Стр. 103

1) Покажем, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{H}_2[0;T]$ справедливо равенство:

$$\int_0^T (\alpha f(s) + \beta g(s))\, dW(s) = \alpha \int_0^T f(s)\, dW(s) + \beta \int_0^T g(s)\, dW(s) \quad \text{(п.н.)}.$$

В самом деле, в силу предложения 1.1 для $f, g \in \mathcal{H}_2[0;T]$ найдутся последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ ступенчатых процессов, для которых выполнены соотношения

$$\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\int_0^T (g_n(s) - g(s))^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда согласно определению интеграла Ито:

$$\mathbb{E}\big[I(f) - I(f_n)\big]^2 \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\big[I(g) - I(g_n)\big]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, поскольку процессы f, g принадлежат $\mathcal{H}_2[0;T]$ и являются ступенчатыми, процесс $\alpha f + \beta g$ также принадлежит $\mathcal{H}_2[0;T]$ и является ступенчатым. Кроме того, при $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\int_0^T \big((\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)\big)^2\, ds \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\big[I(\alpha f_n + \beta g_n) - I(\alpha f + \beta g)\big]^2 \to 0.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} \le$$

$$\le \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2} + \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f_n + \beta g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} =$$

$$= \sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2} + \sqrt{\mathbb{E}\big[\alpha I(f_n) + \beta I(g_n) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} \le$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - I(\alpha f_n + \beta g_n)\big]^2}}_{\to 0} + |\alpha| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(f_n) - I(f)\big]^2}}_{\to 0} + |\beta| \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\big[I(g_n) - I(g)\big]^2}}_{\to 0}.$$

Следовательно, $\sqrt{\mathbb{E}\big[I(\alpha f + \beta g) - \alpha I(f) - \beta I(g)\big]^2} = 0$, а значит,

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \ \text{(п.н.)}. \ \square$$

2) Для любого $f \in \mathcal{H}_2[0;T]$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}\int_0^T f(s)\, dW(s) = 0. \tag{1.11}$$

Действительно, пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ — последовательность ступенчатых процессов, такая, что $\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0$ при $n \to \infty$. В силу определения стохастического интеграла $\mathbb{E}\big[I(f) - I(f_n)\big]^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, учитывая, что для простых процессов выполнено соотношение $\mathbb{E}I(f_n) = 0$, получаем, что при $n \to \infty$:

$$\big|\mathbb{E}I(f)\big|^2 = \big|\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n) + \mathbb{E}I(f_n)\big|^2 = \big|\mathbb{E}I(f) - \mathbb{E}I(f_n)\big|^2 =$$

$$= \big|\mathbb{E}[I(f) - I(f_n)]\big|^2 \le \mathbb{E}\big|I(f) - I(f_n)\big|^2 \to 0.$$

Следовательно, $\mathbb{E}I(f) = 0$. $\square$

3) Для любого $f \in \mathcal{H}_2[0;T]$ имеет место изометрическое свойство:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(s)\, dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\, ds. \tag{1.12}$$

В самом деле, пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ — последовательность ступенчатых процессов, такая, что $\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2\, ds \to 0$ при $n \to \infty$. В силу определения стохастического интеграла $\mathbb{E}\left[I(f)-I(f_n)\right]^2 \to 0$ при $n\to\infty$. Заметим, что для простых процессов $f_n \in \mathcal{H}_2[0;T]$ изометрическое свойство (1.12) выполнено:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f_n(s)\,dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds\,. \qquad (*)$$

