = -2x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

а) Выпишите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}'$.

б) Напишите матрицу A, которая позволяет перейти от случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}'$ к случайному вектору $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}'$.

в) С помощью матрицы A найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}'$.

20.3 Случайные величины w_1 и w_2 независимы с нулевым ожиданием и единичной дисперсией. Из них составлено два вектора, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ и $z = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$

а) Являются ли векторы w и z перпендикулярными?

б) Найдите $\mathbb{E}(w)$, $\mathbb{E}(z)$.

в) Найдите $\text{Var}(w)$, $\text{Var}(z)$, $\text{Cov}(w, z)$.

20.4 Известна ковариационная матрица вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\text{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдите четыре различных матрицы A, таких что вектор $v = A\varepsilon$ имеет некоррелированные компоненты с единичной дисперсией, то есть $\text{Var}(A\varepsilon) = I$.

20.5 Известно, что $\text{Corr}(X, Z) = 0.7$, $\text{Corr}(X, Y) = 0.6$. В каких пределах может лежать корреляция $\text{Corr}(Y, Z)$?

20.6 Пусть r_1, r_2 и r_3 — годовые доходности трёх рисковых финансовых инструментов. Пусть α_1, α_2 и α_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}'$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}'$, $\text{Var}(r) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ известны.

а) Найдите годовую доходность портфеля U инвестора.

б) Докажите, что дисперсия доходности портфеля равна $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i c_{ij} \alpha_j$.

в) Для случая $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha 3 = 0.4$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}'$,

$$\text{Var}(r) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & -0.005 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ -0.005 & 0 & 0.0025 \end{pmatrix}$$

найдите $\mathbb{E}(U)$ и $\text{Var}(U)$.

20.7 Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, такие что $\mathrm{Var}(\xi_1) = 2$, $\mathrm{Var}(\xi_2) = 3$, $\mathrm{Var}(\xi_3) = 4$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_3) = -1$, $\mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_3) = 0$. Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}'$. Найдите $\mathrm{Var}(\xi)$ и $\mathrm{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$.

21. Большая сила o-малых

21.1 Вероятность того, что непросветлённый Ученик достигнет Просветления за малый интервал времени, прямо пропорциональна длине этого интервала, то есть

$$\mathbb{P}(\text{достигнуть Просветления за отрезок времени } [0; 0 + \Delta]) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

Какова точная вероятность того, что Ученик, начавший искать Просветление, так и не достигнет его к моменту времени t?

21.2 Дворняги благородных кровей, Шарик и Тузик, очень любят тусоваться вместе. Изначально блоха Изабелла сидит на Шарике. Вероятность перескока Изабеллы с одной собаки на другую за малый интервал времени прямо пропорциональна длине этого интервала, то есть:

$$\mathbb{P}(\text{перескок за отрезок времени } [t; t + \Delta]) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

Какова точная вероятность того, что блоха Изабелла будет сидеть на Шарике в момент времени t?

21.3 В десятиэтажном доме есть невероятный лифт. Лифт мгновенно способен подняться или опуститься на один этаж. Вероятность отправки лифта вверх или вниз за малый промежуток времени $[t; t + \Delta]$ прямо пропорциональна длине этого промежутка. А именно,

$$\mathbb{P}(\text{лифт отправится вверх за интервал } [t; t + \Delta]) = \lambda_u\Delta + o(\Delta)$$

$$\mathbb{P}(\text{лифт отправится вниз за интервал } [t; t + \Delta]) = \lambda_d\Delta + o(\Delta)$$

Если лифт стоит на первом или последнем этаже и нет возможности двигаться вверх или вниз, то соответствующая вероятность зануляется.

Обозначим N_t — этаж, на котором находится лифт в момент времени t. Система находится в стохастическом равновесии, то есть вероятности $\mathbb{P}(N_t = k)$ постоянны во времени.

а) Найдите вероятность встретить лифт на каждом этаже;

б) При каком соотношении λ_u и λ_d вероятность встретить лифт на втором этаже максимальна?

21.4 На одного покупателя кассирша Марфа Петровна тратит экспоненциальное время с параметром λ_s. Покупатели приходят пуассоновским потоком с параметром λ_{in}.

Длина очереди к Марфе Петровне в момент времени t — случайная величина L_t. Предположим, что система находится в стохастическом равновесии, то есть вероятности $\mathbb{P}(L_t = k)$ не зависят от t.

а) Найдите вероятности $\mathbb{P}(L_t = k)$;

б) Найдите среднюю длину очереди $\mathbb{E}(L_t)$.

21.5 Исследователь Василий выбирает равномерно и независимо друг от друга 10 точек на отрезке $[0;1]$. Затем Василий записывает их координаты в порядке возрастания, $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_{10}$.

Не производя вычислений, *по определению*, выпишите функции плотности:

а) величины Y_1;

б) величины Y_{10};

в) величины Y_4;

г) пары величин Y_2 и Y_7;

д) пары величин Y_3 и Y_5;

е) тройки величин Y_1, Y_4 и Y_9;

ж) всех величин Y_1, ..., Y_{10};

21.6 про нормальное распределение

22. Броуновское движение

22.1

22.2 Пусть Z — стандартная нормальная случайная величина. Определим случайный процесс $X_t = \sqrt{t}Z$.

а) Найдите $\mathbb{E}(X_t)$

б) Найдите $\mathrm{Var}(X_t)$

в) Верно ли, что у процесса X_t независимые приращения?

г) Нарисуйте три типичные траектории процесса X_t?

д) Будет ли X_t броуновским движением?

22.3 Пусть W_t — стандартное броуновское движение и $a > 0$. Являются ли следующие процессы броуновским движением?

а) $X_t = -W_t$;

б) $X_t = W_{a+t} - W_a$;

в) $X_t = \frac{1}{a} W_{a^2 t}$

г) $X_t = W_t^3$

22.4

22.5

23. И потребленье возрастает, а производство отстаёт!

Испить мудрость жадными глотками можно в источнике [Wil13].
Обобщенный бином Ньютона для произвольной степени $a \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} C_a^k x^k, \quad \text{где } C_a^k = \frac{a(a-1)(a-2)\cdot \ldots \cdot (a-k+1)}{k!}$$

23.1 Найдите коэффициент при x^{17} в многочлене $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

23.2 Найдите и запишите максимально просто производящие функции для последовательностей

а) 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, …

б) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, …

в) 1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, …

23.3 Найдите первые четыре коэффициента в многочленах $(1 + 2x)^{-3}$ и $(1 + x + x^2)^{-4}$.

23.4 Кубик подбрасывают три раза. Обозначим результаты подбрасываний X_1, X_2 и X_3. Найдите производящие функции для величин X_1, $X_1 + X_2$ и $X_1 + X_2 + X_3$.

23.5 Производящая функция случайной величины X линейна и проходит через точки $(1, 1)$ и $(5, 4)$. Какие значения принимает величина X и с какими вероятностями?

23.6 На месте убийства преступники оставили улику — маленький-маленький кусочек графика производящей функции.

Сможет ли Шерлок Холмс по этому кусочку восстановить все вероятности?

23.7 Леонардо Пизанский (Фибоначчи) приобрёл новорождённую пару кроликов. Каждая взрослая пара кроликов даёт в качестве приплода ежемесячно новую пару кроликов. Только что рождённая пара кроликов начинает приносить приплод со второго месяца жизни. Пусть F_n — количество пар кроликов в n-ый месяц.

а) Каким соотношением связаны F_n, F_{n-1} и F_{n-2}?

б) Пусть для удобства $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Найдите производящую функцию для количества пар кроликов.

в) Используя хороший софт, поделите 1 на 999999999999999999999998999999999999999999999999. Здесь 23 девятки, восьмёрка и потом 24 девятки. Почему мы видим последовательность чисел Фибонначи? Например, можно поделить в julia установив высокую точность:

```
setprecistion(BigFloat, 10000)
1 / 999999999999999999999998999999999999999999999999
```

г) Разложите найденную функцию в сумму двух дробей и, вспомнив формулу для геометрической прогрессии, найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.

23.8 Сева стартует в точке 0 на числовой прямой. За каждый час он перемещается вправо на единицу с вероятностью 0.7 или влево на единицу с вероятностью 0.3. Пусть X_1 — момент времени, когда Сева впервые достигнет точки 1, а X_2 — точки 2.

а) Как связаны производящие функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ величин X_1 и X_2?

б) Рассмотрев возможные положения Севы после первого шага, составьте квадратное уравнение на $h_1(t)$.

в) Найдите $h_1(t)$.

г) Найдите $\mathbb{E}(X_1)$.

д) Выпишите формулу для $\mathbb{P}(X_1 = 2017)$.

23.9 Ангела Меркель подбрасывает правильную монетку до выпадения трёх орлов подряд. Найдите производящую функцию для количества подбрасываний.

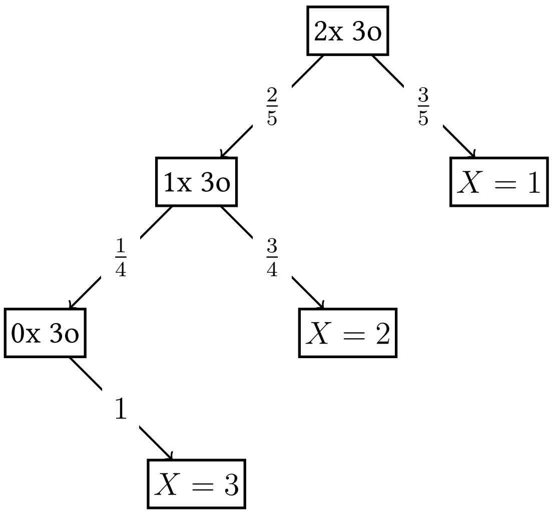
23.10 Для решения этой задачи можно и нужно использовать таблицу функций, производящих моменты. Например, можно воспользоваться https://en.wikipedia.org/wiki/Moment-generating_function#Examples.

