

В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6), z = 21$.

б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6), z = 2$.



б)

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\
 x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (2, 7)$, $B = (4, 8)$, $C = (8, 4)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

в) При $c > 3$ оптимум находится в точке B . При $c < 3$ оптимум находится в точке C . При $c = 3$ оптимум находится на отрезке $[B, C]$.

г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.

д)

4. а) $P_1 = (4, 0) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (1, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (2, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (3, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (4, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$.

б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (-3, 14)$, $B = (5, 6)$, $C = (3, 2)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

в) При $c > 2$ оптимум находится в точке B . При $c < 2$ оптимум находится в точке A . При $c = 2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.

г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.

д)

5. а) $P_1 = (0, 1) = C \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_2 = (8, 9) = B \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 8) \notin \text{Hull}(A, B, C)$, $P_4 = (4, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_5 = (3, 5) \in \text{Hull}(A, B, C)$, $P_6 = (0, 5) = A \in \text{Hull}(A, B, C)$.

б) Допустимое множество $\text{Hull}(A, B, C)$, $A = (0, 5)$, $B = (8, 9)$, $C = (0, 1)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Hull}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B . При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A . При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.

г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.

д)

6.

7.

8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой \mathcal{F} , в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

Пересечение всех множеств равно

$$S = \cap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S .

По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A, B] \subseteq D$.

Отрезок $[A, B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A, B]$ лежит в пересечении множеств S .

9.

10. Допустимое множество: $\text{Hull}(A, B, C, D)$.

$A = (0, 1) \leftrightarrow x = (0, 1, 3, 11, 0)$, $B = (4/3, 7/3) \leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0)$, $C = (18/7, 12/7) \leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7)$, $D = (3, 0) \leftrightarrow x = (3, 0, 3, 0, 4)$.

11. Допустимое множество: $\text{Hull}(A, B, C)$.

$A = (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8)$, $B = (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0)$, $C = (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)$.

Симплекс метод

1.

Двойственность

1.

Транспортная задача

1.
