

# 1 Прививки для туристов!!!!

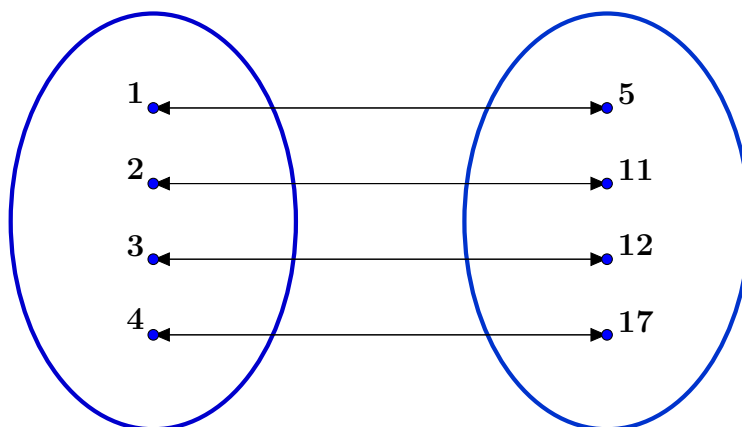
Здесь собраны сюжеты, которые нужно знать до изучения стохастического анализа.

## 1.1 Бесконечности бывают разные

Икеевских карандашей никогда не наберешь достаточно!

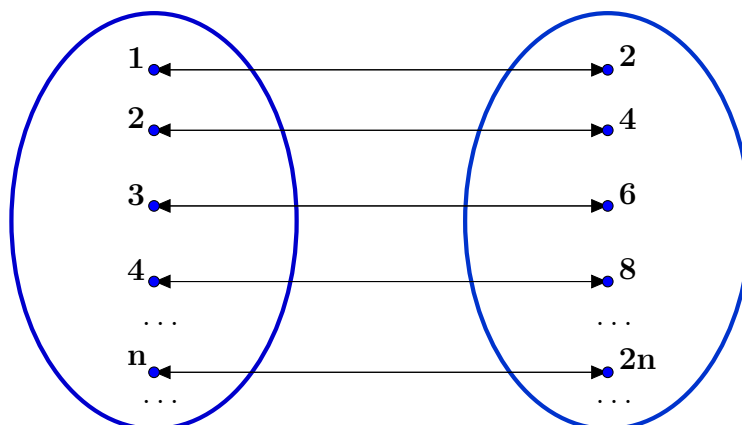
**Определение.** Множества  $A$  и  $B$  называются **равномощными**, если между элементами этих множеств существует взаимно-однозначное соответствие. Мощность множества  $A$  обозначается  $|A|$ . Соответственно равномощность двух множеств можно записать как  $|A| = |B|$ .

**Пример 1.** Множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  и  $\{5, 11, 12, 17\}$  равномощны, так как есть взаимно-однозначное соответствие:

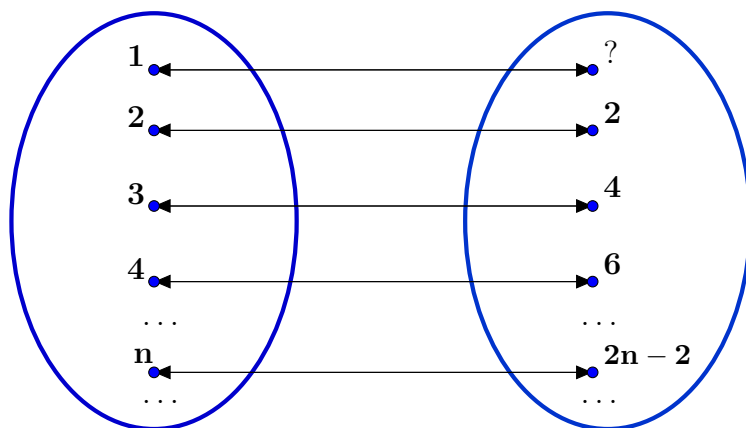


**Блиц-вопрос 1.1.** Какую мощность имеет множество  $\{1, 2, 3, 4\}$ ? Мощность множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  равна четырем.

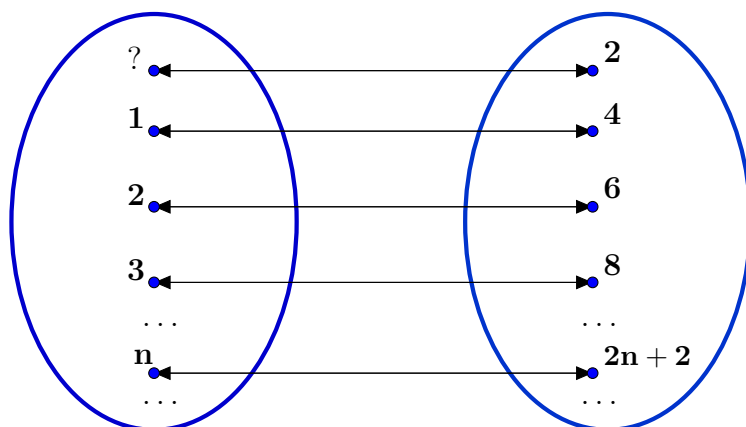
**Пример 2.** Множество  $\mathbb{N}$  натуральных чисел и множество чётных натуральных чисел равномощны в силу соответствия:



Заметим, что в определении требуется только существование взаимно-однозначного соответствия. Это не противоречит тому, что могут существовать другие, не взаимно-однозначные соответствия. В примере 2 можно добиться и того, что среди натуральных чисел останутся «лишние»:



И того, что среди чётных останутся «лишние», а именно:



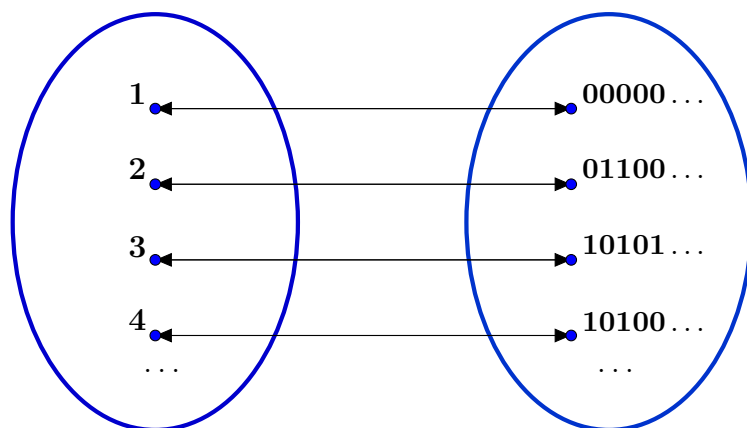
**Пример 3.** Множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  и множество  $\mathbb{N}$  неравномощны. При любой попытке построить взаимно-однозначное соответствие среди натуральных чисел останутся «лишние».

Возникает естественный вопрос, все ли бесконечные множества равномощны?

Пусть  $S$  множество всех бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1. Например, одним из элементов  $S$  является последовательность 10101010...

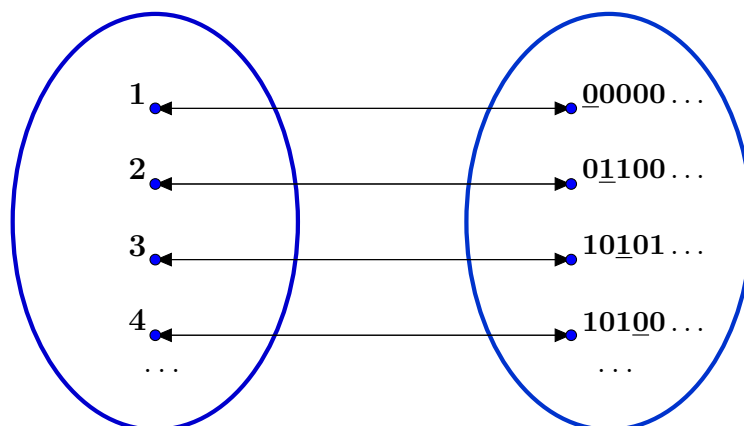
**Теорема 1.** Множество  $S$  бесконечно, но не равномощно множеству  $\mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Допустим противоположное, что  $S$  и  $\mathbb{N}$  равномощны. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и последовательностями. К примеру оно могло бы выглядеть так:



Оказывается какое бы соответствие ни было создано, всегда существует последовательность, которой не сопоставлено ни одно число!

Создадим последовательность  $a$  по следующему принципу: возьмем первую цифру из первой последовательности, затем вторую из второй, затем третью из третьей и т.д.



Получаем последовательность  $a = 0110\dots$ . Затем построим последовательность  $b$  заменив единицы на нули, а нули на единицы в последовательности  $a$ . В нашем примере  $b = 1001\dots$ .

Вне зависимости от того, какое соответствие мы взяли последовательность  $b$  не может идти в нём ни под каким номером! Она не может идти под номером 1, так как отличается от первой последовательности первой цифрой. Она не может идти под номером 2, так как отличается от второй последовательности второй цифрой и т.д.

Мы пришли к противоречию, в  $S$  есть «лишняя» незанумерованная последовательность  $b$ . Значит  $S$  и  $\mathbb{N}$  неравномощны.

Аналогичным способом можно построить «лишнюю» последовательность для любого другого предложенного соответствия.  $\square$

**Определение.** Мы говорим, что множество  $A$  имеет мощность **континуум**, если оно равномощно множеству  $S$  бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1.

**Определение.** Множество  $A$  называется **счётным**, если оно конечно или равномощно множеству  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.

Будьте бдительны при чтении других источников: некоторые авторы определяют счётные как равномощные натуральным числам, но таких авторов меньшинство.

Из данного определения следует, что **несчётные** множества — это бесконечные множества не равномощные множеству  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.

Оказывается, что любые бесконечные множества можно сравнивать: либо они равномощные, либо одно из них «больше».

**Теорема 2.** Если  $A$  и  $B$  — два произвольных множества, то возможна одна и только одна из трех ситуаций:

1. Множества  $A$  и  $B$  равномощны.
2. Множества  $A$  и  $B$  неравномощны, но  $A$  равномощно какому-нибудь подмножеству множества  $B$ .
3. Множества  $A$  и  $B$  неравномощны, но  $B$  равномощно какому-нибудь подмножеству множества  $A$ .

**Замечание.** Доказательство можно найти в [4].

Может возникнуть вопрос, а что тут собственно доказывать, всё же «очевидно»? Доказывать нужно два утверждения. Во-первых, что ситуации 2) и 3) не могут произойти одновременно. Во-вторых, что невозможна гипотетическая ситуация «несравнимости», когда  $A$  и  $B$  неравномощны, в  $A$  нет части равномощной  $B$ , и в  $B$  нет части равномощной  $A$ .

Из этой теоремы следует важное следствие:

**Теорема 3.** Если  $A$  равномощно подмножеству  $B$ , то  $|A| \leq |B|$ , т.е. либо мощность  $A$  меньше мощности  $B$ , либо  $A$  и  $B$  равномощны.

Важные примеры!

- Бесконечные счётные множества:

- Множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  — счётное! Между множествами  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{N}$  существует взаимно-однозначное соответствие. Его можно установить, например, следующим образом.  $1 \leftrightarrow 0$ ,  $2 \leftrightarrow 1$ ,  $3 \leftrightarrow -1$ ,  $4 \leftrightarrow 2$  и т.д. Этот способ нумерации элементов множества  $\mathbb{Z}$  показан на рисунке 1.

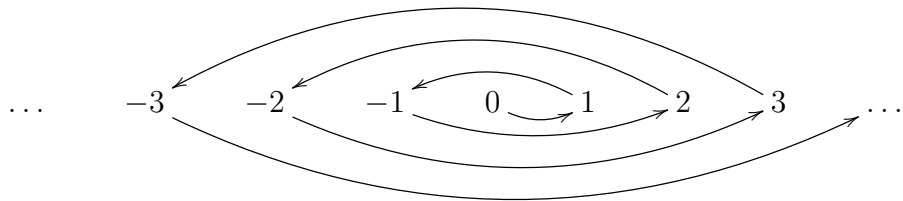


Рис. 1: Нумерация элементов в множестве целых чисел  $\mathbb{Z}$

- Множество пар натуральных чисел  $\mathbb{N}^2$  — счётное! Все элементы множества  $\mathbb{N}^2$  можно пересчитать. Один из способов сделать это показан на рисунке 2.

