

Вариант 1

1. а) Оптимум равен 26, $3A + C$ или $2B + 2A$.

б) Оптимум равен 26, $3A + C$ или $2B + 2A$.

в)

$$\begin{cases} 5x_a + 8x_b + 11x_c \rightarrow \max \\ 3x_a + 5x_b + 7x_c \leq 16 \\ x_a, x_b, x_c \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

2. а) Оптимум — $\text{Convex}(A, B)$, 94.

A	$b_1 = 8$	$b_2 = 10$	$b_3 = 11$
$a_1 = 4$	1	2	1
$a_2 = 3$	4	3	8
$a_3 = 13$	1	7	6
$a_4 = 9$	3	6	4
B	$b_1 = 8$	$b_2 = 10$	$b_3 = 11$
$a_1 = 4$	1	2	1
$a_2 = 3$	4	3	8
$a_3 = 13$	1	7	6
$a_4 = 9$	3	6	4

б) Систему можно записать в матричном виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Оптимум — $\text{Convex}(C, D)$, 126.

A	$b_1 = 8$		$b_2 = 10$		$b_3 = 11$	
		1		2		1
$a_1 = 4$					4	
		4		3		8
$a_2 = 3$			3			
		∞		7		6
$a_3 = 13$			7		6	
		3		6		4
$a_4 = 9$	8				1	
B	$b_1 = 8$		$b_2 = 10$		$b_3 = 11$	
		1		2		1
$a_1 = 4$			4			
		4		3		8
$a_2 = 3$			3			
		∞		7		6
$a_3 = 13$			3		10	
		3		6		4
$a_4 = 9$	8				1	

3. а) $8, A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8$ или $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow A_8$.

б) $4, A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7$

в) Матрица смежности M состоит только из 0 или 1:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. а) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (-2, 6)$, $B = (2, 4)$, $C = (1, 10)$, оптимум равен 48.

б) Оптимум 48, $x = (0, 1, 0, 5)$.

в) $b_1 \leq 9/2$ или $\Delta b_1 \leq 3/2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
5.	x_2	7	1	0	5	0	-3	24
	x_3	1/2	0	1	1/2	0	-3/2	3/2
	x_5	0	0	0	-4	1	-4	3
	$\min z$	-1	0	0	-3	0	0	$-5 - z$

Все решения: $x = (0, 24 + 3x_6, 3/2 + 3/2x_6, 0, 3 + 4x_6, x_6)$, $x_6 \geq 0$.

6.

$$\begin{cases} 21x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 7(a_4 - b_4) \rightarrow \max \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2(a_4 - b_4) = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5(a_4 - b_4) - x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, a_4, b_4, x_5 \leq 0 \end{cases}$$

7. а) Да, столбцы независимы:

$$\text{col}_5 A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б) Нет, столбцы зависимы:

$$\text{col}_1 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_3 A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_5 A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_1 A + \text{col}_3 A = \text{col}_5 A$$

в) Нет, $x_5 = -1$, а должно быть $x_5 \geq 0$.

г) Да, столбцы независимы:

$$\text{col}_1 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_3 A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

1. а) Оптимум равен 21, $2A + C$ или $A + 2B$.

б) Оптимум равен 21, $2A + C$ или $A + 2B$.

в)

$$\begin{cases} 5x_a + 8x_b + 11x_c \rightarrow \max \\ 3x_a + 5x_b + 7x_c \leq 13 \\ x_a, x_b, x_c \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

2. а) Оптимум — $\text{Convex}(A, B)$, 118.

A	$b_1 = 8$		$b_2 = 10$		$b_3 = 11$	
$a_1 = 4$		3		3		2
			2		2	
$a_2 = 3$		6		4		9
			3			
$a_3 = 13$		2		7		6
	8		5			
$a_4 = 9$		5		7		5
					9	

B	$b_1 = 8$		$b_2 = 10$		$b_3 = 11$	
		3		3		2
$a_1 = 4$			4			
		6		4		9
$a_2 = 3$			3			
		2		7		6
$a_3 = 13$	8		3		2	
		5		7		5
$a_4 = 9$					9	

б) Систему можно записать в матричном виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Оптимум — $\text{Convex}(A, B)$, 118, не изменяется.

A	$b_1 = 8$		$b_2 = 10$		$b_3 = 11$	
		3		3		2
$a_1 = 4$			2		2	
		6		4		∞
$a_2 = 3$			3			
		2		7		6
$a_3 = 13$	8		5			
		5		7		5
$a_4 = 9$					9	

B	$b_1 = 8$	$b_2 = 10$	$b_3 = 11$
$a_1 = 4$	<div>3</div>	<div>3</div>	<div>2</div>
		4	
$a_2 = 3$	<div>6</div>	<div>4</div>	<div>∞</div>
		3	
$a_3 = 13$	<div>2</div>	<div>7</div>	<div>6</div>
	8	3	2
$a_4 = 9$	<div>5</div>	<div>7</div>	<div>5</div>
			9

3. а) $8, A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8$ или $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_6 \rightarrow A_8$.
 б) $4, A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7$
 в) Матрица смежности M состоит только из 0 или 1:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. а) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (-2, 6)$, $B = (2, 4)$, $C = (1, 10)$, оптимум равен 48.
 б) Оптимум 48, $x = (5, 1, 0, 0)$.
 в) $b_1 \leq 9/2$ или $\Delta b_1 \leq 3/2$.

							b	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
5.	x_2	1	7	0	5	-3	0	24
	x_3	0	1/2	1	1/2	-3/2	0	3/2
	x_5	0	0	0	-4	-4	1	3
$\min z$							$-5 - z$	

Все решения: $x = (24 + 3x_5, 0, 3/2 + 3/2x_5, 0, x_5, 3 + 4x_5)$, $x_5 \geq 0$.

6.

$$\begin{cases} 6(a_1 - b_1) + 21x_2 + 7x_3 + 7x_4 \rightarrow \max \\ 2(a_1 - b_1) + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 24 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 12 \\ a_1, b_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 0 \end{cases}$$

7. а) Да, столбцы независимы:

$$\text{col}_5 A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б) Нет, столбцы зависимы:

$$\text{col}_1 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_3 A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_5 A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_1 A + \text{col}_3 A = \text{col}_5 A$$

в) Нет, $x_5 = -1$, а должно быть $x_5 \geq 0$.

г) Да, столбцы независимы:

$$\text{col}_1 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{col}_3 A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$