1) Покажем, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{H}_2[0;T]$ справедливо равенство:

$$\int_0^T (\alpha f(s) + \beta g(s))\, dW(s) = \alpha \int_0^T f(s)\, dW(s) + \beta \int_0^T g(s)\, dW(s) \quad \text{(п.н.)}.$$

В самом деле, в силу предложения 1.1 для $f, g \in \mathcal{H}_2[0;T]$ найдутся последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ ступенчатых процессов, для которых выполнены соотношения

$$\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\int_0^T (g_n(s) - g(s))^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда согласно определению интеграла Ито:

$$\mathbb{E}\big[I(f) - I(f_n)\big]^2 \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\big[I(g) - I(g_n)\big]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, поскольку процессы f, g принадлежат $\mathcal{H}_2[0;T]$ и являются ступенчатыми, процесс $\alpha f + \beta g$ также принадлежит $\mathcal{H}_2[0;T]$ и является ступенчатым. Кроме того, при $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\int_0^T \big((\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)\big)^2\, ds \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\big[I(\alpha f_n + \beta g_n) - I(\alpha f + \beta g)\big]^2 \to 0.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} \le$$

$$\le \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2} + \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f_n + \beta g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} =$$

$$= \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2} + \sqrt{\mathbb{E}\big[\alpha I(f_n) + \beta I(g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} \le$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2}}_{\to 0} + |\alpha| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(f_n) - I(f)\big]^2}}_{\to 0} + |\beta| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(g_n) - I(g)\big]^2}}_{\to 0}.$$

Следовательно, $\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} = 0$, а значит,

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \text{ (п.н.).} \quad \square$$

2) Для любого $f \in \mathcal{H}_2[0;T]$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}\int_0^T f(s)\, dW(s) = 0. \tag{1.11}$$

Действительно, пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ — последовательность ступенчатых процессов, такая, что $\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0$ при $n \to \infty$. В силу определения стохастического интеграла $\mathbb{E}\big[I(f) - I(f_n)\big]^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, учитывая, что для простых процессов выполнено соотношение $\mathbb{E}I(f_n) = 0$, получаем, что при $n \to \infty$:

$$\big|\mathbb{E}I(f)\big|^2 = \big|\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n) + \mathbb{E}I(f_n)\big|^2 = \big|\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n)\big|^2 =$$

$$= \big|\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]\big|^2 \le \mathbb{E}\big|I(f) - I(f_n)\big|^2 \to 0.$$

Следовательно, $\mathbb{E}I(f) = 0$. $\square$

3) Для любого $f \in \mathcal{H}_2[0;T]$ имеет место изометрическое свойство:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(s)\, dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\, ds. \tag{1.12}$$

В самом деле, пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ — последовательность ступенчатых процессов, такая, что $\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0$ при $n \to \infty$. В силу определения стохастического интеграла $\mathbb{E}\left[I(f)-I(f_n)\right]^2 \to 0$ при $n\to\infty$. Заметим, что для простых процессов $f_n \in \mathcal{H}_2[0;T]$ изометрическое свойство (1.12) выполнено:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f_n(s)\,dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds\,. \tag{*}$$

Далее, с одной стороны

$$\left|\mathbb{E}[I(f_n)]^2-\mathbb{E}[I(f)]^2\right| = \left|\mathbb{E}\left[[I(f_n)]^2-[I(f)]^2\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[[I(f_n)]-[I(f)]\right]\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]\right| \overset{\text{К.–Б.}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\left[[I(f_n)]-[I(f)]\right]^2}}_{\to 0}\,\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]^2}}_{\text{огр.}} \to 0, \tag{**}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\mathbb{E}\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]^2 = \mathbb{E}\left[([I(f_n)]-[I(f)])+2[I(f)]\right]^2 \le$$

$$\le 2\underbrace{\mathbb{E}\left[([I(f_n)]-[I(f)])^2\right]}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + 2\underbrace{\mathbb{E}\left[2[I(f)]^2\right]}_{\text{огр.}}.$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds \to \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\,ds\,. \tag{***}$$

Действительно,

$$\left|\mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds-\mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\,ds\right| = \left|\mathbb{E}\int_0^T (f_n^2(s)-f^2(s))\,ds\right| =$$

$$= \left|\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))((f_n(s)+f(s)))\,ds\right| \le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds}}_{\to 0}\,\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)+f(s))^2\,ds}}_{\text{огр.}} \to 0\,,$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)+f(s))^2\,ds = \mathbb{E}\int_0^T ((f_n(s)-f(s))+2f(s))^2\,ds \le$$

$$\le 2\underbrace{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + \underbrace{2\mathbb{E}\int_0^T (2f(s))^2\,ds}_{\text{огр.}}.$$

Теперь переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (*) и учитывая соотношения (**) и (***), получаем требуемое равенство (1.12).