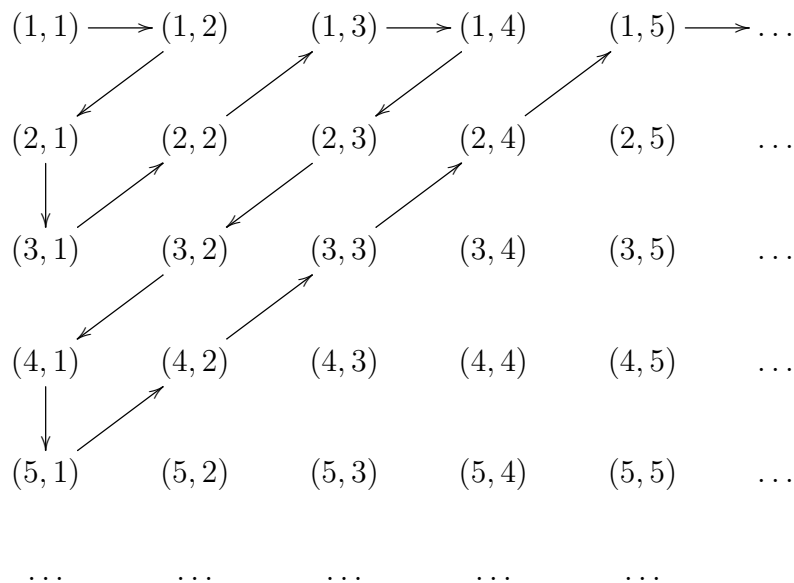


Рис. 2: Нумерация элементов в множестве пар натуральных чисел  $\mathbb{N}^2$

Фактически было доказано, что объединение счётного количества счётных множеств счётно<sup>1</sup>. А именно, множество  $\mathbb{N}^2$  можно разбить на счётное множество компонент:  $\mathbb{N}^2 = \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{1\} \times \mathbb{N} \cup \{2\} \times \mathbb{N} \cup \dots$ . Элементы каждой компоненты можно выписать в отдельную строку, а после занумеровать.

<sup>1</sup>Для знатоков может быть интересен тот факт, что в этом доказательстве неявно используется аксиома выбора. Без неё можно представить  $\mathbb{R}$  как счётное объединение счётных множеств [3].

- Множество  $\mathbb{Z}^n$  векторов из  $n$  целых чисел — счётное! Доказательство проведём по индукции. Мы уже доказали, что  $\mathbb{Z}^1$  — счётное множество. Теперь предположим, что  $\mathbb{Z}^{n-1}$  — счётное. Получаем цепочку:  $|\mathbb{Z}^n| = |\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^1| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ .
- Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  — счётное! Приведём два способа занумеровать все рациональные числа.

Пусть  $f(q)$  — это сумма модулей числителя и знаменателя дроби после сокращения, например,  $f(-2/3) = 5$ . Сначала нумеруем дроби с  $f(q) = 1$ , потом — дроби с  $f(q) = 2$ , потом — дроби с  $f(q) = 3$  и т.д. В результате каждая дробь получает свой номер.

Рассмотрим другой, более наглядный способ нумерации, который изображен на рисунке 3. В первой строке поместим все целые числа, во второй строке — все дроби со знаменателем 2, в третьей — со знаменателем 3 и т.д. После пронумеруем все элементы двигаясь по стрелочкам. Если элемент повторяется, например, мы уже пронумеровали 0, но снова наталкиваемся на него или уже пронумеровали 1 и наталкиваемся на  $\frac{2}{2}$ , то пропускаем его.

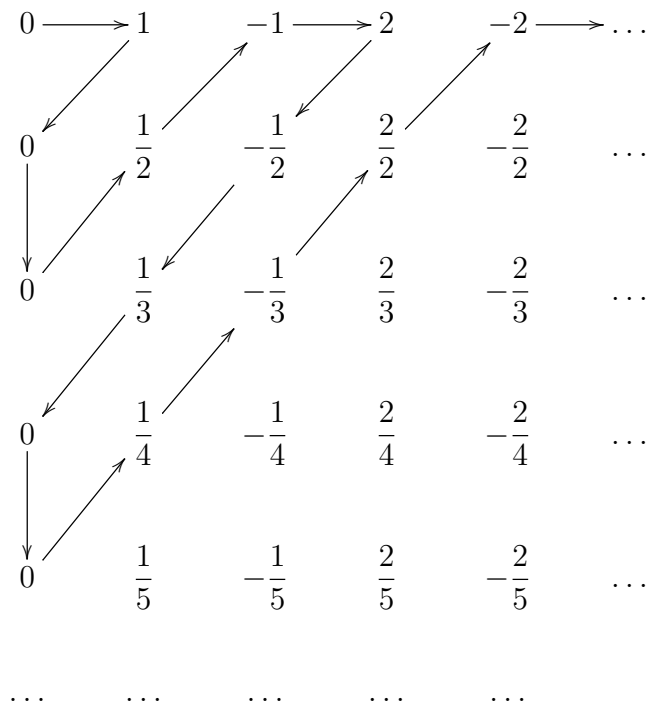


Рис. 3: Нумерация элементов в множестве рациональных чисел  $\mathbb{Q}$

- Множества мощности континуум:

- Отрезок  $[0; 1]$  — множество мощности континуум! Покажем, что множество  $[0; 1]$  равномощно множеству  $S$  бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1.

Любое число  $x \in [0; 1]$  можно записать в виде бесконечной двоичной дроби. Первый знак этой дроби равен 1 или 0 в зависимости от того, попадает ли число  $x$  в левую или правую половину отрезка. Чтобы выбрать следующий знак, надо снова поделить выбранную половину пополам и посмотреть, куда попадет  $x$ , и т.д.

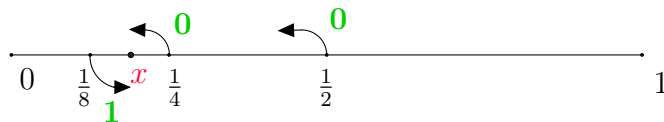


Рис. 4: Взаимно-однозначное соответствие множеств  $[0; 1]$  и  $S$

Точка  $1/2$  на рисунке 4 является серединой отрезка  $[0; 1]$ . Точка  $x$  лежит левее  $1/2$ , то есть попадает в левую половину отрезка. Первый знак в элементе из  $S$ , который соответствует  $x$  будет 0. Точка  $1/4$  является серединой левой половины отрезка  $[0; 1]$ . Точка  $x$  снова находится левее  $1/4$ , значит второй знак в элементе из  $S$  также будет 0. Точка  $1/8$  является серединой отрезка  $[0; 1/4]$ . Точка  $x$  находится правее  $1/8$ , значит третий знак в элементе из  $S$  будет 1. Далее посмотрим в какой части отрезка  $[1/8; 1/4]$  будет лежать точка  $x$  и получим четвертый знак элемента, затем пятый и так далее. Это же соответствие можно описать в другую сторону: последовательности из нулей и единиц  $x_0x_1x_2\dots$  соответствует число, являющееся суммой ряда

$$\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_2}{2^3} + \dots$$

Например, последовательности 010100... соответствует число

$$\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Описанное соответствие пока что не совсем взаимно-однозначное: дроби вида  $m/2^n$  имеют два представления. Например, число  $3/8$  можно записать в виде 0011000... и в виде 0010111... Соответствие станет однозначным, если отбросить последовательности с бесконечным хвостом из единиц, кроме последовательности 01111... Таких дробей счётное число и на мощность это никак не повлияет.

**Блиц-вопрос 1.2.** Какому числу соответствует последовательность 011111...? Последовательность 011111... соответствует единице.

$$\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

Именно поэтому последовательность 011111... нельзя отбросить.

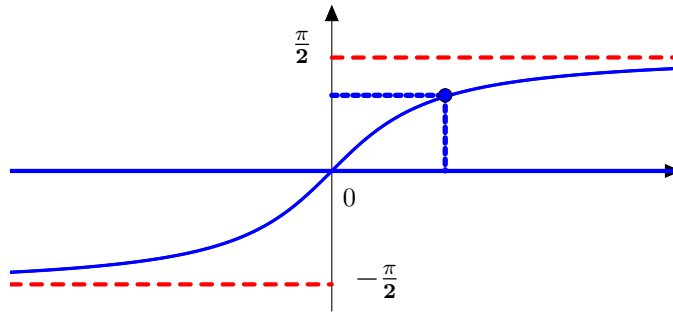
**Блиц-вопрос 1.3.** Обычно в памяти компьютера числа хранятся в двоичной системе счисления.

- \* Можно ли данным способом хранить в памяти число 0.15?
- \* А правда ли что с точки зрения компьютера  $0.4 - 0.3$  равно 0.1?

Если попытаться записать 0.15 в виде последовательности из 0 и 1, мы получим периодическую бесконечную последовательность 0,1010101..., которую компьютер не сможет запомнить, так как объем памяти в нём ограничен.

Если выполнить сравнение  $0.4 - 0.3 == 0.1$  в большинстве языков программирования (R, Python, Julia, C++, ...) то результатом будет FALSE.

- Прямая  $\mathbb{R}$  — множество мощности континуум! Показать, что прямая  $\mathbb{R}$  — множество мощности континуум можно с помощью следующей двухходовочки. **Ход первый:** найдем отображение, которое ставит каждому элементу числовой прямой во взаимно-однозначное соответствие элементы интервала  $(0; 1)$ . Функция  $y = \arctan x$  ставит каждому элементу  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  в соответствие элемент числовой прямой  $y \in \mathbb{R}$ .

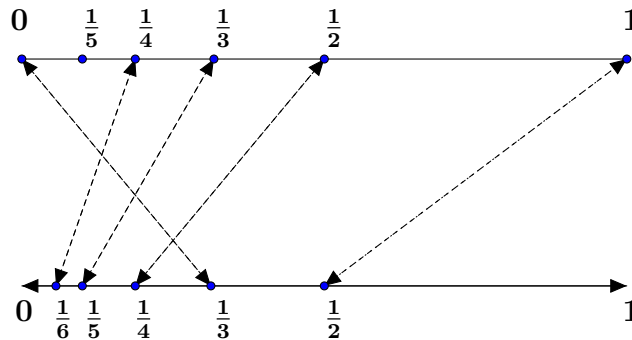


Если к каждому элементу  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  прибавить  $-\frac{\pi}{2}$ , то можно получить интервал  $(0; \pi)$ . Если после этого в качестве бонуса разделить каждый элемент нового интервала на  $\pi$ , то можно получить интервал  $(0; 1)$ . То есть отображение  $x = -\frac{\pi}{2} + z\pi$  для каждого  $z \in (0; 1)$  находит  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Таким образом взаимно-однозначное соответствие между  $(0; 1)$  и  $\mathbb{R}$  устанавливается по формуле  $y = \text{arctg}(-\frac{\pi}{2} + z\pi)$ .

Аналогично можно построить взаимно-однозначное соответствие между  $(0; 1)$  и произвольным интервалом  $(a; b)$  с помощью отображения  $y = a + (b-a)x$ . Действительно, если мы хотим пронормировать все элементы множества  $(a; b)$  к интервалу  $[0; 1]$ , мы должны из каждого элемента вычесть начало интервала  $a$  и поделить каждый элемент на длину интервала. То есть  $\forall y \in [a; b] \quad x \in [0; 1]$ , если  $x = \frac{y-a}{b-a}$ .

**Ход второй:** покажем что интервал  $(0; 1)$  и отрезок  $[0; 1]$  равномощны. Всем точкам отрезка  $[0; 1]$ , кроме точек, имеющих вид  $\frac{1}{n}$  поставим во взаимно-однозначное соответствие себя же. Точке 1 поставим в соответствие точку  $1/2$ , точке 0 точку  $1/3$ . Далее каждой точке вида  $\frac{1}{n}$  будем ставить в соответствие точку  $\frac{1}{n+2}$ .



— Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество мощности континуум!

Разберём доказательство на примере плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Для общего случая доказательство будет проводиться аналогичным образом.

Доказывать взаимно-однозначное соответствие между  $\mathbb{R}^2$  и  $S$  будем с помощью новой многоходовочки.

**Ход первый.** Покажем, что множество  $[0; 1] \times [0; 1]$  равномощно множеству  $[0; 1]$ . Мы уже знаем, что вместо чисел на отрезке можно говорить о последовательностях нулей и единиц. Заметим, что каждой паре  $(x, y)$  из квадрата  $[0; 1] \times [0; 1]$  соответствует пара последовательностей  $(x_0x_1x_2x_3 \dots, y_0y_1y_2y_3 \dots)$ . Каждой из таких последовательностей можно поставить единственным образом в соответствие последовательность  $x_0y_0x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \dots$ . То есть множество точек отрезка  $[0; 1]$  равномощно множеству  $[0; 1] \times [0; 1]$ .

**Ход второй.** Покажем, что можно построить отображение, которое перевело бы множество  $[0; 1] \times [0; 1]$  в множество  $\mathbb{R}^2$ . Поиску такого отображения посвящено упражнение 1.5.

Для любого множества  $\mathbb{R}^n$  рассуждение можно провести аналогичным образом.

Полученный результат, как и многие другие результаты этой главы, противоречит интуиции! Квадрат же намного больше, чем отрезок! Квадрат — двумерен! В квадрате должно быть на порядок больше точек, чем на отрезке! Однако это не так. Впервые этот факт был доказан Георгом Кантором в 1877 году. Он очень удивил Кантора.

- Функции, непрерывные на отрезке  $[0; 1]$  — множество мощности континуум!

Пусть  $C[0; 1]$  — множество функций, непрерывных на отрезке  $[0; 1]$ .

Интуиция сразу же подсказывает нам, что любая константа — непрерывная функция, а непрерывных функций на  $[0; 1]$  гораздо больше чем констант, значит отрезок  $[0; 1]$  равномошен подмножеству множества  $C[0; 1]$ .

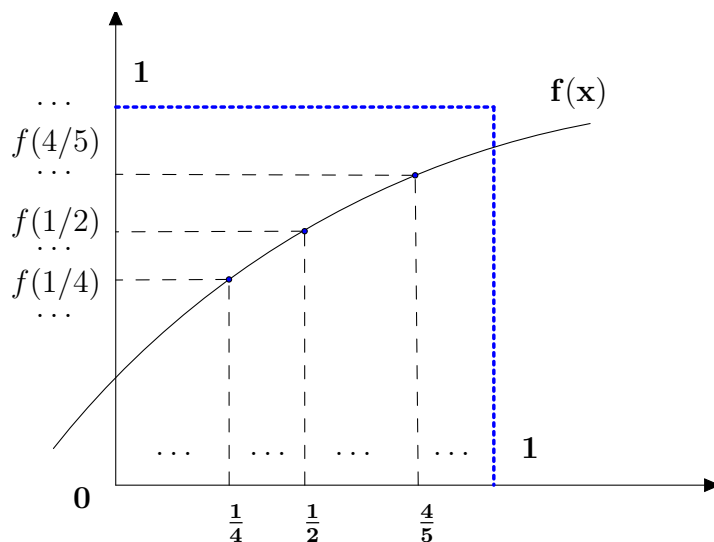
$$0 \leftrightarrow f(x) = 0, 0.1 \leftrightarrow f(x) = 0.1, 0.05 \leftrightarrow f(x) = 0.05, \dots$$

Это означает, что либо мощность отрезка  $[0; 1]$  меньше мощности множества  $C[0; 1]$ , либо они равномощны. Чтобы показать, что эти множества равномощны нужно найти подмножество множества  $[0; 1]$ , которому будет равномощно множество  $C[0; 1]$ .

Пусть  $x_1, x_2, \dots$  — последовательность всех рациональных точек отрезка  $[0; 1]$ . Поставим в соответствие каждой непрерывной функции  $f(x)$  последовательность вещественных чисел — значений функции  $f(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots$

$$f(x) \leftrightarrow (f(x_i))_{i=1}^{\infty}$$

При этом двум различным функциям  $f(x)$  и  $g(x)$  будут отвечать различные последовательности  $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$  и  $(g(x_i))_{i=1}^{\infty}$ , поскольку две непрерывные функции, совпадающие во всех рациональных точках, совпадают всюду.



Таким образом, множество функций, непрерывных на отрезке  $[0; 1]$  можно считать эквивалентным некоторой части множества всех числовых последовательностей.

Множество всех числовых последовательностей будет множеством мощности континуум. Доказательству этого факта посвящено упражнение 1.21

Для целей стохастического анализа нам хватит этих сведений про мощности множеств, однако для общего развития полезно знать еще пару фактов.



**Факт 1.** Бесконечные множества не исчерпываются равномоными множеству  $\mathbb{N}$  и множеству последовательностей  $S$ . Бесконечности бывают разные, и их бесконечно много. Если есть одно бесконечное множество  $A$ , то найдется бесконечное множество  $B$ , где элементов ещё больше, чем в  $A$ !

**Теорема 4.** Если  $A$  — произвольное множество, то множество всех подмножеств множества  $A$ , обозначаемое  $2^A$ , не равномодно множеству  $A$ .

*Доказательство.* Доказательству этого утверждения посвящено упражнение 1.23.  $\square$

Иными словами, подмножеств действительных чисел больше, чем действительных чисел. Списков подмножеств действительных чисел больше, чем подмножеств действительных чисел. И так далее ...



**Факт 2.** Невинный вопрос: а есть ли мощности промежуточные между континуумом и мощностью множества натуральных чисел? оказывается неожиданно сложным! Еще более неожиданно то, что любой ответ на него, и «да», и «нет» оказывается верным. Для ответа на этот вопрос интуитивных представлений о множествах не хватает и нужно аксиоматизировать теорию множеств. Так вот, разные системы аксиом приводят к разным ответам. В данном курсе мы это обсуждать не будем. Но заинтересовавшиеся могут посмотреть книгу Верещагин Шень, Начала теории множеств, [4].

Мощность множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  обозначается символом  $\aleph_0$  — «алеф-ноль». Счётные множества — это самые маленькие из бесконечных множеств. Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  имеет мощность континуума. Мощность таких множеств обозначается символом  $\mathfrak{c}$ . Предположение о том, что промежуточных мощностей нет, называется **континуум-гипотезой** и записывается как  $\mathfrak{c} = \aleph_1$ . В общем виде  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ .

$\aleph_0$	$2^{\aleph_0} = \aleph_1$	$2^{\aleph_1} = \aleph_2$	$\dots$	$2^{\aleph_{\alpha-1}} = \aleph_\alpha$	$\dots$
------------	---------------------------	---------------------------	---------	---	---------

Авторам больше нравится система аксиом, где промежуточных мощностей нет, но это уже вопрос вкуса, а о вкусах не спорят.

В данной книжке мы придерживаемся системы аксиом ZFC. Хотя бы просто потому, что авторы (по крайней мере пока) не умеет думать без аксиомы выбора. Подробности можно найти в [1]. Также особо любопытные могут прочитать всего лишь сорок страниц заметок о теории множеств в [2].

## Задачи

**Задача 1.1.** В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами.

1. Приехал еще один турист. Как разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?
2. Приехало еще счётное количество туристов. Как заново разместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?

**Задача 1.2.** Пусть  $A$  — список всех подмножеств натуральных чисел, а  $S$  — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера:  $\{5, 6, 178\} \in A$ ,  $01010101010101 \dots \in S$ . Сравните мощности множеств  $A$  и  $S$ , мощности множеств  $\mathbb{N}$  и  $S$ .

**Задача 1.3.** Чудо-чудное, диво-дивное! Существует ли список  $S$  всех возможных мощностей?

**Задача 1.4.** Декартово произведение счётного количества счётных множеств является счётным множеством. Да или нет?

**Задача 1.5.** Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами  $(0; 1) \times (0; 1)$  и  $\mathbb{R}^2$ . С помощью построенного соответствия докажите, что множества  $[0; 1] \times [0; 1]$  и  $\mathbb{R}^2$  равномощны.

## 1.2 Топология вещественной прямой.

Всякий рыцарь, желающий завоевать сердце принцессы знанием стохастического анализа, должен проникнуться древним искусством, пришедшим к нам из 1847 года, а именно топологией!

На всём пути изучения материала этой книги рыцарь будет чаще всего сталкиваться с множеством действительных чисел. Понимание того, как могут быть устроены множества на вещественной прямой является основополагающим для большинства последующих тем учебника. Поэтому авторы не видят смысла продолжать повествования, не познакомив рыцаря с замечательной во всех смыслах темой - Топологией вещественной прямой!

**Определение. Окрестностью**  $U(a)$  точки  $a$  называется любой интервал, содержащий точку  $a$ . Чаще всего рассматривают симметричную окрестность радиуса  $\delta$ ,  $U_\delta(a)$  или  $(a - \delta, a + \delta)$ .

**Замечание.** Отметим, что любую произвольную окрестность можно превратить в симметричную  $\delta$ -окрестность.

**Определение. Проколотой окрестностью** точки  $a$  называется окрестность точки  $a$ , из которой исключена сама точка  $a$ , т.е.  $\dot{U}(a) = U(a) \setminus a$ .

**Определение.** Точка  $a$  называется **внутренней точкой** множества  $A$ , если существует такая окрестность точки  $a$ , что эта окрестность целиком лежит в  $A$ .

**Определение.** Точка  $a$  называется **граничной точкой** множества  $A$ , если для любой окрестности точки  $a$  верно, что её пересечение с множеством  $A$  не пусто и её пересечение с дополнением множества  $A$  также не пусто, т.е.  $U(a) \cap A \neq \emptyset$  и  $U(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$ .

**Определение.** Точка  $a$  называется **изолированной точкой** множества  $A$ , если существует такая окрестность точки  $a$ , что её пересечение с множеством  $A$  равно точке  $a$ , т.е.  $U(a) \cap A = a$ .

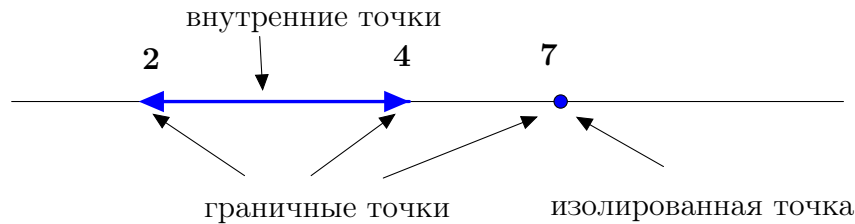


Рис. 5: Внутренние, граничные и изолированные точки

**Пример 4.** Если  $A = (2, 4) \cup \{7\}$ , то точка  $a = 0$  является изолированной, точки  $\{2, 4, 7\}$  являются граничными, точки  $(2, 4)$  являются внутренними. Всё это иллюстрирует рисунок 1.2.

**Определение.** Точка  $a$  называется **предельной точкой** множества  $A$ , если пересечение любой её проколотой окрестности с множеством  $A$  не пусто, т.е.  $\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap A \neq \emptyset$ .

**Пример 5.**

1. У множества в примере 4 все точки, кроме изолированной будут предельными.
2. У множества натуральных чисел нет предельных точек.

**Теорема 5.** Если  $a$  — предельная точка множества  $A$ , то пересечение любой проколотой окрестности с этим множеством  $A$  — бесконечное множество.