Далее, с одной стороны

$$\left|\mathbb{E}[I(f_n)]^2-\mathbb{E}[I(f)]^2\right| = \left|\mathbb{E}\left[[I(f_n)]^2-[I(f)]^2\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[[I(f_n)]-[I(f)]\right]\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]\right| \overset{\text{К.–Б.}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\left[[I(f_n)]-[I(f)]\right]^2}}_{\to 0}\,\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]^2}}_{\text{огр.}} \to 0\,, \qquad (**)$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\mathbb{E}\left[[I(f_n)]+[I(f)]\right]^2 = \mathbb{E}\left[([I(f_n)]-[I(f)])+2[I(f)]\right]^2 \le$$

$$\le 2\,\underbrace{\mathbb{E}\left[([I(f_n)]-[I(f)])^2\right]}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + 2\,\underbrace{\mathbb{E}\left[2[I(f)]^2\right]}_{\text{огр.}}.$$

С другой стороны,

$$\mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds \to \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\,ds\,. \qquad (***)$$

Действительно,

$$\left|\mathbb{E}\int_0^T f_n^2(s)\,ds - \mathbb{E}\int_0^T f^2(s)\,ds\right| = \left|\mathbb{E}\int_0^T (f_n^2(s)-f^2(s))\,ds\right| =$$

$$= \left|\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))((f_n(s)+f(s)))\,ds\right| \le \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds}}_{\to 0}\,\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)+f(s))^2\,ds}}_{\text{огр.}} \to 0\,,$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)+f(s))^2\,ds = \mathbb{E}\int_0^T ((f_n(s)-f(s))+2f(s))^2\,ds \le$$

$$\le 2\,\underbrace{\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds}_{\text{огр., т.к. сходится к нулю}} + \underbrace{2\mathbb{E}\int_0^T (2f(s))^2\,ds}_{\text{огр.}}\,.$$

Теперь переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (*) и учитывая соотношения (**) и (***), получаем требуемое равенство (1.12). □

4) Если $f\in\mathcal{H}_2[0;T]$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{H}_2[0;T]$ и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds = 0\,,$$

то

$$\int_0^T f(s)\,dW(s) = \mathrm{l.i.m.}\int_0^T f_n(s)\,dW(s)\,. \qquad (1.13)$$

Итак, требуется доказать, что $\mathbb{E}\left[(I[f]-I[f_n])^2\right]\to 0$ при $n\to\infty$. В самом деле, для любого $n\in\mathbb{N}$ найдется простой процесс $\overline{f}_n\in\mathcal{H}_2[0;T]$, для которого

$$\mathbb{E}\int_0^T (\overline{f}_n(s)-f_n(s))^2\,ds < 1/n\,. \qquad (****)$$

Из условия (****) (в силу изометрического свойства (1.12)) следует соотношение

$$\mathbb{E}\left[\left(I(\overline{f}_n)-I(f_n)\right)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^T (\overline{f}_n(s)-f_n(s))^2\,ds < 1/n\,. \qquad (*****)$$

Кроме того, при $n\to\infty$:

$$\mathbb{E}\left[(I[\overline{f}_n]-I[f])^2\right] = \mathbb{E}\int_0^T (\overline{f}_n(s)-f(s))^2\,ds \le$$

$$\le 2\,\mathbb{E}\underbrace{\int_0^T (\overline{f}_n(s)-f_n(s))^2\,ds}_{<1/n\to 0} + 2\,\mathbb{E}\underbrace{\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds}_{\to 0} \to 0\,. \qquad (******)$$

Тогда из соотношений (*****) и (******) получаем требуемое равенство (1.13):

$$\mathbb{E}\Big[(I[f]-I[f_n])^2\Big] \le 2\mathbb{E}\Big[(I[f]-I[\overline{f}_n])^2\Big] + 2\mathbb{E}\Big[(I[\overline{f}_n]-I[f_n])^2\Big] \to 0\,. \ \square$$

Кроме того, из метода построения стохастического интеграла следует, что он удовлетворяет следующему свойству: для любой $\mathcal{F}_v$- измеримой ограниченной случайной величины ξ при любом $t > v$:

$$\int_0^T \xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s)\,dW(s) = \xi \int_0^T \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s)\,dW(s) \quad \text{(п.н.)} \qquad (1.14)$$

