1. Двойственная задача:

$$\begin{cases} 24y_1 + 20y_2 - 4y_3 \min \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1 - 3y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 = 4 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. a) Двойственная задача:

$$\begin{cases} w = 9y_1 + 6y_2 \to \min \\ y_1 + y_2 \geq 4 \\ 5y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_1 + 8y_2 \geq 18 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

   Прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$ пересекаются в одной точке.

   Решение двойственной задачи: $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, минимум равен 30.

   б) В двойственной задаче $y_1 > 0$, поэтому $x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$. В двойственной задаче $y_2 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 + 8x_3 = 6$.

   Решение исходной задачи: $x_3 \in [0; 21/39]$, $x_2 = (3 + 7x_3)/4$, $x_1 = (21 - 39x_3)/4$, максимум равен 30.

   Решение исходной задачи можно также записать в виде $\mathrm{Convex}(A, B)$, где $A = (21/4, 3/4, 0)$, $B = (0, 22/13, 21/39)$.

   i. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\delta\pi = -\delta b_1 \cdot p + \delta b_1 \cdot y_1 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$.

   ii. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\delta\pi = -\delta b_2 \cdot p + \delta b_2 \cdot y_2 = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3$. Данный вариант выгоднее.

3.

4. a)

   б)

$$\begin{cases} 4x_a + 9x_b + 10x_c \to \max \\ 3x_a + 7x_b + 8x_c \leq 17 \\ x_a, x_b, x_c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

5.

| вершина | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | $0^*$ | | | | | | | |
| $A_2$ | $\infty$ | 6 | 3 | 3 | $3^*$ | | | | |
| $A_3$ | $\infty$ | 2 | 2 | $2^*$ | | | | | |
| $A_4$ | $\infty$ | 1 | $1^*$ | | | | | | |
| $A_5$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 7 | 6 | $6^*$ | | | |
| $A_6$ | $\infty$ | $\infty$ | 8 | 8 | 8 | 7 | $7^*$ | | |
| $A_7$ | $\infty$ | $\infty$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 8 | $8^*$ | |
| $A_8$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 11 | 9 | 9 | $9^*$ |

а) Оптимальные маршруты:

$$A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{2} A_8, \quad A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7 \xrightarrow{1} A_8,$$

стоимость равна $9$.

б) $A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7$, стоимость равна $5$.