

В решениях используются обозначения

Линейная оболочка (linear span):

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Конус (cone):

$$\text{Cone}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}$$

Выпуклая линейная оболочка (convex linear hull):

$$\text{Hull}(v_1, v_2, v_3) = \text{Convex}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

## Графические методы

1. а) Оптимум:  $(x_1 = 5, x_2 = 6), z = 21$ .

б)

$$\begin{aligned} 3a_1 - 3b_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ 2a_1 - 2b_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2a_1 + 2b_1 + x_2 - x_4 &= -4 \\ a_1 - b_1 + x_2 + x_5 &= 11 \\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. а) Оптимум:  $(x_1 = 2, x_2 = 6), z = 2$ .



б)

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -14 \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\
 x_1 - 2x_2 + x_6 &= 10 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

3. а)  $P_1 = (4, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (2, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (5, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (9, 3) \notin \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (8, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (5, 6) \in \text{Convex}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Convex}(A, B, C)$ ,  $A = (2, 7)$ ,  $B = (4, 8)$ ,  $C = (8, 4)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Convex}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > 3$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < 3$  оптимум находится в точке  $C$ . При  $c = 3$  оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ .
- г) При  $a \leq -2$  задача является неограниченной. При  $a > -2$  задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = -1/a$ ,  $k_3 = -1/2$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -3/2$ . Если  $k = k_2$ , то решение задачи неединственно. При  $a = 2/3$  задача имеет неединственное решение. При  $a = 2/3$  допустимое множество равно  $\text{Convex}(A, B, C)$ , где  $A = (2, 7)$ ,  $B = (6, 9)$ ,  $C = (1, 3)$ . Оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ :

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

4. а)  $P_1 = (4, 0) \notin \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (1, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (2, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (3, 8) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (-3, 13) \notin \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (4, 4) \in \text{Convex}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Convex}(A, B, C)$ ,  $A = (-3, 14)$ ,  $B = (5, 6)$ ,  $C = (3, 2)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Convex}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > 2$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < 2$  оптимум находится в точке  $A$ . При  $c = 2$  оптимум находится на отрезке  $[A, B]$ .
- г) При  $a \leq -2$  или  $a \geq 2$  задача является неограниченной. При  $a \in (-2; 2)$  задача является ограниченной или недопустимой.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = +2$ ,  $k_3 = -a$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -1/2$ . Если  $k = k_3$ , то решение задачи неединственно. При  $a = 1/2$  задача имеет неединственное решение. При  $a = 1/2$  допустимое множество равно  $\text{Convex}(K, L, C)$ , где  $C = (3, 2)$ ,  $K = (6, 8)$ ,  $L = (-2, 12)$ . Оптимум находится на отрезке  $[K, L]$ :

$$[K, L] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

5. а)  $P_1 = (0, 1) = C \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_2 = (8, 9) = B \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_3 = (5, 8) \notin \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_4 = (4, 7) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_5 = (3, 5) \in \text{Convex}(A, B, C)$ ,  $P_6 = (0, 5) = A \in \text{Convex}(A, B, C)$ .
- б) Допустимое множество  $\text{Convex}(A, B, C)$ ,  $A = (0, 5)$ ,  $B = (8, 9)$ ,  $C = (0, 1)$  является треугольником. Все точки из множества  $\text{Convex}(A, B, C)$  могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации единственным образом.
- в) При  $c > -1/2$  оптимум находится в точке  $B$ . При  $c < -1/2$  оптимум находится в точке  $A$ . При  $c = -1/2$  оптимум находится на отрезке  $[A, B]$ .
- г) При  $a \leq -6$  задача является неограниченной. При  $a > -6$  задача является ограниченной.
- д) Найдём наклоны прямых-ограничений,  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = -3/b$ ,  $k_3 = 1$ . Наклон линии уровня целевой функции равен  $k = -2$ . Если  $k = k_2$ , то решение задачи неединственно.
- Ответ: при  $b = 3/2$  решение задачи неединственно.
- При  $b = 3/2$  допустимое множество равно  $\text{Convex}(A, B, C, D)$ ,  $A = (0, 5)$ ,  $B = (2, 6)$ ,  $C = (3, 4)$ ,  $D = (0, 1)$ .
- Оптимум находится на отрезке  $[B, C]$ :

$$[B, C] = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in [0; 1] \right\}$$

- 6.
- 7.
8. Обозначим список пересекаемых множеств буквой  $\mathcal{F}$ , в этой задаче  $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ .  
Пересечение всех множеств равно
- $$S = \bigcap_{D \in \mathcal{F}} D.$$
- Рассмотрим произвольные точки  $A$  и  $B$  из множества  $S$ .  
По определению пересечения множеств, точки  $A$  и  $B$  лежат в любом из пересекаемых множеств  $D \in \mathcal{F}$ . Любое множество  $D \in \mathcal{F}$  по условию задачи выпуклое, поэтому  $[A, B] \subseteq D$ .  
Отрезок  $[A, B]$  лежит в любом множестве  $D \in \mathcal{F}$ , поэтому отрезок  $[A, B]$  лежит в пересечении множеств  $S$ .
- 9.
10. Допустимое множество:  $\text{Convex}(A, B, C, D)$ .

