***Вопрос 11. Степенные ряды. Радиус сходимости, интервал сходимости***

**11.1. Радиус сходимости степенного ряда**

Степенным рядом называется ряд вида , (1) где числа, называемые коэффициентами ряда. Так как замена переменной  сразу приводит к ряду , имеющему несколько более простой вид, дальнейшие исследования будем проводить именно для рядов такого вида, точнее, для рядов . (2)

Прежде всего выясним вопрос о сходимости ряда (2). Очевидно, что если , то ряд (2) сходится, какими бы ни были его коэффициенты.

***Теорема 11.1. Если ряд (2) сходится, хотя бы неабсолютно, в точке , то он сходится и в любой точке , удовлетворяющей неравенству , причём сходится в этой точке абсолютно.***

◄Представим ряд (2) в виде =. Так как ряд сходится, его общий член  стремится к нулю, поэтому, начиная с некоторого , выполняются неравенства . Поскольку , сравнение с геометрической прогрессией показывает, что ряд сходится. ►

Геометрически эта теорема означает, что область сходимости ряда (2) есть промежуток числовой оси, середина которого совпадает с точкой .

Возможны следующие 2 случая. В первом из них множество абсолютных величин  точек , в которых сходится рассматриваемый ряд, ограничено сверху. Тогда существует точная верхняя грань этого множества. Эта величина называется *радиусом сходимости* степенного ряда и обозначается . Из определения следует, что если , то ряд (2) абсолютно сходится, а если , то этот ряд расходится.

Во втором случае множество абсолютных величин  точек , в которых сходится рассматриваемый ряд, не ограничено сверху. Тогда это означает, что ряд (2) абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае полагаем .

Для нахождения радиуса сходимости можно воспользоваться одной из следующих формул.

***Теорема 11.2.***

***1) Если существует ,то  ( в случае, когда , считаем , а если , то).***

***2)Если существует , то  ( в случае, когда , считаем , а если , то ).***

**Примеры.** Ряд  сходится на всей числовой прямой. Для него . Действительно, .

Радиус сходимости ряда  равен 1, так как для любого  .

Наконец, ряд  сходится только при , т.е , так как . Интервал  называется ***интервалом сходимости степенного ряда***.

Как доказано выше, во всех точках этого интервала степенной ряд абсолютно сходится. Что касается концевых точек , то ряд может в них как сходиться, так и расходиться. Приведём соответствующие примеры, в каждом из которых .Ряд , сумма геометрической прогрессии, расходится в точках . Ряд  расходится при , так как совпадает в этой точке с гармоническим рядом. Однако при  этот ряд сходится по теореме Лейбница (ряд  знакочередующийся с монотонно стремящимися к нулю модулями его членов).Наконец, ряд  абсолютно сходится в точках  по теореме сравнения (сравниваем с рядом ).