

В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

## Графические методы

1. а) Оптимум:  $(x_1 = 5, x_2 = 6), z = 21$ .

б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум:  $(x_1 = 2, x_2 = 6), z = 2$ .



б)

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\
 x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

3. а)  $P_1 = (4, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (2, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (5, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (9, 3) \notin \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (8, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (5, 6) \in \text{Hull}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Hull}(A, B, C)$ ,  $A = (2, 7)$ ,  $B = (4, 8)$ ,  $C = (8, 4)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Hull}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > 3$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < 3$  оптимум находится в точке  $C$ . При  $c = 3$  оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ .
- г) При  $a \leq -2$  задача является неограниченной. При  $a > -2$  задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = -1/a$ ,  $k_3 = -1/2$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -3/2$ . Если  $k = k_2$ , то решение задачи неединственно. При  $a = 2/3$  задача имеет неединственное решение. При  $a = 2/3$  допустимое множество равно  $\text{Hull}(A, B, C)$ , где  $A = (2, 7)$ ,  $B = (6, 9)$ ,  $C = (1, 3)$ . Оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ :

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

4. а)  $P_1 = (4, 0) \notin \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (1, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (2, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (3, 8) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (4, 4) \in \text{Hull}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Hull}(A, B, C)$ ,  $A = (-3, 14)$ ,  $B = (5, 6)$ ,  $C = (3, 2)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Hull}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > 2$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < 2$  оптимум находится в точке  $A$ . При  $c = 2$  оптимум находится на отрезке  $[A, B]$ .
- г) При  $a \leq -2$  или  $a \geq 2$  задача является неограниченной. При  $a \in (-2; 2)$  задача является ограниченной или недопустимой.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = +2$ ,  $k_3 = -a$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -1/2$ . Если  $k = k_3$ , то решение задачи неединственно. При  $a = 1/2$  задача имеет неединственное решение. При  $a = 1/2$  допустимое множество равно  $\text{Hull}(K, L, C)$ , где  $C = (3, 2)$ ,  $K = (6, 8)$ ,  $L = (-2, 12)$ . Оптимум находится на отрезке  $[K, L]$ :

$$[K, L] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

5. а)  $P_1 = (0, 1) = C \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (8, 9) = B \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (5, 8) \notin \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (4, 7) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (3, 5) \in \text{Hull}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (0, 5) = A \in \text{Hull}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Hull}(A, B, C)$ ,  $A = (0, 5)$ ,  $B = (8, 9)$ ,  $C = (0, 1)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Hull}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > -1/2$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < -1/2$  оптимум находится в точке  $A$ . При  $c = -1/2$  оптимум находится на отрезке  $[A, B]$ .
- г) При  $a \leq -6$  задача является неограниченной. При  $a > -6$  задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = -3/b$ ,  $k_3 = 1$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -2$ . Если  $k = k_2$ , то решение задачи неединственно.
- Ответ: при  $b = 3/2$  решение задачи неединственно.
- При  $b = 3/2$  допустимое множество равно  $\text{Hull}(A, B, C, D)$ ,  $A = (0, 5)$ ,  $B = (2, 6)$ ,  $C = (3, 4)$ ,  $D = (0, 1)$ .
- Оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ :

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

- 6.
- 7.
8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой  $\mathcal{F}$ , в этой задаче  $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ .

Пересечение всех множеств равно

$$S = \bigcap_{D \in \mathcal{F}} D.$$

Рассмотрим произвольные точки  $A$  и  $B$  из множества  $S$ .

По определению пересечения множеств, точки  $A$  и  $B$  лежат в любом из пересекаемых множеств  $D \in \mathcal{F}$ . Любое множество  $D \in \mathcal{F}$  по условию задачи выпуклое, поэтому  $[A, B] \subseteq D$ .

Отрезок  $[A, B]$  лежит в любом множестве  $D \in \mathcal{F}$ , поэтому отрезок  $[A, B]$  лежит в пересечении множеств  $S$ .

9.

10. Допустимое множество:  $\text{Hull}(A, B, C, D)$ .

Канонический вид:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 1) \leftrightarrow x = (0, 1, 3, 11, 0) \\
 B &= (4/3, 7/3) \leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0) \\
 C &= (18/7, 12/7) \leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7) \\
 D &= (3, 0) \leftrightarrow x = (3, 0, 3, 0, 4)
 \end{aligned}$$

11. Допустимое множество:  $\text{Hull}(A, B, C)$ .

Канонический вид:

$$\begin{aligned}
 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\
 x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8) \\
 B &= (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0) \\
 C &= (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)
 \end{aligned}$$

## Симплекс метод

3.1 Ведущим элементом можно выбрать:  $(x_3, x_2)$ ,  $(x_6, x_5)$ ,  $(x_1, x_5)$ .3.8  $z = 40$ ,  $x = (22, 0, 2, 0)$ 

3.9

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	2*	0	-1	1	-1	-1	30
$x_2$	3	1	0	0	-1	-2	48
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

$z = 168, x = (0, 48, 0, 30, 0, 0)$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_1$	1	0	-1/2	1/2*	-1/2	-1/2	15
$x_2$	0	1	3/2	-3/2	1/2	-1/2	3
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

$z = 168, x = (15, 3, 0, 0, 0, 0)$

3.9'  $z = 11$ ,  $x = (1, 0, 0, 0)$ 

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
3.9'	$x_1$	1	-1/3	0	0	2/3	1
	$x_3$	0	-2/3	1	-1	-1/3	0
	$\min z$	0	-6	0	-6	-8	-z + 11

,  $x = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $z = 11$ .

3.9"  $z = 96, x = (8, 0, 2, 0)$

3.11  $z = -3$ , Базисные решения:  $x = (0, 3, 0, 1, 1, 0)$

3.12 неограниченная задача

3.13 пустое допустимое множество

3.14  $z = -6, x = (0.25, 2.5)$

3.15 Все решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2, x_5) \in S \\ S = \{(x_3, x_5) \mid x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, 2 - x_3 + x_5 \geq 0, 6 - 2x_3 + x_5 \geq 0, 6 + 3x_3 - x_5 \geq 0\} \\ x_1 = 6 + 3x_3 - x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\ x_6 = 6 - 2x_3 + x_5 \\ z = 7 \end{array} \right.$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где  $A = (0, 0, 0, 8, 6, 12)$ ,  $B = (6, 0, 0, 2, 0, 6)$ ,  $C = (12, 0, 2, 0, 0, 2)$ ,  $D = (16, 0, 4, 0, 2, 0)$ . и  $v = (0, 0, 1, 2, 3, 1)$ ,  $u = (7, 0, 1, 1, 2, 0)$ .

Базисные оптимальные решения:  $A, B, C, D$ .

3.16 Все решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2, x_4) \in S \\ S = \{(x_2, x_4) \mid x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, 8 + x_2 - 2x_4 \geq 0, 2 + x_2 - x_4 \geq 0, 3 - x_2 + 3x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 8 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_6 = 3 - x_2 + 3x_4 \\ z = 7 \end{array} \right.$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где  $A = (11, 3, 0, 0, 5, 0)$ ,  $B = (8, 0, 0, 0, 2, 3)$ ,  $C = (4, 0, 0, 2, 0, 8)$ ,  $D = (0, 4, 0, 6, 0, 17)$ . и  $v = (?, 2, 0, 1, ?, ?)$ ,  $u = (?, 3, 0, 1, ?, ?)$ .

Базисные оптимальные решения:  $A, B, C, D$ .

## Двойственность

## Транспортная задача

1.