

1) Покажем, что для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $f, g \in \mathcal{H}_2[0; T]$  справедливо равенство:

$$\int_0^T (\alpha f(s) + \beta g(s)) dW(s) = \alpha \int_0^T f(s) dW(s) + \beta \int_0^T g(s) dW(s) \quad (\text{п.н.}).$$

В самом деле, в силу предложения 1.1 для  $f, g \in \mathcal{H}_2[0; T]$  найдутся последовательности  $(f_n)_{n=1}^\infty, (g_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  ступенчатых процессов, для которых выполнены соотношения

$$\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E} \int_0^T (g_n(s) - g(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда согласно определению интеграла Ито:

$$\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]^2 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}[I(g) - I(g_n)]^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее, поскольку процессы  $f, g$  принадлежат  $\mathcal{H}_2[0; T]$  и являются ступенчатыми, процесс  $\alpha f + \beta g$  также принадлежит  $\mathcal{H}_2[0; T]$  и является ступенчатым. Кроме того, при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\mathbb{E} \int_0^T ((\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}[\alpha I(f_n) + \beta I(g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)]^2 \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)]^2} \leq \\ & \leq \sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)]^2} + \sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f_n + \beta g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)]^2} = \\ & = \sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)]^2} + \sqrt{\mathbb{E}[\alpha I(f_n) + \beta I(g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)]^2} \leq \\ & \leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)]^2}}_{\rightarrow 0} + |\alpha| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[I(f_n) - I(f)]^2}}_{\rightarrow 0} + |\beta| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[I(g_n) - I(g)]^2}}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\sqrt{\mathbb{E}[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)]^2} = 0$ , а значит,

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \quad (\text{п.н.}). \quad \square$$

2) Для любого  $f \in \mathcal{H}_2[0; T]$  справедливо равенство

$$\mathbb{E} \int_0^T f(s) dW(s) = 0. \quad (1.11)$$

Действительно, пусть  $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  — последовательность ступенчатых процессов, такая, что  $\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу определения стохастического интеграла  $\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда, учитывая, что для простых процессов выполнено соотношение  $\mathbb{E}I(f_n) = 0$ , получаем, что при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}I(f)|^2 &= |\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n) + \mathbb{E}I(f_n)|^2 = |\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n)|^2 = \\ &= |\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]|^2 \leq \mathbb{E}|I(f) - I(f_n)|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\mathbb{E}I(f) = 0$ .  $\square$

3) Для любого  $f \in \mathcal{H}_2[0; T]$  имеет место изометрическое свойство:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T f(s) dW(s) \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T f^2(s) ds. \quad (1.12)$$

В самом деле, пусть  $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  — последовательность ступенчатых процессов, такая, что  $\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу определения стохастического

интеграла  $\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что для простых процессов  $f_n \in \mathcal{H}_2[0; T]$  изометрическое свойство (1.12) выполнено:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T f_n(s) dW(s) \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T f_n^2(s) ds. \quad (*)$$

Далее, с одной стороны

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[I(f_n)]^2 - \mathbb{E}[I(f)]^2 \right| &= \left| \mathbb{E} \left[ [I(f_n)]^2 - [I(f)]^2 \right] \right| = \left| \mathbb{E} \left[ [I(f_n)] - [I(f)] \right] \left[ [I(f_n)] + [I(f)] \right] \right| \stackrel{\text{К-Б.}}{\leq} \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E} \left[ [I(f_n)] - [I(f)] \right]^2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sqrt{\mathbb{E} \left[ [I(f_n)] + [I(f)] \right]^2}}_{\text{огр.}} \rightarrow 0, \quad (**) \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ [I(f_n)] + [I(f)] \right]^2 &= \mathbb{E} \left[ ([I(f_n)] - [I(f)]) + 2[I(f)] \right]^2 \leq \\ &\leq 2 \underbrace{\mathbb{E} \left[ ([I(f_n)] - [I(f)])^2 \right]}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + 2 \underbrace{\mathbb{E} \left[ 2[I(f)]^2 \right]}_{\text{огр.}}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E} \int_0^T f_n^2(s) ds \rightarrow \mathbb{E} \int_0^T f^2(s) ds. \quad (***)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \int_0^T f_n^2(s) ds - \mathbb{E} \int_0^T f^2(s) ds \right| &= \left| \mathbb{E} \int_0^T (f_n^2(s) - f^2(s)) ds \right| = \\ &= \left| \mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))(f_n(s) + f(s)) ds \right| \leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sqrt{\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) + f(s))^2 ds}}_{\text{огр.}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) + f(s))^2 ds &= \mathbb{E} \int_0^T ((f_n(s) - f(s)) + 2f(s))^2 ds \leq \\ &\leq 2 \underbrace{\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + 2 \underbrace{\mathbb{E} \int_0^T (2f(s))^2 ds}_{\text{огр.}}. \end{aligned}$$

