

В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

Графические методы

1. а) Оптимум: $(x_1 = 5, x_2 = 6), z = 21$.

б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум: $(x_1 = 2, x_2 = 6), z = 2$.



б)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
-x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\
x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\
x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

3. а) $P_1 = (4, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_2 = (2, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_4 = (9, 3) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_5 = (8, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_6 = (5, 6) \in \text{Convex}(A, B, C)$.
- б) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (2, 7)$, $B = (4, 8)$, $C = (8, 4)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При $c > 3$ оптимум находится в точке B . При $c < 3$ оптимум находится в точке C . При $c = 3$ оптимум находится на отрезке $[B, C]$.
- г) При $a \leq -2$ задача является неограниченной. При $a > -2$ задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -1/a$, $k_3 = -1/2$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -3/2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно. При $a = 2/3$ задача имеет неединственное решение. При $a = 2/3$ допустимое множество равно $\text{Convex}(A, B, C)$, где $A = (2, 7)$, $B = (6, 9)$, $C = (1, 3)$. Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

4. а) $P_1 = (4, 0) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_2 = (1, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_3 = (2, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_4 = (3, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_6 = (4, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$.
- б) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (-3, 14)$, $B = (5, 6)$, $C = (3, 2)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При $c > 2$ оптимум находится в точке B . При $c < 2$ оптимум находится в точке A . При $c = 2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.
- г) При $a \leq -2$ или $a \geq 2$ задача является неограниченной. При $a \in (-2; 2)$ задача является ограниченной или недопустимой.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = -a$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -1/2$. Если $k = k_3$, то решение задачи неединственно. При $a = 1/2$ задача имеет неединственное решение. При $a = 1/2$ допустимое множество равно $\text{Convex}(K, L, C)$, где $C = (3, 2)$, $K = (6, 8)$, $L = (-2, 12)$. Оптимум находится на отрезке $[K, L]$:

$$[K, L] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

5. а) $P_1 = (0, 1) = C \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_2 = (8, 9) = B \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_3 = (5, 8) \notin \text{Convex}(A, B, C)$, $P_4 = (4, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_5 = (3, 5) \in \text{Convex}(A, B, C)$, $P_6 = (0, 5) = A \in \text{Convex}(A, B, C)$.
- б) Допустимое множество $\text{Convex}(A, B, C)$, $A = (0, 5)$, $B = (8, 9)$, $C = (0, 1)$ является треугольником. Все точки из множества $\text{Convex}(A, B, C)$ могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При $c > -1/2$ оптимум находится в точке B . При $c < -1/2$ оптимум находится в точке A . При $c = -1/2$ оптимум находится на отрезке $[A, B]$.
- г) При $a \leq -6$ задача является неограниченной. При $a > -6$ задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений, $k_1 = 1/2$, $k_2 = -3/b$, $k_3 = 1$. Наклон линии уровня целевой функции равен $k = -2$. Если $k = k_2$, то решение задачи неединственно.
- Ответ: при $b = 3/2$ решение задачи неединственно.
- При $b = 3/2$ допустимое множество равно $\text{Convex}(A, B, C, D)$, $A = (0, 5)$, $B = (2, 6)$, $C = (3, 4)$, $D = (0, 1)$.
- Оптимум находится на отрезке $[B, C]$:

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

- 6.
- 7.
8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой \mathcal{F} , в этой задаче $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.
Пересечение всех множеств равно
- $$S = \bigcap_{D \in \mathcal{F}} D.$$
- Рассмотрим произвольные точки A и B из множества S .
По определению пересечения множеств, точки A и B лежат в любом из пересекаемых множеств $D \in \mathcal{F}$. Любое множество $D \in \mathcal{F}$ по условию задачи выпуклое, поэтому $[A, B] \subseteq D$.
Отрезок $[A, B]$ лежит в любом множестве $D \in \mathcal{F}$, поэтому отрезок $[A, B]$ лежит в пересечении множеств S .
- 9.
10. Допустимое множество: $\text{Convex}(A, B, C, D)$.

