1. а) Двойственная задача:

$$\begin{cases} 24y_1 + 20y_2 - 4y_3 \to \min \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1 - 3y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 = 4 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

б) Двойственная задача в каноническом виде:

$$\begin{cases} 24y_1 + 20(p_2 - n_2) - 4y_3 \to \min \\ 3y_1 + (p_2 - n_2) + 2y_3 - y_4 = 4 \\ y_1 - 3y_3 - y_5 = -1 \\ -2y_1 + (p_2 - n_2) - y_3 = 4 \\ y_1 + 2(p_2 - n_2) - y_3 - y_6 = 7 \\ y_1 \geq 0, p_2 \geq 0, n_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

в) Специальные ограничения можно записать в виде $Av = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ p_2 \\ n_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}.$$

г) В двойственной задаче в каноническом виде 7 переменных и 4 специальных ограничения.

д) Допустимым базисным решением задачи в каноническом виде называется любой вектор v, у которого все $v_i \geq 0$, и столбцы матрицы специальных ограничений $\operatorname{col}(A, i)$ при $v_i \neq 0$ линейно независимы.

е) Например, вектор $v = (y_1 = 0, p_2 = 13/3, n_2 = 0, y_3 = 1/3, y_4 = 1, y_5 = 0, y_6 = 4/3)$ является базисным допустимым решением, соответствующие ненулевым числам столбцы матрицы A линейно-независимы:

$$\operatorname{col}(A, «p_2») = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \operatorname{col}(A, «y_3») = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \operatorname{col}(A, «y_4») = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \operatorname{col}(A, «y_6») = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Например, вектор $v = (y_1 = -1, p_2 = -2, n_2 = -3, y_3 = -4, y_4 = -5, y_5 = -6, y_6 = -7)$ не является базисным допустимым решением.

2. а) Двойственная задача:

$$\begin{cases} w = 9y_1 + 6y_2 \to \min \\ y_1 + y_2 \geq 4 \\ 5y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_1 + 8y_2 \geq 18 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 пересекаются в одной точке.

Решение двойственной задачи: $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, минимум равен 30.

б) В двойственной задаче $y_1 > 0$, поэтому $x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$. В двойственной задаче $y_2 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 + 8x_3 = 6$.

Решение исходной задачи: $x_3 \in [0; 21/39]$, $x_2 = (3 + 7x_3)/4$, $x_1 = (21 - 39x_3)/4$, максимум равен 30.

Решение исходной задачи можно также записать в виде $\text{Convex}(A, B)$, где $A = (21/4, 3/4, 0)$, $B = (0, 22/13, 21/39)$.

в) Сравниваем два варианта:

i. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\Delta\pi = -\Delta b_1 \cdot p + \Delta b_1 \cdot y_1 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$.

ii. Решение двойственной задачи сохраняется. Изменение прибыли равно $\Delta\pi = -\Delta b_2 \cdot p + \Delta b_2 \cdot y_2 = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3$. Данный вариант выгоднее.

3. а) Стартовое решение методом северо-западного угла:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	$\boxed{2}$ 4	$\boxed{5}$ 6	$\boxed{2}$
$a_3 = 4$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{6}$ 12

Возможный первый шаг:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	5 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	9 $\boxed{2}$	1 $\boxed{5}$	$\boxed{2}$
$a_3 = 4$	$\boxed{9}$	4 $\boxed{6}$	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$	1 $\boxed{9}$	12 $\boxed{6}$

Возможный второй шаг:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	5 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	8 $\boxed{2}$	2 $\boxed{5}$	$\boxed{2}$
$a_3 = 4$	$\boxed{9}$	4 $\boxed{6}$	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	1 $\boxed{3}$	$\boxed{9}$	12 $\boxed{6}$

Все оптимальные решения: $\text{Convex}(A, B)$.

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{2}$ 8
$a_3 = 4$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$ 9	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 4

B	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$ 10
$a_3 = 4$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$ 9	$\boxed{9}$ 2	$\boxed{6}$ 2

Оптимальная стоимость равна $10 + 20 + 24 + 27 + 18 + 12 = 111$.

б) Например, матрица специальных ограничений может иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Любую строку матрицы можно вычеркнуть, так как

$$\operatorname{row}_1 A + \operatorname{row}_2 A + \operatorname{row}_3 A + \operatorname{row}_4 A = \operatorname{row}_5 A + \operatorname{row}_6 A + \operatorname{row}_7 A.$$

в) Старое решение A остаётся оптимальным:

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{2}$ 8
$a_3 = 4$	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$ 9	$\boxed{\infty}$	$\boxed{6}$ 4

Старое решение B перестаёт быть оптимальным.

г) Старые решения A и B остаются оптимальными для новой таблицы:

A	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$
$a_2 = 10$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{2}$ 8
$a_3 = 4$	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$
$a_4 = 13$	$\boxed{3}$ 9	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 4

B	$b_1 = 9$	$b_2 = 11$	$b_3 = 12$
$a_1 = 5$	2	2 5	1
$a_2 = 10$	2	5	2 10
$a_3 = 4$	6	6 4	7
$a_4 = 13$	3 9	9 2	6 2

Оптимальная стоимость, по-прежнему, равна 111.

4.

Грузоподъёмность	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12	12	16	16	16	20	20	20
A, B	0	0	0	4	4	4	8	9/8	9/8	9/12	13/12	13/12	13/16	17/16	18/16	18/20	21/20	22/20
A, B, C	0	0	0	4	4	4	8	9	10/9	10/12	10/13	14/13	14/16	14/17	18/18	19/20	20/21	22/22
A, B, C, D	0	0	0	4	4	4	8	9	10	12	12/13	12/14	12/16	16/17	16/18	16/20	20/21	21/22

а) Максимальная прибыль равна $\phi_{ABC}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $C + 3A$ или $2B + A$.

б) Максимальная прибыль равна $\phi_{AB}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $2B + A$.

в)

$$\begin{cases} 4x_a + 9x_b + 10x_c \to \max \\ 3x_a + 7x_b + 8x_c \leq 17 \\ x_a, x_b, x_c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

г) Максимальная прибыль равна $\phi_{ABCD}(17) = 22$. Оптимальная загрузка: $C + 3A$ или $2B + A$.

5.

вершина									
A_1	0	0^*							
A_2	∞	6	3	3	3^*				
A_3	∞	2	2	2^*					
A_4	∞	1	1^*						
A_5	∞	∞	∞	7	6	6^*			
A_6	∞	∞	8	8	8	7	7^*		
A_7	∞	∞	9	9	9	9	8	8^*	
A_8	∞	∞	∞	∞	∞	11	9	9	9^*

а) Оптимальные маршруты:

$$A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{2} A_8, \quad A_1 \xrightarrow{1} A_4 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7 \xrightarrow{1} A_8,$$

стоимость равна 9.

б) $A_2 \xrightarrow{3} A_5 \xrightarrow{1} A_6 \xrightarrow{1} A_7$, стоимость равна 5.