

1. Кортес с бандой головорезов высадился на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет. Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно. Ценность деревушки для Кортеса — одна единица, ценность собственных головорезов — 2 единицы. Если Кортес будет драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки — главное остаться в живых, но и сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

а) Нарисуйте дерево игры и найдите исход методом обратной индукции.

б) Что изменится, если Кортес сжигает корабли?

2. На острове живут 99 тигров и одна вкусная волшебная антилопа. Если тигр съест волшебную антилопу, то он сам превратится в волшебную антилопу. Мясо волшебной антилопы настолько вкусно, что любой тигр готов ради его вкуса на превращение в антилопу. Но ни один тигр не готов полностью расстаться с жизнью ради мяса антилопы. Тигры охотятся только в одиночку.

Что будет происходить на этом острове?

3. В 1612 г. в Лионе появилась книга поэта и математика Баше де Мезирьяка (Claude Gaspar Bachet de Méziriac) «Занимательные и приятные числовые задачи» (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres). В ней была предложена следующая игра. Двое по очереди называют числа от 1 до 10, выигрывает тот, кто первым доведет сумму до 100.

В чью пользу эта игра?

Примечание: Баше де Мезирьяк перевел с греческого на латынь Арифметику Диофаната, на полях которой Ферма сформулировал свою великую теорему.

4. Полный золота торговый корабль был захвачен $n \geq 3$ абсолютно рациональными пиратами. У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т.д. Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против: если дележ одобрен более чем половиной пиратов (включая предложившего дележ), то он принимается, а если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При одинаковых выгодах для себя пират голосует за тот вариант, где в живых остается больше сотоварищей.

Какой дележ будет реализован (предположим, что золото бесконечно делимо)?

5. Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй — числа 1, 6 и 8; на третьей — числа 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число. Победитель получает от проигравшего 100 рублей.

Каковы шансы на победу каждого игрока при правильной игре?

6. Количество денег в волшебной шкатулке постоянно увеличивается! Время дискретно. В момент времени $t \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ там находится $2t$ рублей. Каждый из двух игроков решает, когда ему потребовать деньги. Тот кто потребует деньги первым — получает сумму полностью, тот, кто потребует вторым — не получает ничего. Если требования поступают одновременно, то игроки делят сумму в шкатулке поровну. Если никто не потребует деньги к моменту $t = 100$, то деньги сгорают.

Как будут развиваться события при абсолютной рациональности игроков?

7. Три дуэлянта решили стреляться из-за Прекрасной Дамы. Они одновременно делают выстрел, каждый сам выбирает, в кого целиться. Если после первого выстрела в живых осталось больше одного человека, то выжившие снова одновременно стреляют недруг в недруга. Трюэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется один человек или пока все не погибнут. Первый попадает с вероятностью 0.9, второй — с вероятностью 0.5, третий — с вероятностью 0.1.

- а) В кого кому следует стрелять, чтобы максимизировать вероятность своей победы?
- б) Найдите вероятность победы каждого игрока.