1 Вероятность

1.1 Определение вероятности

Вероятность - это размер событий! А именно:

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ - σ-алгебра. Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty]$ называется **мерой**, если выполнены два условия:

M1. $\mu(\emptyset) = 0$

M2. Если все $A_i \in \mathcal{F}$ и они попарно не пересекаются ($A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ - σ-алгебра. Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty]$ называется **мерой**, выполнены два условия:

M1 У пустого множества нулевая мера, $\mu(\emptyset) = 0$;

M2 Если для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств A_i из σ-алгебры $\mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Это свойство также называют **свойством σ-аддитивности** или **свойством счётной аддитивности** .

Обратить внимание следует на две вещи. Во-первых, мера определена только на тех множествах, которые входят в σ-алгебру $\mathcal{F}$! Именно эти множества мы будем называть событиями. Во-вторых, мера может принимать бесконечные значения, при этом они складываются по естественным правилам: $\infty +$ любое число $= \infty$, $\infty + \infty = \infty$.

Приведём несколько примеров меры.

Пример 1. Например, $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$, и $\mu(A)$ — количество элементов в множестве A. Легко проверить, что это мера, которая может принимать бесконечные значения.

Пример 2. Например, $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$, и мера $\mu(A)$ — равна единице, если множество A содержит $\sqrt{3}$, и равна нулю, если A не содержит $\sqrt{3}$.

Пример 3. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$. Функция $\mu(A) = \sup(A)$ — не является мерой, т.к. $\mu([0; 1]) \neq \mu([0; 0.5)) + \mu([0.5; 1])$.

Пример 4. Длина. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ можно определить меру λ, которая будет соответствовать естественному понятию длины. Например, $\lambda([0; 100]) = 100$. К сожалению (?), эту меру нельзя определить на σ-алгебре $2^{\mathbb{R}}$. Этот пример содержит в себе сразу два недоказанных утверждения. Во-первых, на $\mathcal{B}$ можно определить такую меру, там не возникнет проблем с сигма-аддитивностью. Во-вторых, не получится определить на $2^{\mathbb{R}}$ меру, которая соответствует естественному понятию длины. Доказательство чуть позже.

Что за вопросительный знак

Определение. Мера $\mathbb{P}$ называется **вероятностью** если $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Пример 5. $\Omega = a, b$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Пусть вероятность $\mathbb{P}$ ставит в соответствие каждому элементу сигма-алгебры $\mathcal{F}$ элемент отрезка $[0; 1]$ следующим образом:

$\mathcal{F}$	a	b	c	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	Ω	$\varnothing$
$\mathbb{P}$	0.6	0.1	0.3	0.7	0.9	0.4	1	0

В данном курсе мы будем иметь дело с вероятностью, которая является конечной мерой и с длиной подмножеств $\mathbb{R}$, которая является σ-конечной мерой.

прос пример с конечным омега

Определение. Мера μ называется конечной, если $\mu(\Omega) < \infty$

Определение. Мера μ называется σ-конечной, если Ω можно разбить на счетное количество непересекающихся Ω_i, так что на каждом Ω_i мера μ будет конечной: $\Omega = \cup\Omega_i$, $\mu(\Omega_i) < \infty$.

Длина является σ-конечной в силу того, что числовую прямую можно разбить на счетное количество полуинтервалов единичной длины вида $[n; n+1)$.

Задачи

Задача 1.1. Пусть μ_1 и μ_2 - конечные меры на Ω и $a > 0$. Верно ли, что:

a $\mu := a \cdot \mu_1$ - конечная мера?

b $\mu := \mu_1 + \mu_2$ - конечная мера?

a да

b да

Задача 1.2. Пусть μ - конечная мера на Ω. Верно ли, что $\nu(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ - вероятность на Ω? да, если $\mu(\Omega) > 0$

Задача 1.3. Найдите меру множества A, $\lambda(A)$, если $A = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$. Множество A представляет собой множество, состоящее из рациональных точек отрезка $[0; 1]$. Это множество является счётным, а значит $\lambda(A) = 0$.

$$A = \cup_{r_k \in \mathbb{Q}} [r_k; r_k], \qquad \lambda([r_k; r_k]) = r_k - r_k = 0$$

.

