В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\mathrm{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\mathrm{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1\right\}$$

Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6)$, $z = 21$.

   б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\to \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6)$, $z = 2$.

б)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Convex}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (2, 7)$, $B = (4, 8)$, $C = (8, 4)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 3$ оптимум находится в точке B. При $c < 3$ оптимум находится в точке C. При $c = 3$ оптимум находится на отрезке $[B, C]$.

   г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -1/a$, $k_3 = -1/2$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -3/2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 2/3$ задача имеет неединственное решение. При $a = 2/3$ допустимое множество равно $\text{Convex}(A, B, C)$, где $A = (2, 7)$, $B = (6, 9)$, $C = (1, 3)$. Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

4. а) $P_1 = (4, 0) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_2 = (1, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_3 = (2, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_4 = (3, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_6 = (4, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (-3, 14)$, $B = (5, 6)$, $C = (3, 2)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > 2$ оптимум находится в точке B. При $c < 2$ оптимум находится в точке A. При $c = 2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.

   г) При $a \leq -2$ или $a \geq 2$ задача является неограниченной. При $a \in (-2; 2)$ задача является ограниченной или недопустимой.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = -a$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -1/2$. Если $k = k_3$, то решение задачи неединственно.

   При $a = 1/2$ задача имеет неединственное решение. При $a = 1/2$ допустимое множество равно $\text{Convex}(K, L, C)$, где $C = (3, 2)$, $K = (6, 8)$, $L = (-2, 12)$. Оптимум находится на отрезке $[K, L]$:

$$[K, L] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

5. а) $P_1 = (0,1) = C \in \text{Convex}(A,B,C)$, $P_2 = (8,9) = B \in \text{Convex}(A,B,C)$, $P_3 = (5,8) \notin \text{Convex}(A,B,C)$, $P_4 = (4,7) \in \text{Convex}(A,B,C)$, $P_5 = (3,5) \in \text{Convex}(A,B,C)$, $P_6 = (0,5) = A \in \text{Convex}(A,B,C)$.

   б) Допустимое множество $\text{Convex}(A,B,C)$, $A = (0,5)$, $B = (8,9)$, $C = (0,1)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A,B,C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.

   в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B. При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A. При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A,B]$.

   г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.

   д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -3/b$, $k_3 = 1$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.

   Ответ: при $b = 3/2$ решение задачи неединственно.

   При $b = 3/2$ допустимое множество равно $\text{Convex}(A,B,C,D)$, $A = (0,5)$, $B = (2,6)$, $C = (3,4)$, $D = (0,1)$.

   Оптимум находится на отрезке $[B,C]$:

$$[B,C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in [0;1] \right\}$$

6.

7.

8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой $\mathcal{F}$, в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

   Пересечение всех множеств равно
$$S = \cap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

   Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S.

   По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A,B] \subseteq D$.

   Отрезок $[A,B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A,B]$ лежит в пересечении множеств S.

9.

10. Допустимое множество: $\text{Convex}(A,B,C,D)$.

    Канонический вид:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0&, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$A = (0, 1) \leftrightarrow x = (0, 1, 3, 11, 0)$$
$$B = (4/3, 7/3) \leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0)$$
$$C = (18/7, 12/7) \leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7)$$
$$D = (3, 0) \leftrightarrow x = (3, 0, 3, 0, 4)$$

11. Допустимое множество: Convex(A, B, C).

Канонический вид:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Соответствие:

$$A = (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8)$$
$$B = (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0)$$
$$C = (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)$$

Симплекс метод

3.1 Ведущим элементом можно выбрать: (x_3, x_2), (x_6, x_5), (x_1, x_5).

