Задачи к семинару №2

1. Пусть $Y_i, i=1,\dots,n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с $E(Y_i)=\mu_Y$. Покажите, что выборочное среднее $\overline{Y}$ является МНК оценкой генерального среднего.

2. Пусть $Y_i, i=1,\dots,n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с $E(Y_i)=\mu_Y$. Покажите, что выборочное среднее $\overline{Y}$ является несмещенной и состоятельной оценкой генерального среднего. Найдите дисперсию этой оценки. Покажите, что медиана является несмещенной оценкой генерального среднего. Какая из двух оценок генерального среднего эффективнее? Покажите, что выборочная дисперсия является несмещенной оценкой σ^2.

3. Пусть $Y_i, i=1,\dots,n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с $E(Y_i)=\mu_Y$. Пусть n – четное. Рассмотрим три оценки математического ожидания:

$$\hat{\mu}_Y = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$
$$\bar{\mu}_Y = Y_1$$
$$\bar{\bar{\mu}}_Y = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}Y_1 + \frac{3}{2}Y_2 + \frac{1}{2}Y_3 + \frac{3}{2}Y_4 + \cdots + \frac{1}{2}Y_{n-1} + \frac{3}{2}Y_n\right)$$

Являются ли эти оценки несмещенными? Какая из них наиболее эффективна?

4. (СУ, Упр. 3.2) Пусть Y - случайная величина Бернулли с вероятностью успеха $Pr(Y=1)=p$, и пусть случайные $Y_1,\dots,Y_n$ есть i.i.d. из этого распределения. Пусть $\hat{p}$ – доля успехов (т.е. число единиц) в этой выборке.
   а. Покажите, что $\hat{p}=\overline{Y}$.
   б. Покажите, что $\hat{p}$ является несмещенной оценкой p.
   в. Покажите, что $\operatorname{var}(\hat{p}) = p(1-p)/n$.

5. (Ньюболд и др., Упр.7.7) Пусть X_1 и X_2 случайная выборка из генеральной совокупности с математическим ожиданием, равным m, и дисперсией, равной s^2. Рассмотрим три точечные оценки (X, Y, Z) математического ожидания m:

$$X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$
$$Y = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$
$$Z = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

а. Покажите, что все три оценки являются несмещенными.
б. Какая из оценок наиболее эффективна?
в. Найдите относительную эффективность (отношение дисперсий оценок) наиболее эффективной оценки относительно двух других.

6. (СУ, Упр. 4.6) Покажите, что первое предположение метода наименьших квадратов, т.е. $E(u_i \mid X_i)=0$, предполагает, что $E(Y_i \mid X_i)=\beta_0+\beta_1 X_i$.