Задача 1.4. Приведите пример σ-алгебры $\mathcal{F}$ и функции $R : \mathcal{F} \to [0; 1]$ такой, что:

1. $R(\Omega) = 1$, $R(\varnothing) = 0$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $R(A \cup B) = R(A) + R(B)$
3. Существует возрастающая последовательность $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ такая, что $R(\cup A_n) \neq \lim R(A_n)$

Пусть $\Omega = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}$ — это все конечные множества и множества с конечными дополнениями. Функция R равна 0 для конечных множеств и единице для множеств с конечным дополнением. Занумеруем все рациональные числа на $[0; 1]$: r_i — i-ое по счету рациональное число. Возьмем $A_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Тогда $R(A_n) = 0$ т.к. A_n конечно, но $\cup A_n = \Omega$ и $R(\Omega) = 1$.

1.2 Свойства вероятности

Нам часто понадобятся следующие свойства:

Теорема 1. Если $\mathbb{P}$ - вероятность, то:

PP1 $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

PP2 Если $A_i \in \mathcal{F}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, тогда $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$.

PP3 Если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, тогда $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

PP4 $\mathbb{P}(\cup A_i) \leqslant \sum \mathbb{P}(A_i)$

PP5 Если $\mathbb{P}(A_i) = 0$, то $\mathbb{P}(\cup A_i) = 0$.

PP6 Если $\mathbb{P}(A_i) = 1$, то $\mathbb{P}(\cap A_i) = 1$.

PP7 Вероятность выдерживает взятие пределов:

PP7a Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$, то $\mathbb{P}(\cup A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$

PP7b Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$, то $\mathbb{P}(\cap A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$

PP7c Если $\lim\limits_{n\to\infty} A_i$ существует, то $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Доказательство.

PP1 Пусть $A_i = \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда по свойству сигма-аддитивности

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Учитывая, что $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ получаем:

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing),$$

что возможно только если $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, иначе ряд справа будет расходящимся.

PP2 Пусть $A_i = \varnothing \quad \forall i > n$, тогда по свойству сигма-аддитивности выполняется

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

PP3 В силу вложенности множества A в множество B выполняется $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Используя свойство 1.2 получаем, что $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

PP4 Воспользуемся следующим трюком, от последовательности A_n перейдем к последовательности «добавок» A'_n. То есть A'_n - это те новые элементы, которые приносит с собой A_n, которых еще нет в $\cup_i^{n-1} A_i$. Формально, $A'_i = A_i \backslash (\cup_i^{n-1} A_i)$. В силе этого A'_n попарно не пересекаются.
Остается заметить, что $\mathbb{P}(A'_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n)$ и

$$\mathbb{P}(\cup A_n) = \mathbb{P}(\cup A'_n) = \sum \mathbb{P}(A'_n) \leqslant \sum \mathbb{P}(A_n)$$

.

PP5 Следует из 1.2.

PP6 Перейдем к дополнениям, $B_n = A_n^c$. Тогда $\mathbb{P}(B_n) = 0$ и к ним применимо свойство 1.2, $\mathbb{P}(\cup B_n) = 0$ и $\mathbb{P}((\cup B_n)^c) = 1$. Но это как раз и есть желаемое: $(\cup B_n)^c = (\cup A_n^c)^c = \cap A_n$.

PP7a Перейдём от рассмотрения множеств A_i к рассмотрению слоёв $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ для всех $i \geqslant 2$. Заметим, что множества B_i измеримы, то есть $B_i \in \mathcal{F}$ и $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. В силу сигма-аддитивности меры и того факта, что сумма ряда есть предел последовательности из его частичных сумм имеем

эта формула ужасна!