3.8 $z = 40$, $x = (22, 0, 2, 0)$

3.9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	2^*	0	-1	1	-1	-1	30
x_2	3	1	0	0	-1	-2	48
min z	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

, $z = 168$, $x = (0, 48, 0, 30, 0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2^*$	$-1/2$	$-1/2$	15
x_2	0	1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	3
min z	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

, $z = 168$, $x = (15, 3, 0, 0, 0, 0)$

3.9' $z = 11$, $x = (1, 0, 0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	$-1/3$	0	0	$2/3$	1
x_3	0	$-2/3$	1	-1	$-1/3$	0
min z	0	-6	0	-6	-8	$-z + 11$

, $x = (1, 0, 0, 0, 0)$, $z = 11$.

3.9” $z = 96, x = (8, 0, 2, 0)$

3.11 $z = -3$, Базисные решения: $x = (0, 3, 0, 1, 1, 0)$

3.12 неограниченная задача

3.13 пустое допустимое множество

3.14 $z = -6$, оптимальные решения: $[A, B]$, $A = (1/4, 5/2)$, $B = (6/5, 3/5)$.

В данной задаче при переходе к симплекс-таблице нужно сделать замену $x_2 = a_2 - b_2$, $a_2 \geq 0$, $b_2 \geq 0$.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & a_2 & b_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/8 & 19/4 \\
a_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & 1/4 & 5/2 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/8 & 1/4 \\
\hline
\min z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -z-6
\end{array}, \quad z = -6$$

Базисные оптимальные решения: $A = (x_1 = 1/4, a_2 = 5/2, b_2 = 0, x_3 = 19/4, x_4 = 0, x_5 = 0)$, $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$.

Ответ в параметрическом виде:

$$\begin{cases}
b_2 \geq 0, x_4 \in [0; 19/5] \\
x_1 = 1/4 + 1/4x_4 \\
x_3 = 19/4 - 5/4x_4 \\
a_2 = 5/2 + b_2 - 1/2x_4 \\
x_5 = 0 \\
z = -6
\end{cases}$$

Ответ в виде суммы отрезка и конуса:

$$x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u),$$

где $A = (1/4, 5/2, 0, 19/4, 0, 0)$, $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$, $u = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$.

3.15 Все решения:

$$\begin{cases}
(x_2, x_5) \in S \\
S = \{(x_3, x_5) \mid x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, 2 - x_3 + x_5 \geq 0, 6 - 2x_3 + x_5 \geq 0, 6 + 3x_3 - x_5 \geq 0\} \\
x_1 = 6 + 3x_3 - x_5 \\
x_2 = 0 \\
x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\
x_6 = 6 - 2x_3 + x_5 \\
z = 7
\end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (0,0,0,8,6,12)$, $B = (6,0,0,2,0,6)$, $C = (12,0,2,0,0,2)$, $D = (16,0,4,0,2,0)$. и $v = (0,0,1,2,3,1)$, $u = (1,0,1,1,2,0)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D.

3.16 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_4) \in S \\ S = \{(x_2, x_4) \mid x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, 8 + x_2 - 2x_4 \geq 0, 2 + x_2 - x_4 \geq 0, 3 - x_2 + 3x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 8 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_6 = 3 - x_2 + 3x_4 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (11,3,0,0,5,0)$, $B = (8,0,0,0,2,3)$, $C = (4,0,0,2,0,9)$, $D = (0,4,0,6,0,17)$. и $v = (0,2,0,1,1,1)$, $u = (1,3,0,1,2,0)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D.

Двойственность

1.

$$\begin{cases} w = -3y_1 + 8y_2 - 8y_3 \to \min \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ -3y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 5 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} w = 2y_1 - y_2 \to \max \\ y_1 + 2y_2 \leq 14 \\ 2y_1 + y_2 \leq 10 \\ y_1 + y_2 \leq 8 \\ y_1 - y_2 \leq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Допустимое множество в двойственной задаче: $\text{Convex}(A, B, C, D)$, $A = (0, -2)$, $B = (0, 7)$, $C = (2, 6)$, $D = (4, 2)$.

Оптимум в двойственной задаче: $y = D = (4, 2), w = 6$.

Оптимум в исходной задаче: $x = (0, 1/3, 0, 4/3)$, $z = 6$.