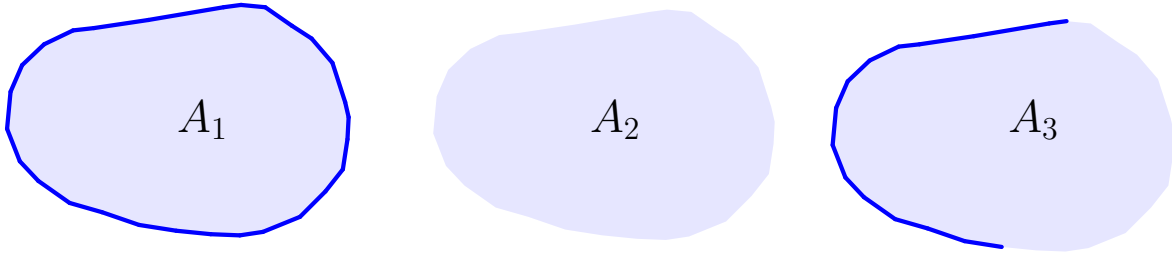
*Доказательство.* Рассмотрим произвольную  $\delta$ -окрестность точки  $a$ . В проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  выберем произвольную точку  $a_1$ . Теперь положим  $\delta_1 = |a_1 - a|$ . В проколотой  $\delta_1$ -окрестности выберем точку  $a_2$ . Точка  $a_2$  будет отлична от точки  $a_1$ . Теперь положим  $\delta_2 = |a_2 - a|$ . И так далее ... Полученный набор точек  $a_i$  завершает доказательство.  $\square$

**Следствие 1.** Конечное множество не имеет предельных точек.

**Определение.** Множество называется **открытым**, если все его точки – внутренние. Множество называется **замкнутым**, если оно является дополнением к открытому.

**Пример 6.** Множество  $(2, 4)$  открытое, множество  $[2, 4]$  замкнутое, множество  $(2, 4) \cup \{7\}$  не открытое, не замкнутое. Множества  $\mathbb{R}$  и  $\emptyset$  одновременно и замкнутые и открытые.

**Пример 7.** На плоскости,  $\mathbb{R}^2$ , можно привести следующие примеры замкнутых и открытых множеств.



Множество  $A_1$  — замкнутое, множество  $A_2$  — открытое, множество  $A_3$  — ни открытое, ни замкнутое.

**Теорема 6.** Следующие определения эквивалентны:

1. Множество  $A$  — замкнутое множество;
2. Множество  $A$  содержит все свои граничные точки;
3. Множество  $A$  содержит все свои предельные точки.

В определении не сказано, что предельная точка обязана принадлежать множеству  $A$ . Встречаются ситуации, когда предельная точка множества  $A$  принадлежит самому множеству  $A$ , и когда она не принадлежит множеству  $A$ .

**Пример 8.** Точка 0 является предельной точкой для множества  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , однако в само множество она не входит. В то же время она является предельной точкой множества  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ , в которое она входит.

**Определение.** Множество  $A$  называется **ограниченным**, если существует отрезок  $[c; d]$  такой, что  $A \subseteq [c; d]$ .

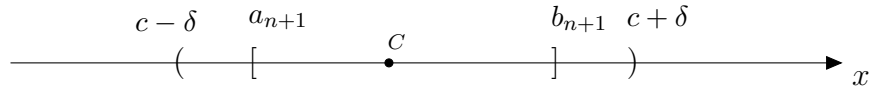
Как известно, дорогие сыры накрывают куполообразными стеклянными крышками для того, чтобы запах этих сыров не выветривался и не распространялся, то есть пространство распространения запаха сыров ограничено. Так вот, если мы можем накрыть множество  $A$  на прямой отрезком  $[c; d]$ , то оно будет ограничено.

**Теорема 7.** Если  $A$  — бесконечное ограниченное множество, то существует предельная точка множества  $A$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отрезок  $[c_1, d_1] = [c, d]$ . Разделим его на 2 части. Хотя бы в одну из половин отрезка входит бесконечное множество точек  $A$ . Возьмем полученный отрезок  $[c_2, d_2]$  и тоже разделим его на 2 части. Хотя бы один из полученных отрезков  $[c_3, d_3]$  тоже содержит бесконечное множество точек из  $A$ . Продолжим процесс деления отрезков. В итоге имеем систему стягивающихся отрезков. Эта система имеет единую для всех отрезков точку  $c$ . Докажем, что точка  $c$  — предельная точка множества  $A$ . Выберем произвольную  $\delta$ -окрестность точки  $c$ ,  $U_\delta(c)$ . После этого возьмем  $n$  такое, чтобы длина отрезка  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ , равная  $\frac{d_1 - c_1}{2^n}$ , оказалась меньше  $\delta$ , т.е.

$$\frac{d_1 - c_1}{2^n} < \delta \Leftrightarrow 2^n > \frac{d_1 - c_1}{\delta} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{d_1 - c_1}{\delta}.$$

Так как  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset U_\delta(c)$ , и так как  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  содержит, по построению, бесконечное множество точек из  $A$ , проколота окрестность  $U_\delta(c)$ , также содержит бесконечное множество точек из  $A$ .



Итак, доказано, что произвольная окрестность  $\dot{U}(c)$  содержит точки из  $A$ . Следовательно,  $c$  – предельная точка множества  $A$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $A$  – непустое подмножество прямой. Счётная система множеств  $U_i$  называется **покрытием** множества  $A$ , если  $A$  лежит в счётном объединении множеств  $U_i$ .

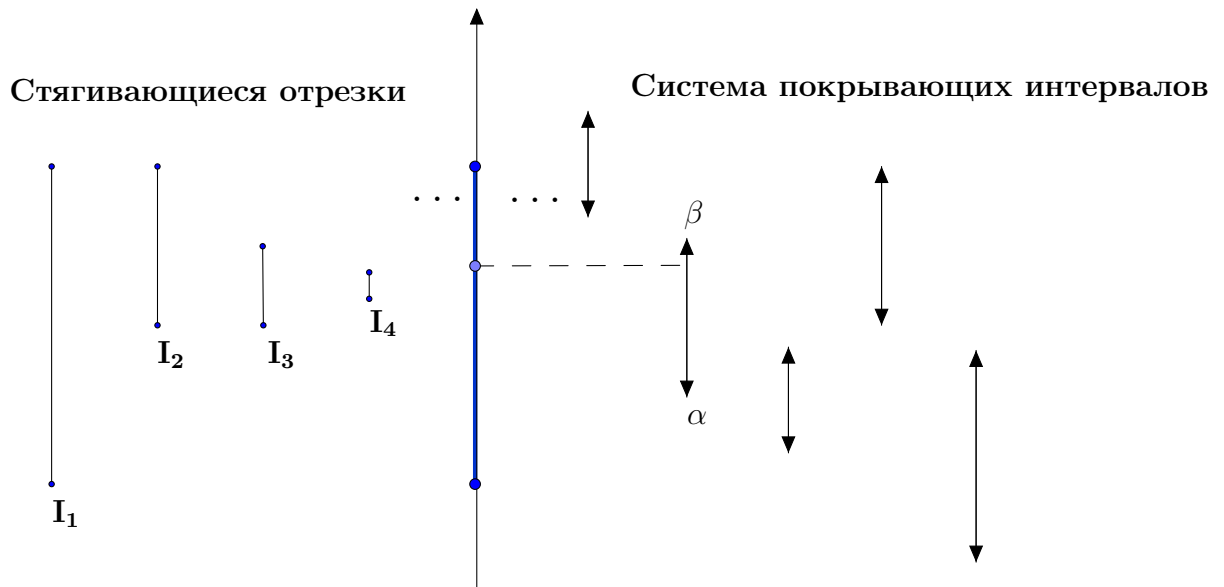
Если в стене есть огромная дырка, то мы можем совершенно по-разному закрыть её коврами. Каждый способ накрыть её коврами называется покрытием.

**Определение.** Множество называется **компактом**, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Дырка в стене будет компактом, если из любого ее покрытия коврами можно выделить какое-то конечное число ковров, которое закроет ее.

**Лемма 8** (Гейне-Борель-Лебег). Любой отрезок является компактом.

*Доказательство.* Предположим, что наше утверждение неверное, то есть для нашего отрезка не существует конечного подпокрытия  $I_1$ . Разделим отрезок пополам. Хотя бы одна из половин не имеет конечного подпокрытия, так как иначе утверждение данной леммы было бы справедливо. Обозначим этот отрезок  $I_2$ . Его длина равна:  $|I_2| = \frac{|I_1|}{2}$ . И так далее ... Пусть отрезок  $I_n$  – отрезок не допускающий конечного подпокрытия, выбранный на  $n - 1$  шаге построения. Его длина равна:  $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$ . Получим систему стягивающихся отрезков. Она имеет единственную точку. Тогда существует интервал  $(\alpha, \beta)$ , накрывающий эту точку. Положим  $\varepsilon = \frac{\min(\beta - c, c - \alpha)}{2}$ . Тогда существует натуральный номер  $N$ , такой, что  $|I_N| < \varepsilon$ . Получается, что отрезок  $I_N$  полностью лежит внутри нашего интервала (а это конечное подпокрытие). Все  $I_N$  не имели конечного подпокрытия. Полученное противоречие завершает доказательство.



$\square$

**Теорема 9** (Критерий компактности). Множество  $K$  является компактом тогда и только тогда, когда множество  $K$  ограничено и замкнуто.

## Задачи

**Задача 1.6.** Верно ли, что каждая изолированная точка является граничной?

**Задача 1.7.** Правда ли, что, если  $a$  — предельная точка множества  $A$ , то пересечение любой проколотой окрестности точки  $a$  с множеством  $A$  — бесконечное множество.

**Задача 1.8.** Опишите все подмножества прямой, каждое из которых является одновременно открытым и замкнутым множеством. Верно ли что других таких множеств нет?

**Задача 1.9.** Верно ли что прямую нельзя представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся открытых множеств? А замкнутых?

**Задача 1.10.** Является ли множество  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$  компактом? А множество  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ?

## 1.3 Частичный предел. Верхний и нижний.

Если есть последовательность  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ , то, забыв порядок чисел, можно рассмотреть ее как множество точек на числовой прямой.

**Замечание.** Многие российские авторы записывают последовательности не в круглых скобках  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ , а в фигурных  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ . Такая запись не совсем правильная. В фигурных скобках обычно записывают элементы, из которых состоит множество. Каждый элемент множества уникален, и в множестве не может быть двух одинаковых элементов. Множество  $\{2, 3, 3\}$ , и множество  $\{2, 3\}$  одинаковы! Множество {банан, банан, яблоко, груша, яблоко, банан}, и множество {банан, яблоко, груша} тоже одинаковы!

В круглых скобках обычно записывают упорядоченную совокупность каких-то элементов. Например, координаты точки  $A$  в трехмерном пространстве, декартово произведение двух множеств, порядок в котором мы будем поедать фрукты из холодильника. Съесть фрукты в порядке (банан, банан, яблоко, груша, яблоко, банан) и съесть фрукты в порядке (яблоко, груша, яблоко, банан, банан, банан) — это совершенно разные вещи! В такой записи очень важен порядок элементов. Более того, они могут повторяться.

Грубо говоря, посмотрев на запись в фигурных скобках, мы понимаем что лежит в холодильнике, посмотрев на запись в круглых скобках, мы понимаем в каком порядке мы эти продукты съедем!

Следуя такой логике, запись  $\{1\}_{i=1}^{+\infty}$  означает ни что иное как множество, состоящее из единственной единицы.

$$\{1\}_{i=1}^{+\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\} = \{1\}$$

Запись  $(1)_{i=1}^{+\infty}$  означает последовательность из единиц.

$$(1)_{i=1}^{+\infty} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

**Пример 9.** Последовательности  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  на прямой соответствует множество точек:



На прямой могут существовать точки в любой окрестности которых есть бесконечное количество членов последовательности  $a_n$ , в нашем примере это точки  $x = -1$  и  $x = 1$ . Эти точки называются точками накопления.

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется точкой **накопления** или **частичным пределом** для последовательности  $a_n$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x$  содержится бесконечное количество членов последовательности  $a_n$ .

Заметим, что если точка  $x$  является точкой накопления, то к ней можно «подобраться» сколь угодно близко выбрав некоторую подпоследовательность из последовательности  $a_n$ . Поэтому можно дать альтернативное определение:

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется точкой **накопления** или **частичным пределом** для последовательности  $a_n$ , если из последовательности  $a_n$  можно выбрать подпоследовательность  $b_k$ , сходящуюся к  $x$ .