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \\ = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) + \mathbb{P}(A_3 \setminus A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned} \quad (1)$$

PP7b Пусть $C_i = A_1 \setminus A_i$ и $i \geqslant 1$. Тогда $C_1 = \varnothing$, остальные множества представляют собой нарастающие вложенные друг в друга слои, как и в предыдущем пункте.
Заметим, что $C_i \in \mathcal{F}$; $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \ldots$; $\cup_{i=1}^{\infty} C_i = A_1 \setminus (\cap_{i=1} \infty A_i)$.

$$\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \cup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap A^c) = A_1 \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = A_1 \cap (\cap_{i=1}^{\infty} A_1)^c = A_1 \setminus (\cap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

По свойству 1.2 имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} C_i)$. Тогда с одной стороны

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_n)) = \mathbb{P}(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

С другой стороны $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty}) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i)$. А значит $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

PP7c

Дока- по- след- нее свой- ство вста-

$\square$

Еще несколько «именных» свойств, связанных с множеством $\limsup\limits_{n\to\infty} A_i$ («произошло бесконечное количество A_i»):

Лемма Фату для вероятностей: если есть бесконечно много A_i с вероятностью не ниже p, то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i не ниже p.

Теорема 2.

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_i) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

.

Как сделать в доказательства автоматические отступы? И стоит ли их делать

Доказательство. **Шаг 1.** Среди A_i выбираем подпоследовательность B_k такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_k) = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Заметим, что $\limsup\limits_{n\to\infty} B_i \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_i$ (если произошло бесконечное количество B_i, то произошло бесконечное количество A_i, но обратное в общем случае неверно), $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_i) \geqslant \mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} B_i)$.

Шаг 2.

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} B_i) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k\geqslant n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geqslant n} B_k) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

. □

Первая лемма Бореля-Кантелли: если сумма вероятностей A_i не «велика», то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i равна нулю. Если быть точным, «не велика» в данном случае — меньше бесконечности:

Теорема 3. Если $\sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$, то $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_i) = 0$.

Доказательство. **Шаг 1.**

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_i) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k\geqslant n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k).$$

Шаг 2. Частичные суммы $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ сходятся к сумме $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$, а это значит, что непосчитанный «хвост» стремится к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k) = 0$. □

1.2.1 Задачи

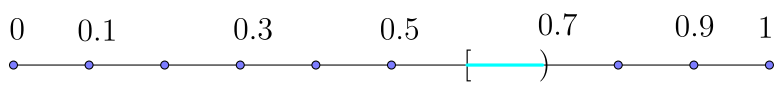
Задача 1.5. Пусть все числа из отрезка $[0;1]$ представлены в виде бесконечных десятичных дробей и A — множество точек из отрезка $[0;1]$ такие, что их десятичное разложение не содержит цифры "6". Найдите $\lambda(A)$, если λ — длина.

Итак, $A = \{x = 0.x_1x_2x_3\ldots \in [0;1] : x_i \neq 6\}$. Определим последовательность множеств A_i следующим образом:

$$A_i := \{x = 0.x_1x_2x_3\ldots \in [0;1] : x_1 \neq 6, \ldots x_i \neq 6\}, \quad i \geqslant 1,$$

тогда $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ и $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$.

Множество A_1 будет выглядеть следующим образом. Полуинтервал $[0.6; 0.7)$ будет из него исключён, $\lambda(A_1) = 0.9$.



Аналогично для множества A_2 будут исключены все полуинтервалы, для которых второй знак после запятой равен 6, а именно $[0.06, 0.07), [0.16, 0.17), \dots, [0.96, 0.97)$. Длина множества A_2 составит 0.9. В общем случае будет выполняться равенство: $\lambda(A_n) = 9/10 \cdot \lambda(A_{n-1}) = (9/10)^n$.

Таким образом, по свойствам меры

$$\lambda(A) = \lambda(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

Задача 1.6. Имеется последовательность событий $A_1, A_2, \dots$, такая что вероятность любого A_i равна $\mathbb{P}(A_i) = 1$. Найдите $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$ и $¶(\cap_{i=1}^{\infty} A_i$. Обе равны единице

Задача 1.7. Имеется последовательность событий $A_1, A_2, \dots$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ $\mathbb{P}(B)$

Задача 1.8. Существует ли последовательность событий $A_1, A_2, \dots$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$, но $\mathbb{P}(\cap_{i=k}^{\infty} A_i) = 0$ для любого числа k. Да

1.3 Построение равномерной вероятности

Оказывается, что некоторые интересные вероятности нельзя определить для произвольного подмножества числовой прямой!!!