В самом деле, пусть $\overline{f} \in \mathcal{H}_2[0;T]$ — ступенчатый процесс. Положим $0 = s_0 < s_1 = v < \ldots < s_{n-1} = t < s_n = T$. Тогда процесс $\mathbb{I}_{[v;t)}(s)\cdot \overline{f}(s)$ может быть записан в виде: $\mathbb{I}_{[v;t)}(s)\cdot \overline{f}(s) = 0\cdot \mathbb{I}_{[0;s_1)}(s) + a_1\cdot \mathbb{I}_{[s_1;s_2)}(s) + \ldots + a_{n-2}\cdot \mathbb{I}_{[s_{n-2};s_{n-1})}(s) + 0\cdot \mathbb{I}_{[s_{n-1};T)}(s)$, где случайные величины a_i являются $\mathcal{F}_{s_i}$- измеримыми и $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$. В свою очередь, для ограниченной $\mathcal{F}_v$- измеримой случайной величины ξ процесс

$$\xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s)\cdot \overline{f}(s) = 0\cdot \mathbb{I}_{[0;s_1)}(s) + \xi a_1\cdot \mathbb{I}_{[s_1;s_2)}(s) + \ldots + \xi a_{n-2}\cdot \mathbb{I}_{[s_{n-2};s_{n-1})}(s) + 0\cdot \mathbb{I}_{[s_{n-1};T)}(s)$$

также является ступенчатым. Тогда, с одной стороны,

$I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)}\cdot \overline{f}) =$

$= 0\cdot (W(s_1)-W(0)) + \xi a_1\cdot (W(s_2)-W(s_1)) + \ldots + \xi a_{n-2}\cdot (W(s_{n-1})-W(s_{n-2})) + 0\cdot (W(T)-W(s_{n-1}))$;

а с другой стороны:

$\xi I(\mathbb{I}_{[v;t)}\cdot \overline{f}) =$

$= \xi\big(0\cdot (W(s_1)-W(0)) + a_1\cdot (W(s_2)-W(s_1)) + \ldots + a_{n-2}\cdot (W(s_{n-1})-W(s_{n-2})) + 0\cdot (W(T)-W(s_{n-1}))\big)$.

Следовательно, для случая ступенчатого процесса f формула (1.14) доказана:

$I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)}\cdot \overline{f}) = \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)}\cdot \overline{f})$.

Покажем теперь, что для любого процесса $f \in \mathcal{H}_2[0;T]$ имеет место равенство (1.14). Для этого рассмотрим последовательность ступенчатых процессов $(\overline{f}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$, для которой

$$\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds \to 0 \ \text{при} \ n\to\infty\,. \qquad (7^*)$$

Ясно, что в этом случае последовательность $(\mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ и

$$\mathbb{E}\int_0^T (\mathbb{I}_{[v;t)}(s) f_n(s) - \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s))^2\,ds =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{I}_{[v;t)}(s)(f_n(s)-f(s))^2\,ds \le \mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds \to 0 \ \text{при} \ n\to\infty\,. \qquad (8^*)$$

Из условий $(\mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ и (8*), а также из построения интеграла Ито следует, что

$$\mathbb{E}[(I(\mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n) - I(\mathbb{I}_{[v;t)}f))^2] \to 0\,. \qquad (9^*)$$

Последовательность процессов $(\xi \mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ также принадлежит множеству $\mathcal{H}_2[0;T]$ и, учитывая ограниченность случайной величины $|\xi| \le C$, имеет место сходимость

$$\mathbb{E}\int_0^T (\xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f_n(s) - \xi \mathbb{I}_{[v;t)}(s) f(s))^2\,ds =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T \xi^2 \mathbb{I}_{[v;t)}(s)(f_n(s)-f(s))^2\,ds \le C^2\mathbb{E}\int_0^T (f_n(s)-f(s))^2\,ds \to 0 \ \text{при} \ n\to\infty\,. \qquad (10^*)$$