Опознайте закон распределения по функции, производящей моменты, и укажите математическое ожидание случайной величины X:

а) $M_X(u) = (0.2 + 0.8e^u)^5$;
б) $M_X(u) = \exp(3e^t - 3)$;
в) $M_X(u) = (1 - 2t)^{-1}$;
г) $M_X(u) = (\exp(10t) - \exp(4t))/6t$;
д) $M_X(u) = \exp(10t + 20t^2)$.

24. Решения

1.1. Нарисуем дерево, обозначая в вершинах «стадии» эксперимента, в листьях — итоговый результат, а «ветки» будем подписывать вероятностями выпадения[7].



Нас интересует вероятность события «$X = 2$». «Пройдёмся» по дереву, перемножая вероятности, и получим $\mathbb{P}(X = 2) = 2/5 \cdot 3/4 = 3/10$.

Вероятность того, что Маша съест больше одной конфеты можно посчитать двумя способами.

Заметим, всё вероятностное пространство (множество всех возможных исходов эксперимента) – это $\{1, 2, 3\}$. Значит, с одной стороны $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 3/10 + 2/5 \cdot 1/4 \cdot 1 = 2/5$.

А с другой стороны, искомая вероятность равна единице минус вероятности дополнения. В нашем случае дополнение – это множество их одного исхода $X = 1$[8]. Наконец, $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 3/5$.

Чтобы посчитать математическое ожидание случайной величины, надо знать её закон распределения. Случайная величина X дискретна (принимает не более чем счётное количество значений[9]), а значит нам потребуется только таблица с всевозможными исходами X, и соответстующие им вероятности.

[7] В целях краткости и читаемости, подписи «стадий» можно обозначать символически. В нашем случае символическая запись «1х 3о» означает, что в вазе 1 конфета с орехом и 3 — без ореха

[8] В таких случаях способ через дополнение обычно приводит к ответу за меньшее число вычислений

[9] В нашем случае X принимает конечное множество значений

Исходы мы уже нашли – это множество {1, 2, 3}. Вероятности мы тоже нашли выше, а значит таблица имеет вид

t	1	2	3
$\mathbb{P}(X = t)$	$3/5$	$3/10$	$1/10$

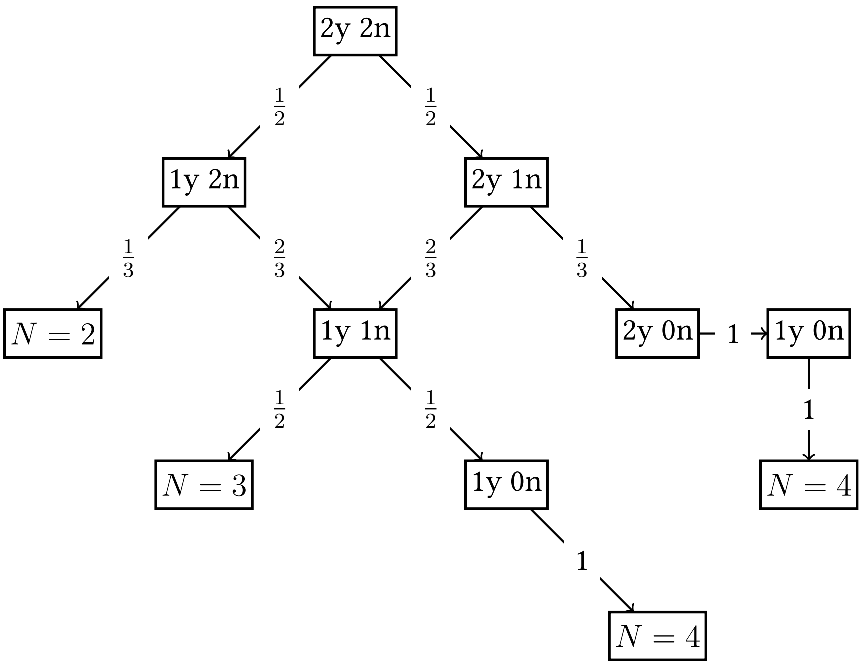
Математическое ожидание дискретной случайной величины — это просто взвешенная по вероятностям сумма её значений, другими словами – ряд вида $\sum p_i x_i$, где x_i – i-е значение случайной величины, а p_i — вероятность выпадения этого значения. В нашем случае

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = 1.5$$

Попробуем разобраться, что означает равенство математического ожидания какому-то числу. В нашем случае неправильным будет сказать, что при очередном выполнении эксперимента, мы ожидаем увидеть исход, равный 1.5. В конце концов, все исходы – это просто разные количества конфет, а конфет должно быть целое количество.

На самом деле о математическом ожиданиии нужно думать в свете многократного выполнения эксперимента. Если мы будем заставлять Машу есть конфеты из вазы миллион раз[10], иногда она будет съедать одну конфету, иногда две, а иногда три. Но значение среднего[11] будет близко к 1.5[12].

1.2. Пусть N — количество извлечённых лампочек. Нарисуем дерево



a) Требуется найти вероятность $\mathbb{P}(N = 3)$. Исход $N = 3$ может произойти двумя способами. Следуя по стрелочкам, получим

$$P(N = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

[10] говоря языком статистики, посмотрим на реализации независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_{1'000'000}$, распределение которых совпадает с распределением X

[11] То есть значение случайной величины $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_{1'000'000})/1000000$

[12] Оно будет *равняться* 1.5 только при стремлении количества наблюдений к бесконечности

б) Чтобы найти математическое ожидание, найдём закон распределения N. Случайная величина дискретна и принимает значения $\{2, 3, 4\}$[13]. Найдём вероятности каждого из исходов

$$\mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(N=4) = 1 - \mathbb{P}(N=2) - \mathbb{P}(N=3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

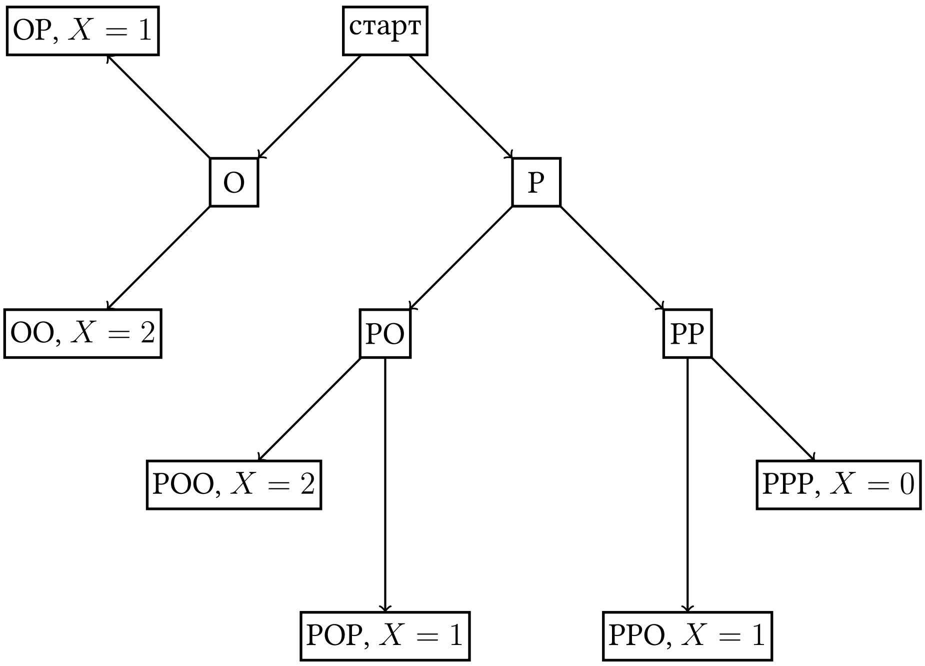
Мы нашли закон распределения и можем записать его в виде таблицы

t	2	3	4
$\mathbb{P}(X=t)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

Теперь посчитать математическое ожидание не составит труда

$$\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$$

1.3. Нарисуем дерево (подписи рёбер опустим, так как вероятность всегда равна $\frac{1}{2}$)



Следуя по «веткам», получим

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\text{РРР}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\text{ОО}) + \mathbb{P}(\text{РОР}) + \mathbb{P}(\text{РРО}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\text{ОО}) + \mathbb{P}(\text{РОО}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Таблица случайной величины имеет вид