Теперь переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве (\*) и учитывая соотношения (\*\*) и (\*\*\*), получаем требуемое равенство (1.12).  $\square$

4) Если  $f \in \mathcal{H}_2[0; T]$ ,  $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds = 0,$$

то

$$\int_0^T f(s) dW(s) = \text{l.i.m.} \int_0^T f_n(s) dW(s). \quad (1.13)$$

Итак, требуется доказать, что  $\mathbb{E} \left[ (I[f] - I[f_n])^2 \right] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В самом деле, для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется простой процесс  $\bar{f}_n \in \mathcal{H}_2[0; T]$ , для которого

$$\mathbb{E} \int_0^T (\bar{f}_n(s) - f_n(s))^2 ds < 1/n. \quad (****)$$

Из условия (\*\*\*\*) (в силу изометрического свойства (1.12)) следует соотношение

$$\mathbb{E} \left[ (I(\bar{f}_n) - I(f_n))^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T (\bar{f}_n(s) - f_n(s))^2 ds < 1/n. \quad (*****)$$

Кроме того, при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\mathbb{E} \left[ (I[\bar{f}_n] - I[f])^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^T (\bar{f}_n(s) - f(s))^2 ds \leq$$

$$\leq 2 \underbrace{\mathbb{E} \int_0^T (\bar{f}_n(s) - f_n(s))^2 ds}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (*****)$$

Тогда из соотношений (\*\*\*\*\*) и (\*\*\*\*\*) получаем требуемое равенство (1.13):

$$\mathbb{E}[(I[f] - I[f_n])^2] \leq 2\mathbb{E}[(I[f] - I[\bar{f}_n])^2] + 2\mathbb{E}[(I[\bar{f}_n] - I[f_n])^2] \rightarrow 0. \quad \square$$

Кроме того, из метода построения стохастического интеграла следует, что он удовлетворяет следующему свойству: для любой  $\mathcal{F}_v$ -измеримой ограниченной случайной величины  $\xi$  при любом  $t > v$ :

$$\int_0^T \xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s) dW(s) = \xi \int_0^T \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s) dW(s) \quad (\text{п.н.}) \quad (1.14)$$

В самом деле, пусть  $\bar{f} \in \mathcal{H}_2[0; T]$  — ступенчатый процесс. Положим

$0 = s_0 < s_1 = v < \dots < s_{n-1} = t < s_n = T$ . Тогда процесс  $\mathbb{I}_{[v;t)}(s) \cdot \bar{f}(s)$  может быть записан в виде:  $\mathbb{I}_{[v;t)}(s) \cdot \bar{f}(s) = 0 \cdot \mathbb{I}_{[0;s_1)}(s) + a_1 \cdot \mathbb{I}_{[s_1;s_2)}(s) + \dots + a_{n-2} \cdot \mathbb{I}_{[s_{n-2};s_{n-1})}(s) + 0 \cdot \mathbb{I}_{[s_{n-1};T)}(s)$ , где случайные величины  $a_i$  являются  $\mathcal{F}_{s_i}$ -измеримыми и  $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$ . В свою очередь, для ограниченной  $\mathcal{F}_v$ -измеримой случайной величины  $\xi$  процесс

$$\xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) \cdot \bar{f}(s) = 0 \cdot \mathbb{I}_{[0;s_1)}(s) + \xi a_1 \cdot \mathbb{I}_{[s_1;s_2)}(s) + \dots + \xi a_{n-2} \cdot \mathbb{I}_{[s_{n-2};s_{n-1})}(s) + 0 \cdot \mathbb{I}_{[s_{n-1};T)}(s)$$