Канонический вид:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 1) \leftrightarrow x = (0, 1, 3, 11, 0) \\
 B &= (4/3, 7/3) \leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0) \\
 C &= (18/7, 12/7) \leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7) \\
 D &= (3, 0) \leftrightarrow x = (3, 0, 3, 0, 4)
 \end{aligned}$$

11. Допустимое множество: $\text{Convex}(A, B, C)$.

Канонический вид:

$$\begin{aligned}
 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\
 x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8) \\
 B &= (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0) \\
 C &= (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)
 \end{aligned}$$

Симплекс метод

3.1 Ведущим элементом можно выбрать: $(x_3, x_2), (x_6, x_5), (x_1, x_5)$.3.8 $z = 40, x = (22, 0, 2, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
3.9	x_4	2*	0	-1	1	-1	30	, $z = 168, x = (0, 48, 0, 30, 0, 0)$
	x_2	3	1	0	0	-1	48	
	$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	
	x_1	1	0	-1/2	1/2*	-1/2	-1/2	15
	x_2	0	1	3/2	-3/2	1/2	-1/2	3
	$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	-z + 168

3.9' $z = 11, x = (1, 0, 0, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	x_1	1	-1/3	0	0	2/3	1
	x_3	0	-2/3	1	-1	-1/3	0
	$\min z$	0	-6	0	-6	-8	-z + 11

, $x = (1, 0, 0, 0, 0), z = 11$.

3.9" $z = 96, x = (8, 0, 2, 0)$

3.11 $z = -3$, Базисные решения: $x = (0, 3, 0, 1, 1, 0)$

3.12 неограниченная задача

3.13 пустое допустимое множество

3.14 $z = -6$, оптимальные решения: $[A, B]$, $A = (1/4, 5/2)$, $B = (6/5, 3/5)$.

В данной задаче при переходе к симплекс-таблице нужно сделать замену $x_2 = a_2 - b_2$, $a_2 \geq 0$, $b_2 \geq 0$.

	x_1	a_2	b_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	0	1	$5/4$	$-1/8$	$19/4$
a_2	0	1	-1	0	$1/2$	$1/4$	$5/2$
x_1	1	0	0	0	$-1/4$	$1/8$	$1/4$
$\min z$	0	0	0	0	0	-1	$-z - 6$

Базисные оптимальные решения: $A = (x_1 = 1/4, a_2 = 5/2, b_2 = 0, x_3 = 19/4, x_4 = 0, x_5 = 0)$, $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$.

Ответ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} b_2 \geq 0, x_4 \in [0; 19/5] \\ x_1 = 1/4 + 1/4x_4 \\ x_3 = 19/4 - 5/4x_4 \\ a_2 = 5/2 + b_2 - 1/2x_4 \\ x_5 = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Ответ в виде суммы отрезка и конуса:

$$x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u),$$

где $A = (1/4, 5/2, 0, 19/4, 0, 0)$, $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$, $u = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$.

3.15 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_5) \in S \\ S = \{(x_3, x_5) \mid x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, 2 - x_3 + x_5 \geq 0, 6 - 2x_3 + x_5 \geq 0, 6 + 3x_3 - x_5 \geq 0\} \\ x_1 = 6 + 3x_3 - x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\ x_6 = 6 - 2x_3 + x_5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (0, 0, 0, 8, 6, 12)$, $B = (6, 0, 0, 2, 0, 6)$, $C = (12, 0, 2, 0, 0, 2)$, $D = (16, 0, 4, 0, 2, 0)$. и $v = (0, 0, 1, 2, 3, 1)$, $u = (1, 0, 1, 1, 2, 0)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D .