Очень важный пример!

У некоторых множеств на прямой нет длины!

Пример 6. Допустим мы хотим создать равномерное распределение на полуинтервале $[0;1)$. Казалось бы, чего проще! Берем в качестве $\mathcal{F}$ все подмножества данного полуинтервала и в качестве вероятности попасть в данное подмножество берем его длину! Однако это не получится! Обязательно будет нарушена аксиома M2 в определении меры.

Давайте разберемся. Чего мы ждем от равномерного распределения? Если взять произвольное подмножество A и его копию A' сдвинутую, скажем чуть правее, то мы хотим, чтобы $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A')$. И все. Больше нам ничего от равномерной вероятности не нужно.

Для краткости будем использовать следующее обозначение:

Определение. $A \oplus r$ - это множество A сдвинутое вправо на r. Если при этом результат вылезает за пределы интервала $[0;1)$, то мы выступающую часть «внесем» обратно в $[0;1)$ с другой стороны. Например: $[0;0,5] \oplus 0,1 = [0,1;0,6]$, $(0,5;0,8) \oplus 0,3 = (0,8;1) \cup [0;0,1)$.

А сейчас мы построим довольно «хитрое» множество A. Для этого мы раскрасим весь интервал $[0;1)$ в разные цвета по следующему принципу:

Числа $x \in [0;1)$ и $y \in [0;1)$ красим в один цвет, если существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, такое что $x \oplus r = y$.

Из этого принципа следует, что если взять любое число x, то есть счетное количество покрашенных в тот же цвет чисел. Так, например, есть счетное количество чисел покрашенных в тот же цвет, что и $\sqrt{2}/2$. Заметим, что все рациональные числа покрашены в тот же цвет, что и число 0.

Множество A создадим так: возьмем по одному числу каждого цвета. Например, от рациональных можно взять ноль, от покрашенных в тот же цвет, что и $\sqrt{2}/2$ можно взять $\sqrt{2}/2 + 0,1$ и т.д. Неважно какого представителя мы берем, главное от каждого цвета ровно по одному.

Что у нас получилось? Если взять рациональное $r \in [0;1)$, то $A \oplus r$ не совпадает с A, т.к. каждый представитель своего цвета превратится в другое число своего цвета. Если взять два разных рациональных числа $r_1 \in [0;1)$, $r_2 \in [0;1)$, то $A \oplus r_1$ не пересекается с $A \oplus r_2$: в каждой группе представитель переходит в разных членов своей группы. Если перебрать все рациональные числа, то $\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A \oplus r) = [0;1)$, в каждой группе представитель успеет побывать в роли каждого члена своей группы.

Здесь и рождается противоречие! Напомню, что мы хотим, чтобы $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \oplus r)$:

С одной стороны, $\mathbb{P}(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A \oplus r)) = \mathbb{P}([0; 1)) = 1$

С другой стороны, $\mathbb{P}(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A \oplus r)) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)} \mathbb{P}(A \oplus r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)} \mathbb{P}(A)$.

Но сумма бесконечного количества одинаковых слагаемых не может равняться единице! Либо нулю, если складываются нули, либо бесконечности, если складываются ненулевые числа.

Этот пример показал, что равномерную вероятность нельзя построить для произвольных подмножеств отрезка $[0; 1)$. Поскольку от понятия длины мы ждем ровно той же неизменности при сдвиге вправо-влево на прямой, становится ясно, что нельзя присвоить понятие длины произвольному подмножеству $\mathbb{R}$.

Что же делать? Нужно отказаться от определения вероятности на этом «страшном» множестве A! Т.е. для некоторых множеств вероятность определена и является числом от нуля до единицы и подчиняется свойствами M1, M2, а для некоторых подмножеств вероятность просто не существует. В данном случае $\mathbb{P}(A \oplus r)$ и $\mathbb{P}(A)$ не будут существовать и противоречия не возникнет.