также является ступенчатым. Тогда, с одной стороны,

$$I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \cdot \bar{f}) = \\ = 0 \cdot (W(s_1) - W(0)) + \xi a_1 \cdot (W(s_2) - W(s_1)) + \dots + \xi a_{n-2} \cdot (W(s_{n-1}) - W(s_{n-2})) + 0 \cdot (W(T) - W(s_{n-1}));$$

а с другой стороны:

$$\xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} \cdot \bar{f}) = \\ = \xi (0 \cdot (W(s_1) - W(0)) + a_1 \cdot (W(s_2) - W(s_1)) + \dots + a_{n-2} \cdot (W(s_{n-1}) - W(s_{n-2})) + 0 \cdot (W(T) - W(s_{n-1}))).$$

Следовательно, для случая ступенчатого процесса  $f$  формула (1.14) доказана:

$$I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \cdot \bar{f}) = \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} \cdot \bar{f}).$$

Покажем теперь, что для любого процесса  $f \in \mathcal{H}_2[0; T]$  имеет место равенство (1.14). Для этого рассмотрим последовательность ступенчатых процессов  $(\bar{f}_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$ , для которой

$$\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7^*)$$

Ясно, что в этом случае последовательность  $(\mathbb{I}_{[v;t)} \bar{f}_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  и

$$\mathbb{E} \int_0^T (\mathbb{I}_{[v;t)}(s) f_n(s) - \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s))^2 ds = \\ = \mathbb{E} \int_0^T \mathbb{I}_{[v;t)}(s) (f_n(s) - f(s))^2 ds \leq \mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8^*)$$

Из условий  $(\mathbb{I}_{[v;t)} \bar{f}_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  и (8\*), а также из построения интеграла Ито следует, что

$$\mathbb{E}[(I(\mathbb{I}_{[v;t)} \bar{f}_n) - I(\mathbb{I}_{[v;t)} f))^2] \rightarrow 0. \quad (9^*)$$

Последовательность процессов  $(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \bar{f}_n)_{n=1}^\infty$  также принадлежит множеству  $\mathcal{H}_2[0; T]$  и, учитывая ограниченность случайной величины  $|\xi| \leq C$ , имеет место сходимость

$$\mathbb{E} \int_0^T (\xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f_n(s) - \xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s))^2 ds = \\ = \mathbb{E} \int_0^T \xi^2 \mathbb{I}_{[v;t)}(s) (f_n(s) - f(s))^2 ds \leq C^2 \mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (10^*)$$

Аналогично, из условий  $(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \bar{f}_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}_2[0; T]$  и (10\*), а также из построения интеграла Ито следует, что

$$\mathbb{E}[(\xi I(\mathbb{I}_{[v;t]}\bar{f}_n) - I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}f))^2] \rightarrow 0. \quad (11^*)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}f) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t]}f))^2] &\leq \\ &\leq 2 \underbrace{\mathbb{E}[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}f) - I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}\bar{f}_n))^2]}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}\bar{f}_n) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t]}f))^2]}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\mathbb{E}[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}f) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t]}f))^2] = 0$ , а значит,  $I(\xi \mathbb{I}_{[v;t]}f) = \xi I(\mathbb{I}_{[v;t]}f)$  (п.н).

□

Стр. 145

## § 7. Стохастические дифференциальные уравнения

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство, на котором задано броуновское движение  $W(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , с  $W(0) = x$ , и независимая от него случайная величина  $\xi$ . Пусть  $\mathcal{F}_t := \sigma(\xi, W(s), 0 \leq s \leq t)$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной  $\xi$  и броуновским движением на интервале  $[0; t]$ .

Пусть  $a(t, x)$  и  $b(t, x)$ ,  $t \in [0; T]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , — измеримые функции.

