**Тема №2. Топология вещественной прямой.**

**Кококо, тут должно быть вступление про то, что топология это очень важно и кококо.**

**Определение: Окрестностью**точки a называется любой интервал, содержащий точку a. Чаще всего рассматривают симметричную окрестность радиуса , . **Проколотой окрестностью** точки a называется окрестность точки a, из которой исключена сама точка a, т.е..



**Определение:** а – **внутренняя точка множества** А, если существует такая окрестность точки а, что эта окрестность целиком лежит в А.

**Определение:** а – **граничная точка множества** А, если для любой окрестности точки а верно, что  и .

**Определение:** а – **изолированная точка множества** А, если существует такая окрестность точки а, для которой выполнено следующее равенство.

**Леммочка:** Всякая изолированная точка является граничной.

**Доказательство:** Должен доказать Филипп. Если возникнут проблемы – пиши мне.

**Определение:** *a –* **предельная точка множества** *A,* если в любой проколотой окрестности точки a есть точки из множества A: .



**Теорема:** Если а – предельная точка множества А, то пересечение любой проколотой окрестности с этим множеством А – бесконечное множество.

**Идея доказательства:** Выберем радиус окрестности равным 1. В проколотой окрестности точки а выберем произвольную точку а1. Теперь положим 2=min(1/2,|a1-a|). В проколотой окрестности выберем точку а2. Очевидно, что а1а2. Ну и так далее. Полученный набор точек аi завершает доказательство.

**Следствие:** Конечное множество не имеет предельных точек.

**Определение:** Множество называется **открытым**, если все его точки – внутренние. Множество называется **замкнутым**, если оно – дополнение к открытому.

**Теорема:** Следующие определения эквивалентны:

1. А – замкнутое множество;
2. А содержит все свои граничные точки;
3. А содержит все свои предельные точки.

**Доказательство:** Без докозательства.

В определении не сказано, что . В приведенных ниже примерах встретятся ситуации, и когда предельная точка *а* множества *А* принадлежит самому множеству *А,* и когда она не принадлежит множеству *А*.

**Теорема:** Если A - бесконечное ограниченное множество, то существует предельная точка множества A.

*(Примечание к формулировке теоремы: множество A ограниченное -это означает, что .)*

**Доказательство:** Рассмотрим отрезок . Разделим его на 2 части. Хотя бы в одну из половин отрезка входит бесконечное множество точек *A*. Возьмем полученный отрезок и тоже разделим его на 2 части. Хотя бы один из полученных отрезков тоже содержит бесконечное множество точек из *A*. Продолжим процесс деления отрезков. В итоге имеем систему стягивающихся отрезков. По теоремам эта система имеет единую для всех отрезков точку *с*. Утверждаем, что точка *c* - предельная точка множества *A*. Выберем произвольную окрестность  и в ней окрестность . После этого возьмем *n* такое, чтобы длина отрезка, равная , оказалась меньше , т.е.    .

( [ ( ) ] )

*an+1 c b n+1*

(*рис.* 5)

*x*



Так как, очевидно,  (*см. рис. 5*), и так как  содержит, по построению, бесконечное множество точек из *A*, проколотая окрестность  , также содержит бесконечное множество точек из *А.* Итак, доказано, что произвольная окрестность содержит точки из *А*. Следовательно, *с –* предельная точка множества *А*.

**Определение:** Пусть А – непустое подмножество прямой. Счётная система множеств Ui называется **покрытием** множества А, если А лежит в счётном объединении множеств Ui.

На пальцах: пример с дыркой в стене и коврами.

**Определение:** Множество называется **компактом**, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

**Лемма (Гейне-Бореля-Лебега):** Отрезок – компакт.

**Доказательство:** Предположим, что наше утверждение неверное, то есть не существует конечное подпокрытие для нашего отрезка (обозначим его I1). Делим отрезок пополам. Очевидно, что хотя бы одна из половин не имеет конечного подпокрытия, так как иначе утверждение данной леммы было бы справедливо. Обозначим этот отрезок I2. Его длина равна: |I2|=|I1/2|. И так далее… Пусть отрезок In – отрезок не допускающий конечного подпокрытия, выбранный на n-1 шаге построения. Его длина равна: |In|=|I1/2n-1|. Получим систему стягивающихся отрезков. Она имеет единственную точку с. Очевидно, что существует интервал , накрывающий эту точку. Положим . Тогда существует натуральный номер N, такой, что |IN|<. Получается, что отрезок IN полностью лежит внутри нашего интервала (а это конечное подпокрытие). Все IN не имели конечного подпокрытия. Противоречие. Теорема доказана.

**Теорема (Критерий компактности):** К – компакт тогда и только тогда, когда К – ограничено и замкнуто.

**Доказательство:** Без доказательства.