fff

smth

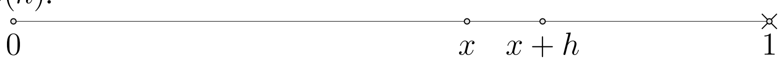
Для малых величин лучше использовать не Δ, а u, h, t, … , чтобы избежать путаницы с треугольниками в геометрических пояснениях.

Обозначение для угла, $\widehat{ABC}$.

На отрезке

Десять лилипутов прыгают в длину независимо друг от друга на равномерное расстояние от 0 до 1, обозначим их результаты прыжков как X_1, X_2, ..., X_{10}. Упорядочим эти результаты по возрастанию и получим $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(10)}$.

Найдите вероятность того, что результат бронзового призёра $X_{(3)}$ лежит в отрезке $[x; x+h]$ с точностью до $o(h)$.



Для любой отдельной величины X_i выполнено предельное равенство

$$\mathbb{P}(X_i \in [x+h; 1]) \doteq \mathbb{P}(X_i \in [x; 1]).$$

Вероятность $\mathbb{P}(X \in [x; 1])$ имеет более простую формулу, так как зависит только от x, поэтому мы будем использовать её.

Чтобы бронзовый призёр прыгнул на длину от x до $x+h$ два прыгуна должны прыгнуть на меньшую длину, а семь оставшихся — на большую длину. Мультиномиальный коэффициент $10!/(2!\,1!\,7!)$ показывает число способов разделить всех десятырех лилипутов на двоих с коротким прыжком, одного особого и семерых с длинным прыжком. Следовательно,

$$\mathbb{P}(X_{(3)} \in [x+h; 1]) \doteq \frac{10!}{2!\,1!\,7!} \cdot \mathbb{P}(X_1, X_2 \leq [0; x]) \cdot \mathbb{P}(X_3 \in [x; x+h]) \cdot \mathbb{P}(X_4, X_5, \ldots, X_{10} \in [x; 1]).$$

$$\mathbb{P}(X_{(3)} \in [x+h; 1]) \doteq \frac{10!}{2!\,1!\,7!} \cdot hx^2(1-x)^7.$$

Извлекаем функцию плотности из вероятности,

$$f_{X_{(3)}}(x) = \begin{cases} \frac{10!}{2!\,1!\,7!} x^2(1-x)^7, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С окружностью

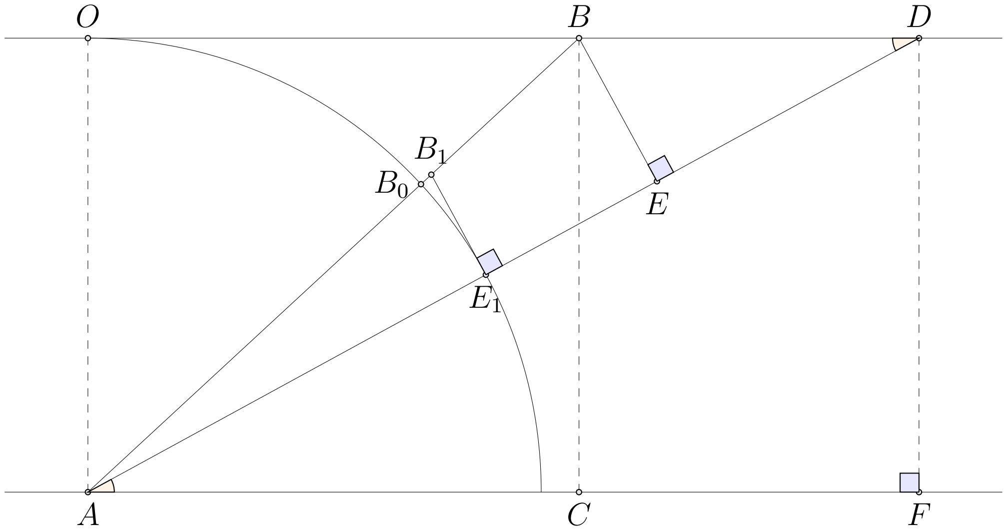
Слепой Пью стоит в начале координат. Он стреляет один раз в случайном равномерно распределённом направлении от 0 до π.

Стена проходит вдоль прямой $y = 1$. Случайная величина X — абсцисса точки попадания пули в стену.

1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(X \in [x; x+h])$ с точностью до $o(h)$.

2. Найдите функцию плотности величины X.

Решение.



Найдём вероятность $\mathbb{P}(X \in [x; x+h])$. Для этого мы от длины отрезка BD перейдём к длине дуги B_0E_1.

Треугольники $\triangle BED$ и $\triangle AFD$ подобны, поэтому

$$BE = BD \cdot \frac{DF}{AD} = h\frac{1}{\sqrt{1^2 + (x+h)^2}} \doteq \frac{h}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle AB_1E_1$ подобны, поэтому

$$B_0E_1 \doteq B_1E_1 = BE \cdot \frac{AB_1}{AB} \doteq BE \cdot \frac{AB_0}{AB} = \frac{BE}{\sqrt{1+x^2}}$$

Следовательно, $B_0E_1 \doteq h/(1+x^2)$, и искомая вероятность предельно равна

$$\mathbb{P}(X \in [x; x+h]) = \frac{B_0E_1}{\pi} \doteq \frac{h}{\pi(1+x^2)}.$$

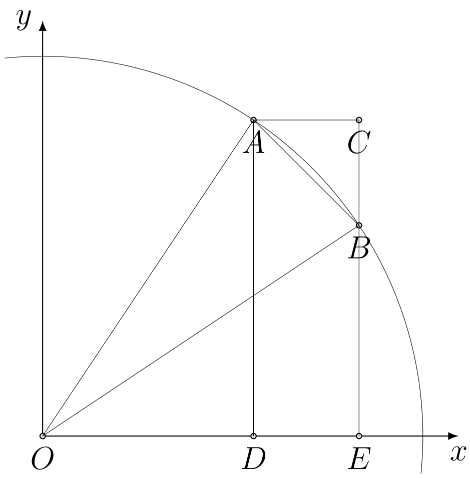
Функция плотности равна

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Илон Маск гоняет на Cybertruck по окружности единичного радиуса с центром в начале координат. В случайный момент времени момент времени он останавливается, точка его остановки равномерно распределена на окружности. Обозначим абсциссу точки остановки с помощью X.

1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(X \in [x; x+h])$ с точностью до $o(h)$ из геометрических соображений.

2. Найдите функцию плотности и величины X.



Искомая вероятность равна длине дуги $\widehat{AB}$, делённой на π.

Заметим, что $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \pi/2$, $\widehat{OAD} + \widehat{DAB} \doteq \pi/2$. Следовательно, $\widehat{BAC} \doteq \widehat{OAD}$ и два треугольника предельно подобны, $\triangle ACB \,\dot{\sim}\, \triangle ADO$. Из подобия следует, что $AB/AO \doteq AC/AD$ и, следовательно,

$$\mathbb{P}(X \in [x; x+h]) = \frac{\widehat{AB}}{\pi} \doteq \frac{AB}{\pi} \doteq \frac{AO \cdot AC/AD}{\pi} = \frac{h}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция плотности равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1; 1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$