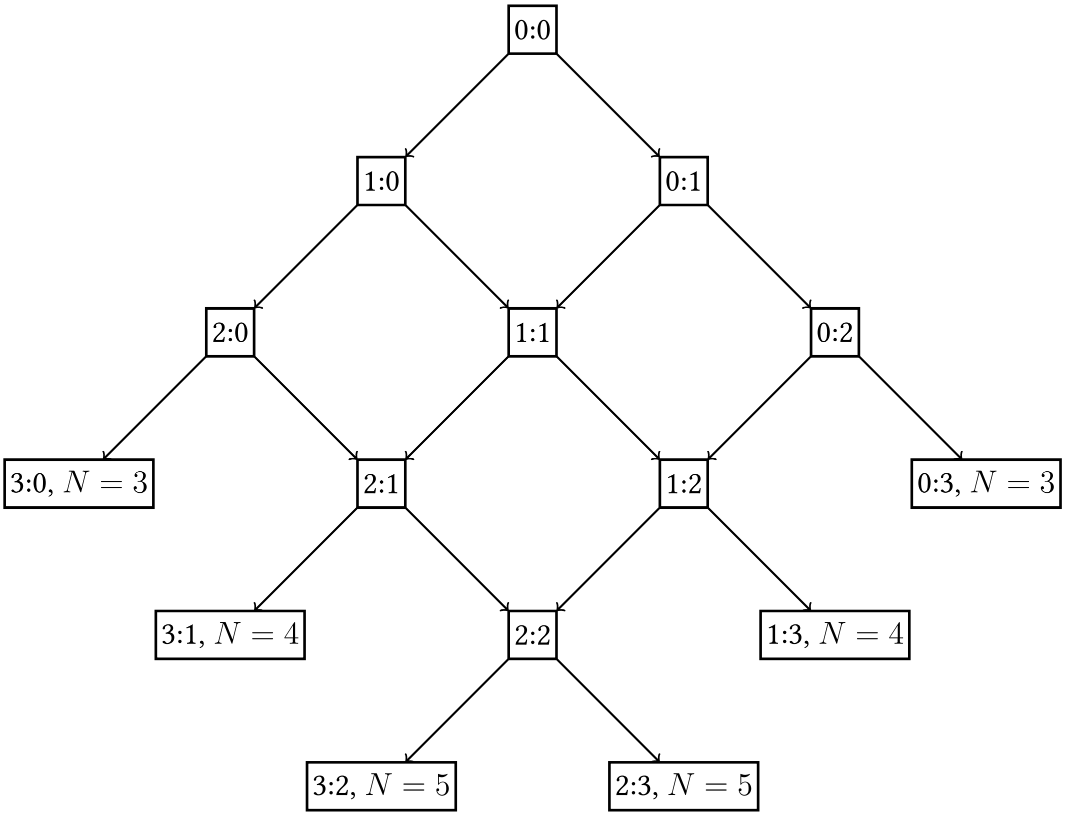
[13] Другими словами, множество элементарных исходов — это $\{2, 3, 4\}$

t	0	1	2
$\mathbb{P}(X = t)$	$1/8$	$1/2$	$3/8$

Значит математическое ожидание равно

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{10}{8}$$

1.4. Нарисуем дерево (подписи рёбер опустим, так как вероятность всегда равна $\frac{1}{2}$).



Следуя по «веткам», получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = 3) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(N = 4) &= 6 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8} \\ \mathbb{P}(N = 5) &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Таблица

t	3	4	5
$\mathbb{P}(N = t)$	$1/4$	$3/8$	$3/8$

Тогда математическое ожидание $E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$
$\mathbb{P}(N\text{— чётное}) = \mathbb{P}(N = 4) = \frac{3}{8}$

1.5.

а) Представим, что 30 человек собираются в одной комнате и входят по очереди. Пусть имя первого — Алексей, второго — Борис, третьего — Вова.

В комнату зашёл Алексей, теперь заходит Борис. Один день в году уже занят днём рождения Алексея, поэтому вероятность не совпадения их дней рождения равна $\frac{364}{365}$.

Теперь заходит Вова. Уже два дня в году занято днями рождения Алексея и Бориса. Значит, вероятность не совпадения для трёх человек равна $\frac{364}{365}\frac{363}{365}$.

Такая логика распространяется на сколь угодно много человек в комнате. Для 30 человек вероятность отсутствия совпадения будет равна

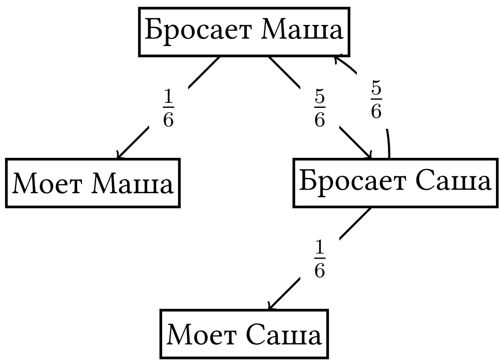
$$p_{30} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{332}{336} \approx 0.29, \quad p_n = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{366-n}{365} = \frac{364!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{365^{n-1}}$$

б) Вероятность хотя бы одного совпадения равна единице за вычетом вероятности не совпадения. Значит, искомая вероятность для n человек в комнате равна

$$\mathbb{P}(\text{хотя бы одно совпадение дней рождения}) = 1 - p_n.$$

Остаётся найти решение неравенства $p_n < 1/2$. Оказывается, уже при 23 людях неравенство выполняется.

1.6. Нарисуем дерево



Пусть p — вероятность, что Маша будет мыть посуду, если она бросает кубик. Тогда верно следующее равенство

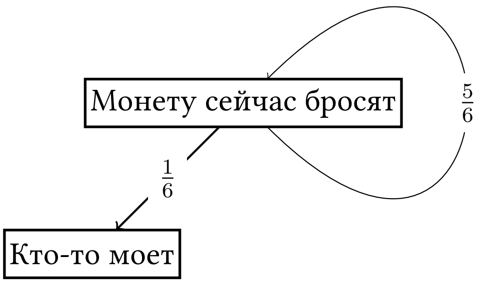
$$p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot p, \quad p = \frac{6}{11}$$

Пусть μ — математическое ожидание бросков, если Маша бросает кубик. Тогда верно следующее равенство

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot (\mu + 2), \quad \mu = 6$$

Альтернативный подход к нахождению ожидания: заметим, когда мы думаем о количестве подбрасываний, совершенно неважно кто их делает.

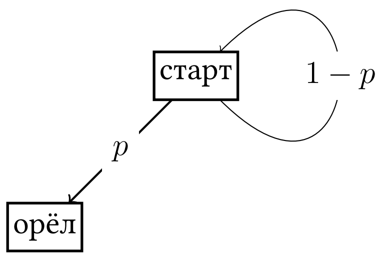
Дерево можно перерисовать так



А значит

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (\mu + 1), \quad \mu = 6$$

1.7. Нарисуем дерево



Пусть μ_n, μ_o, μ_p — ожидания числа бросков, числа орлов и числа решек соответственно. Верны следующие равенства

$$\mu_n = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot (\mu_n + 1), \quad \mu_n = \frac{1}{0.7} = \frac{1}{p}$$
$$\mu_o = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot \mu_o, \quad \mu_o = 1$$
$$\mu_p = 0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot (\mu_p + 1), \quad \mu_p = \frac{0.3}{0.7} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

1.8.

а) 1/3 (игра может закончиться либо ④, либо ⑤, либо ⑥)

б) С вероятностью 1/2 игра продлится один ход, с вероятностью 1/4 — два хода, с вероятностью 1/8 — три хода и т.д. Получается прогрессия $\mathbb{E}(X) = 1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 3 + 1/16 \cdot 4 + \ldots$. Можно рассматривать это как геометрическое распределение с $\mathbb{E}(X) = 1/p = 2$.

в) Решаем методом первого шага. В самом начале игры на кону ноль рублей, и если выпадает ④, ⑤ или ⑥, мы не получаем ничего. Если выпадает ①, ② или ③, то мы как бы начинаем точно такую же игру, с теми же вероятностями и тем же математическим ожиданием выигрыша, но сумма на кону на 1, 2 или 3 рубля больше. Ещё не факт, что мы их получим, поэтому домножаем на вероятность забрать выигрыш:

$$\mathbb{E}(S) = 1/6(\mathbb{E}(S) + \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 2 \cdot \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 3 \cdot \mu) + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0 = 1\frac{1}{3},$$

где μ — вероятность забрать накоп раньше, чем он сгорит (2/3).

