

1. У Василия есть дискретная случайная величина, принимающая различные натуральные значения с некоторыми вероятностями. Василий заменяет каждое значение  $x$ , выпадающее с положительной вероятностью  $p$ , на два значения:  $x - \sqrt{2}$  и  $x + \sqrt{2}$ , выпадающие с вероятностями  $p/2$  и  $p/2$ , и получает новую случайную величину.

Как при этом изменится энтропия?

2. Пусть  $a$  — скалярный параметр и  $I_A(a)$  — теоретическая информация Фишера. Для перепараметризации  $a = f(b)$  найдите формулу информации Фишера  $I_B(b)$ .
3. Контрольную проверяют три семинариста, а за контрольную можно получить либо зачёт, либо незачёт. Данные по количеству работ выписаны в таблице:

	Андрей	Борис	Вова
зачёт	30	40	50
незачёт	40	40	40

- а) Постройте 95%-ый доверительный интервал для разницы вероятности получить зачёт у Андрея и Бориса.
- б) С помощью  $LR$ -теста проверьте гипотезу, что вероятность получить зачёт одинакова по всем семинаристам против альтернативной гипотезе хотя бы об одном отличии.

Табличное: правые 5% критические значения:  $\chi_1^2 = 3.84$ ,  $\chi_2^2 = 5.99$ ,  $\chi_3^2 = 7.81$ ,  $\chi_4^2 = 9.49$ .

4. Винни-Пух одновременно проверяет  $h$  нулевых гипотез по независимым наборам данных. Все нулевые гипотезы верны, но Винни-Пух об этом не знает.

- а) Какова вероятность того, что наибольшее из  $P$ -значений окажется больше 0.95?
- б) Как изменится вероятность из предыдущего пункта, если часть исходных нулевых гипотез не верны?

5. В каждом дупле водится ровно по 10 пчёл, либо все пчелы в дупле — правильные ( $b_i = \text{good}$ ), либо все — неправильные ( $b_i = \text{bad}$ ). Каждая пчела приносит либо 0 килограмм мёда, либо 1 килограмм. У каждой правильной пчелы ожидаемое количество мёда равно  $a > 0.5$ , а у каждой неправильной — ровно 0.5 килограмм. Винни-Пух осмотрел  $n$  дупел.

Неизвестную вероятность того, что в дупле водятся правильные пчёлы, обозначим буквой  $\pi$ .

Явно выпишите целевую функцию для  $M$ -шага  $EM$ -алгоритма в этой задаче, поясните по каким параметрам она оптимизируется и смысл остальных параметров.