**Задания по временным рядам (6 семестр)**

*В приводимых ниже заданиях под стационарностью случайного процесса подразумевается стационарность в широком смысле (слабая стационарность).*

**К лекции 01**

**Задание 1 *Ковариации некоторых временных рядов.***

1. Докажите, что если  *–* стационарный временной ряд и *c* – некоторая постоянная, то временные ряды  и (+ *c*) имеют одинаковые коррелограммы.
2. Пусть  *–* стационарный временной ряд,  Будет ли стационарным ряд ?

Методические указания. Вычислите ковариации ряда .

1. Пусть случайная величина *X*  имеет распределение, симметричное относительно нуля, и дисперсию . Будет ли стационарным временной ряд ?
2. Пусть, где , *U*, *V*– i.i.d., ,



(случайные колебания с частотой). Является ли процесс  стационарным?

**Задание 2 *Построение реализаций процесса белого шума.***

Смоделируйте 4 реализации процесса гауссовского белого шума с единичной дисперсией. Постройте раздельные графики этих реализаций и объединенный график для всех четырех реализаций. Для каждой реализации проведите обычную диагностику остатков от оцененной регрессии реализации на константу.

Методические указания.

Образуйте новый рабочий файл **white\_noise.wf1**, рассчитанный на 100 наблюдений, и в меню этого файла выберите опцию **Genr**. В открывшемся окне укажите формулу порождения ряда **eps1**:

**eps1=@nrnd**.

Снова выберите **Genr**, и в открывшемся окне укажите формулу порождения ряда **eps2**:

**eps2=@nrnd**.

Проделайте аналогичные действия для получения рядов **eps3** и **eps4**.

Образуйте новый объект **Group** 🡺 **Group01** – группу, включающую все полученные ряды. В меню этой группы выберите **View** 🡺 **Multiple Graph** 🡺 **Line –** это дает раздельные графики полученных рядов. В меню той же группы **Group01** выберите **View** 🡺 **Graph** 🡺 **Line –** это объединенный график для полученных рядов.

**Задание 3**  ***Проверка ряда на независимость, одинаковую распределенность и нормальность с использованием критериев согласия.***

Проверьте гипотезы о том, что полученные в задании 4 ряды являются реализациями гауссовских процессов белого шума с единичной дисперсией, используя критерии согласия, включенные в версии пакета EViews выше 4.0 (***Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Cramer-von Mises, Anderson-Darling, Watson***).

Согласуются ли результаты применения критериев согласия с результатами диагностики остатков, проведенной в задании 2?

**Задание 4** ***Проверка гипотезы случайности и гипотезы нормальности для одного экономического ряда.***

В пакете EViews создайте новый рабочий файл с названием **dj\_1984\_daily.wf1** . На сайте <http://www.measuringworth.org> возьмите дневные данные по индексу Доу-Джонса (на момент закрытия) за период с 28 февраля по 31 декабря 1984 года. Поместите их в форме ряда (Series) с названием **dj** (ряд Index) в созданный рабочий файл.

1) Сначала рассмотрите период 28.02-7.06 (наблюдения с номерами 1-71). Проверьте гипотезу о том, что значения ряда на этом периоде образуют случайную выборку из нормального распределения, используя критерии согласия, включенные в версии пакета EViews выше 4.0 (Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Cramer-von Mises, Anderson-Darling, Watson), а также критерий Харке–Бера.

Проведите на этом периоде аналогичный анализ для логарифмической доходности индекса (ряд Return), определяемой как изменение логарифма индекса от сессии к сессии.

2) Проведите аналогичный анализ ряда логарифмических доходностей на всем периоде 28.02-31.12(наблюдения с номерами 1-214).

*В приводимых ниже заданиях cоотношение*  *означает, что случайный процесс*  *является процессом белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией*, равной1*.*

**Задание 5 *Процесс скользящего среднего.***

1. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным? Найдите его математическое ожидание, дисперсию и автоковариации. Вычислите первые 5 значений автокорреляционной функции и постройте ее график. Запишите этот процесс, используя оператор запаздывания *L*. Является ли этот процесс обратимым?
2. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным? Найдите его математическое ожидание, дисперсию и автоковариации. Вычислите первые 5 значений автокорреляционной функции и постройте ее график. Является ли этот процесс обратимым?
3. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным? Найдите его математическое ожидание, дисперсию и автоковариации. Вычислите первые 5 значений автокорреляционной функции и постройте ее график. Является ли этот процесс обратимым?
4. Смоделируйте реализацию длины 100 процесса, . По этой реализации вычислите средние:

.