3.16 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_4) \in S \\ S = \{(x_2, x_4) \mid x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, 8 + x_2 - 2x_4 \geq 0, 2 + x_2 - x_4 \geq 0, 3 - x_2 + 3x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 8 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_6 = 3 - x_2 + 3x_4 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где $A = (11, 3, 0, 0, 5, 0)$, $B = (8, 0, 0, 0, 2, 3)$, $C = (4, 0, 0, 2, 0, 9)$, $D = (0, 4, 0, 6, 0, 17)$. и $v = (0, 2, 0, 1, 1, 1)$, $u = (1, 3, 0, 1, 2, 0)$.

Базисные оптимальные решения: A, B, C, D .

Двойственность

1.

$$\begin{cases} w = -3y_1 + 8y_2 - 8y_3 \rightarrow \min \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ -3y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 5 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} w = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + 2y_2 \leq 14 \\ 2y_1 + y_2 \leq 10 \\ y_1 + y_2 \leq 8 \\ y_1 - y_2 \leq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Допустимое множество в двойственной задаче: $\text{Convex}(A, B, C, D)$, $A = (0, -2)$, $B = (0, 7)$, $C = (2, 6)$, $D = (4, 2)$.

Оптимум в двойственной задаче: $y = D = (4, 2)$, $w = 6$.

Оптимум в исходной задаче: $x = (0, 1/3, 0, 4/3)$, $z = 6$.

3. а) Если $\Delta b_1 = 2$, то старая точка $D = (4, 2)$ остаётся оптимальной, $\Delta z = y_1 \Delta b_1 = 4 \cdot 2 = 8$.
 Если $\Delta b_1 = -2$, то новый оптимум в точке $A = (0, -2)$, $w_{\text{new}} = 2$, $\Delta z = -4$.
 Если $\Delta b_2 = 2$, то новый оптимум — $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$. Старая точка $D = (4, 2)$ остаётся оптимальной, $\Delta z = y_2 \Delta b_2 = 2 \cdot 2 = 4$.
 Если $\Delta b_2 = -2$, то новый оптимум в точке $A = (0, -2)$, $w_{\text{new}} = 6$, $\Delta z = 0$.
- б) При $\Delta z = 8$ нужно взять $\Delta b_1 = 2$.
 Значение $\Delta z = -8$ не возможно ни при каком Δb_1 .
- в) Значение $\Delta z = 4$ возможно в двух случаях:
- $\Delta b_2 = 2$, новый оптимум — $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$.
 - $\Delta b_2 = -4$, новый оптимум в точке B .

Критерий	$(1, 1, 7, 0)$	$(0, 0, 8, 0)$	$(1, 3, 0, 3)$	$(0, 4, 0, 4)$
----------	----------------	----------------	----------------	----------------

x — допустимое решение

4. Условия дополняющей нежёсткости

y — допустимое решение

x и y — оптимумы

Критерий	$x_a = (20, -24, 4, 4)$	$x_b = (0, 2, 0, 9)$	$x_c = (6, -4, 6, 0)$
x — допустимое решение	да	да	да
5. Условия дополняющей нежёсткости	нет	да	да
y — допустимое решение		нет, $(0, 13/8, -3/2)$	да, $(, ,)$
x и y — оптимумы	нет	нет	да

- 6.
7. В исходной задаче оптимум $x = (0, 20)$, $z = 80$. В двойственной задаче оптимум $y = (0, 2)$, $w = 80$.
 Ни одно из предложенных действий не влияет на оптимум двойственной задачи.

- $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2$, $z = 78$.
- $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1$, $z = 81$.
- $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2$, $z = 82$.
- $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0$, $z = 80$.
- $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 4$, $z = 84$.

8. Точка $x = (-1, 0, 3)$ — допустимая. Из условий дополняющей нежёсткости следует, что $y = (0.5 + a, 0, 0.5 + 3a)$. Точка y допустимая при $a \in [-1/2, 3/4]$.

Ответ: $a \in [-1/2, 3/4]$.

Транспортная задача

- 1.