г) Меняются слагаемые для ④ и ⑤ — на первом шаге мы получим 100:

$$\mathbb{E}(S) = 1/6(\mathbb{E}(S) + \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 2 \cdot \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 3 \cdot \mu) + 1/6 \cdot 100 + 1/6 \cdot 100 + 1/6 \cdot 0 = 68$$

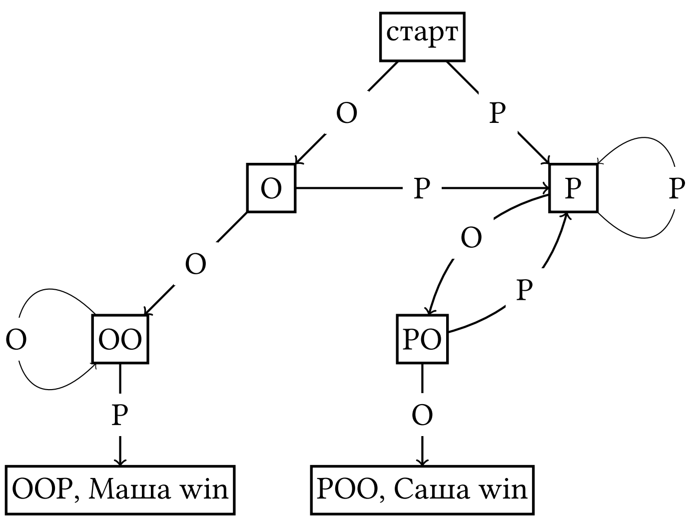
д) Меняется только слагаемое для ⑤ — игра продолжится с теми же вероятностями и тем же математическим ожиданием выигрыша:

$$\mathbb{E}(S) = 1/6(\mathbb{E}(S) + \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 2 \cdot \mu) + 1/6(\mathbb{E}(S) + 3 \cdot \mu) + 1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot \mathbb{E}(S) + 1/6 \cdot 0 = 2$$

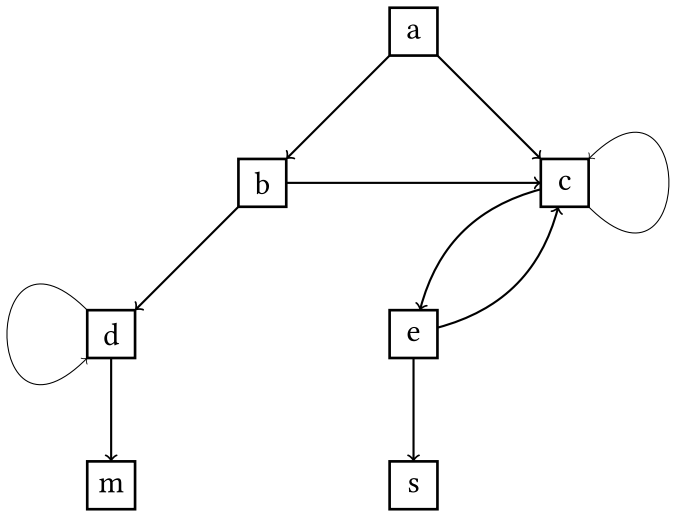
Альтернативное решение: кладём m рублей в карман («несгораемая сумма») и игра продолжается, получаем $1/6(\mathbb{E}(S) + m)$.

1.9.

Нарисуем дерево



а) Пусть a — вероятность выигрыша Маши, если она находится в старте, b — вероятность выигрыша Маши, если она находится в «О» и так далее, как на рисунке ниже



Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \\ b = \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot c \\ c = 0 \end{cases}, \quad a = \frac{1}{4}$$

б) Все случаи, когда подбрасываний четыре — это «abddm», «abces», «acces». Значит $\mathbb{P}(X = 4) = 3 \cdot 1/2^4 = 3/16$.

Все случаи, когда решка одна — это «abces», «acces» и все случаи вида «abd...dm». Все последние случаи возникают при попадании в «d», а значит вероятность всех случаев равна вероятности «abd». $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/4 + 1/8 + 1/16 = 7/16$ Пусть теперь $a, b, c, \ldots$ — ожидания количества бросков с соответствующих позиций. Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \\ b = 1 + \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot c \\ c = 1 + \frac{1}{2} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot e \\ d = \frac{1}{2} \cdot (d+1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ e = \frac{1}{2} \cdot (c+1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{cases}$$

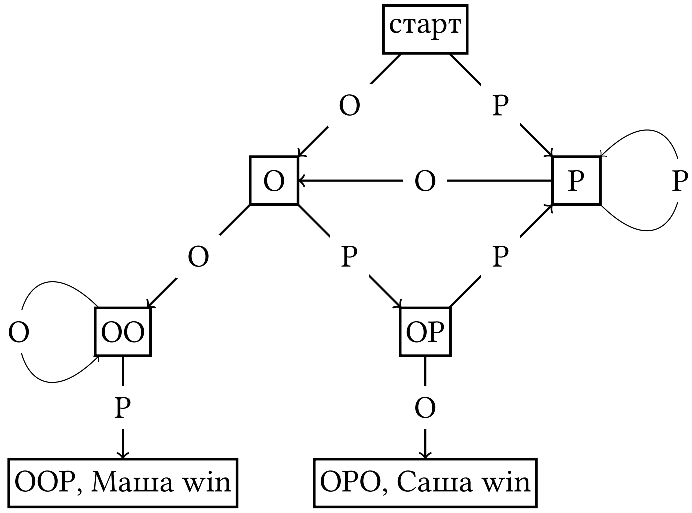
Эти уравнения линейно независимы по построению, всего их пять, и неизвестных тоже 5. Значит найдётся единственное решение.

Пусть теперь $a, b, c, \ldots$ — ожидания количества решек с соответствующих позиций. Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot (c+1) \\ b = \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot (c+1) \\ c = \frac{1}{2} \cdot (c+1) + \frac{1}{2} \cdot e \\ d = \frac{1}{2} \cdot d + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ e = \frac{1}{2} \cdot (c+1) + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{cases}$$

Здесь тоже найдётся единственное решение.

в) Нарисуем дерево



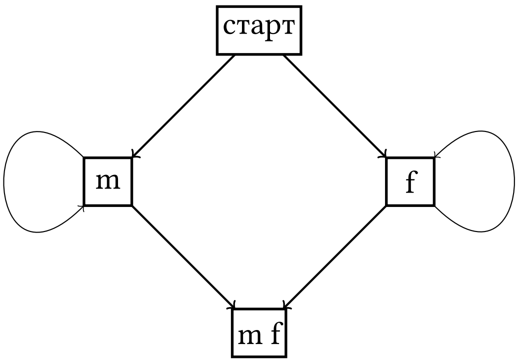
Остальные пункты аналогичные.

1.10. стоп на 4-5-6 или стоп на 5-6

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}\max\{2, \mathbb{E}(S)\} + \ldots + \frac{1}{6}\max\{6, \mathbb{E}(S)\}$$

$$\mathbb{E}(S) = -0.35 + \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}\max\{2, \mathbb{E}(S)\} + \ldots + \frac{1}{6}\max\{6, \mathbb{E}(S)\}$$

1.11.
Нарисуем дерево



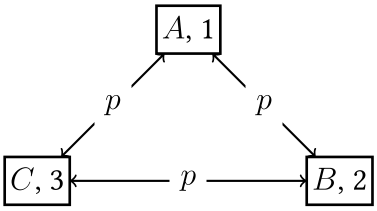
Все случаи, когда детей четыре — это «mmmf» и «fffm», значит $\mathbb{P}(X = 4) = 2 \cdot 1/2^4 = 1/8$.

Пусть a, b, c — ожидания количества детей из стадий «старт», «m», «f» соответственно. Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \\ b = \frac{1}{2} \cdot (b+1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ c = \frac{1}{2} \cdot (c+1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = b = c \\ 2b = b + 1 + 2 \end{cases}, \quad a = 3$$

1.12.

Нарисуем диаграмму с изначальным расположением ежей. Цифры — имена ежей, буквы — названия вершин.



$\mathbb{P}(T = 1)$: Без ограничения общности, пусть ежи встречаются в вершине A. Чтобы сделать это за один ход, $2 \to A$, $3 \to A$. Но ёж 1 тоже обязан куда-то передвинуться, поэтому за один ход встречи точно не произойдёт (вероятность равна нулю).

$\mathbb{P}(T = 2)$: Рассмотрим случай встречи в вершине A. На первом ходу 2 и 3 не идут в A сразу (иначе на втором ходу придётся оттуда уходить), то есть они меняются местами; 1 может ходить куда угодно. Вероятность этого равна p^2.

На втором ходу все три ежа должны прийти в A. Вероятность этого равна p^3.

Случаи встречи в B и C аналогичны, а значит итоговая вероятность равна $3 \cdot p^2 \cdot p^3$.

2.1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{разного}) &= \mathbb{P}(\text{первый красный, второй чёрный}) + \mathbb{P}(\text{первый чёрный, второй красный}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Сумма в знаменателе — количество оставшихся тузов. После выбора одной карты останется один туз такого же цвета и два — противоположного.

2.2.

Несовместные события не могут произойти одновременно, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ или $\mathbb{P}(A \cap B) = \varnothing$.

По теореме Моргана

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

2.3.

По теореме сложения

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 1.1 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Минимальное значение достигается при максимуме $\mathbb{P}(A \cup B)$. Когда максимальна вероятность, что A или B произойдёт? Тогда, когда они меньше всего происходят вместе. В идеале — когда они вообще не происходят вместе, то есть являются несовместными. Но в случае несовместных событий $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, что больше единицы в нашем случае. То есть события A и B всё-таки неизбежно будут иногда происходить одновременно. Значит минимальное значение равно $1.1 - 1 = 0.1$.

Максимальное значение достигается при минимуме $\mathbb{P}(A \cup B)$. Когда минимальна вероятность, что A или B произойдёт? Тогда, когда они больше всего происходят вместе. В идеале — когда одно из событий происходит всегда, когда происходит второе. Но тогда $\mathbb{P}(A \cup B) = \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = 0.8$. Значит максимальное значение равно $1.1 - 0.8 = 0.3$.

Нагляднее всего это видно на диаграме Венна.

2.4. $\mathbb{P}(c) = 1 - \mathbb{P}(a, b) = 0.2$

$\mathbb{P}(a) = 1 - \mathbb{P}(b, c) = 0.3$
$\mathbb{P}(b) = \mathbb{P}(a, b) - \mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(b, c) - \mathbb{P}(c) = 0.5$

2.5.

$X = 2$ означает, что жило поколение первой амёбы (она одна), жили её дети, и эти дети не произвели потомство. Значит $\mathbb{P}(X = 2) = 3/4 \cdot 1/4^2$.