Сравните эти значения со значениями  и , соответственно.

**К лекции 02**

**Задание 6 *Подмена частот.***

Пусть, где , *U*, *V*– i.i.d., ,



. Рассмотрите случайный процесс



, *m* – целое.

Покажите, что для любого целого *t* , так что колебания, частоты которых отличаются от λ0 на неотличимы на множестве значений от колебаний с частотой λ0 . 🡺 Достаточно рассматривать .



Минимальный возможный период колебаний соответствует частоте и равен



**Задание 7**

Рассмотрите случайный процесс , где *λ*1, *λ*2, … , *λk* принадлежат интервалу (0,*π*], *U*1, *U*1, … , *Uk* , *V*1, *V*2, … , *Vk* – *i.i.d.* ,



, .

Найдите математическое ожидание и автоковариации процесса. Покажите, что



**.** Здесь – спектр процесса .

**Задание 8 *Спектральная плотность процесса скользящего среднего порядка q, MA(q).***

, {*εt* | *t* ∈ *T*} – процесс белого шума с дисперсией .



Найдите спектральную плотность процесса  при *q*=1 и *q*=2.

**Задание 9 *Долговременная дисперсия процесса MA*(1).**



Найдите долговременную дисперсию процесса , {*εt* | *t* ∈ *T*} – процесс белого шума с дисперсией .



**Задание 11**

1. Найдите значение выражения.
2. Запишите случайный процесс  с использованием оператора запаздывания.

**Задание 12 *Представление процесса AR(p) в форме MA(∞) .***

1. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным? Найдите его математическое ожидание, дисперсию и автоковариации. Вычислите первые 5 значений автокорреляционной функции и постройте ее график. Если возможно, представьте этот процесс в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка.
2. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным?
3. Пусть. Является ли случайный процесс  стационарным? Найдите его математическое ожидание, дисперсию и автоковариации. Если возможно, представьте этот процесс в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка. вычислите первые 5 значений автокорреляционной функции и постройте ее график.

**Задание 13 *Обратимость процесса скользящего среднего.***

1. Пусть. Является ли случайный процесс  обратимым? Если возможно, представьте этот процесс в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка.
2. Пусть. Является ли случайный процесс  обратимым? Если это возможно, представьте этот процесс в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка.
3. Пусть. Является ли случайный процесс  обратимым? Если возможно, представьте этот процесс в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка.

**Задание 14 *Долговременная дисперсия стационарного процесса AR*(1).**



Найдите долговременную дисперсию процесса .

**Задание 15  *Вычисление* *спектральной плотности процессов AR(p).***

Найдите спектральные плотности стационарных процессов AR(1), AR(2).

**Задача 16**

Докажите, что если *Xt* – процесс типа AR(*p*), то тогда

*ρpart*(*k*)= 0 для *k* > *p*.

**Задача 17**

(a) Для каждого из стационарных процессов, рассмотренных в задачах 10 и 11, вычислите значения частной автокорреляционной функции *ρpart*(*k*) для значений *k =* 1, 2 и 3.

(b) Используя пакет EViews, смоделируйте реализации стационарных процессов, рассмотренных в задачах 10 и 11, сравните средние значения полученных реализаций и их коррелограммы с теоретическими значениями.

**К лекции 03**

**Задача 18 *Построение реализаций процесса авторегрессии.***

Смоделируйте реализации (длины 100) процессов авторегрессии

*Xt = a*0+ *a*1 *Xt –*1 + *εt*

с одной и той же реализацией процесса гауссовского белого шума, полагая

(1) *a*0 = 0, *a*1 = 0.1, *X*0 = 0;

(2) *a*0 = 0, *a*1 = 0.5, *X*0 = 0;

(3) *a*0 = 0, *a*1 = – 0.5, *X*0 = 0;

(4) *a*0 = 5, *a*1 = 0.5, *X*0 = 10;

(5) *a*0 = 5, *a*1 = 0.5, *X*0 = 5;

(6) *a*0 = 5, *a*1 = 0.5, *X*0 = 0;

(7) *a*0 = 0, *a*1 = 0.8, *X*0 = 10;

(8) *a*0 = 0, *a*1 = 0.8, *X*0 = 5;

(9) *a*0 = 5, *a*1 = 0.8, *X*0 = 0;

Проследите за особенностями полученных реализаций. Сравните гладкость реализаций, полученных в пунктах (1) – (3). Вокруг каких уровней происходят флуктуации построенных реализаций? Вокруг каких уровней должны происходить флуктуации в теоретических моделях? Объясните различие в поведении реализации, полученной в пункте (4), и реализаций, полученных в пунктах (5) и (6). Сравните скорости выхода на стационарный режим реализаций, полученных в п.п. (4) и (7), (5) и (8), (6) и (9).

