В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1\right\}$$

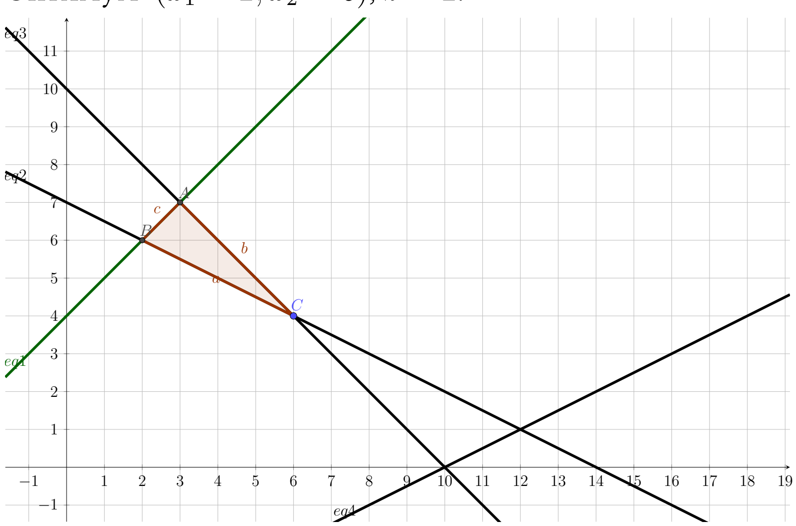
Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6)$, $z = 21$.

   б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\to \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6)$, $z = 2$.



б)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\to \max \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
-x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\
x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\
x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (2, 7)$, $B = (4, 8)$, $C = (8, 4)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 3$ оптимум находится в точке B. При $c < 3$ оптимум находится в точке C. При $c = 3$ оптимум находится на отрезке $[B, C]$.

   г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -1/a$, $k_3 = -1/2$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -3/2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 2/3$ задача имеет неединственное решение. При $a = 2/3$ допустимое множество равно $\text{Hull}(A, B, C)$, где $A = (2, 7)$, $B = (6, 9)$, $C = (1, 3)$. Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$
[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}
$$

4. а) $P_1 = (4, 0) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (1, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (2, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (3, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (4, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (-3, 14)$, $B = (5, 6)$, $C = (3, 2)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 2$ оптимум находится в точке B. При $c < 2$ оптимум находится в точке A. При $c = 2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.

   г) При $a \leq -2$ или $a \geq 2$ задача является неограниченной. При $a \in (-2; 2)$ задача является ограниченной или недопустимой.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = -a$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -1/2$. Если $k = k_3$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 1/2$ задача имеет неединственное решение. При $a = 1/2$ допустимое множество равно $\text{Hull}(K, L, C)$, где $C = (3, 2)$, $K = (6, 8)$, $L = (-2, 12)$. Оптимум находится на отрезке $[K, L]$:

$$
[K, L] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}
$$

5. а) $P_1 = (0,1) = C \in \mathrm{Hull}(A,B,C)$, $P_2 = (8,9) = B \in \mathrm{Hull}(A,B,C)$, $P_3 = (5,8) \notin \mathrm{Hull}(A,B,C)$, $P_4 = (4,7) \in \mathrm{Hull}(A,B,C)$, $P_5 = (3,5) \in \mathrm{Hull}(A,B,C)$, $P_6 = (0,5) = A \in \mathrm{Hull}(A,B,C)$.

   б) Допустимое множество $\mathrm{Hull}(A,B,C)$, $A = (0,5)$, $B = (8,9)$, $C = (0,1)$ является треугольником. Все точки из множества $\mathrm{Hull}(A,B,C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B. При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A. При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A,B]$.

   г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -3/b$, $k_3 = 1$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   Ответ: при $b = 3/2$ решение задачи неединственно.

   При $b = 3/2$ допустимое множество равно $\mathrm{Hull}(A,B,C,D)$, $A = (0,5)$, $B = (2,6)$, $C = (3,4)$, $D = (0,1)$.

   Оптимум находится на отрезке $[B,C]$:

$$[B,C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in [0;1] \right\}$$

6.

7.

8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой $\mathcal{F}$, в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

   Пересечение всех множеств равно

$$S = \cap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

   Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S.

   По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A,B] \subseteq D$.

   Отрезок $[A,B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A,B]$ лежит в пересечении множеств S.

9.

10. Допустимое множество: $\mathrm{Hull}(A,B,C,D)$.

    Канонический вид:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0&, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$A = (0,1) \leftrightarrow x = (0,1,3,11,0)$$
$$B = (4/3,7/3) \leftrightarrow x = (4/3,7/3,0,13/3,0)$$
$$C = (18/7,12/7) \leftrightarrow x = (18/7,12/7,0,0,13/7)$$
$$D = (3,0) \leftrightarrow x = (3,0,3,0,4)$$

11. Допустимое множество: Hull(A, B, C).

Канонический вид:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Соответствие:

$$A = (1,0) \leftrightarrow x = (1,0,0,8)$$
$$B = (3/11,32/11) \leftrightarrow x = (3/11,32/11,0,0)$$
$$C = (9,0) \leftrightarrow x = (9,0,32,0)$$

Симплекс метод

3.1 Ведущим элементом можно выбрать: (x_3, x_2), (x_6, x_5), (x_1, x_5).

3.8 $z = 40$, $x = (22,0,2,0)$

3.9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	2^*	0	-1	1	-1	-1	30
x_2	3	1	0	0	-1	-2	48
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z+168$

, $z = 168$, $x = (0,48,0,30,0,0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2^*$	$-1/2$	$-1/2$	15
x_2	0	1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	3
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z+168$

, $z = 168$, $x = (15,3,0,0,0,0)$

3.9' $z = 11$, $x = (1,0,0,0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	$-1/3$	0	0	$2/3$	1
x_3	0	$-2/3$	1	-1	$-1/3$	0
$\min z$	0	-6	0	-6	-8	$-z+11$

, $x = (1,0,0,0,0)$, $z = 11$.

3.9” $z = 96$, $x = (8, 0, 2, 0)$

3.11 $z = -3$, Базисные решения: $x = (0, 3, 0, 1, 1, 0)$

3.12 неограниченная задача

3.13 пустое допустимое множество

3.14 $z = -6$, $x = (0.25, 2.5)$

3.15 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_5) \in S \\ S = \{(x_3, x_5) \mid x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, 2 - x_3 + x_5 \geq 0, 6 - 2x_3 + x_5 \geq 0, 6 + 3x_3 - x_5 \geq 0\} \\ x_1 = 6 + 3x_3 - x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\ x_6 = 6 - 2x_3 + x_5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (0, 0, 0, 8, 6, 12)$, $B = (6, 0, 0, 2, 0, 6)$, $C = (12, 0, 2, 0, 0, 2)$, $D = (16, 0, 4, 0, 2, 0)$. и $v = (0, 0, 1, 2, 3, 1)$, $u = (7, 0, 1, 1, 2, 0)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D.

3.16 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_4) \in S \\ S = \{(x_2, x_4) \mid x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, 8 + x_2 - 2x_4 \geq 0, 2 + x_2 - x_4 \geq 0, 3 - x_2 + 3x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 8 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_6 = 3 - x_2 + 3x_4 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (11, 3, 0, 0, 5, 0)$, $B = (8, 0, 0, 0, 2, 3)$, $C = (4, 0, 0, 2, 0, 8)$, $D = (0, 4, 0, 6, 0, 17)$. и $v = (8, 2, 0, 1, 3, 4)$, $u = (9, 3, 0, 1, 4, 3)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D.

Двойственность

1.

Транспортная задача

1.