Возникает естественный вопрос: каким же подмножествам интервала $[0; 1)$ можно присвоить вероятность, которая не менялась бы при сдвиге? Или каким подмножествам прямой можно присвоить понятие длины?

Длина есть у всех борелевских множеств!

Нас спасет уже знакомая нам борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}([0; 1])$! На ней можно определить равномерную вероятность. А как мы видели эта σ-алгебра достаточно богата и включает все подмножества отрезка $[0; 1]$ с которыми реально приходится работать.

Борелевских множеств много и они могут иметь достаточно сложную структуру, поэтому попытка явно определить «длину» каждого борелевского множества обречена на провал. Мы поступим следующим путем. Определим понятие «длины» на очень простом наборе множеств. Этот набор множеств будет порождать борелевскую σ-алгебру. И сформулируем теорему, которая будет гарантировать, что у каждого борелевского множества есть длина.

Итак, наш «простой» набор множеств это полуинтервалы вида $[a; b)$:

$\mathcal{H} = \{[a; b)|0 \leqslant a < b < 1\}$.

Он, конечно, σ-алгеброй на $\Omega = [0; 1)$ не является: $[0.1; 0.2) \in \mathcal{H}$, но $[0.1; 0.2)^c \notin \mathcal{H}$. Зато на нем тривиально определить длину:

$$\lambda([a; b)) := b - a \tag{2}$$

Кроме того, этот набор порождает борелевскую σ-алгебру, т.е. $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}([0; 1))$.

Формально наш набор $\mathcal{H}$ является полу-алгеброй:

Определение.

Спасительная теорема формулируется так:

Теорема 4 (Каратеодори)**.** Если функция μ задана на полу-алгебре $\mathcal{H}$ и на ней является σ-аддитивной (), то существует единственная мера $\mu*$, заданная на σ-алгебре $\sigma(\mathcal{H})$, совпадающая с μ на множестве $\mathcal{H}$.

Доказательство. Идея проста. Для каждого подмножества Ω определим «внешнюю меру» μ^*... Эта «внешняя мера» μ^* не всегда будет σ-аддитивна, т.е. она не является мерой! Но если выбрать «хорошие» подмножества Ω, а именно такие, на которых μ^* будет мерой, то они будут образовывать σ-алгебру! Единственность будет следовать из того, что каждое «хорошее» множество можно «приблизить» с помощью объединения множеств из $\mathcal{H}$, а на них любая другая мера должна совпадать с μ^*. Полное доказательство в приложении. □

Заметим, что конкретно в нашем случае σ-алгебра «хороших» окажется строго больше $\mathcal{B}([0; 1)) = \sigma(\mathcal{H})$. Длина будет определена не только у борелевских множеств, но и у некоторых других. Это не страшно, и подробнее об этом чуть позже.

Пример 7. http://math.stackexchange.com/questions/2949/which-one-result-in-maths-has-sur 2953 Пример, как можно каждое рациональное число накрыть маленьким интервальчиком и в результате длина всего множества будет конечная..

Как построить любой случайный эксперимент?

Почему так важно было установить существование равномерной вероятности? Оказывается, что имея одну равномерную случайную величину можно получить бесконечное количество независимых равномерных случайных величин! А имея бесконечно много равномерных случайных величин можно такого понастроить...

Пусть X - равномерно распределенная случайная величина на $[0;1)$. Мы хотим на базе одной X построить последовательность независимых равномерных X_1, X_2, X_3...

Нам окажется полезной такая неслучайная последовательность натуральных чисел:

$$[a_i] = [1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots] \tag{3}$$

Сначала сказали 1, потом посчитали от 1 до 2, потом от 1 до 3, потом от 1 до 4 и т.д. Эта последовательность нам будет говорить какому X_i «отдать» очередную цифру из десятичной записи X.