Методические указания.

Постройте базовую реализацию процесса гауссовского белого шума под именем **eps**.

1. Создайте объект **Series** c именем **x1**, используя клавишу **Genr** в меню рабочего файла: **Enter equation 🡺 x1=0**.Создайте объект **Model** с именем **M1** и специфицируйте его следующим образом: **x1=0.1\*x1(-1)+eps**. В меню модели **M1** выберите клавишу **Solve**. В открывшемся меню отключите **Stop on missing data** в **Iteration control** и нажмите клавишу **OK**. В результате ряд **x1** становится реализацией модели (1). В меню этого ряда выберите:

**View: Descriptive Statistics** 🡺 **Histogram and Stats**.

В строке **Mean** указано среднее значение ряда **x1**, а в строке **Std. Dev. –** стандартное отклонение этого ряда.

(2) Создайте объект **Series** c именем **x2**, используя клавишу **Genr** в меню рабочего файла: **Enter equation 🡺 x2=0**.Создайте объект **Model** с именем **M2** и специфицируйте его следующим образом: **x2=0.5\*x2(–1)+eps**. В меню модели **M1** выберите клавишу **Solve**. В открывшемся меню отключите **Stop on missing data** в **Iteration control** и нажмите клавишу **OK**. В результате ряд **x2** становится реализацией модели (2). В меню этого ряда выберите:

**View: Descriptive Statistics** 🡺 **Histogram and Stats**.

В строке **Mean** указано среднее значение ряда **x2**, а в строке **Std. Dev. –** стандартное отклонение этого ряда.

(3) Создайте объект **Series** c именем **x3**, **Enter equation 🡺 x3=0**. Создайте объект **Model** с именем **M3** и специфицируйте его следующим образом: **x3= –0.5\*x3(–1)+eps**. В результате ряд **x3** становится реализацией модели (3).

(4) Создайте объект **Series** c именем **x4**, **Enter equation 🡺 x4=10**. Создайте объект **Model** с именем **M4** и специфицируйте его следующим образом: **x4= 5 + 0.5\*x4(–1)+eps**. В результате ряд **x4** становится реализацией модели (4).

(5) Создайте объект **Series** c именем **x5**, **Enter equation 🡺 x5=5**. Создайте объект **Model** с именем **M5** и специфицируйте его следующим образом: **x5= 5 + 0.5\*x5(–1)+eps**. В результате ряд **x5** становится реализацией модели (5).

(6) Создайте объект **Series** c именем **x6**, **Enter equation 🡺 x6=0**. Создайте объект **Model** с именем **M6** и специфицируйте его следующим образом: **x6= 5 + 0.5\*x6(–1)+eps**. В результате ряд **x6** становится реализацией модели (6).

**Задача 19 *Второе стационарное решение авторегрессионного уравнения.***

При определении модели AR(1) *Xt = a Xt –*1 + *εt*  предполагалось, что случайные величины *εt* образуютинновационную последовательность, так что *εt*  – процесс белого шума с *D*(*εt*) = *σε*2 и *Cov*(*Xt–s*, *εt*) = 0 для всех  *s* > 0. При этом было показано, что если , то стационарное решение уравнения *Xt = a Xt –*1 + *εt*  имеет вид *Xt =*.

Покажите, что если снять условие *Cov*(*Xt–s*, *εt*) = 0 для всех  *s* > 0, то тогда уравнение *Xt = a Xt –*1 + *εt*  имеет стационарное решение и при . Найдите это решение.

Методические указания.

В случае  используется последовательность итераций:

*Xt = a X t –* 1 + *εt* = *a* (*a Xt –*2 + *εt –*1) + *εt* = …

Для случая  начните итерации с соотношения

*=* (1/*a*)– (1/*a*).

В результате получим:

**.

Так как **, то отсюда получаем:

*Xt = a X t –* 1 + *εt*  .

Остается заметить, что ** и показать, что **  и что ** зависит только от * .*

**Задача 20 *Стационарность процесса ARMA.***

Пусть.

(a) Является ли случайный процесс  стационарным?

(b) Найдите его математическое ожидание, дисперсию, автокорреляции и частные автокорреляции до 3-го порядка включительно.

(c) Если возможно, представьте этот процесс в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка и в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка.

(d)  Смоделируйте реализацию (длины 100) процесса ; сравните оцененную коррелограмму с теоретической.

**Задача 21**

По известным значениям частной автокорреляционной функции  и  случайного процесса найдите первое и второе значения его автокорреляционной функции.

