

## Учебник по временным рядам: начало

Винни-Пух

30 июля 2019 г.

# Одномерные временные ряды

### Стационарные процессы

Из курса математического анализа мы знаем разницу между рядами и последовательностями. В последовательности числа записаны одно за другим, скажем, через запятую,

$$5, 8, -3, 2, 4, 5, \dots$$

А ряд — это бесконечная сумма чисел, например,

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$$

Настала пора дать первое определение и раскрыть глаза!

**Определение 1.** Временной ряд — это последовательность случайных величин.

Индекс временного ряда может быть бесконечным в обе стороны,

$$\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$$

бесконечным в одну сторону,

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$$

либо конечным,

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_T.$$

Чтобы отличать весь временной ряд от одной конкретной случайной величины, мы будем использовать обозначения:

$y_t$  — одна конкретная случайная величина;

$(y_t) = y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  — вся последовательность случайных величин.

Если контекст требует, то можно проявить больше аккуратности и указать возможные значения индекса, например,  $(y_t)_{t=1}^{\infty}$ .

Начнём с самого простого временного ряда — белого шума.

**Определение 2.** Ряд  $(u_t)$  называется белым шумом (white noise), если он удовлетворяет трём свойствам:

а) Нулевое математическое ожидание,  $\mathbb{E}(u_t) = 0$  для любого  $t$ .

Да, да, всё верно, временной ряд — это не ряд, ноль — чётное число, единица — не простое, а Деда Мороза не существует.

- б) Постоянная дисперсия,  $\text{Var}(u_t) = \sigma_u^2$  для любого  $t$ .
- в) Нулевая ковариация,  $\text{Cov}(u_t, u_s) = 0$  для любых  $t \neq s$ .

Заметим, что случайные величины в белом шуме вполне могут быть зависимы. Например,

...

**Определение 3.** Ряд  $(y_t)$  называется слабо стационарным (weakly stationary), или просто стационарным, если он удовлетворяет трём свойствам:

- а) Постоянное математическое ожидание,  $\mathbb{E}(y_t) = \mu$  для любого  $t$ .
- б) Постоянная дисперсия,  $\text{Var}(y_t) = \gamma_0$  для любого  $t$ .
- в) Ковариация двух величин зависит только от их удалённости по времени друг от друга,  $\text{Cov}(y_t, y_s) = \gamma_{t-s}$  для любых  $t$  и  $s$ .

**Определение 4.** Ряд  $(y_t)$  называется процессом скользящего среднего порядка  $q$  (moving average of order  $q$ ), если он представим в виде:

$$y_t = u_t + b_1 u_{t-1} + \dots + b_q u_{t-q},$$

где  $(u_t)$  — белый шум. Обозначаем такие процессы мы так:  $y_t \sim MA(q)$ .

## Решения

## Todo list

## Источники мудрости

Источники мудрости, кои авторы постарались не замутить. Смело направляйте к ним верблюдов своего любопытства!

## Список литературы

- (<https://math.stackexchange.com/users/169207/stumped>), stumped (б.р.).  
*Expected value of sock pairs*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/894509> (version: 2014-08-11). eprint: <https://math.stackexchange.com/q/894509>.  
 URL: <https://math.stackexchange.com/q/894509>.
- Blom, Gunnar (1994). *Problems and Snapshots from the World of Probability*. Springer. Задачи с решениями и небольшими исследованиями.
- Bruss, F Thomas (2000). «Sum the odds to one and stop». В: *Annals of Probability*, с. 1384—1391. URL: <https://projecteuclid.org/euclid.aop/1019160340>. Простейшая стратегия для игр, где надо остановиться на последнем успехе!

- Friedlen, DM и Doug Pryor (1990). «E3265». В: *The American Mathematical Monthly* 97.3, с. 242–244.
- Gravner, Janko (б.г.). *Twenty problems in probability*. URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135A/resources/chpr.pdf>.
- Li, Shuo-Yen Robert (1980). «A martingale approach to the study of occurrence of sequence patterns in repeated experiments». В: *the Annals of Probability*, с. 1171–1176. URL: <https://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.aop/1176994578>.
- Ruggles, Richard и Henry Brodie (1947). «An empirical approach to economic intelligence in World War II». В: *Journal of the American Statistical Association* 42.237, с. 72–91. Подробности про то, как захватив всего два танка, можно оценить ежемесячный выпуск с точностью в пару процентов.
- Vanderbei, Robert (2011). «Postdoc variant of the secretary problem». В: URL: <https://vanderbei.princeton.edu/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf>. Подружка Разборчивой невесты хочет второго красавца!
- Wilf, Herbert S (2013). *generatingfunctionology*. Elsevier. URL: <https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>. Шикарная книжка про производящие функции.
- Winkler, Peter (2002). «Games people don't play». В: *Puzzler's Tribute: a Feast for the Mind*, с. 301–313. URL: <http://www.teorver.ru/newkatalog/1193689162.pdf>. Несколько красивейших задач с решениями!
- Гусейн-Заде, С.М. (2003). *Разборчивая невеста*. МЦНМО. Задача в изложении для девятиклассников, <http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.25.pdf>.
- Колмогоровские студенческие олимпиады по теории вероятностей (б.г.). URL: <http://new.math.msu.su/departement/probab/olimpia/olimpia.htm>.
- Свойства случайных перестановок (б.г.). URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Random\\_permutation\\_statistics](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_permutation_statistics).
- Секей, Габор (1990). *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. Москва, Мир. Парадоксы с решениями и историей.
- Феллер, Вильям (2010). *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. URSS: Либроком. Очень старый и очень классный учебник по теории вероятностей в двух томах.