Например, пусть $X(w) = 0,583601935\ldots$. Первую цифру после запятой отдаем X_1, вторую - снова X_1, третью - X_2, четвертую - снова X_1, пятую - X_2, шестую - X_3... Получаем:

$X_1 = 0,5869\ldots$

$X_2 = 0,303\ldots$

$X_3 = 0,15\ldots$

Изобразим на картинке:

$$\begin{aligned}
X(w) &= 0,583601935\ldots \\
a_i &= \;\;\;\, 1121331234\ldots \\
X_1 &= 0,58\;\,6\;\,9\ldots \\
X_2 &= 0,\;\;\;\;3\;0\;\;\;3\ldots \\
X_3 &= 0,\;\;\;\;\;\;\;\;1\;\;\;5\ldots
\end{aligned}$$

В последовательности a_i каждое натуральное число k упомянуто бесконечное количество раз. Значит каждая случайная величина X_k получит от X бесконечное количество цифр. Разные цифры в десятичном разложении величины X независимы, отсюда будет следовать независимость X_k. Каждая цифра в десятичном разложении X равновероятно принимает значения от 0 до 9, значит и каждая цифра в десятичном разложении каждого X_k также равновероятно принимает значения от 0 до 9. Следовательно, все X_k равномерны на $[0;1)$.

Имея последовательность независимых равномерных X_k можно получить независимую последовательность Y_k с произвольным законом распределения. А в главе про броуновское движение мы узнаем, как из последовательности нормальных случайных величин сварить это самое броуновское движение.

Упр. докажите, что если X -равномерное, то ... - экспоненциальное, а ... - пуассон.

Норм ли по-лу-чи-лись сле-дую-щие два раз-

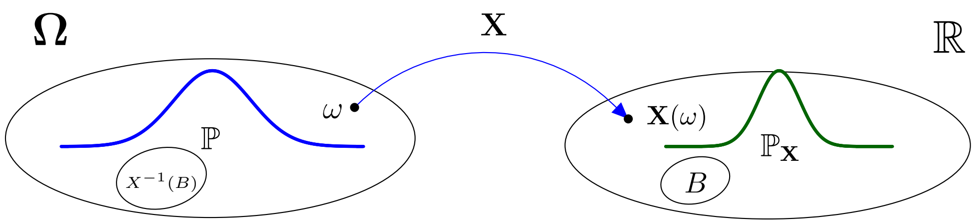
1.4 Вероятностная тройка

В предыдущей главе нами были построены два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, связанных между собой с помощью случайной величины. Пришло время дополнить эту конструкцию мерами!

Определение. Измеримым пространством с мерой называется упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, а μ — некоторая мера.

Если μ — вероятность, т.е. $\mu = \mathbb{P}$, тогда пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется **вероятностным**. Иногда упорядоченную тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называют **вероятностной тройкой**.

Теперь в нашем распоряжении имеется две вероятностные тройки $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$, связанные между собой случайной величиной $X(\omega)$, которая сопоставляет каждому элементарному исходу из Ω какое-то число из $\mathbb{R}$. Мы достаточно хорошо изучили свойства σ-алгебр и выяснили, что если случайная величина измерима относительно $\mathcal{F}$, то $\sigma(X) = \mathcal{B} = X^{-1}(B) \subseteq \mathcal{F}$, и теперь нам хотелось бы понять как взаимосвязаны между собой меры $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}_X$.



Мера $\mathbb{P}$ задана на элементах сигма-алгебры $\mathcal{F}$. Случайная величина X, отображая пространство Ω на множество $\mathbb{R}$ каким-то определённым образом искажает эту меру.

Пример 8. Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$ и $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Пусть случайная величина X принимает значение 1, если $\omega = a$ и 0 для любого другого элементарного исхода. Тогда

Ω	a	b	c
$\mathbb{P}$	0.5	0.4	0.1

X	0	1
$\mathbb{P}_X$	0.5	0.5

Мы умеем сопоставлять вероятности событиям. Если случайная величина X измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}$, то на множестве значений случайной величины есть запас множеств, вероятности которых мы знаем. Все такие множества входят в сигма-алгебру $X^{-1}(B)$.

Получается, что случайная величина X индуцирует вероятностную меру $\mathbb{P}_X$ на пространстве своих значений $\mathbb{R}$ следующим образом: $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ для любого события B из сигма-алгебры $\mathcal{B}$. Мера P_X при этом называется распределением случайной величины X.