Канонический вид:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 1) \leftrightarrow x = (0, 1, 3, 11, 0) \\
 B &= (4/3, 7/3) \leftrightarrow x = (4/3, 7/3, 0, 13/3, 0) \\
 C &= (18/7, 12/7) \leftrightarrow x = (18/7, 12/7, 0, 0, 13/7) \\
 D &= (3, 0) \leftrightarrow x = (3, 0, 3, 0, 4)
 \end{aligned}$$

11. Допустимое множество:  $\text{Convex}(A, B, C)$ .

Канонический вид:

$$\begin{aligned}
 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\
 x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Соответствие:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0) \leftrightarrow x = (1, 0, 0, 8) \\
 B &= (3/11, 32/11) \leftrightarrow x = (3/11, 32/11, 0, 0) \\
 C &= (9, 0) \leftrightarrow x = (9, 0, 32, 0)
 \end{aligned}$$

## Симплекс метод

3.1 Ведущим элементом можно выбрать:  $(x_3, x_2), (x_6, x_5), (x_1, x_5)$ .3.8  $z = 40, x = (22, 0, 2, 0)$ 

3.9

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	2*	0	-1	1	-1	-1	30
$x_2$	3	1	0	0	-1	-2	48
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

,  $z = 168, x = (0, 48, 0, 30, 0, 0)$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_1$	1	0	-1/2	1/2*	-1/2	-1/2	15
$x_2$	0	1	3/2	-3/2	1/2	-1/2	3
$\min z$	0	0	-6	0	-5	-6	$-z + 168$

,  $z = 168, x = (15, 3, 0, 0, 0, 0)$

3.9'  $z = 11, x = (1, 0, 0, 0)$ 

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	
3.9'	$x_1$	1	-1/3	0	0	2/3	1
	$x_3$	0	-2/3	1	-1	-1/3	0
	$\min z$	0	-6	0	-6	-8	-z + 11

,  $x = (1, 0, 0, 0, 0), z = 11$ .

3.9"  $z = 96, x = (8, 0, 2, 0)$

3.11  $z = -3$ , Базисные решения:  $x = (0, 3, 0, 1, 1, 0)$

3.12 неограниченная задача

3.13 пустое допустимое множество

3.14  $z = -6$ , оптимальные решения:  $[A, B]$ ,  $A = (1/4, 5/2)$ ,  $B = (6/5, 3/5)$ .

В данной задаче при переходе к симплекс-таблице нужно сделать замену  $x_2 = a_2 - b_2$ ,  $a_2 \geq 0$ ,  $b_2 \geq 0$ .

	$x_1$	$a_2$	$b_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	0	0	0	1	$5/4$	$-1/8$	$19/4$
$a_2$	0	1	$-1$	0	$1/2$	$1/4$	$5/2$
$x_1$	1	0	0	0	$-1/4$	$1/8$	$1/4$
$\min z$	0	0	0	0	0	$-1$	$-z - 6$

Базисные оптимальные решения:  $A = (x_1 = 1/4, a_2 = 5/2, b_2 = 0, x_3 = 19/4, x_4 = 0, x_5 = 0)$ ,  $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$ .

Ответ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} b_2 \geq 0, x_4 \in [0; 19/5] \\ x_1 = 1/4 + 1/4x_4 \\ x_3 = 19/4 - 5/4x_4 \\ a_2 = 5/2 + b_2 - 1/2x_4 \\ x_5 = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Ответ в виде суммы отрезка и конуса:

$$x \in \text{Convex}(A, B) + \text{Cone}(u),$$

где  $A = (1/4, 5/2, 0, 19/4, 0, 0)$ ,  $B = (6/5, 3/5, 0, 0, 19/5, 0)$ ,  $u = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$ .

3.15 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_5) \in S \\ S = \{(x_3, x_5) \mid x_3 \geq 0, x_5 \geq 0, 2 - x_3 + x_5 \geq 0, 6 - 2x_3 + x_5 \geq 0, 6 + 3x_3 - x_5 \geq 0\} \\ x_1 = 6 + 3x_3 - x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 2 - x_3 + x_5 \\ x_6 = 6 - 2x_3 + x_5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где  $A = (0, 0, 0, 8, 6, 12)$ ,  $B = (6, 0, 0, 2, 0, 6)$ ,  $C = (12, 0, 2, 0, 0, 2)$ ,  $D = (16, 0, 4, 0, 2, 0)$ . и  $v = (0, 0, 1, 2, 3, 1)$ ,  $u = (1, 0, 1, 1, 2, 0)$ .

Базисные оптимальные решения:  $A, B, C, D$ .