3. а) Если $\Delta b_1 = 2$, то старая точка $D = (4, 2)$ остаётся оптимальной, $\Delta z = y_1 \Delta b_1 = 4 \cdot 2 = 8$.
Если $\Delta b_1 = -2$, то новый оптимум в точке $A = (0, -2)$, $w_{\text{new}} = 2$, $\Delta z = -4$.
Если $\Delta b_2 = 2$, то новый оптимум — $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$. Старая точка $D = (4, 2)$ остаётся оптимальной, $\Delta z = y_2 \Delta b_2 = 2 \cdot 2 = 4$.
Если $\Delta b_2 = -2$, то новый оптимум в точке $A = (0, -2)$, $w_{\text{new}} = 6$, $\Delta z = 0$.
   б) При $\Delta z = 8$ нужно взять $\Delta b_1 = 2$.
Значение $\Delta z = -8$ не возможно ни при каком Δb_1.
   в) Значение $\Delta z = 4$ возможно в двух случаях:
      i. $\Delta b_2 = 2$, новый оптимум — $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$.
      ii. $\Delta b_2 = -4$, новый оптимум в точке B.

4. Двойственная задача

$8y_1+16y_2+12y_3 \to \max 2y_1+y_2+3y_3 \le 2-y_1+y_2+y_3 = -2y_1+2y_2+y_3 \le 13y_1+4y_2+2y_3 \le -9y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \ge 0, y$

Критерий	$(1,1,7,0)$	$(0,0,8,0)$	$(1,3,0,3)$	$(0,4,0,4)$
x — допустимое решение				
Условия дополняющей нежёсткости				
y — допустимое решение				
x и y — оптимумы				

5.

Критерий	$x_a = (20, -24, 4, 4)$	$x_b = (0, 2, 0, 9)$	$x_c = (6, -4, 6, 0)$
x — допустимое решение	да	да	да
Условия дополняющей нежёсткости	нет	да	да
y — допустимое решение		нет, $(0, 13/2, -3/2)$	да, $(, ,)$
x и y — оптимумы	нет	нет	да

6.

7. В исходной задаче оптимум $x = (0, 20)$, $z = 80$. В двойственной задаче оптимум $y = (0, 2)$, $w = 80$.

Ни одно из предложенных действий не влияет на оптимум двойственной задачи.

   а) $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2$, $z = 78$.
   б) $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1$, $z = 81$.
   в) $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2$, $z = 82$.
   г) $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0$, $z = 80$.
   д) $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 4$, $z = 84$.

8. Точка $x = (-1, 0, 3)$ — допустимая. Условия дополняющей нежёсткости:

$$\begin{cases} x_1(-3y_1 + 2y_2 + y_3 + 1) = 0 \\ x_2(2y_1 - y_2 + y_3 - 7a) = 0 \\ x_3(-y_1 + 2y_2 + y_3 - 2a) = 0 \\ y_1(-3x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 \\ y_2(2x_1 - x_2 + 2x_2 - 5) = 0 \\ y_3(x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0 \end{cases}$$

Из условий дополняющей нежёсткости следует, что $y = (0.5 + a, 0, 0.5 + 3a)$. Точка y допустимая при $a \in [-1/2, 3/4]$.

Ответ: $a \in [-1/2, 3/4]$.

Альтернативное решение. Подставим $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ во все условия:

$$\begin{cases} z = (-1 - 2a)x_1 + 5ax_2 + 4a \to \max \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Случай $a = 0$ подходит.

Если $a \neq 0$, то Наклон линии уровня целевой функции равен $k = (1 + 2a)/5a$.

Случай $a > 0$. При этом $k = (1 + 2a)/5a \geq 2/3$, отсюда $a \in (0; 3/4]$.

Случай $a < 0$. При этом $k = (1 + 2a)/5a \leq 0$, отсюда $a \in [-1/2; 0)$.

Объединяем случаи: $a \in [-1/2; 3/4]$.

Транспортная задача

1.