В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1\right\}$$

Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6)$, $z = 21$.

   б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\to \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6)$, $z = 2$.

б)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (2, 7)$, $B = (4, 8)$, $C = (8, 4)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 3$ оптимум находится в точке B. При $c < 3$ оптимум находится в точке C. При $c = 3$ оптимум находится на отрезке $[B, C]$.

   г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -1/a$, $k_3 = -1/2$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -3/2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 2/3$ задача имеет неединственное решение. При $a = 2/3$ допустимое множество равно $\text{Hull}(A, B, C)$, где $A = (2, 7)$, $B = (6, 9)$, $C = (1, 3)$. Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

4. а) $P_1 = (4, 0) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (1, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (2, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (3, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (4, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (-3, 14)$, $B = (5, 6)$, $C = (3, 2)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 2$ оптимум находится в точке B. При $c < 2$ оптимум находится в точке A. При $c = 2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.

   г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной или недопустимой.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = -a$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -1$. Если $k = k_3$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 1$ задача имеет неединственное решение. При $a = 1$ допустимое множество равно $\text{Hull}(A, B, C, D)$, где $A = (3, 2)$, $B = (5, 6)$, $C = (11, 0)$, $D = (4, 0)$. Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

5. а) $P_1 = (0,1) = C \in \text{Hull}(A,B,C)$, $P_2 = (8,9) = B \in \text{Hull}(A,B,C)$, $P_3 = (5,8) \notin \text{Hull}(A,B,C)$, $P_4 = (4,7) \in \text{Hull}(A,B,C)$, $P_5 = (3,5) \in \text{Hull}(A,B,C)$, $P_6 = (0,5) = A \in \text{Hull}(A,B,C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A,B,C)$, $A = (0,5)$, $B = (8,9)$, $C = (0,1)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A,B,C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B. При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A. При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A,B]$.

   г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -b/3$, $k_3 = 1$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   Ответ: при $b = 6$ решение задачи неединственно.

6.

7.

8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой $\mathcal{F}$, в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

   Пересечение всех множеств равно
   $$S = \cap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

   Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S.

   По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A,B] \subseteq D$.

   Отрезок $[A,B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A,B]$ лежит в пересечении множеств S.

9.

10. Допустимое множество: $\text{Hull}(A,B,C,D)$.

    Канонический вид:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6\\
4x_1 + x_2 + x_4 &= 12\\
-x_1 + x_2 + x_5 &= 1\\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, &\, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

    Соответствие:

$$\begin{aligned}
A = (0,1) &\leftrightarrow x = (0,1,3,11,0)\\
B = (4/3, 7/3) &\leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0)\\
C = (18/7, 12/7) &\leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7)\\
D = (3,0) &\leftrightarrow x = (3,0,3,0,4)
\end{aligned}$$

11. Допустимое множество: Hull(A, B, C).

    Канонический вид:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

    Соответствие:

$$
\begin{aligned}
A = (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8) \\
B = (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0) \\
C = (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)
\end{aligned}
$$

Симплекс метод

1.

Двойственность

1.

Транспортная задача

1.