

Ссылка на этот документ: git.io/Jc8uK или https://github.com/bdemeshev/tigers_lecture_2021-07-02.

1. На острове живут 2021 тигр и одна вкусная волшебная антилопа.

Если тигр съест волшебную антилопу, то он сам превратится в волшебную антилопу. Мясо волшебной антилопы настолько вкусно, что любой тигр готов ради его вкуса на превращение в антилопу. Но ни один тигр не готов полностью расстаться с жизнью ради мяса антилопы. Тигры охотятся только в одиночку.

Что будет происходить на этом острове?

2. Кортес с бандой головорезов высадился на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет. Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно. Ценность деревушки для Кортеса — одна единица, ценность собственных головорезов — 2 единицы. Если Кортес будет драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки — главное остаться в живых, но и сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

Почему Кортес сжёг корабли?

3. Полный золота торговый корабль был захвачен $n \geq 3$ абсолютно рациональными пиратами. У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и так далее.

Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против.

Делёж одобряется, если за него голосует больше половины пиратов, включая предложившего делёж¹.

Если делёж не одобрен, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При одинаковых выгодах для себя пират голосует за тот вариант, где в живых остается больше сотоварищей.

Золото бесконечно делимо.

Какой дележ будет реализован?

4. В гонке за призом в 10 рублей участвуют два игрока, у каждого из которых с собой есть 16 рублей. Они по очереди называют ставки. Ставки должны быть целочисленными, первая — неотрицательная, каждая последующая ставка — больше предыдущей. Вместо очередной ставки любой игрок может сказать «Довольно!» При этом игра оканчивается, оба игрока платят последние сделанные ими ставки. Приз достаётся игроку с наибольшей последней ставкой.

Найдите равновесие Нэша, совершенное в подыграх.

¹Для простоты будем считать, что при равенстве голосов делёж не одобряется, но это не искажает идею решения.

5. Две фирмы одновременно назначают цены на свою продукцию. Предельные издержки обеих фирм равны 0.1. Рыночный спрос описывается функцией $Q = \max(1 - P, 0)$. Весь спрос достается фирме, назначившей наименьшую цену; если фирмы назначили одинаковую цену, то спрос делится между ними поровну.

Покупатель полностью осведомлён о ценах.

- а) Найдите равновесие Нэша.
 - б) Найдите равновесие Нэша, если каждая фирма обязуется вернуть покупателю разницу в цене товара, если конкурент продает дешевле.
6. Собрались n Мудрых тараканов и решили одновременно искать Истину. Каждый может добросовестно искать или отдыхать. Если Мудрый таракан ищет Истину, то он находит ее независимо от других с вероятностью 0.5. Если Истина будет найдена хотя бы одним Мудрым тараканом, то он расскажет ее всем, и все получают полезность +1. Поиск Истины связан с издержками 0.1.
- а) Будет ли одинокий Мудрый таракан искать истину ($n = 1$)?
 - б) Найдите равновесие по Нэшу в чистых стратегиях для произвольного n ;
 - в) Найдите симметричное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях для любого n ;
 - г) Как зависит от n доля Мудрых тараканов, ищущих Истину?
 - д) Как зависит от n вероятность того, что Истина будет найдена?
7. За окном большого жилого дома драка, плохие парни бьют одного хорошего. За дракой в окно наблюдает n обывателей. Каждый из обывателей может либо позвонить в полицию, либо просто наблюдать.
- Обыватели хотели бы, чтобы полиция приехала и хороший парень был спасен — в этом случае обыватели получают полезность 1. Однако обыватель не хочет звонить в полицию, звонок означает некоторые издержки равные 0.01 для звонящего. Если в полицию никто не позвонит, то исход будет грустный и у всех обывателей полезность 0.
- а) Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях.
 - б) Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях.
8. Задача о банкротстве. Фирма банкрот должна трём должникам 100, 200 и 300 конфет. Однако на счетах банкрота всего 200 конфет.
- а) Опишите данную задачу как кооперативную игру.
 - б) Найдите вектор Шепли.
 - в) Найдите нуклеолус.

9. Разберитесь, насколько хорошо концепции из кооперативной теории игр помогают определять вклад переменных в качество прогнозов.

У меня нет ни готового критерия для «хорошо», ни даже примерного представления о том, как может выглядеть верный ответ. Раз вектор Шепли оказался полезен, то и другие концепции могут «выстрелить» :)