**Определение.** Наибольшая из точек накопления называется **верхним частичным пределом**, наименьшая — **нижним частичным пределом**. Обозначаются они  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ , соответственно.

Чтобы сделать это определение совсем точным, остается лишь добавить два крайних случая:

- Говорят, что верхний частичный предел  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  равен  $+\infty$ , если в последовательности  $a_n$  можно найти сколь угодно большие положительные числа
- Говорят, что нижний частичный предел  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  равен  $-\infty$ , если в последовательности  $a_n$  можно найти сколь угодно сильно отрицательные числа

Если от последовательности отрезать сколько-то элементов в начале, будь то десять, сто или гугол<sup>1</sup> ( $10^{100}$ ), то на точки накопления это никак не повлияет. Если вокруг некой точки  $x$  было бесконечное количество членов последовательности, то после отрезания начала последовательности вокруг точки  $x$  существенных изменений не произойдет. Именно на этой идее базируется формальное определение. Заодно оно проливает свет на происхождение обозначения:

**Определение.** Верхний частичный предел,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$ .

Нижний частичный предел,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$ .

Несколько примеров.

**Пример 10.** Если  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ , то  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности.

$$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{9}{8}, -\frac{8}{9}, \frac{11}{10} \dots$$

Видно, что члены нашей последовательности прыгают между двумя точками накопления: 1 и -1.



**Пример 11.** Если  $a_n = n(-1)^n$ , то  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности.

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6 \dots$$

Видно, что на прямой не существует точек, в окрестности которых есть бесконечное число членов последовательности.

<sup>1</sup>В 1938 году известный американский математик Эдвард Казнер гулял по парку с двумя своими племянниками и обсуждал с ними большие числа. В ходе разговора зашла речь о числе со ста нулями, у которого не было собственного названия. Один из племянников, девятилетний Милтон Сиротта, предложил назвать это число «гугол» (googol). В 1940 году Эдвард Казнер совместно с Джеймсом Ньюманом написал научно-популярную книгу «Математика и воображение» («New Names in Mathematics»), где и рассказал любителям математики о числе гугол. Создатели известной поисковой машины хотели использовать термин «googol» в качестве названия, но при регистрации выяснилось, что такой домен уже занят. Но от названия отказываться не хотели, в результате из термина выбросили одну «о» и добавили в конец «е» — так получилось ныне всем известное название поисковика «Google». Число гугл превышает количество атомов в известной нам части Вселенной.



**Пример 12.** Если  $a_n = n(1 + (-1)^n)$ , то  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности.

$$0, 4, 0, 8, 0, 16, 0 \dots$$

Видно, что для последовательности существует только одна точка накопления — ноль.



## 1.4 Равномерная непрерывность

Понадобится для доказательств связанных с характеристическими функциями.

Рассмотрим непрерывную функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и произвольную точку  $x_0$ . Если мы хотим чтобы  $f(x)$  не сильно отличалось от  $f(x_0)$ , то нам достаточно взять значение  $x$  не сильно отличающееся от  $x_0$ . А именно:

**Определение.** Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для любого  $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  будет выполнено неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Множество функций непрерывных в точке  $x_0$  обозначают как  $C(x_0)$ . Тот факт, что функция непрерывна в точке  $x_0$  принято записывать как  $f(x) \in C(x_0)$ .

При этом нужное  $\delta$  в общем случае будет зависеть и от желаемого  $\varepsilon$  и от точки  $x_0$ :

**Определение.** Функция  $f(x)$  является непрерывной на множестве  $X$ , если она непрерывна в каждой точке этого множества. Множество функций непрерывных на множестве  $X$  обозначают как  $C(X)$ . То есть  $f(x) \in C(X) \Leftrightarrow f(x) \in C(x_0) \quad \forall x_0 \in X$ .

Функция  $f(x)$  непрерывна, если часть графика функции  $f(x)$  на множестве  $X$  можно нарисовать ни разу не отрывая карандаша от бумаги.

**Пример 13.** Функция  $f(t) = t^2$  на  $\mathbb{R}$ . Если мы хотим чтобы  $f(x)$  отличалось от  $f(2) = 4$  не более, чем на 5, то достаточно взять  $\delta = 1$ . Действительно, если  $|x - 2| < 1$ , то  $|f(x) - 4| < 5$ . Однако, чтобы  $f(x)$  отличалось от  $f(10) = 100$  не более, чем на 5, необходимо подойти к точке  $x_0 = 10$  гораздо ближе чем на  $\delta = 1$ . Достаточным окажется лишь  $\delta = \sqrt{105} - 10 \approx 0.25$ .

Однако для некоторых функций необходимое  $\delta$  можно выбирать даже не зная точки  $x_0$ .

**Пример 14.** Функция  $f(t) = 2t + 7$  на  $\mathbb{R}$ . Если мы хотим, чтобы  $f(x)$  отличалось от  $f(x_0)$  не более, чем на 5, то достаточно взять  $\delta = 2.5$ , вне зависимости от  $x_0$ .

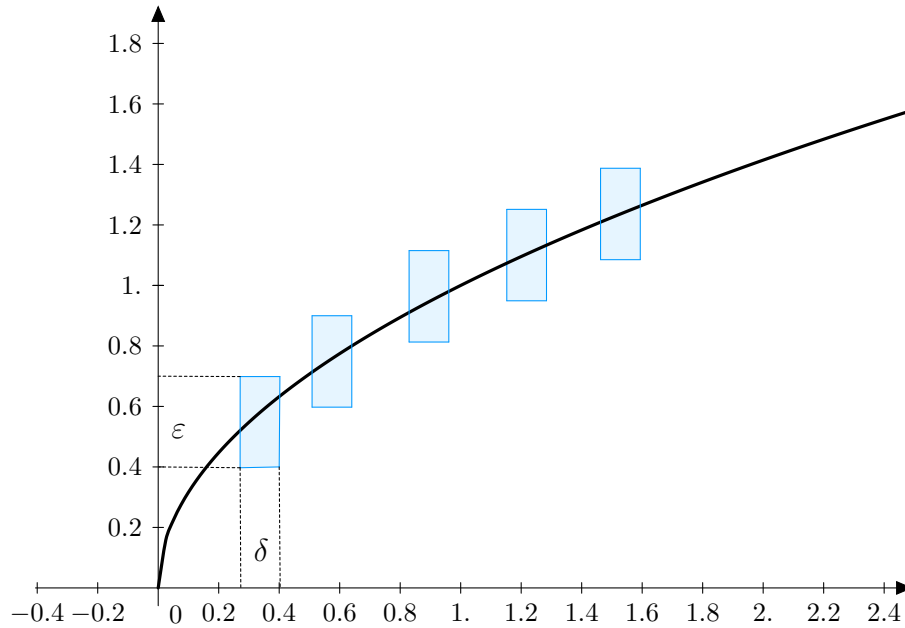
Вот такие функции и называются равномерно непрерывными.

**Определение.** Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется **равномерно непрерывной** на множестве  $A \subset \mathbb{R}$ , если для любого  $\varepsilon$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что для любых  $x$  и  $y$ , таких что  $|x - y| < \delta$  будет выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

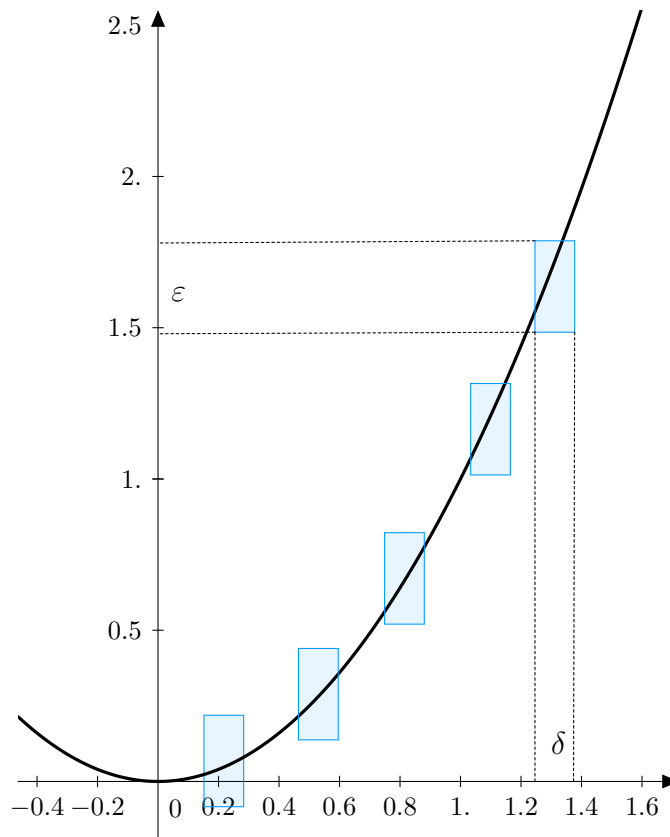
Равномерная непрерывность — свойство функции, рассматриваемое на множестве точек, а не в отдельных точках. Нет понятия «равномерная непрерывность в точке  $x = 3$ »

Равномерную непрерывность тоже можно проинтерпретировать геометрически. Если функция  $y = f(x)$  равномерно непрерывна на  $X$ , то для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что прямоугольник со сторонами  $\delta(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$ , параллельными осям  $Ox$  и  $Oy$ , можно так переместить вдоль графика этой функции, сохраняя параллельность сторон осям координат, что график не будет пересекать горизонтальных сторон прямоугольника, но будет пересекать вертикальные.

Таким образом, функция  $f(x) = \sqrt{x}$  будет равномерно непрерывна на  $[0; +\infty)$ .



Функция  $f(x) = x^2$  не будет равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Как бы мы не пытались переместить прямоугольник вдоль графика, рано или поздно одна из вертикальных сторон будет пересечена.



**Пример 15.** Функция  $f(x) = \cos(x)$  является равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$ .

**Пример 16.** Функция  $f(x) = e^x$  равномерно непрерывна на  $(0; 1)$ .

Классическим результатом связи непрерывности и равномерной непрерывности является теорема Кантора.

**Теорема 10 (Кантор).** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , тогда она равномерно непрерывна на нем.

**Замечание.** Утверждение теоремы Кантора верно на любом компакте.



## Задачи

**Задача 1.11.** Правда ли, что множество всех непрерывных на  $\mathbb{R}$  функций континуально?

**Задача 1.12.** Саймон любит смотреть в интернете забавные видео с участием котов. В одном из таких видео хозяин обмотал вокруг экватора апельсина ленточку, а потом равномерно сделал ее на один метр длиннее (при этом ленточка осталась окружностью) и заставил своего кота пролезть между ленточкой и апельсином. У кота получилось.

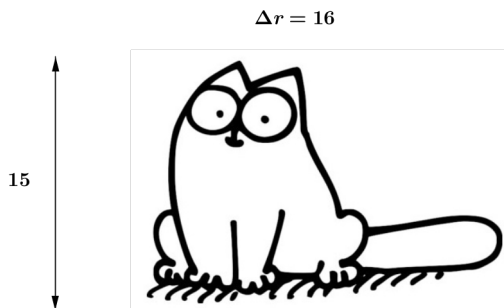


Рис. 6: Типичные параметры кота

Сразу же после просмотра Саймону в голову пришла идея обмотать ленточку вокруг экватора Земли, равномерно увеличить ее на один метр и попытаться заставить своего кота пролезть между ленточкой и Землей. Удастся ли коту Саймона<sup>1</sup> проползти между Землей и ленточкой?

**Задача 1.13.** Можно ли непрерывную на замкнутом множестве функцию  $f$  продолжить до функции непрерывной на всей числовой прямой так, что  $\sup(f)$  и  $\inf(f)$  не изменится?

**Задача 1.14.** Верно ли, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, равная нулю на одном из них и константе на другом?

**Задача 1.15.** Существует ли функция на  $\mathbb{R}$ , непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

**Задача 1.16.** В ряд стоят 100 сапог: 50 правых и 50 левых, но не обязательно парами. Обязательно ли найдутся 50 подряд стоящих сапог, среди которых левых и правых поровну?