Аналогично, из условий $(\xi \mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2[0;T]$ и (10*), а также из построения интеграла Ито следует, что

$$\mathbb{E}[(\xi I(\mathbb{I}_{[v;t)}\overline{f}_n) - I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} f))^2] \to 0 . \qquad (11^*)$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\Big[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} f) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} f))^2\Big] \le$$

$$\le 2\underbrace{\mathbb{E}\Big[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} f) - I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \overline{f}_n))^2\Big]}_{\to 0} + 2\underbrace{\mathbb{E}\Big[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} \overline{f}_n) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} f))^2\Big]}_{\to 0} \to 0 ,$$

откуда следует, что $\mathbb{E}\Big[(I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} f) - \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} f))^2\Big] = 0$, а значит, $I(\xi \mathbb{I}_{[v;t)} f) = \xi I(\mathbb{I}_{[v;t)} f)$ (п.н).
□

Стр. 145

§ 7. Стохастические дифференциальные уравнения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, на котором задано броуновское движение $W(t)$, $t \in [0;T]$, с $W(0) = x$, и независящая от него случайная величина ξ. Пусть $\mathcal{F}_t := \sigma(\xi, W(s), 0 \le s \le t)$ — наименьшая σ - алгебра, порожденная случайной величиной ξ и броуновским движением на интервале $[0;t]$.

Пусть $a(t,x)$ и $b(t,x)$, $t \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}$, — измеримые функции.

Говорят, что процесс $X(t)$, $t \in [0;T]$, $X(0) = \xi$, является *сильным решением* стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dW(t) , \qquad X(0) = \xi , \qquad (7.1)$$

если X — непрерывный $\mathcal{F}_t$ - согласованный процесс и с вероятностью единица для всех $t \in [0;T]$:

$$\int_0^t (|\,a(s, X(s))\,| + b^2(s, X(s)))\,ds < \infty , \qquad (7.2)$$

$$X(t) = \xi + \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s))\,dW(s) . \qquad (7.3)$$

Заметим, что, в силу (7.2), интегралы в (7.3) корректно определены.

1. Существование и единственность решения.

Теорема 7.1. Предположим, что функции a и b удовлетворяют *глобальному условию Липшица*: существует такая константа C_T, что для всех $t \in [0;T]$ и любых $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\,a(t,x) - a(t,y)\,| + |\,b(t,x) - b(t,y)\,| \le C_T\,|\,x - y\,| , \qquad (7.4)$$

и условию ограниченности на рост: для всех $t \in [0;T]$ и любых $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\,a(t,x)\,| + |\,b(t,x)\,| \le C_T (1 + |\,x\,|) . \qquad (7.5)$$

Пусть также $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$.

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (7.1) имеет сильное решение, удовлетворяющее условию

$$\sup_{t \in [0;T]} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty . \qquad (7.6)$$

Доказательство. (Единственность) Предположим, что существуют два непрерывных решения, удовлетворяющие (7.3) и (7.6), т. е.

$$X_l(t) = \xi + \int_0^t a(s, X_l(s))\,ds + \int_0^t b(s, X_l(s))\,dW(s) , \quad \sup_{t \in [0;T]} \mathbb{E}[X_l^2(t)] < \infty , \qquad l = 1,2 .$$

Тогда, используя неравенство $(g+h)^2 \le 2g^2 + 2h^2$, получаем:

$$\mathbb{E}\Big[(X_1(t) - X_2(t))^2\Big] \le$$

$$\le 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))\,ds\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))\,dW(s)\right)^2\right]. \qquad (1^*)$$

Применим для оценки первого слагаемого неравенство Коши–Буняковского, а для второго — изометрическое свойство (1.12). Имеем:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))\,ds\right)^2\right]\overset{\text{К.-Б.}}{\le}\mathbb{E}\left[\int_0^t 1^2\,ds\cdot\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2\,ds\right]=$$

$$=t\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2\,ds\right]; \qquad (2^*)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))\,dW(s)\right)^2\right]\overset{(1.12)}{=}\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))^2\,ds\right]. \qquad (3^*)$$

