В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1\right\}$$

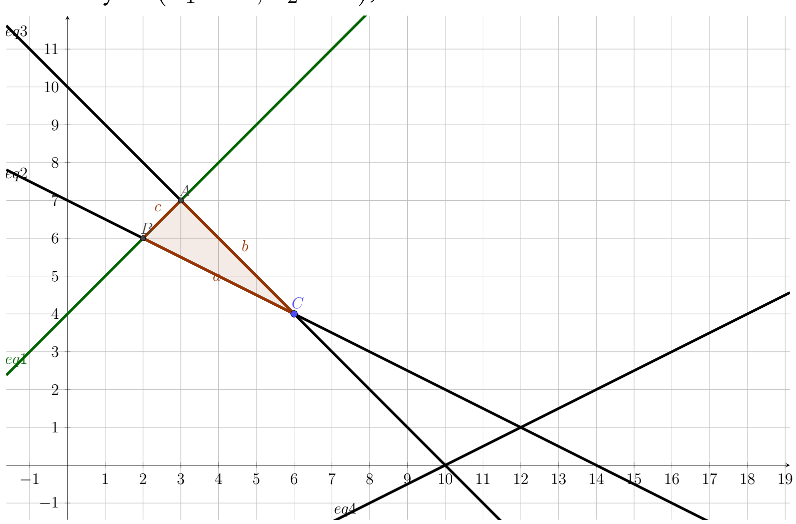
1. Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6)$, $z = 21$.

   б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\to \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6)$, $z = 2$.



б)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Hull}(A, B, C)$.
   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
   в)
   г)
4. а)
   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
   в)
   г)
5. а) $P_1 = (0, 1) = C \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (8, 9) = B \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 8) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (4, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (3, 5) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (8, 9) = A \in \text{Hull}(A, B, C)$.
   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
   в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B. При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A. При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.
   г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.
6.
7.
8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой $\mathcal{F}$, в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

   Пересечение всех множеств равно
   $$S = \cap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

   Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S.

   По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A, B] \subseteq D$.

   Отрезок $[A, B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A, B]$ лежит в пересечении множеств S.

9.

10. $\mathrm{Hull}(A, B, C, D)$, $A = (0, 1)$, $B = (4/3, 7/3)$, $C = (18/7, 12/7)$, $D = (3, 0)$.

11. $\mathrm{Hull}(A, B, C)$, $A = (0, 1)$, $B = (3/11, 32/11)$, $C = (9, 0)$.