По дереву видно

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

Пусть вероятность произвести потомство $q = 3/4$, искомая вероятность $\mathbb{P}(X = \infty) = p$. Тогда верно равенство

$$p = q \cdot (1 - (1 - p)^2), \quad p = \frac{2q - 1}{q} = \frac{2}{3}$$

Потому что у отдельной амёбы будет бесконечное потомство, если она произведёт потомство[14], и не случится ситуации, что у обоих потомков не будет бесконечного потомства[15].

2.6.

Пусть вероятность срабатывания при i-ом нажатии равна p_i, то есть

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} > p_2 > p_3 > \ldots > p_{100}$$

Пусть q_i — вероятность, что телевизор включен после i-го нажатия. Понятно, $q_1 = p_1 = 1/2$. Требуется найти q_{100}.

Чтобы телевизор оказался включённым после 2-го нажатия, он мог либо быть включённым после 1-го нажатия, и пульт не сработал; либо быть выключенным после 1-го нажатия, и пульт сработал. То есть

$$\begin{aligned} q_2 &= \mathbb{P}(\text{ТВ вкл после 1-го нажатия}) \cdot \mathbb{P}(\text{Кнопка не сработала}) + \\ &+ \mathbb{P}(\text{ТВ выкл после 1-го нажатия}) \cdot \mathbb{P}(\text{Кнопка сработала}) = \\ &= (1 - q_1)p_1 + q_1(1 - p_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

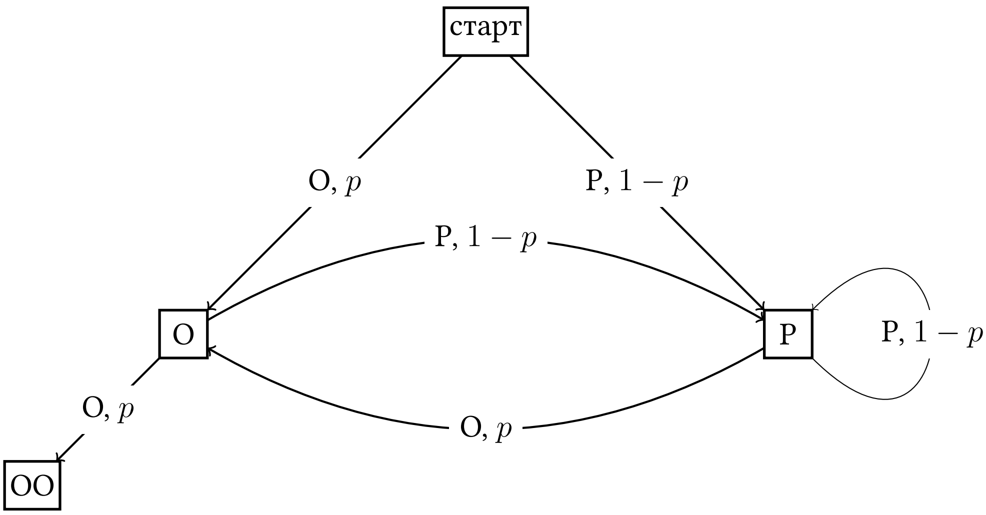
Аналогично

$$q_3 = (1 - q_2)p_2 + q_2(1 - p_2) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(1 - p_2) = \frac{1}{2}, \quad q_{100} = \frac{1}{2}$$

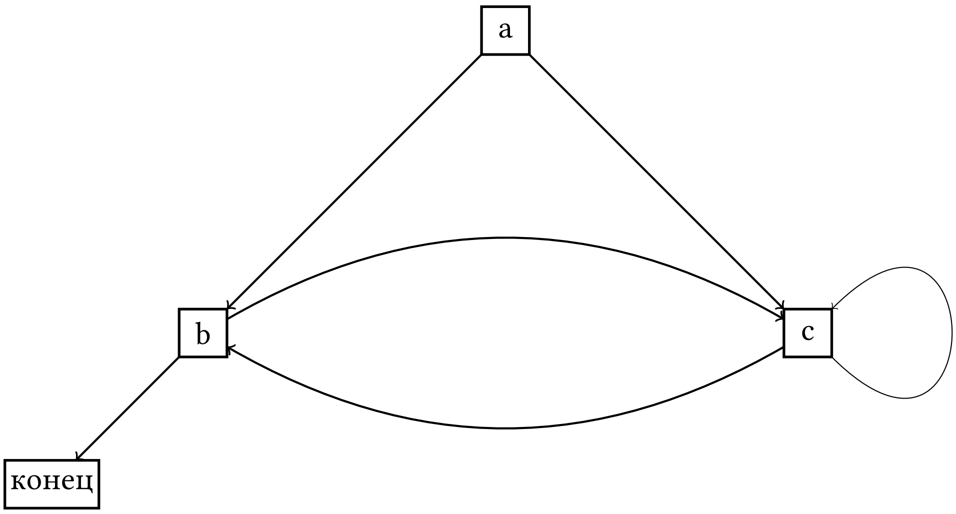
2.7. По условию вероятность орла равна p. Нарисуем дерево

[14] Вероятность этого равна q

[15] У одного потомка не будет бесконечного потомства с вероятностью $1 - p$, у двух — $(1 - p)^2$



Пусть a, b, c — ожидания количества бросков из позиций, как на рисунке ниже



Заметим, $a = c$, так как стрелки из этих позиций ведут в одинаковые состояния. Это также видно напрямую

$$\begin{cases} a = p(b+1) + (1-p)(c+1) \\ c = p(b+1) + (1-p)(c+1) \end{cases}$$

Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases} a = p(b+1) + (1-p)(a+1) \\ b = p + (1-p)(a+1) \end{cases} \quad , \quad a = \frac{p+1}{p^2} = 6$$

Пусть a, b, c — ожидания количества решек из соответствующих позиций, тогда верна система уравнений

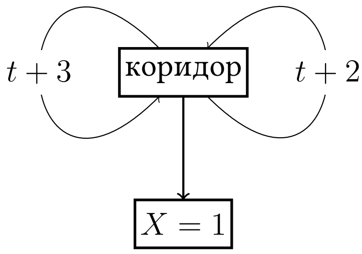
$$\begin{cases} a = pb + (1-p)(c+1) \\ b = p \cdot 0 + (1-p)(c+1) \\ c = pb + (1-p)(c+1) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a = pb + (1-p)(c+1) \\ a = c \\ a = pb + b = (p+1)b \end{cases} \quad , \quad a = \frac{p}{p+1}a + (1-p)(a+1)$$

Откуда $a = 1/p^2 - 1 = 3$

2.8. стратегия 1: говорить стоп, если на кону 200 рублей вне зависимости от числа набранных красных карточек стратегия 2: если нет красных карточек или одна, то останавливаться при 200 рублях, а при двух карточках останавливаться на 100 рублях.

2.9.

Вероятности перехода из вершины в вершину опустим, они равны по $1/3$.



Пусть μ — ожидание времени нахождения сыра, тогда имеет место уравнение

$$\mu = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (\mu + 2) + \frac{1}{3} \cdot (\mu + 3), \quad \mu = 6$$

2.10. Решим более общую задачу, где ЗГ появляется на дороге с вероятностью α. Методом первого шага получаем уравнение

$$p = \alpha\left(1 - (1-p)^3\right).$$

Одним из решений уравнения будет $p = 0$, другим, всегда лежащим в интервале $(0;1)$, будет $p = \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}$ при $\alpha \neq 0$. Третье решение не попадает в диапазон от 0 до 1 и, следовательно, нас не интересует.

Функция $p(\alpha)$ — это вероятность существования бесконечного пути. По смыслу задачи, эта функция нестрого монотонна, непрерывна и принимает значение 0 при $\alpha = 0$ и значение 1 при $\alpha = 1$.

Следовательно, функция $p(\alpha)$ будет иметь вид

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0, \alpha \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}, \ \alpha \in \left(\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases}.$$

При $\alpha = \frac{2}{3}$ искомая вероятность равна $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

2.11.

2.12.

$\mathbb{P}(X > 1) = 1/2$ (треугольник симметричен относительно $x = 1$)

$\mathbb{P}(X \in [0.5; 1]) = 3/8$ (весь треугольник делится на восемь маленьких, в указанном интервале лежат три)

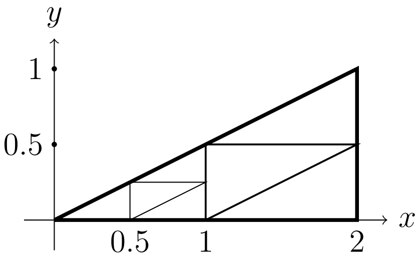
$\mathbb{E}(X) = 1$

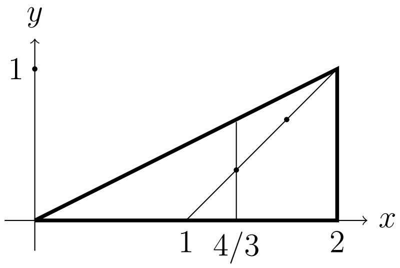
2.13.

а) Можно заметить, что треугольник хорошо делится на четыре одинаковых маленьких, правее $x = 1$ лежат три из них, так что $\mathbb{P}(X > 1) = 3/4$. Треугольник, лежащий левее $x = 1$, подобен большому и так же делится на четыре меньших, три из которых находятся в интервале [0.5;1], следовательно, $\mathbb{P}(X \in [0.5; 1]) = 3/4 \cdot 1/4 = 3/16$.