3.16 Все решения:

$$\begin{cases} (x_2, x_4) \in S \\ S = \{(x_2, x_4) \mid x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, 8 + x_2 - 2x_4 \geq 0, 2 + x_2 - x_4 \geq 0, 3 - x_2 + 3x_4 \geq 0\} \\ x_1 = 8 + x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_6 = 3 - x_2 + 3x_4 \\ z = 7 \end{cases}$$

Или

$$x \in \text{Convex}(A, B, C, D) + \text{Cone}(u, v),$$

где  $A = (11, 3, 0, 0, 5, 0)$ ,  $B = (8, 0, 0, 0, 2, 3)$ ,  $C = (4, 0, 0, 2, 0, 9)$ ,  $D = (0, 4, 0, 6, 0, 17)$ . и  $v = (0, 2, 0, 1, 1, 1)$ ,  $u = (1, 3, 0, 1, 2, 0)$ .

Базисные оптимальные решения:  $A, B, C, D$ .

## Двойственность

1.

$$\begin{cases} w = -3y_1 + 8y_2 - 8y_3 \rightarrow \min \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ -3y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 5 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} w = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max \\ y_1 + 2y_2 \leq 14 \\ 2y_1 + y_2 \leq 10 \\ y_1 + y_2 \leq 8 \\ y_1 - y_2 \leq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Допустимое множество в двойственной задаче:  $\text{Convex}(A, B, C, D)$ ,  $A = (0, -2)$ ,  $B = (0, 7)$ ,  $C = (2, 6)$ ,  $D = (4, 2)$ .

Оптимум в двойственной задаче:  $y = D = (4, 2)$ ,  $w = 6$ .

Оптимум в исходной задаче:  $x = (0, 1/3, 0, 4/3)$ ,  $z = 6$ .

3. а) Если  $\Delta b_1 = 2$ , то старая точка  $D = (4, 2)$  остаётся оптимальной,  $\Delta z = y_1 \Delta b_1 = 4 \cdot 2 = 8$ .  
 Если  $\Delta b_1 = -2$ , то новый оптимум в точке  $A = (0, -2)$ ,  $w_{\text{new}} = 2$ ,  $\Delta z = -4$ .  
 Если  $\Delta b_2 = 2$ , то новый оптимум —  $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$ . Старая точка  $D = (4, 2)$  остаётся оптимальной,  $\Delta z = y_2 \Delta b_2 = 2 \cdot 2 = 4$ .  
 Если  $\Delta b_2 = -2$ , то новый оптимум в точке  $A = (0, -2)$ ,  $w_{\text{new}} = 6$ ,  $\Delta z = 0$ .
- б) При  $\Delta z = 8$  нужно взять  $\Delta b_1 = 2$ .  
 Значение  $\Delta z = -8$  не возможно ни при каком  $\Delta b_1$ .
- в) Значение  $\Delta z = 4$  возможно в двух случаях:  
 i.  $\Delta b_2 = 2$ , новый оптимум —  $[C, D] = [(2, 6), (4, 2)]$ .  
 ii.  $\Delta b_2 = -4$ , новый оптимум в точке  $B$ .

Критерий	(1, 1, 7, 0)	(0, 0, 8, 0)	(1, 3, 0, 3)	(0, 4, 0, 4)
----------	--------------	--------------	--------------	--------------

$x$  — допустимое решение

4. Условия дополняющей нежёсткости

$y$  — допустимое решение

$x$  и  $y$  — оптимумы

Критерий	$x_a = (20, -24, 4, 4)$	$x_b = (0, 2, 0, 9)$	$x_c = (6, -4, 6, 0)$
----------	-------------------------	----------------------	-----------------------

$x$  — допустимое решение

5. Условия дополняющей нежёсткости

$y$  — допустимое решение

$x$  и  $y$  — оптимумы

да

нет

нет

нет

да

да

нет,  $(0, 13/8, -3/2)$

нет

да

да

да,  $(, , )$

да

- 6.
7. В исходной задаче оптимум  $x = (0, 20)$ ,  $z = 80$ . В двойственной задаче оптимум  $y = (0, 2)$ ,  $w = 80$ .  
 Ни одно из предложенных действий не влияет на оптимум двойственной задачи.

а)  $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2$ ,  $z = 78$ .

б)  $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1$ ,  $z = 81$ .

в)  $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2$ ,  $z = 82$ .

г)  $\Delta z = y_2 \Delta b_2 - p_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0$ ,  $z = 80$ .

д)  $\Delta z = y_1 \Delta b_1 - p_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 4$ ,  $z = 84$ .

8. Точка  $x = (-1, 0, 3)$  — допустимая. Из условий дополняющей нежёсткости следует, что  $y = (0.5 + a, 0, 0.5 + 3a)$ . Точка  $y$  допустимая при  $a \in [-1/2, 3/4]$ .

Ответ:  $a \in [-1/2, 3/4]$ .

Альтернативное решение. Подставим  $x_3 = 2 - x_1 - x_2$  во все условия. Допустимое множество в осях  $(x_1, x_2)$ :

$$\{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0, 3x_2 - 2x_1 \leq 2\}$$

Случай  $a = 0$  подходит.

Случай  $a > 0$ . При этом  $k = (1 + 2a)/5a \geq 2/3$ , откуда  $a \in (0; 3/4]$ .

Случай  $a < 0$ . При этом  $k = (1 + 2a)/5a \leq 0$ , откуда  $a \in [-1/2; 0)$ .

Объединяем случаи:  $a \in [-1/2; 3/4]$ .

## Транспортная задача

1.