1.4.1 Задачи

Задача 1.9. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, B — событие с $\mathbb{P}(B) > 0$. Для $A \in \mathcal{F}$ определим $P_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$. Докажите, что $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$— вероятностное пространство.

1.5 Почти наверное и пополнение вероятностного пространства!

Иногда вероятностное пространство можно пополнить по мере!

Что ББ хотел тут написать Я мог написать бреда!

Пример 9. $\Omega = a, b, c, d$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$. Пусть вероятность $\mathbb{P}$ ставит в соответствие каждому элементу сигма-алгебры $\mathcal{F}$ элемент отрезка $[0; 1]$ следующим образом:

$\mathcal{F}$	$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{d\}$	Ω	$\varnothing$
$\mathbb{P}$	0.8	0	0.2	1	0

Множество $\{c\}$ не входит в σ-алгебру $\mathcal{F}$, то есть является неизмеримым. Как уже было отмечено выше, вероятность определена только для измеримых множеств. Однако, пользуясь свойством вероятность PP5, можно получить что

$$0 \leqslant \mathbb{P}(\{c\}) \leqslant \mathbb{P}(\{b, c\}) = 0$$

несмотря на то, что вероятность для множества $\{c\}$ не определена.

В таких странных ситуациях мы можем доопределить вероятность для части неизмеримых множеств. Такое доопределение называется **пополнением вероятностного пространства по мере** $\mathbb{P}$, а такие множества называются неборелевскими.

Рассмотрим другую ситуацию.

Пример 10.

$\mathcal{F}$	$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{d\}$	Ω	$\varnothing$
$\widetilde{(\mathbb{P})}$	0.7	0.1	0.2	1	0

В этом случае $0 \leqslant \mathbb{P}(\{c\}) \leqslant \mathbb{P}(\{b, c\}) = 0.1$, что не даёт нам сделать никаких однозначных выводов о природе меры $\widetilde{(\mathbb{P})}$ на множестве $\{c\}$. Множество $\{c\}$ в данном случае говорят, что множество $\{c\}$ не лебеговское или не измеримо по Лебегу.

Определение. Множество A называется **неборелевским**, если оно не лежит в сигма-алгебре $\mathcal{B}$. Множество A называется **неизмеримым** , а точнее **неизмеримым по Лебегу**, если оно не лежит в пополнении $\mathcal{B}$.

Если вероятность некоторого события равна единице, то такое событие называют достоверным. Если вероятность некоторого события равна нулю, то такое событие называют невозможным.

Очень важно понимать тонкую разницу между событием, которое не произойдёт никогда и тем вероятность которого равна нулю. Нулевая вероятность события вовсе не означает того, что это событие никогда не наступит. Чисто теоретически наступление такого события возможно, но вероятность этого события равна нулю. Например, вероятность того, что непрерывная случайная величина попадёт в какую-то конкретную точку равна нулю. Тем не менее, сгенерировав такую случайную величину на компьютере, мы увидим, что она приняла конкретное значение, то есть попала в некоторую точку. Удивительно, но при каждой реализации случайной величины мы наблюдаем невозможное событие!

Точно также важно понимать разницу между утверждением верным всегда и почти наверное!

Определение. Пусть некоторое утверждение выполняется для всех точек множества A, кроме точек некоторого подмножества $A_0 \subset A$. Если $\mu(A_0) = 0$, то говорят, что **утверждение определено почти всюду (almost everywhere, a.e.) на множестве** A.

Пример 11. Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману и $f(x) \geqslant 0 \quad (a.e.)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \quad (a.e.)$$

для всех действительных чисел $a < b$.

Если мера является вероятностью, то вместо слов «почти всюду» употребляют «почти наверное». Иными словами:

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Говорят, что событие $A \in \mathcal{F}$ наступило **«почти наверное» (almost surely, a.s.)** , если $\mathbb{P}(A) = 1$.