б) Вертикальная прямая $x = \mathbb{E}(X)$ должна уравновешивать треугольную пластинку. Для этого она должна проходить через точку пересечения медиан, а медианы этой точкой делятся в пропорции 2:1 от вершины. Отсюда $\mathbb{E}(X) = 4/3$.

в) Линия $x = a$ должна делить треугольник на две фигуры равной площади. Правее этой линии будет лежать прямоугольный треугольник с катетами длиной a и $a/2$, а его площадь должна быть равна 0.5. Отсюда $a = \sqrt{2}$.





Обратите внимание на разницу между пунктами 2. и 3.

2.14.

2.15.

2.16.

2.17. Лёва объясняет левую часть, Рома — правую.

а) У Лёвы есть 10 книг, он хочет взять с собой 7. У Ромы есть 10 книг, он хочет оставить дома 3.

б) Лёва и Рома знают только буквы L и R. Рома записал все слова из 11 букв с 4 буквами L. Лёва поделил слова Ромы по последней букве на две группы.

в) Число всех подмножеств в множестве из 4-х элементов.

г) Из 10 человек хотим выбрать одного лидера и 3-х помощников.

д) Из 10 человек хотим выбрать 3-х орлов и 2-х слонов.

е) Число всех подмножеств с одним лидером в множестве из 5-ти элементов.

ж) Строим слова из семи букв, каждая буква — это L или R. В слове должно быть три L. Разобьём слова на группы в зависимости от позиции последней L.

з) В группе 9 человек, четыре мальчика и пять девочек. Хотим выбрать любых троих человек.

и) В группе 10 человек, поровну мальчиков и девочек. Мы хотим выбрать четверых человек.

2.18.

а) $\binom{10}{4}$

б) $\binom{7}{4}$

в) $\binom{10}{4}$

г) $\binom{13}{4}$

2.19. Можно считать яблоки различными или одинаковыми. При различных яблоках ответ — $C_{10}^1 C_5^2$, при идентичных — 1.

2.20. 1 и 0

2.21. $21^{10}/30^{10}$

2.22.

а) Мысленно отметим на окружности три точки: места ударов Бориса и точку, где схватилась Анна. Можно считать, что эти три точки равномерно и независимо распределены по окружности. Следовательно, среднее расстояние между соседними точками равно $1/3$. Аня берёт два кусочка, слева и справа от своей точки. Значит ей в среднем достаётся $2/3$ окружности.

б) Объявим точку, где схватилась Аня нулём. Координаты двух ударов изобразим на плоскости. Закрашиваем подходящий участок. Аня выигрывает на полосе вдоль биссектрисы за исключением двух треугольников. Вероятность того, что Анин кусок длиннее равна $3/4$.

2.23. Рисуем картинку, по горизонтальной оси откладываем время, по вертикальной координаты поездов. Получаем, что он живёт в 15 минутах от ближайшего города и ждать поезда в среднем тоже 15 минут.

Задача от Виктора Прасолова.

3.1. $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/3}{1/6+1/3} = 2/3$

3.2. A — первый охотник попал в утку, B — в утку попала ровно одна пуля
$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.4\cdot 0.3}{0.4\cdot 0.3+0.6\cdot 0.7} = 2/9$

3.3. $\mathbb{P}(A \mid B) = 1/6$

3.4. Обозначим: X — количество попавшихся тузов, S — количество попавшихся тузов пик.

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{C_4^2 C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}}$$

$\mathbb{P}(X \geqslant 2 \mid X \geqslant 1) = \frac{\mathbb{P}(X\geqslant 2)}{\mathbb{P}(X\geqslant 1)} = \approx 0.37$

Можно представить, что мы берём первые 13 карт из случайно перемешанной колоды. Поэтому вероятность того, что туз пик попадет на одно из этих 13-и мест равна:

$$\mathbb{P}(S=1) = \frac{13}{52}$$

Далее,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2 \mid S=1) = \frac{\mathbb{P}(S=1, X\geqslant 2)}{\mathbb{P}(S=1)}$$

Ищем вероятность в числителе. Есть много способов, один из:

$$\mathbb{P}(S=1, X\geqslant 2) = \mathbb{P}(S=1) - \mathbb{P}(S=1, X=1) = \frac{13}{52} - \frac{1\cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}$$

Итого, $\mathbb{P}(X \geqslant 2 \mid S=1) \approx 0.56$.

3.5. $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7\cdot 11/C^2_{7+5+11}}{(7\cdot 11+5\cdot 11+7\cdot 5)/C^2_{7+5+11}}$

3.6. B — событие, второй — черный, $\mathbb{P}(B) = 11/16$
$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(B) = \frac{\frac{5}{16}\frac{11}{15}}{11/16}$

3.7. A — партия мяса заражена, B — партия мяса по тесту заражена
$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(B) = \frac{0.04\cdot 0.9}{0.04\cdot 0.9+0.96\cdot 0.1} \approx 0.27$

3.8. A — Петя из Б класса, B — Петя обожает географию
$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(B) = \frac{0.4/3}{0.3/3+0.4/3+0.7/3} = 2/7$

3.9. $1/3$

3.10. да

3.11. нет, $(4/52)\cdot(3/51) = \mathbb{P}(A\cap B) \neq \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = (4/52)^2$

3.12.
В общем случае:

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A,B)-\mathbb{P}(B,C)-\mathbb{P}(A,C)+\mathbb{P}(A,B,C).$$

Мы знаем, что A и B несовместны, значит, $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0$. По формуле условной вероятности $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B \mid C)\mathbb{P}(C)$, а $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(C)$. Так как A и C независимы, то $\mathbb{P}(A \mid C) = \mathbb{P}(A)$. Собирая всё это вместе, получаем:

$$\mathbb{P} = 0.3+0.4+0.5-0.1\cdot 0.5-0.3\cdot 0.5 = 1$$

3.13. $2/3$, $1/2$, $1/2$, $14/27$

3.14.

а) $(1/2)^n/(1/2) = 1/2^{n-1}$;

б) $(1/2)^n/(1-(1/2)^n) = 1/(2^n-1)$;

4.1.

4.2.

4.3.

4.4.

4.5.

5.1. Так как о функции плотности нам известно только её значение в точке, лучшим приближением значения в некоторой окрестности точки, которое мы можем дать, будет константа: $\mathbb{P}(\xi \in [7, 7.001]) \approx f(7) \cdot 0.001 = 0.005$.

5.2. $\mathbb{P}(\xi \in [x, x + \Delta x]) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$

5.3.

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2, \text{ если } t \in [0, 1], \\ 0, \text{ если } t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

а) $Y = \ln X$

Найдём функцию распределения. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\ln X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant e^y) = \int_0^{e^y} 3t^2 dt = e^{3y}$

Получаем

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{3y}, \text{ если } y \leqslant 0, \\ 1, \text{ если } y > 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{3y}, \text{ если } y \leqslant 0, \\ 0, \text{ если } y > 0. \end{cases}$$

б) $Z = X^2$

$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{z}) = \int_0^{\sqrt{z}} 3t^2 dt = (\sqrt{z})^3$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ если } z < 0, \\ (\sqrt{z})^3, \text{ если } z \in [0, 1], \\ 1, \text{ если } z > 1. \end{cases} \quad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{z}, \text{ если } z \in [0, 1], \\ 0, \text{ если } z \notin [0, 1]. \end{cases}$$

в) $W = (X - 0.5)^2, W \in [0, 0.25]$

$$\begin{aligned} F_W(w) =& \mathbb{P}(W \leqslant w) = \mathbb{P}((X - 0.5)^2 \leqslant w) = \mathbb{P}(-\sqrt{w} \leqslant X - 0.5 \leqslant \sqrt{w}) = \\ =& \mathbb{P}(-\sqrt{w} + 0.5 \leqslant X \leqslant \sqrt{w} + 0.5) = F_W(\sqrt{w} + 0.5) - F_W(-\sqrt{w} + 0.5) = 3(\sqrt{w} + 0.5)^2 - 3(- \\ =& 3(w + 0.25 + \sqrt{w}) - 3(w + 0.25 - \sqrt{w}) = 6\sqrt{w} \end{aligned}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, \text{ если } w < 0, \\ 6\sqrt{w}, \text{ если } w \in [0, 0.25], \\ 1, \text{ если } w > 0.25. \end{cases} \quad f_W(w) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{w}}, \text{ если } w \in [0, 0.25], \\ 0, \text{ если } w \notin [0, 0.25]. \end{cases}$$

5.4. Да, функция плотности может быть сколь угодно большой на достаточно маленьком отрезке. Предел функции плотности на бесконечности может быть либо равен нулю, либо не существовать. Например, плотность может подниматься до значения равного одному, на отрезках убывающей длины, затем опускаться до нуля.

5.5.

5.6.

