***Вопрос 12. Непрерывность степенного ряда***

***Теорема 12.1. Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию на всём интервале сходимости.***

◄***Лемма. Пусть . Тогда ряд сходится на  абсолютно и равномерно.***

◄ При  ряд сходится абсолютно, т.е. сходится ряд . Так как для любого  имеем: , из теоремы Вейерштрасса (теорема 8.4)следуют как абсолютная, так и равномерная сходимость ряда на ( впрочем, абсолютная сходимость на всём интервале  была установлена в 11.1).►

**Замечание.** Доказанная лемма не утверждает равномерной сходимости степенного ряда на его интервале сходимости. Более того, в ряде случаев равномерной сходимости на всём интервале сходимости нет. Примером служит геометрическая прогрессия , про которую в примере к теореме 8.3 было доказано, что она не сходится на  равномерно.

Продолжим доказательство теоремы. Выберем произвольную точку  и докажем, что степенной ряд непрерывен в этой точке. Для этого выберем число  так, чтобы выполнялись неравенства . По предыдущей лемме, степенной ряд равномерно сходится на отрезке . Члены степенного ряда – непрерывные функции. По следствию 2 теоремы 9.1 ряд представляет собой функцию, непрерывную на этом отрезке. Следовательно, степенной ряд является непрерывной функцией в произвольной точке .►

***Следствие. Если два степенных ряда  и  в некоторой окрестности точки  имеют одну и ту же сумму , то для всех  справедливы равенства .***

◄ В указанной окрестности выполняется равенство 

Подставляя в него , получаем  и, следовательно,

.

Разделим обе части этого равенства на , считая, что . В результате получим равенство , верное при . Просто подставить в это равенство  нельзя. Перейдём в нём к пределу при . Из непрерывности каждого из степенных рядов, стоящих в правой и левой части, следует равенство . Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что для всех  справедливы равенства . ►

***Теорема 12.2 (теорема Абеля). Если степенной ряд сходится в точке , то его сумма непрерывна слева при этом значении , т.е.***

***.* (Без доказательства)**

***Вопрос 13. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов***

***Теорема 13.1. Степенной ряд в промежутке от  до , где , можно интегрировать почленно, т.е.справедлива формула***

*** .***

**Замечание. *Значение может совпадать и с точкой , если ряд сходится в этой точке.***

◄ По лемме из п.12.1 ряд сходится на  равномерно. По следствию теоремы 10.1 получаем требуемое равенство.►

***Теорема 13.2. Степенной ряд представляет собой дифференцируемую функцию на всём интервале сходимости, кроме того, для любой точки из этого интервала***

***.***

**Замечание. *Если ряд сходится в концевой точке интервала сходимости, то в этой точке существует односторонняя производная исходного ряда и равенство сохраняется.***

◄Пусть  произвольное число из интервала сходимости. Выберем числа  так, чтобы выполнялись неравенства . Так как , ряд  сходится, поэтому его общий член имеет предел при . Следовательно, существует число  такое, что для всех  выполняется неравенство . Поэтому

 .

Ряд  сходится по признаку Даламбера, так как . Из теоремы Вейерштрасса следует, что ряд равномерно сходится на . Поэтому почленное дифференцирование исходного ряда законно и доказываемая формула верна.►

***Следствие. Обозначим . Тогда для любого натурального  существует производная функции порядка и справедливо равенство***

******

**Замечание.** Из теорем 13.1 и 13.2 вытекает, что радиусы сходимости рядов и не меньше, чем  радиус сходимости ряда . Однако эти радиусы не могут быть и больше, чем . Докажем это, например, для ряда .

◄Предположим, что радиус сходимости этого ряда равен . Продифференцируем этот ряд почленно и получим ряд . По доказанному выше, радиус сходимости  полученного ряда должен удовлетворять неравенству . Это неравенство противоречит сделанному предположению.►

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при его дифференцировании или интегрировании. Однако сходимость исходного ряда в концевой точке  , если она была, у продифференцированного ряда может пропасть, а у проинтегрированного ряда, если её не было у исходного ряда, может и появиться.

**Пример.** Ряд  сходится на [-1,1]. Однако ряд  сходится только на полуинтервале . В самом деле, его сходимость в интервале очевидна, ряд  сходится по теореме Лейбница, а ряд  расходится.

Этот же пример показывает, что у проинтегрированного ряда , т.е у ряда  , появилась сходимость в концевой точке.