Говорят, что процесс  $X(t)$ ,  $t \in [0; T]$ ,  $X(0) = \xi$ , является *сильным решением* стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = \xi, \quad (7.1)$$

если  $X$  — непрерывный  $\mathcal{F}_t$ -согласованный процесс и с вероятностью единица для всех  $t \in [0; T]$ :

$$\int_0^t (|a(s, X(s))| + b^2(s, X(s))) ds < \infty, \quad (7.2)$$

$$X(t) = \xi + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s). \quad (7.3)$$

Заметим, что, в силу (7.2), интегралы в (7.3) корректно определены.

### 1. Существование и единственность решения.

**Теорема 7.1.** Предположим, что функции  $a$  и  $b$  удовлетворяют *глобальному условию Липшица*: существует такая константа  $C_T$ , что для всех  $t \in [0; T]$  и любых  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C_T |x - y|, \quad (7.4)$$

и условию ограниченности на рост: для всех  $t \in [0; T]$  и любых  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C_T (1 + |x|). \quad (7.5)$$

Пусть также  $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$ .

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (7.1) имеет сильное решение, удовлетворяющее условию

$$\sup_{t \in [0; T]} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty. \quad (7.6)$$

**Доказательство. (Единственность)** Предположим, что существуют два непрерывных решения, удовлетворяющие (7.3) и (7.6), т. е.

$$X_l(t) = \xi + \int_0^t a(s, X_l(s)) ds + \int_0^t b(s, X_l(s)) dW(s), \quad \sup_{t \in [0; T]} \mathbb{E}[X_l^2(t)] < \infty, \quad l = 1, 2.$$

Тогда, используя неравенство  $(g + h)^2 \leq 2g^2 + 2h^2$ , получаем:

$$\mathbb{E}[(X_1(t) - X_2(t))^2] \leq$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))) ds\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s))) dW(s)\right)^2\right]. \quad (1^*)$$

Применим для оценки первого слагаемого неравенство Коши–Буняковского, а для второго — изометрическое свойство (1.12). Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))) ds\right)^2\right] &\stackrel{\text{К.-Б.}}{\leq} \mathbb{E}\left[\int_0^t 1^2 ds \cdot \int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 ds\right] = \\ &= t\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 ds\right]; \end{aligned} \quad (2^*)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s))) dW(s)\right)^2\right] \stackrel{(1.12)}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))^2 ds\right]. \quad (3^*)$$

Из (1\*)–(3\*) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X_1(t) - X_2(t))^2\right] &\leq \\ &\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))^2 ds\right] \leq \\ &\leq 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 ds\right] + 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))^2 ds\right] = \\ &\leq 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t \{(a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 + (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))^2\} ds\right]. \end{aligned} \quad (4^*)$$

Для продолжения оценивания в соотношении (4\*) нам потребуется соотношение:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)))^2 + (b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))^2} &\leq \\ &|a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))| + |b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s))| \stackrel{(7.4)}{\leq} C_T |X_1(s) - X_2(s)|. \end{aligned} \quad (5^*)$$

Тогда из (4\*) и (5\*) получаем оценку:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X_1(t) - X_2(t))^2\right] &\leq 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t \{C_T |X_1(s) - X_2(s)|\}^2 ds\right] = \\ &= \underbrace{2(T+1)C_T^2}_{L:=} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X_1(s) - X_2(s))^2 ds\right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Теперь нам потребуется лемма Гронуолла.

**Лемма 7.1 (Гронуолла).** Пусть  $g(t)$  и  $h(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , — измеримые ограниченные функции, и пусть при некотором  $K > 0$  и всех  $t \in [0; T]$ :

$$g(t) \leq h(t) + K \int_0^t g(s) ds. \quad (1^*)$$

Тогда

$$g(t) \leq \underbrace{h(t) + K \int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds}_{\psi(t):=}, \quad t \in [0; T]. \quad (7.8)$$

