

Правила: 60 минут, онлайн, письменно.

1. У Василия есть дискретная случайная величина, принимающая различные натуральные значения с некоторыми вероятностями. Василий заменяет каждое значение  $x$ , выпадающее с положительной вероятностью, на два значения:  $x - \sqrt{2}$  и  $x + \sqrt{2}$ , выпадающие с вдвое меньшими вероятностями, и получает новую случайную величину.

Как при этом изменится энтропия?

2. Томас Байес в эссе «An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances» решает следующую задачу: «Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: Required the chance that the probability of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named».

Переведём на современный язык. У нас есть неправильная монетка, выпадающая орлом с вероятностью  $\alpha$ . Априорно мы считаем, что  $\alpha$  распределено равномерно на отрезке  $[0; 1]$ . Мы провели 12 бросков и получили 5 орлов и 7 решек.

- а) Какова апостериорная вероятность того, что  $\alpha$  лежит в отрезке  $[0; 0.5]$ ?
  - б) Найдите МАР-оценку для  $\alpha$ .
  - в) Чему равна апостериорная вероятность того, что при *следующем* броске монетка выпадет орлом?
3. Пусть  $a$  — скалярный параметр и  $I_A(a)$  — теоретическая информация Фишера. Для перепараметризации  $a = f(b)$  найдите формулу информации Фишера  $I_B(b)$ .
  4. Величины  $X_i$  независимы и одинаково распределены  $\mathcal{N}(0; v)$ . Выведите формулу для  $LM$ -теста гипотезы  $H_0: v = 1$ . Укажите асимптотический закон распределения статистики при верной  $H_0$ .