Пример 12. Представим себе как игрок в дартс бросает в мишень дротик. Пусть как бы игрок не метнул дротик, он всегда попадает в мишень. Вероятность того, что дротик попадёт в какой-то конкретный регион мишени равна отношению площади этого региона к общей площади мишени. Например, вероятность того, что дротик попадет в правую половину мишени равна 0.5.

При
взял
с ан-
гло-
языч
ной
ви-
ки-
пе-
дии.
Это

Рассмотрим событие «дротик попадает в конкретную хорду мишени». Площадь хорды равна нулю. То есть дротик не попадет в хорду (a.s.).

Тем не менее множество точек на хорде не пусто и попадание в неё является чисто теоретически возможным. То же самое можно сказать и о любой другое точке на мишени. Так как любая точка будет иметь нулевую площадь, дротик не попадет в неё почти наверное. Однако дротик точно должен попасть в какую-то точку мишени! Таким образом при каждом бросании дротика происходит событие, имеющее нулевую вероятность.

Задачи

Задача 1.10. Монетка, имеющая две равновероятно выпадающие грани, подкидывается до появления первого орла.

1. Как в данном случае будет выглядеть вероятностное пространство?
2. Правда ли, что приведённые ниже утверждения верны?
   - Событие «Выпало бесконечное число решек» никогда не произойдёт.
   - Событие «Выпало бесконечное число решек» почти наверное не произойдёт.
   - Событие «Выпало конечное число орлов» почти наверное произойдёт.

Каки ещё вопросы добавить

1. Вероятностное пространство имеет вид $(\{O, P\}, 2^{\{O,P\}}, \mathbb{P})$, где $\mathbb{P}(\{O\}) = 0.5$ и $\mathbb{P}(\{P\}) = 0.5$.
2. Проанализируем все описанные выше утверждения!
   - Это наглая ложь! Это событие вполне может произойти.
   - Действительно, Вероятность того, что решка выпала n раз составит $\mathbb{P}(\{P, P, P, P, \dots P\}) = (0.5)^n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} 0.5^n = 0$, то есть вероятность того, что решка выпадет бесконечное число раз равна нулю. И Решка не выпадет бесконечное число раз $(a.s.)$
   - $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 0.5^n) = 1$, то есть Решка выпадет конечное число раз $(a.s.)$

Задача 1.11. Пусть $X = Y(a.e.)$ и $Y = Z(a.e.)$. Верно ли, что $X = Z(a.e.)$?

Задача 1.12. Пусть f и g обычные действительный функции.

1. Приведите пример таких f и g, что f — непрерывна, g — непрерывна почти наверное (относительно классической меры Лебега λ), $f = g$ почти наверное.
2. Приведите примеры таких f и g, что $f = g$ почти наверное, f — непрерывна, g не является непрерывной даже почти наверное.
3. Приведите пример такой f, непрерывной почти наверное, что ни одна g почти наверное равная f, не является непрерывной.

Задача 1.13. Известно, что $\mathbb{P}(X > c \cap Y > c) = 0$ для любой константы c. Верно ли, что $X = Y$ почти наверное? Да. Рассмотрим множество $X - Y > c$. Его можно представить в виде $\{X - Y > c\} = \cup_q \{X > q \cap Y < q - c\}$. Далее замечаем, что $\mathbb{P}(X > q \cap Y < q - c) = \mathbb{P}(Y > q \cap Y < q - c) = 0$ для $c > 0$. Т.е. $\mathbb{P}(X - Y > c) = 0$ для $c > 0$. В силу непрерывности вероятности получаем $\mathbb{P}(X - Y > 0) = 0$. Далее используем симметрию и получаем $\mathbb{P}(Y - X > 0) = 0$. Значит $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ или $X = Y(a.e.)$.

a.e. или a.s.?

1.6 Еще задачи

Задача 1.14. Можно ли придумать последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\dots$, такую, что одновременно выполнены два условия: 1) для любого i: $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$; 2) $\cup \mathcal{F}_i$ - не σ-алгебра. да

Задача 1.15. Верно ли, что свойство сигма-аддитивности в определении меры можно заменить свойством непрерывности, которое состоит в следующем.