Если  $h$  монотонно возрастает, то

$$g(t) \leq h(t)e^{Kt}, \quad t \in [0; T]. \quad (7.9)$$

**Доказательство.** Положим

$$\psi(t) := h(t) + K \int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds, \quad (2^*)$$

$$\Delta(t) := \psi(t) - g(t),$$

и заметим, что  $\Delta(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , — ограниченная функция. Это следует из ограниченности функций  $g$  и  $h$  ( $|g(t)| \leq M$ ,  $|h(t)| \leq M$ ) и неравенства:

$$|\Delta(t)| = |\psi(t) - g(t)| = \left| h(t) + K \int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds - g(t) \right| \leq \underbrace{|h(t)|}_{\leq M} + K \int_0^t e^{K(t-s)} \underbrace{|h(s)|}_{\leq M} ds + \underbrace{|g(t)|}_{\leq M}.$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds \right)' &= \left( e^{Kt} \int_0^t e^{-Ks} h(s) ds \right)' = \\ &= K e^{Kt} \int_0^t e^{-Ks} h(s) ds + e^{Kt} e^{-Kt} h(t) = \\ &= K \int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds + h(t) =: \psi(t), \end{aligned}$$

то

$$\int_0^t e^{K(t-s)} h(s) ds = \int_0^t \psi(s) ds. \quad (3^*)$$

Тогда, в силу (2\*) и (3\*), имеем

$$\psi(t) = h(t) + K \int_0^t \psi(s) ds. \quad (4^*)$$

Условие (1\*) равносильно неравенству

$$-g(t) \geq -h(t) - K \int_0^t g(s) ds. \quad (5^*)$$

Складывая (4\*) и (5\*), а также учитывая определение функции  $\Delta(t)$ , получаем:

$$\Delta(t) \geq K \int_0^t \Delta(s) ds. \quad (6^*)$$

Поскольку  $K > 0$ , то, продолжая оценивание с учетом неравенства (6\*), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &\geq K \int_0^t \Delta(s) ds \stackrel{(6^*)}{\geq} K \int_0^t \left( K \int_0^s \Delta(u) du \right) ds = K^2 \int_0^t \left( \int_0^s \Delta(u) du \right) ds = \\ &\quad \{\text{изменим порядок интегрирования}\} \\ &= K^2 \int_0^t \left( \int_u^t \Delta(u) ds \right) du = K^2 \int_0^t (t-u) \cdot \Delta(u) du \geq \\ &\geq K^2 \int_0^t (t-u) \cdot \left( K \int_0^u \Delta(s) ds \right) du = K^3 \int_0^t \left( \int_0^u (t-u) \Delta(s) ds \right) du = \\ &\quad \{\text{изменим порядок интегрирования}\} \\ &= K^3 \int_0^t \left( \int_s^t (t-u) \Delta(s) du \right) ds = K^3 \int_0^t \left( \Delta(s) \cdot \frac{-(t-u)^2}{2} \Big|_{u=s}^{u=t} \right) ds = \\ &= K^3 \int_0^t \left( \Delta(s) \cdot \frac{(t-s)^2}{2} \right) ds \geq \dots \geq \frac{K^{n+1}}{n!} \int_0^t (t-s)^n \Delta(s) ds. \end{aligned}$$

Выражение в правой части стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому  $\Delta(t) \geq 0$ ,  $t \in [0; T]$ , и, следовательно, выполнено (7.8):  $\psi(t) - g(t) = \Delta(t) \geq 0$ .

Для монотонно возрастающей функции  $h$  неравенство (7.9) является простым следствием (7.8), так как

$$\begin{aligned} g(t) &\leq h(t) + K \int_0^t e^{K(t-s)} \underbrace{h(s)}_{\leq h(t)} ds \leq h(t) + K \int_0^t e^{K(t-s)} \underbrace{h(t)}_{\leq h(t)} ds \leq \\ &\leq h(t) + h(t) K \int_0^t e^{K(t-s)} ds = h(t) + h(t) K \left[ \frac{e^{K(t-s)}}{-K} \Big|_{s=0}^{s=t} \right] = \\ &= h(t) + h(t) K \left[ -\frac{1}{K} + \frac{e^{Kt}}{K} \right] = h(t) - h(t) + h(t) e^{Kt} = h(t) e^{Kt}. \quad \square \end{aligned}$$