

Дедлайн: 2022-12-04, 21:00. Если вычислительные возможности позволяют, берите $n_{boot} = 10000$ бутстрэп-выборок. Если нет, то сокращайте в соответствии с вычислительными возможностями.

1. Рассмотрим наивный бутстрэп для исходной выборки из n наблюдений непрерывного распределения. Обозначим исходные наблюдения с помощью y_i , а бутстрэпированные — с помощью y_i^* .
 - а) Какова вероятность того, что пятое исходное наблюдение ровно три раза попадет в бутстрэп выборку?
 - б) Чему равен предел найденной в (а) вероятности при $n \rightarrow \infty$?
 - в) Чему равен предел вероятности $\mathbb{P}(\max y_i > \max y_i^*)$ при $n \rightarrow \infty$?
2. Величины y_i независимы $\mathcal{N}(\mu; 1)$. А-приори известно, что $\mu \geq 42$.
 - а) Без компьютера явно найдите оценку μ методом максимального правдоподобия.

Винни-Пух использует наивный бутстрэп для построения 95%-го интервала для μ .

- б) С помощью симуляций оцените фактическую вероятность накрытия, если истинное $\mu = 42$.
 - в) С помощью симуляций оцените фактическую вероятность накрытия, если истинное $\mu = 44$.
3. Величины y_i независимы $\mathcal{N}(0; 1)$. Кролик не знает истинное ожидание, и для надежности использует очень хитрый способ оценки μ . В качестве $\hat{\mu}$ Кролик выбирает середину самого короткого отрезка, содержащего 50% выборки. Для построения 95%-го интервала для μ Кролик использует наивный бутстрэп.

С помощью симуляций оцените фактическую вероятность накрытия для $n = 100$.

Следующие вопросы относятся к набору данных https://github.com/bdemeshev/psmo_2022-23/raw/main/ha_02/psmo-ha_02.csv.

4. Постройте 95%-й доверительный интервал для медианы величины y , используя наивный бутстрэп, бутстрэп t -статистики и ВСА-бутстрэп.
5. Рассмотрим модель линейной регрессии

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 x_i^2.$$

- а) С помощью наивного бутстрэпа постройте 95%-й доверительный интервал для каждого коэффициента.
 - б) С помощью наивного бутстрэпа постройте 95%-й доверительный интервал для вершины параболы.
6. Рассмотрим модель квантильной регрессии¹ для квантилей $\tau = 0.1, \tau = 0.5, \tau = 0.9$:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 x_i^2.$$

- а) Постройте три полученные линии регрессии на одном графике с данными.
- б) Для медианной регрессии с помощью наивного бутстрэпа постройте 95%-й доверительный интервал для каждого коэффициента.
- в) Для медианной регрессии с помощью наивного бутстрэпа постройте 95%-й доверительный интервал для вершины параболы.

¹ Целевая функция $\sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - \hat{y}_i)$, где $\rho_\tau(u) = u \cdot (\tau - I(u < 0))$.