## 1.5 Степенные ряды

Любой рыцарь, в котором сражение с топологией вещественной прямой не убило желание завоевать сердце принцессы знанием стохастического анализа, должен знать, что путь к сердцу принцессы будет лежать через ряды Тейлора и лемму Ито. Для того, чтобы уверенно пройти по этому пути, рыцарю нужно иметь представление о коварных степенных рядах.

Информация о степенных рядах будет дана достаточно обзорно. Для более подробного изучения данного вопроса читателю следует обратиться к [5].

**Определение.** Пусть даны коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$ . Будем называть **степенным рядом** выражение 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Одной из ключевых задач всей теории числовых рядов является исследование ряда на сходимость. Степенные ряды в этом плане не являются исключением.

**Пример 17.** Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

<sup>1</sup>Подробнее о коте Саймона можно узнать по ссылке <https://simonscat.com>

Переменная  $x$  может принимать совершенно любое значение от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». При разных значениях  $x$  будут получаться различные числовые ряды. Так, например при  $x = 1$  получим  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ , при  $x = -1$  получим  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ .

При каких-то значениях  $x$  получаемые ряды будут сходиться, при каких-то расходиться. Нашей задачей является найти множество значений  $x$ , при которых степенной ряд будет сходиться. Множество таких значений называется **областью сходимости ряда**.

Возможны три ситуации:

1. Степенной ряд сходится  $\forall x \in (a, b)$ . На концах этого интервала ряд может как сходиться, так и расходиться.
2. Степенной ряд сходится абсолютно для любого значения  $x$ .
3. Степенной ряд сходится в одной единственной точке  $x = 0$ .

**Теорема 11.** Если степенной ряд сходится, хотя бы неабсолютно, в точке  $x = a$ , то он сходится абсолютно в любой точке  $|x| < |a|$ .

**Определение.** Если множество абсолютных величин  $|a|$  точек, в которых ряд сходится ограничено сверху, то точная верхняя грань этого множества называется **радиусом сходимости степенного ряда** и обозначается  $R$ .

Если говорить совсем просто, то радиус сходимости — это половина длины интервала, на котором сходится ряд. Область сходимости может включать в себя краевые точки и отличаться от интервала сходимости.

Найти радиус сходимости ряда можно, используя следующую теорему.

**Теорема 12.** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , тогда:

1. если существует  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , то  $R = \frac{1}{I}$ .
2. если существует  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , то  $R = \frac{1}{I}$ .

**Замечание.** В случае  $I = 0$  будем считать, что  $R = \infty$ , а если  $I = \infty$ , то  $R = 0$ .

**Пример 18.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  сходится на всей числовой прямой. Для него

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

**Пример 19.** Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  радиус сходимости будет равен единице.

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

При этом в точке  $x = 1$  ряд расходится, так как совпадает с гармоническим рядом. В точке  $x = -1$  этот ряд будет сходиться по признаку Лейбница.

**Пример 20.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$  сходится только при  $x = 0$ . Для него

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow R = 0.$$

**Теорема 13.** Степенной ряд на всем интервале сходимости является дифференцируемой функ-

цией. Для любой точки  $x$  из этого интервала

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

**Теорема 14.** Степенной ряд в промежутке от 0 до  $t$ , где  $|t| < R$  можно интегрировать почленно, т.е.

$$\int_0^t \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}.$$

## 1.6 Еще задачи

**Задача 1.17.** Верно ли, что если из бесконечного множества удалить счётное, то оставшаяся часть будет равномощна исходному множеству?

**Задача 1.18.** Правда ли, что множество иррациональных чисел счётно?

**Задача 1.19.** Сравните мощности множеств  $A$  и  $B$ , если  $A = \mathbb{Q}$  — рациональные числа,  $B = \mathbb{Q}^2$  — пары рациональных чисел.

**Задача 1.20.** Декартово произведение конечного количества счётных множеств является счётным множеством. Да или нет?

**Задача 1.21.** Правда ли, что множество всех последовательностей натуральных чисел — множество мощности континуум? А множество вещественных числовых последовательностей — множество мощности континуум?

**Задача 1.22.** Вражеская субмарина движется по целочисленным значениям числовой прямой в каком-то направлении с неизвестной скоростью (целое число точек в минуту). Вам неизвестны позиция и скорость субмарины.

Вражескую субмарину необходимо уничтожить любой ценой! Вы можете каждую минуту посылать в какую-либо целочисленную точку числовой прямой торпеду. Если субмарина в данный момент находится в этой точке, то она тонет. Время и количество торпед не ограничено. Придумайте стратегию, которая поможет гарантированно уничтожить субмарину.

**Задача 1.23.** Кумиры и Фан-клубы! В славном городе  $N$  континуальное число очень творческих жителей, которым постоянно не сидится на месте. Кто-то из них любит рисовать, кто-то петь, кто-то вышивать. Более того, в городе живут одни экстраверты, каждый из которых интересуется творчеством своих коллег. Благодаря этому у каждого горожанина существует фан-клуб, в котором состоят другие жильцы города, полюбившие его творчество. Каждый горожанин может состоять в любом количестве фан-клубов.

Пусть  $A$  — множество горожан, а  $2^A$  — список фан-клубов, в которых они состоят. Например, у Вовочки в фан-клубе могут состоять Паша и Артём, может состоять счётное или континуальное число жильцов, а может и вовсе никого не состоять. При этом сам Вовочка может вступить в неограниченное количество фан-клубов, или вовсе не вступить ни в один.

Старая формулировка: Пусть  $A$  произвольное множество. Докажите, что мощность множества  $2^A$  (множество всех подмножеств множества  $A$ ) больше, чем мощность  $A$ .

**Задача 1.24.**

Верно ли следующее утверждение: у последовательности  $a_n$  существует предел если и только если  $\limsup a_n = \liminf a_n$

**Задача 1.25.** Дед Мороз пришел к Вовочке на Новый Год с мешком, в котором счётное количество пронумерованных конфет. Конфеты можно есть только после наступления Нового Года. Ровно за час до Нового Года Дед Мороз дарит Вовочке конфеты номер 1 и 2 и тут же забирает конфету номер 1 обратно. Ровно за полчаса он выдаёт конфеты номер 3 и 4 и забирает конфету

Како  
ри-  
су-  
нок?

Норм  
ли  
мысл  
в ре-  
ше-  
нии,  
как  
её  
за-  
кон-  
чить

нето  
в  
фор-  
му-  
ли-  
ров-  
ке!

Что  
ББ  
хо-  
чет  
в ре-  
ше-  
нии?

номер 2. Ровно за четверть часа он выдаёт конфеты номер 5 и 6 и забирает конфету номер 3. И так далее, ускоряясь выдаёт из мешка две очередные конфеты и забирает у Вовочки конфету с наименьшим номером.

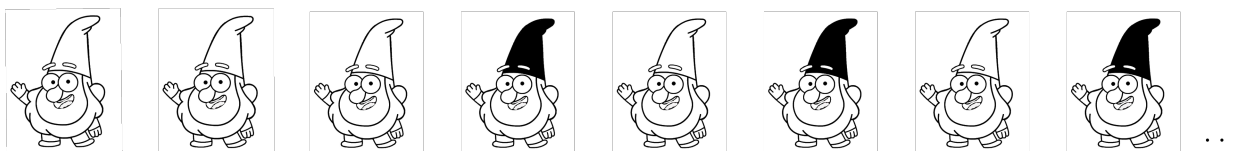
Спр  
про  
ре-  
ше-  
ние!

1. На сколько изменится количество конфет у детишек за одну операцию дарения - забира- ния?
2. У кого к Новому Году окажется конфета номер 1?
3. У кого к Новому Году окажется конфета номер 2015?
4. Сколько конфет будет у Вовочки к Новому Году?

**Задача 1.26.** Назовем две бесконечных вправо последовательности из нулей и единиц «похо- жими», если они отличаются на конечное число членов. Например,  $101111111 \dots$  и  $000111111 \dots$  похожа, а  $101010101 \dots$  и  $010101010 \dots$  не похожи.

1. Какова мощность множества последовательностей похожих на последовательность из од- них нулей?
2. Это отношение «похожести» разбивает все последовательности на классы похожих после- довательностей. Какова мощность множества классов похожих последовательностей?

**Задача 1.27.** По пути в Эребор! Злобный Дракон поймал бесконечное счётное количество гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак.



Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов<sup>1</sup> стратегия, позволяющая им иметь конечные боевые потери при встрече со Злобным Драконом?

**Hints:** Воспользуйтесь результатом из предыдущей задачи!

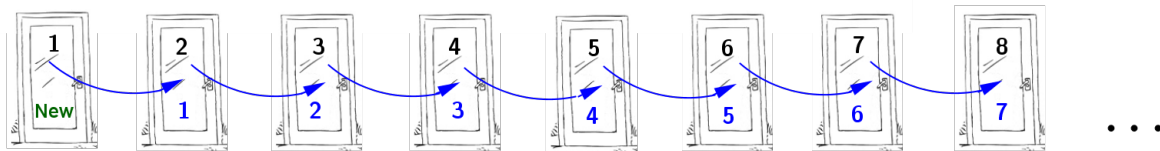
**Задача 1.28.** Новые проблемы у подножия Одинокой Горы! Злобный Дракон поймал всего лишь  $n$  гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, третий — всех, начиная с четвертого и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак. Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов какая-то оптимальная стратегия, которая позволит противостоять дракону? Сколько гномов погибнет в лучшем и в худшем исходах?

**1.1** К сожалению, придется доставить жильцам отеля определенный дискомфорт и переселить их в другие номера.

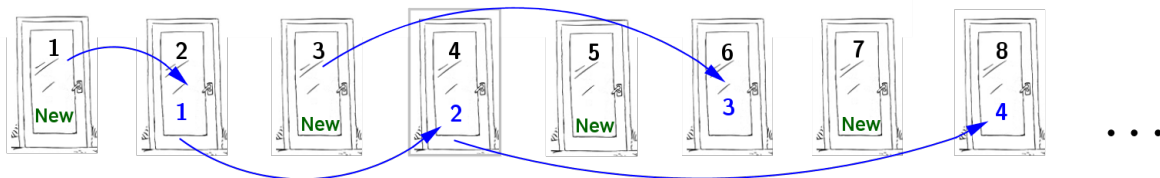


1. Переселим туриста из 1 номера во 2 номер, туриста из 2 номера в 3 номер, туриста из 3 номера в 4 номер и так далее. В итоге освободится место для еще одного туриста.

<sup>1</sup>Подробнее о гномах, изображенных на картинке можно узнать, например, по ссылке <http://gravityfalls.ru/>

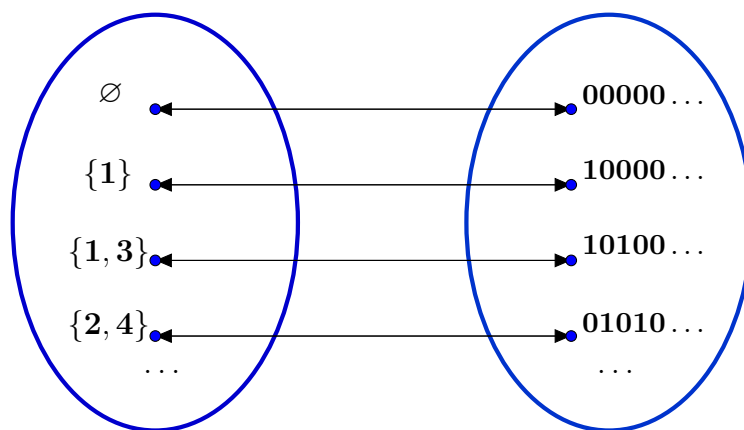


2. Переселим туриста из 1 номера во 2 номер, из 2 номера в 4 номер, из 3 номера в 6 номер, из 4 номера в 8 номер, из 5 номера в 10 номер и так далее. В итоге освободится счётное количество номеров для дополнительного счётного количества туристов.