Из (1*)–(3*) следует, что

$$\mathbb{E}\left[(X_1(t)-X_2(t))^2\right]\le$$

$$\le 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2\,ds\right]+2\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))^2\,ds\right]\le$$

$$\le 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2\,ds\right]+2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))^2\,ds\right]=$$

$$\le 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{(a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2+(b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))^2\right\}ds\right]. \qquad (4^*)$$

Для продолжения оценивания в соотношении (4*) нам потребуется соотношение:

$$\sqrt{(a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s)))^2+(b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s)))^2}\le$$

$$\left|a(s,X_1(s))-a(s,X_2(s))\right|+\left|b(s,X_1(s))-b(s,X_2(s))\right|\overset{(7.4)}{\le} C_T\,|X_1(s)-X_2(s)|. \qquad (5^*)$$

Тогда из (4*) и (5*) получаем оценку:

$$\mathbb{E}\left[(X_1(t)-X_2(t))^2\right]\le 2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{C_T\,|X_1(s)-X_2(s)|\right\}^2 ds\right]=$$

$$=\underbrace{2(T+1)C_T^2}_{L:=}\,\mathbb{E}\left[\int_0^t (X_1(s)-X_2(s))^2\,ds\right]. \qquad (7.7)$$

Теперь нам потребуется лемма Гронуолла.

Лемма 7.1 (Гронуолла). Пусть $g(t)$ и $h(t)$, $t\in[0;T]$, — измеримые ограниченные функции, и пусть при некотором $K>0$ и всех $t\in[0;T]$:

$$g(t)\le h(t)+K\int_0^t g(s)\,ds. \qquad (1^*)$$

Тогда

$$g(t)\le \underbrace{h(t)+K\int_0^t e^{K(t-s)}h(s)\,ds}_{\psi(t):=},\qquad t\in[0;T]. \qquad (7.8)$$

Если h монотонно возрастает, то

$$g(t)\le h(t)e^{Kt},\qquad t\in[0;T]. \qquad (7.9)$$

Доказательство. Положим

$$\psi(t):=h(t)+K\int_0^t e^{K(t-s)}h(s)\,ds, \qquad (2^*)$$

$$\Delta(t):=\psi(t)-g(t),$$

и заметим, что $\Delta(t)$, $t\in[0;T]$, — ограниченная функция. Это следует из ограниченности функций g и h ($|g(t)|\le M$, $|h(t)|\le M$) и неравенства:

$$|\Delta(t)|=|\psi(t)-g(t)|=\left|h(t)+K\int_0^t e^{K(t-s)}h(s)\,ds-g(t)\right|\le\underbrace{|h(t)|}_{\le M}+K\int_0^t e^{K(t-s)}\underbrace{|h(s)|}_{\le M}ds+\underbrace{|g(t)|}_{\le M}.$$

Далее, поскольку

$$\left(\int_0^t e^{K(t-s)} h(s)\,ds\right)' = \left(e^{Kt}\int_0^t e^{-Ks} h(s)\,ds\right)' =$$

$$= Ke^{Kt}\int_0^t e^{-Ks} h(s)\,ds + e^{Kt}e^{-Kt}h(t) =$$

$$= K\int_0^t e^{K(t-s)} h(s)\,ds + h(t) =: \psi(t)\,,$$

то

$$\int_0^t e^{K(t-s)} h(s)\,ds = \int_0^t \psi(s)\,ds\,. \tag{3*}$$

Тогда, в силу (2*) и (3*), имеем

$$\psi(t) = h(t) + K\int_0^t \psi(s)\,ds\,. \tag{4*}$$

Условие (1*) равносильно неравенству

$$-g(t) \ge -h(t) - K\int_0^t g(s)\,ds\,. \tag{5*}$$

Складывая (4*) и (5*), а также учитывая определение функции $\Delta(t)$, получаем:

$$\Delta(t) \ge K\int_0^t \Delta(s)\,ds\,. \tag{6*}$$

Поскольку $K > 0$, то, продолжая оценивание с учетом неравенства (6*), получаем:

$$\Delta(t) \ge K\int_0^t \Delta(s)\,ds \overset{(6*)}{\ge} K\int_0^t \left(K\int_0^s \Delta(u)\,du\right)ds = K^2\int_0^t\left(\int_0^s \Delta(u)\,du\right)ds =$$

