

1. а) Двойственная задача:

$$\begin{cases} 24y_1 + 20y_2 - 4y_3 \rightarrow \min \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1 - 3y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 = 4 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

б) У нас $y_2 \in \mathbb{R}$, поэтому мы заменяем его на разницу двух неотрицательных переменных, $y_2 = p_2 - n_2$. Двойственная задача в каноническом виде:

$$\begin{cases} 24y_1 + 20(p_2 - n_2) - 4y_3 \rightarrow \min \\ 3y_1 + (p_2 - n_2) + 2y_3 - y_4 = 4 \\ y_1 - 3y_3 - y_5 = -1 \\ -2y_1 + (p_2 - n_2) - y_3 = 4 \\ y_1 + 2(p_2 - n_2) - y_3 - y_6 = 7 \\ y_1 \geq 0, p_2 \geq 0, n_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

в) Специальные ограничения можно записать в виде $Av = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ p_2 \\ n_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}.$$

г) В двойственной задаче в каноническом виде 7 переменных и 4 специальных ограничения.

д) Допустимым базисным решением задачи в каноническом виде называется любой вектор v , у которого все $v_i \geq 0$, и столбцы матрицы специальных ограничений $\text{col}(A, i)$ при $v_i \neq 0$ линейно независимы.

е) Например, вектор $v = (y_1 = 0, p_2 = 13/3, n_2 = 0, y_3 = 1/3, y_4 = 1, y_5 = 0, y_6 = 4/3)$ является базисным допустимым решением, соответствующие ненулевым числам столбцы матрицы A линейно-независимы:

$$\text{col}(A, \langle p_2 \rangle) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{col}(A, \langle y_3 \rangle) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{col}(A, \langle y_4 \rangle) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{col}(A, \langle y_6 \rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Например, вектор $v = (y_1 = -1, p_2 = -2, n_2 = -3, y_3 = -4, y_4 = -5, y_5 = -6, y_6 = -7)$ не является базисным допустимым решением.

2. а) Двойственная задача:

$$\begin{cases} w = 9y_1 + 6y_2 \rightarrow \min \\ y_1 + y_2 \geq 4 \\ 5y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_1 + 8y_2 \geq 18 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Прямые ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 пересекаются в одной точке.

Решение двойственной задачи: $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, минимум равен 30.

б) В двойственной задаче $y_1 > 0$, поэтому $x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$. В двойственной задаче $y_2 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 + 8x_3 = 6$.

Решение исходной задачи: $x_3 \in [0; 21/39]$, $x_2 = (3 + 7x_3)/4$, $x_1 = (21 - 39x_3)/4$, максимум равен 30.

Решение исходной задачи можно также записать в виде $\text{Convex}(A, B)$, где $A = (21/4, 3/4, 0)$, $B = (0, 22/13, 21/39)$.

в) Сравниваем два варианта:

- i. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\Delta\pi = -\Delta b_1 \cdot p + \Delta b_1 \cdot y_1 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$.
- ii. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\Delta\pi = -\Delta b_2 \cdot p + \Delta b_2 \cdot y_2 = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3$. Данный вариант выгоднее.

3. а) Стартовое решение методом северо-западного угла:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	5 2	2	1
$a_2 = 10$	4 2	6 5	2
$a_3 = 4$	9	4 6	7
$a_4 = 13$	3	1 9	6 12

Возможный первый шаг:

	$b_1 = 9$		$b_2 = 11$		$b_3 = 12$	
$a_1 = 5$		2		2		1
			5			
$a_2 = 10$		2		5		2
	9		1			
$a_3 = 4$		9		6		7
			4			
$a_4 = 13$		3		9		6
			1		12	

Возможный второй шаг:

	$b_1 = 9$		$b_2 = 11$		$b_3 = 12$	
$a_1 = 5$		2		2		1
			5			
$a_2 = 10$		2		5		2
	8		2			
$a_3 = 4$		9		6		7
			4			
$a_4 = 13$		3		9		6
	1				12	

Все оптимальные решения: $\text{Convex}(A, B)$.

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	<div>2</div>	<div>2</div>	<div>1</div>
$a_2 = 10$	<div>2</div>	<div>5</div>	<div>2</div>
$a_3 = 4$	<div>9</div>	<div>6</div>	<div>7</div>
$a_4 = 13$	<div>3</div>	<div>9</div>	<div>6</div>
	9		4
B	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	<div>2</div>	<div>2</div>	<div>1</div>
$a_2 = 10$	<div>2</div>	<div>5</div>	<div>2</div>
$a_3 = 4$	<div>9</div>	<div>6</div>	<div>7</div>
$a_4 = 13$	<div>3</div>	<div>9</div>	<div>6</div>
	9	2	2

Оптимальная стоимость равна $10 + 20 + 24 + 27 + 18 + 12 = 111$.

б) Исходные ограничения можно записать системой

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 10 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 4 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 13 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 9 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 11 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 12 \end{cases}$$

Систему можно записать в матричном виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \\ 13 \\ 9 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Матрица A называется матрицей специальных ограничений. Любую строку матрицы A можно вычеркнуть, так как строки матрицы зависимы,

$$\text{row}_1 A + \text{row}_2 A + \text{row}_3 A + \text{row}_4 A = \text{row}_5 A + \text{row}_6 A + \text{row}_7 A.$$

в) Старое решение A остаётся оптимальным:

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	2	2	1
$a_2 = 10$	2	5	2
$a_3 = 4$	6	6	7
$a_4 = 13$	3	∞	6
	9		4

Старое решение B перестаёт быть оптимальным.

г) Старые решения A и B остаются оптимальными для новой таблицы:

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	2	2	1
$a_2 = 10$	2	5	2
$a_3 = 4$	6	6	7
$a_4 = 13$	3	9	6
	9		4
B	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	2	2	1
$a_2 = 10$	2	5	2
$a_3 = 4$	6	6	7
$a_4 = 13$	3	9	6
	9	2	2

Оптимальная стоимость, по-прежнему, равна 111.

Грузоподъемность	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4. A	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12	12	16	16	16	20	20	20
A, B	0	0	0	4	4	4	8	9/8	9/8	9/12	13/12	13/12	13/16	17/16	18/16	18/20	21/20	22/20
A, B, C	0	0	0	4	4	4	8	9	10/9	10/12	10/13	14/13	14/16	14/17	18/18	19/20	20/21	22/22
A, B, C, D	0	0	0	4	4	4	8	9	10	12	12/13	12/14	12/16	16/17	16/18	16/20	20/21	21/22

а) Максимальная прибыль равна $\phi_{ABC}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $C + 3A$ или $2B + A$.

б) Максимальная прибыль равна $\phi_{AB}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $2B + A$.

в)

$$\begin{cases} 4x_a + 9x_b + 10x_c \rightarrow \max \\ 3x_a + 7x_b + 8x_c \leq 17 \\ x_a, x_b, x_c \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

г) Максимальная прибыль равна $\phi_{ABCD}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $C + 3A$ или $2B + A$.

вершина									
5.	A_1	0	0*						
	A_2	∞	6	3	3	3*			
	A_3	∞	2	2	2*				
	A_4	∞	1	1*					
	A_5	∞	∞	∞	7	6	6*		
	A_6	∞	∞	8	8	8	7	7*	
	A_7	∞	∞	9	9	9	9	8	8*
	A_8	∞	∞	∞	∞	∞	11	9	9

а) Оптимальные маршруты:

$$A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{2} A_8, \quad A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7 \xrightarrow{1} A_8,$$

стоимость равна 9.

б) $A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7$, стоимость равна 5.