Лемма 4.4. Пусть функция $f \in \mathfrak{M}_T$. Тогда найдется последовательность простых функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega) - f_n(t,\omega)]^2\, dt \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.39}$$

Доказательство. а) Прежде всего заметим, что без ограничения общности можно считать функцию $f(t,\omega)$ ограниченной, $|f(t,\omega)| \le C < \infty$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$. (В противном случае можно перейти от $f(t,\omega)$ к функции $f^{(N)}(t,\omega) := f(t,\omega) \cdot \mathbb{I}_{\{(t,\omega):|f(t,\omega)| \le N\}}(t,\omega)$ и использовать то, что $\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega) - f^{(N)}(t,\omega)]^2\, dt \to 0$ при $N \to \infty$.[1]) Далее, если $T = \infty$, то сразу можно считать, что функция $f(t,\omega)$ финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторого конечного интервала.[2]

Итак, пусть $|f(t,\omega)| \le C < \infty$ и $T < \infty$.

б) Если функция $f(t,\omega)$ непрерывна по t $\mathbb{P}$-(п.н.), то последовательность простых функций строится просто. Например, можно положить

$$f_n(t,\omega) = f(0,\omega) \cdot \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{kT}{n},\omega) \cdot \mathbb{I}_{\left(\frac{kT}{n};\frac{(k+1)T}{n}\right]}(t).$$

В силу равномерной непрерывности по $t \in [0;T]$ функции $f(t,\omega)$ (которая вытекает из непрерывности функции $f(t,\omega)$ на отрезке $[0;T]$ и теоремы Кантора) при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\sup_{t\in[0;T]} |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 = \max_{k=0,\ldots,n-1} \sup_{t\in\left(\frac{kT}{n};\frac{(k+1)T}{n}\right]} |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 =$$

$$= \max_{k=0,\ldots,n-1} \sup_{t\in\left(\frac{kT}{n};\frac{(k+1)T}{n}\right]} |f(\tfrac{kT}{n},\omega) - f(t,\omega)|^2 \le \max_{k=0,\ldots,n-1} \sup_{t\in\left[\frac{kT}{n};\frac{(k+1)T}{n}\right]} |f(\tfrac{kT}{n},\omega) - f(t,\omega)|^2 \to 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^T |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2\, dt \le \sup_{t\in[0;T]} |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 \cdot T \to 0. \tag{*}$$

Кроме того, в силу $|f(t,\omega)| \le C < \infty$ и определения функций $f_n(t,\omega)$ имеем $|f_n(t,\omega)| \le C$, а значит,

$$\int_0^T |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2\, dt \le 2\int_0^T |f_n(t,\omega)|^2\, dt + 2\int_0^T |f(t,\omega)|^2\, dt = 2C^2T + 2C^2T = 4C^2T. \tag{**}$$

Тогда из условий (*), (**) и $\mathbb{E}[4C^2T] < \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем соотношение (4.39): $\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega) - f_n(t,\omega)]^2\, dt \to 0$, $n \to \infty$.

---

[1] $\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega) - f^{(N)}(t,\omega)]^2\, dt = \mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{\{(t,\omega):|f(t,\omega)|>N\}}(t,\omega)dt \to 0$ при $N \to \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, так как $[f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{\{(t,\omega):|f(t,\omega)|>N\}}(t,\omega) \to 0$ при $N \to \infty$, $\left|[f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{\{(t,\omega):|f(t,\omega)|>N\}}(t,\omega)\right| \le [f(t,\omega)]^2$ и $\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega)]^2 dt < \infty$, т.е. $[f(t,\omega)]^2$ — интегрируемая мажоранта.

[2] $\mathbb{E}\int_0^\infty [f(t,\omega) - f(t,\omega) \cdot \mathbb{I}_{[0;T]\times\Omega}(t,\omega)]^2\, dt = \mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{(T;\infty)\times\Omega}(t,\omega)dt \to 0$ при $T \to \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, так как $[f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{(T;\infty)\times\Omega}(t,\omega)dt \to 0$ при $T \to \infty$, $\left|[f(t,\omega)]^2 \cdot \mathbb{I}_{(T;\infty)\times\Omega}(t,\omega)\right| \le [f(t,\omega)]^2$ и $\mathbb{E}\int_0^T [f(t,\omega)]^2 dt < \infty$, т.е. $[f(t,\omega)]^2$ — интегрируемая мажоранта.

в) Если функция $f(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измерима, то построить последовательность аппроксимирующих функций можно следующим образом. Пусть $F(t,\omega) := \int_0^t f(s,\omega)ds$, где интеграл понимается как интеграл Лебега. В силу прогрессивной измеримости функций $f(s,\omega)$ процесс $F(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, измерим и при каждом t случайные величины $F(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t$- измеримы.

Положим

$$\tilde{f}_m(t,\omega) := m\int_{(t-\frac{1}{m})\vee 0}^{t} f(s,\omega)ds \left(= \frac{F(t,\omega) - F((t-\frac{1}{m})\vee 0,\omega)}{1/m} \right).$$

Случайный процесс $\tilde{f}_m(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, измерим, является неупреждающим и имеет $\mathbb{P}$-(п.н.) непрерывные траектории. Поэтому согласно пункту б) для каждого m существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $\tilde{f}_{m,n}(t,\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\mathbb{E}\int_0^T [\tilde{f}_m(t,\omega) - \tilde{f}_{m,n}(t,\omega)]^2 dt \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Поскольку $\mathbb{P}$-(п.н.) функция $F(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega)ds$ является интегралом Лебега с переменным верхним пределом для почти всех $t \le T$ существует производная $F'(t,\omega)$ и $F'(t,\omega) = f(t,\omega)$ (см. Колмогоров, Фомин, изд. 7, теорема 1, § 3, гл. 6, стр. 356). С другой стороны, в тех точках, где производная $F'(t,\omega)$ существует, справедливо равенство

$$F'(t,\omega) = \lim_{m\to\infty} \frac{F(t,\omega) - F((t-\frac{1}{m})\vee 0,\omega)}{1/m} = \lim_{m\to\infty} \tilde{f}_m(t,\omega).$$

Поэтому для почти всех (t,ω) (по мере $dt \times d\mathbb{P}$) $\lim_{m\to\infty} \tilde{f}_m(t,\omega) = f(t,\omega)$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty}[\tilde{f}_m(t,\omega) - f(t,\omega)]^2 = 0$ для почти всех (t,ω) (по мере $dt \times d\mathbb{P}$). Кроме того,

$$[\tilde{f}_m(t,\omega) - f(t,\omega)]^2 \le 2[\tilde{f}_m(t,\omega)]^2 + 2[f(t,\omega)]^2 \le 2C^2 + 2C^2 = 4C^2.$$

Здесь мы воспользовались оценками $|f(t,\omega)| \le C < \infty$ и

$$|\tilde{f}_m(t,\omega)| = m\left|\int_{(t-\frac{1}{m})\vee 0}^{t} f(s,\omega)ds\right| \le m\int_{(t-\frac{1}{m})\vee 0}^{t} \underbrace{|f(s,\omega)|}_{\le C} ds \le mC\tfrac{1}{m} = C.$$

Значит, последовательность $[\tilde{f}_m(t,\omega) - f(t,\omega)]^2$, $m = 1, 2, \dots$, имеет интегрируемую мажоранту, и поэтому по тереме Лебега $\mathbb{E}\int_0^T [\tilde{f}_m(t,\omega) - f(t,\omega)]^2 dt \to 0$ при $m \to \infty$. Этим утверждение леммы доказано в случае, когда функция $f(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измерима.

г) … □