{изменим порядок интегрирования}

$$= K^2\int_0^t\left(\int_u^t \Delta(u)\,ds\right)du = K^2\int_0^t (t-u)\cdot\Delta(u)\,du \ge$$

$$\ge K^2\int_0^t (t-u)\cdot\left(K\int_0^u \Delta(s)\,ds\right)du = K^3\int_0^t\left(\int_0^u (t-u)\Delta(s)\,ds\right)du =$$

{изменим порядок интегрирования}

$$= K^3\int_0^t\left(\int_s^t (t-u)\Delta(s)\,du\right)ds = K^3\int_0^t\left(\Delta(s)\cdot\left.\tfrac{-(t-u)^2}{2}\right|_{u=s}^{u=t}\right)ds =$$

$$= K^3\int_0^t\left(\Delta(s)\cdot\tfrac{(t-s)^2}{2}\right)ds \ge \ldots \ge \tfrac{K^{n+1}}{n!}\int_0^t (t-s)^n\Delta(s)\,ds\,.$$

Выражение в правой части стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому $\Delta(t)\ge 0$, $t\in[0;T]$, и, следовательно, выполнено (7.8): $\psi(t)-g(t)=\Delta(t)\ge 0$.

Для монотонно возрастающей функции h неравенство (7.9) является простым следствием (7.8), так как

$$g(t) \le h(t) + K\int_0^t e^{K(t-s)}\,\underbrace{h(s)}\,ds \le h(t) + K\int_0^t e^{K(t-s)}\,\underbrace{h(t)}\,ds \le$$

$$\le h(t) + h(t)K\int_0^t e^{K(t-s)}\,ds = h(t) + h(t)K\left[\left.\tfrac{e^{K(t-s)}}{-K}\right|_{s=0}^{s=t}\right] =$$

$$= h(t) + h(t)K\left[-\tfrac{1}{K}+\tfrac{e^{Kt}}{K}\right] = h(t) - h(t) + h(t)e^{Kt} = h(t)e^{Kt}\,.\ \square$$

Поскольку $\sup\limits_{s\in[0;T]}\mathbb{E}\left[X_1^2(s)+X_2^2(s)\right]<\infty$, то применяя лемму Гроноулла к соотношению (7.7):

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[(X_1(t)-X_2(t))^2\right]}_{g(t)=} \le \underbrace{0}_{h(t)=} + \underbrace{L}_{K=}\cdot\int_0^t \underbrace{\mathbb{E}\left[(X_1(s)-X_2(s))^2\right]}_{g(s)}ds\,,$$

получаем неравенство

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[(X_1(t)-X_2(t))^2\right]}_{g(t)} \le \underbrace{0}_{h(t)=} + \underbrace{L}_{K=} \cdot \int_0^t e^{L(t-s)} \cdot \underbrace{0}_{h(t)=} \, ds,$$

из которого следует, что $g(t)=\mathbb{E}\left[(X_1(t)-X_2(t))^2\right]\equiv 0$. Следовательно, для любого $t\in[0;T]$ выполнено соотношение $\mathbb{P}(\{X_1(t)=X_2(t)\})=1$. Тогда вероятность того, что эти решения совпадают во все рациональные моменты времени, тоже равна единице ($\mathbb{P}\left(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0;T]}\{X_1(t)=X_2(t)\}\right)=1 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0;T]}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|=0\right\}\right)=1$), а в силу непрерывности решений $\mathbb{P}\left(\{\max_{t\in[0;T]}\left|X_1(t)-X_2(t)\right|=0\}\right)=1$. Единственность доказана.