**Задача 22**

Найдите параметры *p*, *q* стационарной модели *ARMA*(*p*, *q*) и коэффициенты  и  соответствующей модели, если , ,  для .

**Задача 23**

Найдите параметры *p*, *q* стационарной и обратимой модели *ARMA*(*p*, *q*) и коэффициенты  и  соответствующей модели, если ,  для .

**Задача 24**

Найдите коэффициенты стационарного процесса *AR*(*2*), если известно, что  и .

**Задача 25**

Найдите параметры *p*, *q* стационарной модели *ARMA*(*p*, *q*) и коэффициенты  и  соответствующей модели, если  и  для . Является ли эта модель обратимой?

**Задача 26**

Найдите коэффициенты  стационарной и обратимой модели *ARMA*(1, 1), для которой , .

**Задача 27 *Построение реализаций смешанного процесса авторегрессии – скользящего среднего. Проблема общих множителей*** *(common factor model).*

(1) Постройте реализации (длины 100) процессов

,

,

используя одну и ту же реализацию процесса белого шума.

(2) Сравните полученные реализации процессов  и . Объясните результаты этого сравнения.

Методические указания.

1. Сначала постройте реализацию процесса гауссовского белого шума **eps**.

Для построения реализации процесса  создайте ряд **X**, полагая **x=0**, а затем модель **mod\_x**  со спецификацией **x=1.3\*x(-1)-0.4\*x(-2)+eps-0.3\*eps(-1)-0.4\*eps(-2)** .

Для построения реализации процесса  создайте ряд **Y**, полагая **y=0**, а затем модель **mod\_y**  со спецификацией **y=0.5\*y(-1)+eps+0.5\*eps(-1)**.

(2) Сравните полученные реализации процессов  и  в рамках объекта **Group**. Для объяснения результатов сравнения запишите обе модели с использованием оператора запаздывания.

**Задача 28** [***Подбор стационарной модели ARMA для ряда наблюдений***](#_Toc19941735) ***– объем продукции фирмы General Motors.***

Рассмотрите данные о количестве произведенных всеми отделениями фирмы General Motors Corp транспортных средств (грузовиков, легковых машин и автобусов), приведенные в Табл. П-3.1 Приложения к разделу 3. **Файл в EViews 6 : ex1\_2\_1**

1. Ограничьте анализ ряда периодом с 1970 по 1990 год. Постройте график ряда. Похож ли он на график стационарного ряда?
2. Можно ли использовать для описания ряда модель авторегрессии – если можно, то какого порядка должна быть модель?
3. Оцените соответствующую AR модель. Является ли оцененная модель стационарной?
4. Продиагностируйте оцененную модель. Обнаруживаются ли нарушения стандартных предположений об ошибках?
5. Можно ли упростить модель, отказываясь от включения в правую часть уравнения некоторых запаздываний? Не приводит ли такое упрощение к нарушению стандартных предположений об ошибках или к нарушению стационарности модели?
6. Если представляются подходящими более одной модели, сравните альтернативные модели, используя информационные критерии, и выберите “наилучшую” модель.

Методические указания.

1. В меню рабочего файла выберите: **Sample** 🡺 **1970 1990**. В меню объекта **Series X** выберите: **View** 🡺 **Line Graph** .
2. Проанализируйте коррелограмму ряда. Для этого в меню объекта  **Series** **X** выберите: **View** 🡺 **Correlogram** 🡺 **Correlogram of:** **Level** . Что касается окна **Lags to include**, то можно оставить количество лагов (запаздываний), предлагаемое программой. Обратите внимание на поведение (выборочной) частной автокорреляционной функции.
3. Создайте новый объект – уравнение для оценивания коэффициентов соответствующей AR модели. В главном меню выберите: **Object** 🡺 **New Object** 🡺 **Equation** 🡺 **eq1** .Специфицировать уравнение можно двумя способами.

Первый способ:

**X C X(-1) X(-2) X(-3)**

Этот способ соответствует стандартной записи процесса авторегрессии третьего порядка в виде:

*Xt = a*0+ *a*1 *Xt –*1 + *a*2 *Xt –*2 + *a*3 *Xt–*3 + *εt*,

Константа **С** представляет в такой спецификации коэффициент *а***0**. Математическое ожидание процесса равно *а***0 /** (1– *a*1 – *a*2 – *a*3).