При решении задачи мы неявно оперировали тем фактом, что если из счётного множества удалить конечное или счётное множество, то исходное множество останется счётным. Если в счётное множество добавить конечное или счётное множество, то новое множество снова будет счётным. Чтобы доказать это достаточно построить взаимно-однозначные соответствия по аналогии с тем, как мы сделали это с жильцами.

**1.2** Сопоставим каждой последовательности из нулей и единиц элемент списка  $A$ . Если в данный элемент списка входит натуральное число  $n$ , то будем ставить в последовательности на месте  $n$  единицу.



Таким образом каждой последовательности будет соответствовать единственный элемент списка. Множества  $A$  и  $S$  равномощны.

Так как мощность списка из подмножеств множества больше мощности множества и  $|A| = |S|$ , то  $|\mathbb{N}| < |S|$ .

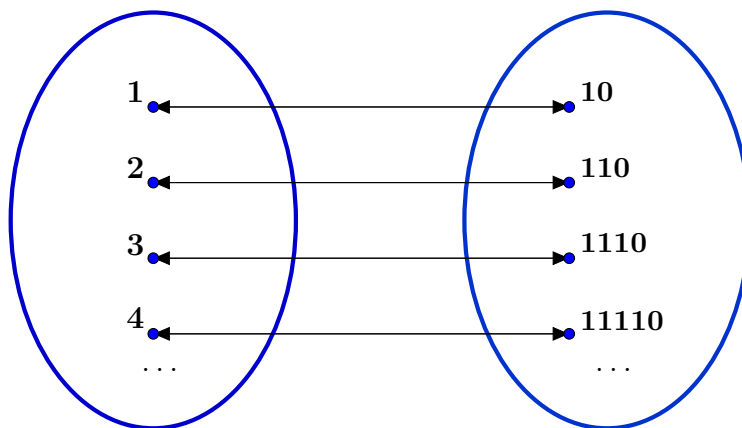
**1.3** Нет! От противного, допустим  $S$  существует. Для каждого  $s \in S$  существует множество  $A_s$  соответствующей мощности. Построим множество  $A = \cup_s A_s$ . Здесь используется аксиома выбора. И теперь построим множество  $B = 2^A$ . Оно больше любого из  $A_s$ ! Значит оно не было упомянуто в списке  $S$ .

**1.4** Нет. Пусть  $S$  — множество всех последовательностей из нулей и единиц.  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots$  — декартово произведение счетного количества счетных множеств.

Тогда мощность множества  $S$  точно не больше мощности множества  $A$ , так как в множестве  $A$  существует подмножество последовательностей, состоящих только из нулей и единиц, для которого можно построить взаимно-однозначное соответствие с  $S$ .

Значит множеству  $S$  поставлено во взаимно-однозначное соответствие подмножество  $A$  и  $|A| \geq |S|$ .

В свою очередь мощность множества  $A$  точно не больше мощности множества  $S$ . Построим следующее взаимно-однозначное соответствие.



Тогда, например, элементу  $(1, 2, 2, 3, \dots) \in A$  будет соответствовать элемент  $101101101110\dots$ . Каким бы ни был элемент из множества  $A$ , в последовательности никогда не будет двух нулей подряд. Значит множеству  $A$  поставлено во взаимно-однозначное соответствие какое-то подмножество  $S$  и  $|A| \leq |S|$ .

Так как  $|A| \geq |S|$  и  $|A| \leq |S|$ , мощности множеств совпадают,  $|A| = |S|$ . Оба множества имеют мощность континуум.

При решении этой задачи можно просто привести следующий контр-пример. Бесконечные вправо последовательности из 0 и 1 — это декартово произведение счётного количества  $A_i$ , где каждое  $A_i = \{0, 1\}$

**1.5** Для того, чтобы каждому элементу из множества  $(0; 1) \times (0; 1)$  поставить единственным образом в соответствие элемент из  $\mathbb{R}^2$  нужно найти такое отображение, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

Аналогичное отображение нужно подобрать для переменной  $y$ . Первое, что приходит в голову — начать экспериментировать с экспонентами и тангенсами, но это плохая идея.

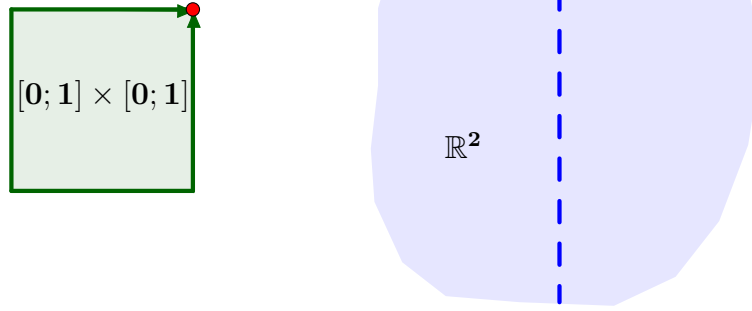
Попробуем не заморачиваться. Чтобы  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  достаточно взять функцию  $-\frac{1}{x^2}$ . Чтобы получить  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  достаточно взять функцию  $\frac{1}{(x-1)^2}$ . Тогда для функции  $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$  получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) = -\infty - 1 = -\infty,$$

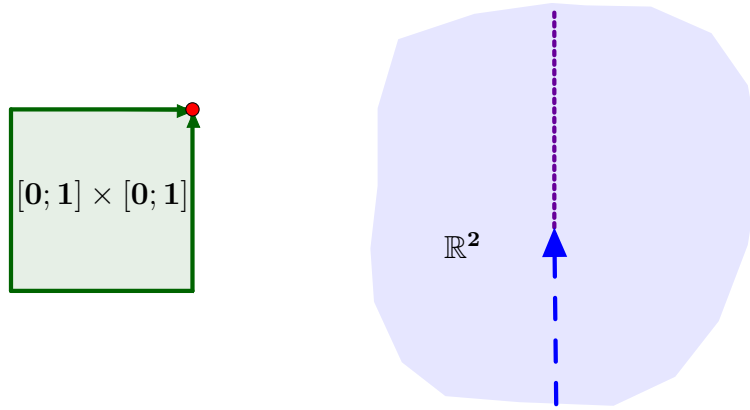
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) = -1 + \infty = +\infty,$$

Таким образом по правилу  $(x, y) \leftrightarrow \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}, -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y-1)^2} \right)$  мы каждому элементу из  $(0; 1) \times (0; 1)$  поставим в соответствие элемент из  $\mathbb{R}^2$ .

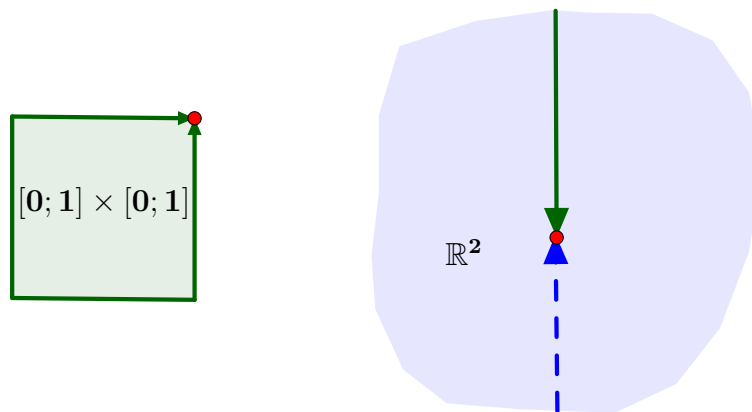
Для того, чтобы доказать, что множества  $[0; 1] \times [0; 1]$  и  $\mathbb{R}^2$  равномощны, нам нужно построить взаимно-однозначное соответствие между этими двумя множествами.



В предыдущем пункте задачи мы нашли отображение, которое переводит все точки квадрата в точки плоскости, но при этом мы не нашли ни одной точки, которой в соответствие можно было бы поставить границу квадрата. Возьмем на плоскости произвольную прямую. Прямая равномощна полупрямой с выколотым началом. То есть между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.



Любой интервал равномощен полупрямой. Сопоставим между собой границу квадрата и незанятую полупрямую с включённым началом.



Проделав всё это мы сопоставили плоскости квадрат с его границей. Заметим, что, используя это отображение, можно доказать равномощность  $[0; 1]$  и  $\mathbb{R}$ .

**1.6** Да, это верно. Пусть точка  $a$  — изолированная точка некоторого множества  $A$ . Условие существования такой окрестности точки  $a$ , для которой выполнено следующее равенство  $U(a) \cap A = \{a\}$  эквивалентно тому, что для любой окрестности точки  $a$  верно, что  $U(a) \cap A \neq \emptyset$ , так как каким угодно интервалом точку  $a$  не накроешь, то для любой окрестности точки  $a$  её пересечение с



множеством  $A$  будет как минимум давать точку  $a$  то есть не будет пустым. Так же это условие эквивалентно тому, что для любой окрестности точки  $a$  верно, что  $U(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$ . Это следует из того что, если существует окрестность, для которой её пересечение с множеством  $A$  даст точку  $a$ , то при удалении точки  $a$  получим, что пересечение проколотой окрестности точки  $a$  с множеством  $A$  даёт пустое множество. То есть имеет место не пустое пересечение с частью множества  $\mathbb{R} \setminus A$ . Дальнейшие попытки уменьшить или увеличить исходную окрестность не приведут к иному результату, что и завершает решение задачи.

**1.7** Выберем  $\delta_1 = 1$ . Выберем в  $\dot{U}_{\delta_1}(a)$  точку  $a_1 \in A$ . Положим  $\delta_2 = \min(\frac{1}{2}, |a_1 - a|)$ . Теперь в  $\dot{U}_{\delta_2}(a)$  выберем точку  $a_2 \in A$ . Очевидно, что  $a_1 \neq a_2$ . Далее положим  $\delta_3 = \min(\frac{1}{3}, |a_2 - a|)$ , рассмотрим  $\dot{U}_{\delta_3}(a)$  и т.д. На шаге с номером  $n$  получается точка  $a_n \in A$ , отличная от предыдущих точек. Неограниченное продолжение этого процесса даёт искомое бесконечное множество.

## 1.8

**1.9** Предположим, что это верно. Тогда существуют два открытых непересекающихся и непустых множества  $A$  и  $B$ , которые в объединении дают всё множество действительных чисел. Рассмотрим множество  $A$ . Оно непусто и открыто. Тогда дополнением к нему будет являться множество  $B$ , которое по определению будет замкнутым. Получается, что  $B$  одновременно и открыто, и замкнуто, и не пусто, и не всё множество действительных чисел (так как множество  $A$  непусто). Получаем противоречие с задачей **1.8**.

Аналогичные рассуждения применяем для случая двух замкнутых множеств.

**1.10** Множество  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$  является компактом. Так как точка  $0$  является предельной точкой для множества  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , то какой бы окрестностью мы точку ноль не покрыли (а мы её обязаны покрыть) за пределами этой окрестности останется лишь конечное число точек исходного множества, которое мы можем покрыть конечным числом интервалов. Получается, что из всякого покрытия открытыми множествами этого множества можно выделить конечное подпокрытие. Это и соответствует определению компакта.

Множество точек  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  не является компактом. Достаточно предъявить покрытие  $\cup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{10^n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{10^n})$ . Из данного покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие (попробовать выделить самостоятельно), а это противоречит определению компакта.

**1.11** Да, правда!

**1.12** Конечно да! Радиус — это линейная функция от длины окружности, а линейная функция равномерно непрерывна.

$$l = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} l$$

Равномерная непрерывность означает, что при какой бы длине окружности мы не увеличивали радиус, прирост длины окружности будет одним и тем же. Прирост функции зависит только от прироста аргумента.

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{2\pi} (l_1 - l_2)$$

Оба раза  $l_1 - l_2 = 1$ , значит в обоих ситуациях радиус увеличится на  $r_1 - r_2 = \frac{1}{2\pi}$ . Что в случае с апельсином, что в случае с Землей, зазор между лентой и поверхностью будет одинаковым, и кот Саймона без труда пролезет между ленточкой и Землей.