5.7.
$\mathbb{P}(X \in [1, 1.5]) = F(1.5) - F(1) = \frac{2.25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1.25}{4} = \frac{5}{16}$
$\mathbb{P}(X < 1) = F(1) = \frac{1}{4}$
$F(-5) = 0$
$F(10) = 1$
$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ если } x \in [0, 2], \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$

5.8.
Случайная величина X дискретная, следовательно, функции плотности не существует.
$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1, \\ 0.1, \text{ если } x \in [1, 2), \\ 0.3, \text{ если } x \in [2, 3), \\ 0.6, \text{ если } x \in [3, 4), \\ 1, \text{ если } x \geqslant 4. \end{cases}$

5.9.
$Y \in [0, 2]$
$f_Y(y) = \begin{cases} 2/3, \text{ если } y \in [0, 1], \\ 1/3, \text{ если } y \in (1, 2], \\ 0, \text{ иначе }. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 \frac{2y}{3} dy + \int_1^2 \frac{y}{3} dy = \frac{y^2}{3}\Big|_0^1 + \frac{y^2}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

5.10.

5.11.

5.12. при $c = 1/\mathbb{E}(X)$

5.13.

5.14.

5.15.

5.16.

5.17.
$$\mathbb{E}(y) = aF(a) + \int_a^{+\infty} tf(t)\,dt;$$
$$\frac{\partial \mathbb{E}(y)}{\partial a} = F(a) + aF'(a) + \lim_{t\to\infty} tf(t) - af(a) = F(a)$$
В данном решении предположено, что $\lim_{t\to\infty} tf(t) = 0$.

5.18. Обе схемы дают одинаковую вероятность одобрения сделки и одинаковую прибыль для издателя. В схеме Гёте издателю оптимально декларировать истинную ставку $b^* = V$. Преимущество схемы Гёте в том, что она даёт автору информацию об оценке издателем его труда, оставляя самого издателя в неведении в случае провала сделки.

В реальности издателю Фивегу удалось узнать сумму, написанную Гёте в конверте.

5.19.

а)

б) $\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty S(t)\,dt$.

в) $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty 1 - F(t)\,dt$.

г)

5.21.

а) Найдём a, используя факт, что площадь под графиком равна 1. $2a + (2-1)a = 1$, $a = \frac{1}{3}$.
$\mathbb{E}(X) = 0$, т.к. график симметричен относительно нуля

б) Найдём a, используя факт, что площадь под графиком равна 1. $\frac{2a}{2} + \frac{3a}{2} = 1$, $a = 0.4$.
Тогда $f(x) = \begin{cases} 0.4 + 0.2x, \text{ если } x \in [-2, 0], \\ 0.4 - \frac{2x}{15}, \text{ если } x \in (0, 3], \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$
$\mathbb{E}(X) = \int_{-2}^0 (0.4 + 0.2x)xdx + \int_0^3 (0.4 - \frac{2x}{15})xdx = (0.2x^2 + \frac{0.2x^3}{3})\Big|_{-2}^0 + (0.2x^2 - \frac{2x^3}{45})\Big|_0^3 = -(0.8 - \frac{1.6}{3}) + 1.8 - \frac{54}{45} = \frac{1}{3}$

5.22. $\mathbb{E}(X_1 + Y_1 + Z_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_2 + Y_2 + Z_2) = \frac{4}{\pi}\ln 2$, $X_1 \sim X_2$, $Y_1 \sim Y_2$, $Z_1 \sim Z_2$, парадокс возникает из-за бесконечности ожиданий X, Y и Z.

5.23. Вероятности — те же, а значения равны 0.1, 0.3, 0.6 и 1.

5.24.

а) $\mathbb{P}(F(X) \leqslant t) = \mathbb{P}(F(X) < t) = t$, $\mathbb{P}(F(X) > t) = \mathbb{P}(F(X) \geqslant t) = 1 - t$;

б) $\mathbb{P}(F(X) \leqslant t) \leqslant t$, $\mathbb{P}(F(X) < t) \leqslant t$, $\mathbb{P}(F(X) > t) \geqslant 1 - t$, $\mathbb{P}(F(X) \geqslant t) \geqslant 1 - t$.

6.1.

6.2.

6.3.

6.4.

7.1.

7.2.

7.3. 1.75

7.4. $\mathbb{E}(X_0) = 100 \cdot \frac{99}{464} + \frac{100}{464} + \ldots + \frac{464}{464}$

7.5.

7.6. $\mathbb{E}(X) = 1$, $\operatorname{Var}(X) = 1$

7.7. $\mathbb{E}(Y) = 20 - 20\left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 8.025$

7.8. $\mathbb{E}(X) = 9$, $\operatorname{Var}(X) = 1.2$

7.9. $10 \cdot 0.9^7$

7.10. $\mathbb{E}(X) = \frac{30}{30} + \frac{30}{29} + \ldots + \frac{30}{1} \approx 119.85$
аппроксимация через логарифм $30 \ln 30 \approx 102$

7.11.

7.12.

7.13.

7.14.

8.1. $\mathbb{P}(X_8 = 13) = e^{-8.8} 8.8^{13}/13! \approx 0.046$
$\mathbb{P}(Y_{n+1} > 1) = e^{-1.1} \approx 0.33$

8.2.

8.3.

8.4.

8.5. $\frac{a}{a+b}$, экспоненциально с параметром $a + b$, $\frac{1}{a+b}$

8.6. геометрическое распределение
$\mathbb{E}(N) = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_{capacity} - \lambda_{in}}$

8.7. The probability of observing a taxi before a bus is given by $3/(3+2) = 3/5$ since the waiting times are independent and exponentially distributed. By the memoryless property both processes then restart and hence the probability of observing (at least) two taxis before the first bus is $(3/5)^2 = 9/25$. The probability of observing exactly two taxis before the first bus is $(3/5)^2 * (2/5) = 18/125$.

8.8.

8.9.

8.10.

8.11.

8.12.

8.13.

8.14.

8.15.

8.16.

$$a(t+\Delta) = a(t)(1-\Delta) + (1-a(t))\Delta + o(\Delta)$$

сейчас четное = за секунду было четное и никто не зашел + за секунду было нечетное и один зашел $a'(t) = 1 - 2a(t)$, $a(0) = 1$ $a(t) = (1+\exp(-2t))/2$

8.17.

8.18.

$$(X)_k = X \cdot (X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1)$$

Для Пуассоновского распределения с $\lambda = 1$ получаем, что $\mathbb{E}((X)_k) = 1$.

Пусть π — произвольное разбиение множества A на помножества. Замечаем, что

$$X^n = \sum_{\pi} (X)_{|\pi|}$$

Берём ожидание и получаем:

$$\mathbb{E}(X^n) = \sum_{\pi} 1$$

То есть $\mathbb{E}(X^n)$ — это и есть количество различных разбиений множества из n элементов на подмножества!

И получаем, что количество разбиений на подмножества, целое число, представимо в виде:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum \frac{k^n}{k!}$$

8.19. Замечаем, что $Y = ZX$, где величина Z равна 1 с вероятностью $1-\pi$. Величины Z и X независимы.

9.1.

9.2.

9.3.

9.4.

9.5. https://people.xiph.org/~greg/attack_success.html, ≈ 0.017

9.6.

10.1.

11.1.

11.2.

11.3. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, зависимы

11.4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, зависимы

11.5. $-1/5$

11.6.

11.7.

11.8. $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$, $\mathrm{Corr}(X, Z) = -1$

11.9.

11.10.

11.11. нет, например, берем независимые X и Z и возьмём $Y = X + Z$.

11.12. нет

11.13. Куварияция не существует для экспериментов с тремя и более исходами, а курреляция всегда равна нулю.

Почему не существует куварияция?

На эксперименте с тремя исходами введём индикаторы каждого из исходов, X, Y, Z.

Рассмотрим функцию $g(a, b, c) = \mathrm{Cuv}(aX + bY + cZ, Z)$.

Функция g непрерывна в силу линейности. При этом $g(-1, 0, 1) = -g(1, 0, -1) \neq 0$.

Плавно двигаемся из $g(-1, 0, 1)$ в $g(1, 0, 1)$ и ни разу не пересекаем ноль.

Плавно двигаемся из $g(1, 0, 1)$ в $g(1, 0, -1)$ и ни разу не пересекаем ноль.

А знак сменился, противоречие.

11.14.

11.15.

11.16.

11.17.

11.18.

$$\mathbb{P}(X > 0.5) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 0.5) = 1 - P(X \leqslant 0.5, Y \leqslant +\infty) = 1 - F(0.5, +\infty)$$

$F_X(x) = F(x, +\infty)$; $\mathbb{P}(X = Y + 0.2) = 0$ в силу непрерывности величин; X и Y независимы, так как $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$;

11.19.

11.20. Например, $X \sim U[0; 1]$ и $Y = X$.

11.21. Ковариация равна $\text{Cov}(X, Y) = 0$, величины зависимы.

11.22. Корреляция равна 0, зависимы, так как знание X несёт информацию об Y, например, при $X = 0$ можно утверждать, что $|Y| \in [1; 2]$.

11.23.

11.24.

11.25.

11.26. Величина X равномерна на $[-1; 1]$; пара (X, Y) равномерна в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

12.1.

12.2. теорема Пифагора

12.3.

12.4. теорема Пифагора

12.5. теорема Пифагора

13.1.

13.2.

13.3. $x_{max} = \mu$, $x = \mu \pm \sigma$

13.4.

$$f_{|X|}(t) = \begin{cases} 2f_X(t), \; t > 0 \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

13.5. Медиана — $\exp(\mu)$, мода — $\exp(\mu - \sigma^2)$, $\mathbb{E}(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, $\text{Var}(Y) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$.

13.6.

13.7. Применяем формулу интегрирования по частям.