Второй способ:

**X C AR(1) AR(2) AR(3)**

Этот способ соответствует записи процесса авторегрессии третьего порядка в отклонениях от математического ожидания:

(*Xt* – *μ*)*= a*1(*Xt –*1 – *μ*) + *a*2(*Xt –*2 – *μ*)+ *a*3(*Xt–*3 – *μ*) + *εt* ;

константа **С** представляет в такой спецификации само математическое ожидание.

При использовании второго способа в протоколе оценивания указываются числа, обратные корням уравнения *a*(z) = 0 (**Inverted AR Roots**). Если все эти числа по модулю меньше единице, то оцененная модель стационарна.

1. Используйте диагностические процедуры, изученные в курсе “Эконометрика-1”.
2. Ориентируйтесь на P-значения для оценок коэффициентов и результаты применения диагностических процедур.
3. Используйте для сравнения критерии Акаике и Шварца.

**Задача 29 *Проблемы, связанные с оцениванием моделей скользящего среднего, близких к необратимым, и необратимых моделей скользящего среднего.***

* + 1. Смоделируйте несколько реализаций модели *Xt = εt* − 0.975*εt –*1, используя различные реализации гауссовского белого шума *εt* , *t* = 1, 2, … , 50, *ε*0 *=* 0. По каждой реализации оцените статистическую модель *Xt = εt* − *b*1*εt –*1.
    2. Смоделируйте реализацию необратимой модели *Xt = εt* − 1.25*εt –*1. По этой реализации оцените статистическую модель *Xt = εt* − *b*1*εt –*1. Прокомментируйте полученный результат.

Методические указания.

1. Проведите оценивание без использования и с использованием опции “**Backcast MA terms**”. Обратите внимание на возможность получения необратимой оцененной модели. В случае получения обратимой оцененной модели проанализируйте влияние на результаты оценивания выбора стартового значения коэффициента в опции “**ARMA options: starting coefficient values**”.

Например, **param c(1) 0.9**

1. Проведите оценивание без использования и с использованием опции “**Backcast MA terms**”. (При необратимости модели опция backcast отключается.)

**Задача 30** [***Подбор стационарной модели ARMA для ряда наблюдений***](#_Toc19941735) ***c выраженной сезонностью***

**(1)** Для квартальных данных чисто сезонными являются стационарные модели ***сезонной авторегрессии первого порядка*** (**SAR(1) –** first orderseasonal autoregression**)**

*Xt* = *a*4 *Xt –*4 + *εt*, ‌ ,

и ***сезонного скользящего среднего первого порядка***(**SMA(1) –** first orderseasonal moving average)

*Xt* = *εt* + *b*4 *εt –*4 .

В первой модели

*ρ*(*k*) = *a*4*k/4*  для *k =* 4*m*, *m* = 0, 1, 2, …,

*ρ*(*k*) = 0 для остальных *k* > 0.

Во второй модели

*ρ*(0) = 1, *ρ*(4) = *b*4 , *ρ*(*k*) = 0 для остальных *k* > 0.

Cмоделируйте реализации модели SAR(1) с *a*4 = 0.8 и модели SMA(1) с *b*4 = 0.8.

Используя эти реализации, проведите процедуру подбора подходящей модели ряда.

Смоделируйте стационарные мультипликативные спецификации

(1– *a*1*L*)*X­t*  = (1+ *b*1*L*)(1+ *b*4*L*4) *εt* , *Xt* = *a*1 *Xt–*1 + *εt* + *b*1 *εt–*1+ *b*4 *εt–*4 + *b*1*b*4 *εt–*5 ,

(1– *a*1*L*)(1– *a*4*L*4) *X­t*  = (1+ *b*1*L*) *εt* . *X­t*  = *a*1 *Xt–*1 + *a*4 *Xt–*4 – *a*1*a*4 *Xt–*5 + *εt* + *b*1 *εt–*1 .

Используя эти реализации, проведите процедуру подбора подходящей модели ряда.

(2) Рассмотрите **данные об объемах производства водки и ликеро-водочных изделий в РФ**, приведенные в Табл. П-3.2 Приложения к разделу 3. **Файл EViews6: ex1\_2\_4**

Подберите подходящую модель порождения этого ряда данных на периоде с 1999:01 по 2003:12.

Методические указания.

Постройте график ряда на периоде с 1999:01 по 2003:12. Обратите внимание на возможное наличие сезонности в поведении этого ряда. Рассмотрите коррелограмму ряда. Обратите внимание на пики частной автокорреляционной функции – наличие значимых пиков на лагах 1 и 12. Попробуйте использовать мультипликативную модель(1– *a*1*L*)(1– *a*12*L*12) *X­t* = *εt* ,

которая специфицируется в рамках объекта Equation следующим образом:

**X C AR(1) SAR(12)**