## 1.13

## 1.14

**1.15** Спросите у Google или Yandex «Что такое функция Римана?»

**1.16** Да, обязательно. Рассмотрим первые 50 сапог. Если среди них левых и правых поровну, то ничего больше делать не надо. Если не поровну, пусть, для определённости, правых сапог



больше. Для каждых 50 подряд стоящих сапог рассмотрим разность между числом правых и левых сапог. По нашему предположению для первых 50 сапог эта разность положительна. Очевидно, что для последних 50 сапогов эта разность отрицательна, так как в противном случае правых и левых сапог было бы не поровну. Теперь задумаемся, как меняется разность при сдвиге на 1 сапог. Также заметим, что разница для первых 50 сапог чётна, так как либо не может быть такого, что одних чётное количество, а других нечётное. Поскольку добавляется один сапог и исчезает тоже один, то разность или не меняется, или меняется на 2. Осталось применить нечто вроде теоремы о промежуточном значении.

**1.17** Да, это верно! Пусть  $M$  — бесконечное множество. Удалим из него счётные множества  $B$  и  $A$ . Тогда с одной стороны  $N = (M \setminus A) \setminus B \Rightarrow (M \setminus A) = N \cup B$ . С другой стороны  $N = M \setminus (B \cup A) \Rightarrow M = N \cup (A \cup B)$ . Установим между множествами  $M \setminus A$  и  $M$  взаимно-однозначное соответствие.

Если  $x \in N$ , то во множестве  $M \setminus A$  он будет соответствовать самому себе. Если же  $x \in A \cup B$ , то учитывая что множества  $A$  и  $B$  счётные, то их объединение тоже является счётным множеством и можно установить взаимно-однозначное соответствие между  $A \cup B$  и  $B$ . Таким образом каждому элементу из  $M \setminus A$  соответствует единственный элемент из  $M$ .

**1.18** Нет! Это враньё! Множество иррациональных чисел можно получить, выбросив из множества действительных чисел все рациональные. Полученное множество равномощно исходному.

**1.19**  $|A| < |B|$

**1.20** Да. Все элементы этого множества можно пересчитать змейкой.

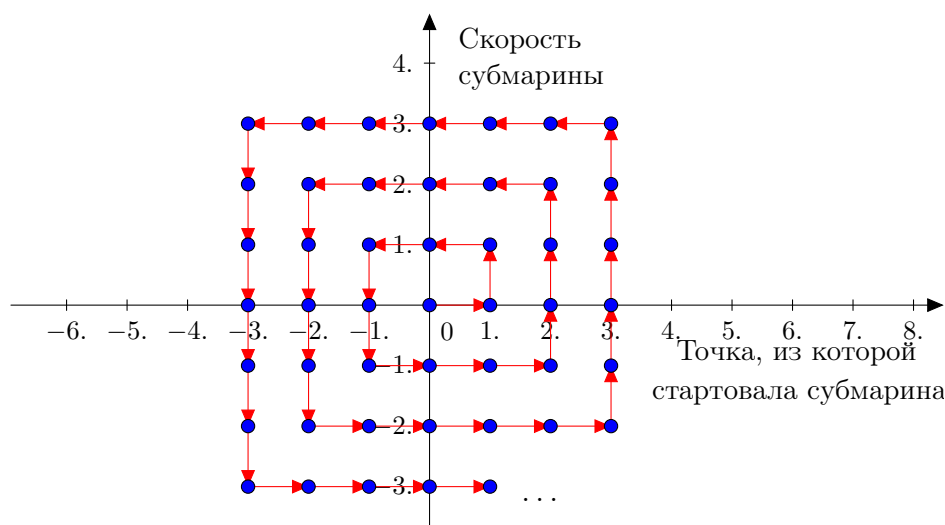
**1.21** Да, это чистая правда в обоих случаях. Множество всех последовательностей натуральных чисел — это ни что иное, как декартово произведение счётного числа счётных множеств. Это означает, что множество последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.

Множество всех вещественных числовых последовательностей совпадает с декартовым произведением  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ .

**1.22** Субмарина начинает свое движение из неизвестной нам точки и движется с постоянной скоростью. Нанесем все возможные комбинации (начало движения, скорость) на плоскость.

Тогда если субмарина движется со скоростью 2 и начинает движение из точки  $-4$  мы можем уничтожить ее несколькими способами. Выстрелив в точку  $-4$  в нулевую минуту, в точку  $-2$  в первую минуту, в точку  $0$  во вторую минуту и так далее.

Аналогично для любой другой точки старта субмарины. Перечислим все возможные комбинации (старт, скорость) и нанесём их на плоскость.



Все возможные положения субмарины представляют собой объединение счётного количества счётных множеств. Количество элементов этого объединения мы можем пересчитать змейкой.

**1.23** Мощность  $2^A$  не меньше мощности  $A$ , т.к. есть одноточечные подмножества, которые можно сопоставить с элементами  $A$ . Допустим все же, что  $2^A$  и  $A$  равноможны. Значит есть взаимно однозначное соответствие  $b \longleftrightarrow B$ , где  $b \in A$  и  $B \in 2^A$ . Построим  $C \subset A$  по принципу: будем включать туда только такие  $b$ , которые не входят в соответствующее  $B$ . Этому множеству  $C$  должен соответствовать некий элемент  $c$ . С одной стороны  $c$  не может входить в  $C$ , с другой стороны - обязан. Противоречие.

**1.24** да

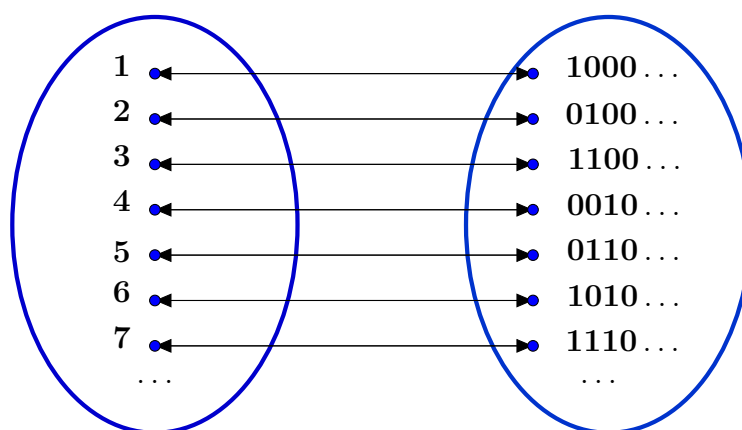
**1.25** За одну операцию дарения - забирая количество конфет у детишек каждый раз будет увеличиваться на одну.

Конфета номер 1 к Новому Году окажется у Деда Мороза. Он сразу же отберет её у Вовочки.

Конфета номер 2015 к Новому Году окажется также у Деда Мороза! Рано или поздно наступит момент, когда он её у Вовочки отберет.

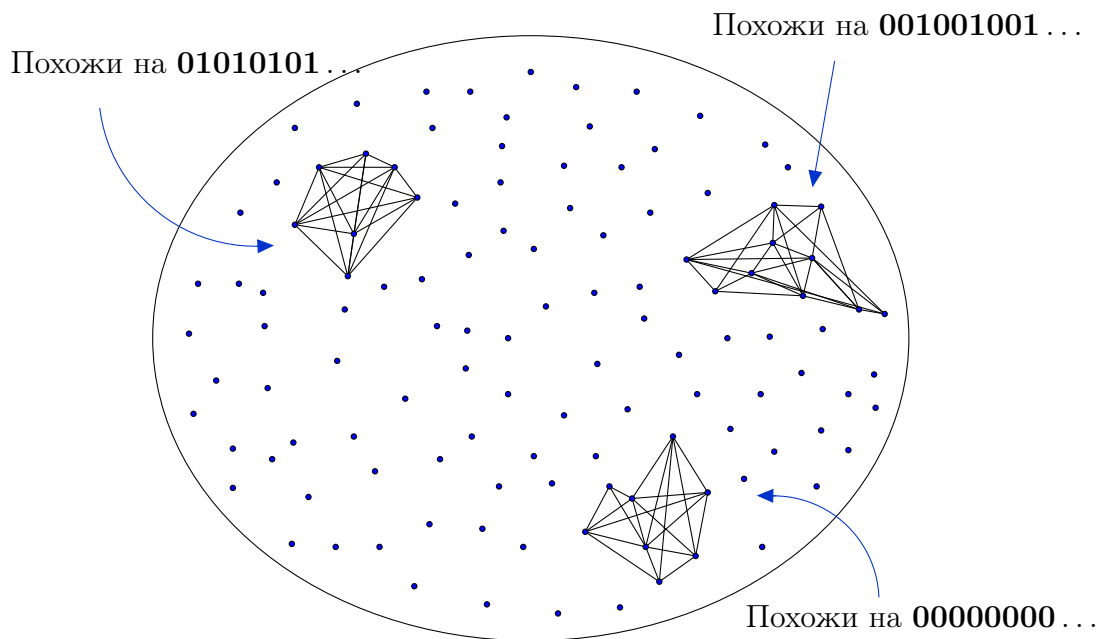
У Вовочки к Новому Году не будет ни одной конфеты. Дед Мороз всё оставит себе.

**1.26** Множество последовательностей «похожих» на последовательность из одних нулей будет либо счетным, либо континуальным. Среди всех этих последовательностей есть такие, которые отличаются от нулевой только первой цифрой. Есть такие, которые отличаются от нулевой первой или второй цифрой, есть такие, которые отличаются первой или второй или третьей цифрой и так далее. Все такие отличия можно занумеровать.



Таким образом последовательностей, отличающихся от нулевой счётное количество.

Гораздо более интересным вопросом является вопрос о количестве таких счетных классов.



Допустим, что классов счётное количество. Тогда объединение всех классов должно дать все возможные последовательности из нулей и единиц. Счётное объединение счётного количества множеств — счётное множество, а множество последовательностей из нулей и единиц, в свою очередь — континуальное множество, значит множество классов не может быть счётным и является континуальным.

**1.27** Пусть чёрные колпаки — единица, а белые колпаки — ноль. В этом случае дракон, надевая на гномов колпаки создает бесконечную последовательность из нулей и единиц. Созданная последовательность будет относиться к какому-то определенному классу «похожих» — отличающихся в счетном числе точек последовательностей.

Гномам, чтобы потерять конечное число своих собратьев необходимо заранее из каждого класса выбрать образцовую последовательность.

Глядя на колпаки впереди стоящих гномов можно идентифицировать класс, которому принадлежит фактическая последовательность колпаков.

Первый гном, поняв к какому классу относится последовательность, назовет первый элемент образцовой последовательности. Второй гном назовет второй и так далее. Так как все последовательности одного класса различаются в конечном числе точек, то погибнет конечное число гномов.

**1.28** Пусть чёрные колпаки — единица, а белые колпаки — ноль. В этом случае дракон, надевая на гномов колпаки создает конечную последовательность из нулей и единиц. Сумма всех чисел в последовательности будет либо чётной либо нечётной.

Первый гном видит всех остальных. Если количество белых колпаков перед ним чётное, он называет белый цвет. Если количество нечётное, чёрный. Если первый гном назвал белый цвет, а второй гном видит перед собой чётное количество белых колпаков, то он делает вывод, что на нём одет чёрный колпак. Остальные гномы внимательно анализируют что именно скажет их товарищ, стоящий за их спиной и выживают.

При этом, если первый гном угадает цвет своего колпака, то никто не погибнет.

## Список литературы

- [1] Horst Herrlich. *Axiom of choice*. Книга, которая чуть более, чем полностью посвящена аксиоме выбора. Springer, 2006.
- [2] Ingo Lütkebohle. *Set theory*. Всего 40 страниц заметок «Set theory». URL: <http://alpha.math.uga.edu/~pete/expositions2012.html>.
- [3] David Williams и David Williams. *Weighing the odds: a course in probability and statistics*. Т. 548. Springer, 2001.
- [4] Николай Константинович Верещагин и Александр Шень. *Начала теории множеств*. 1999. URL: <http://www.mccme.ru/free-books/>.
- [5] ВА Зорич. *Математический анализ*. Т. 1. Наука, 1981.