13.8. Для нормальной величины $\phi'(t) = -t\phi(t)$. Для других распределений формула не верна.

14.1. b $4/20 \geqslant 1 - 100/12$
c $1 - e^{-3} \geqslant 0.75$

14.2. $\mathrm{Var}(X) \leqslant 5$

14.3. $\mathbb{P}(X < 20) \geqslant 0.5$

14.4.

14.5. $\mathrm{Var}(X) = 0$, так как X почти наверное константа;

14.6.

14.7. Потратили одинаково, молока купил больше Кот Матроскин.

14.8. У Кота Матроскина.

15.1.

15.2.

15.3.

15.4. $S_{100} \sim \mathcal{N}(1000, 100)$, $\mathbb{P}(S_{100} > 1030) = \mathbb{P}(Z > 3) = 0.0013$

15.6.

15.7.

15.8. $4(\sqrt{2} - 1)/3$

15.9. $2/\pi$

16.

16.1.

16.2.

16.3.

16.4.

17.1.

17.2.

17.3.

17.4.

17.5.

17.6.

17.7.

17.8.

17.9.

17.10.

17.11.

17.12.

17.13.

17.14.

17.15.

17.16.

17.17.

18.1. $\log_{1/2} \mathbb{P}(X = x)$

18.2.

18.3.

18.4.

18.5.

18.6. Если величина X равновероятно принимает k значений, то спутанность равна k. У равномерной на $[0; a]$ спутанность равна a.

18.7.

18.8.

18.9.

19.1. Ind, Rot, Rot + Ind

19.2. Чтобы сохранялись длины векторов и углы между векторами, должно сохраняться скалярное произведение. Значит $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$.

Или $x'V'Vy = x'y$. Необходимо и достаточно, чтобы $V'V = I$.

19.3. [Muk17]

19.4.

19.5.

19.6. $K = 170$, $M = 120$ (симметричный интервал) или $K = M = 168$ (площадь с одного края можно принять за 0).

Вариант: театр, два входа, два гардероба а) только пары, б) по одному

19.7.

19.8. $\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = 2/5$, $E(Y_t|Y_{t-1}) = 0.4Y_{t-1}$ В среднем Машка не становиться ни грустней, ни улыбчивей Представить $\mathbb{E}(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2})$ в виде $\mathbb{E}(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}) = a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + Z$

19.9.

19.10.

19.11.

19.12. Закрашиваем нужную фигуру на плоскости, и считаем долю закрашенного угла от полного разворота в 2π.

19.13.

19.14. $Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$, нет, они нормальны только по отдельности, но не в совокупности, $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$. Взять $Y = XZ$, где Z принимает значение 1 с вероятностью $p = 3/4$ и -1 с вероятностью $1 - p = 1/4$.

19.15. Также, нормально стандартно. Ни повороты, ни отражения не меняют закон распределения нормального стандартного вектора.

20.1.

20.2.

20.3.

20.4.

20.5. Корреляционная матрица должна быть положительно определена. Получаем квадратное неравенство.

20.6.

20.7. По определению ковариационной матрицы:

$$\operatorname{Var}(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_2, \xi_1) & \operatorname{Var}(\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_2, \xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_3, \xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_3, \xi_2) & \operatorname{Var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

21.1. Обозначим искомую вероятность быть в Неведении в момент t значком p_t.

$$p_{t+\Delta} = p_t(1 - \lambda\Delta - o(\Delta))$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{p_{t+\Delta} - p_t}{\Delta} = -\lambda p_t + \frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

Устремляем Δ к нулю и решаем получающееся дифференциальное уравнение с начальным условием $p_0 = 1$, так как изначально Ученик находится в Неведении.

Итого:

$$p_t = \exp(-\lambda t)$$

21.2. Уже для двух перескоков вероятность не превосходит $(\lambda\Delta + o(\Delta))^2 = o(\Delta)$. Даже если сложить вероятности от двух перескоков до бесконечности, мы получаем сумму равную $o(\Delta)$. Следовательно, вероятность нуля перескоков равна $1 - \lambda\Delta - o(\Delta)$.

Обозначим вероятность нахождения на Шарике в момент времени t значком p_t. Отсюда:

$$p_{t+\Delta} = p_t(1 - \lambda\Delta - o(\Delta)) + (1 - p_t)(\lambda\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$\dot{p}_t = \lambda - 2\lambda p_t$$

Для начального условия $p_0 = 1$ получаем решение $p_t = 0.5 + 0.5\exp(-2\lambda t)$.

21.3. В равновесии выполнено соотношение

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_u}{\lambda_d} p_k$$

Следовательно, $p_k = \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_d}\right)^k p_0$.

Исходя из условия $\sum_k p_k = 1$ находим p_0.

21.4. При $k \geqslant 1$ получаем уравнение

$$\mathbb{P}(L_{t+\Delta} = k) = \lambda_{in}\Delta\mathbb{P}(L_t = k-1) + \lambda_s\Delta\mathbb{P}(L_t = k+1) + (1 - \lambda_s\Delta - \lambda_{in}\Delta)\mathbb{P}(L_t = k) = o(\Delta)$$

При $k = 0$ уравнение особое:

$$\mathbb{P}(L_{t+\Delta} = 0) = (1 - \lambda_{in}\Delta)\mathbb{P}(L_t = 0) + \lambda_s\Delta\mathbb{P}(L_t = 1) + o(\Delta)$$

Приравниваем $\mathbb{P}(L_{t+\Delta} = k)$ и $\mathbb{P}(L_t = k)$, для краткости обозначим p_k. Устремляем Δ к нулю.

Получаем разностные уравнения:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_s} p_0 \\ p_{k+1} = \frac{\lambda_s + \lambda_{in}}{\lambda_s} p_k - \frac{\lambda_{in}}{\lambda_s} p_{k-1} \end{cases}$$

С условием нормировки $\sum p_k = 1$ решение системы единственно,

$$p_k = (1-a)a^k, \ a = \lambda_{in}/\lambda_s$$

То есть длина очереди имеет геометрическое распределение.

Поэтому средняя длина очереди равна $\mathbb{E}(L_t) = a/(1-a) = \frac{\lambda_{in}}{\lambda_s - \lambda_{in}}$.

Заметим, что если $\lambda_s \approx \lambda_{in}$, длина очереди будет просто огромной!

21.5. Например, для Y_4:

$$\mathbb{P}(Y_4 \in [t; t+\Delta]) = C_{10}^1 \cdot \Delta \cdot C_9^3 t^3 (1-t)^6 + o(\Delta)$$

Читаем вслух:

а) Одна из десяти величин должна попасть в отрезок $[t; t+\Delta]$;

б) Три из девяти оставшихся должны оказаться меньше t;

в) Шесть из девяти оставших должны оказаться больше t;

Вероятностью попадания двух и более величин в отрезок длины Δ пренебрегаем!

21.6.

22.1.

22.2.

22.3. Являются: $X_t = -W_t$, $X_t = W_{a+t} - W_a$, $X_t = \frac{1}{a} W_{a^2 t}$

22.4.

22.5.

23.1. $C_{20}^2 \cdot 18$.

23.2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = (1 - x^5)/(1-x)$ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/(1-x)$ $(1+x)^4$

23.3.

23.4.

23.5. 0 с вероятностью 1/4 и 1 с вероятностью 3/4

23.6. да, сможет!

23.7. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Запишем разложения для $g(x)$, $xg(x)$ и $x^2 g(x)$ друг под другом. Вычитаем. Получаем, что $g(x) = x/(1 - x - x^2)$.

Указанная дробь — это и есть производящая функция при маленьком x.

Производящая функция представима в виде суммы:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b} \right),$$

где $a = (1 - \sqrt{5})/2$, $b = (1 + \sqrt{5})/2$.

23.8. Замечаем, что $h_2(t) = h_1(t) \cdot h_1(t)$. После первого шага:

$$h_1(t) = 0.7t + 0.3th_1^2(t)$$

23.9.

23.10.

а) Биномиальное с $n = 5$ и $p = 0.8$.

б) Пуассоновское с интенсивностью $\lambda = 3$.

в) Хи-квадрат с двумя степенями свободы, экспоненциальное с $\lambda = 1/2$, гамма с $k = 1$ и $\theta = 2$. Это разные названия одного и того же распределения.

г) Равномерное на отрезке $[4; 10]$.

д) Нормальное с $\mu = 10$ и $\sigma^2 = 40$.

Модные хэштэги

[MT98] Benny Moldovanu и Manfred Tietzel. «Goethe's second-price auction». В: *Journal of Political Economy* 106.4 (1998), с. 854—859. URL: https://www.econ2.uni-bonn.de/pdf/papers/goethes_second.pdf.

[Gra] Janko Gravner. *Twenty problems in probability*. URL: https://www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135A/resources/chpr.pdf.

[Wil13] Herbert S Wilf. *generatingfunctionology*. Elsevier, 2013. URL: https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html. Шикарная книжка про производящие функции.

[Muk17] Somabha Mukherjee. «A Proof of the Herschel-Maxwell Theorem Using the Strong Law of Large Numbers». В: *arXiv preprint arXiv:1701.02228* (2017). URL: https://arxiv.org/abs/1701.02228.

[Buz+15] Nazar Buzun и др. «Stochastic Analysis in Problems, part 1 (in Russian)». В: *arXiv preprint arXiv:1508.03461* (2015). URL: https://arxiv.org/abs/1508.03461.