

Дорогой храбрый воин или храбрая воительница! Удачи тебе на большом празднике по временным рядам! Начни с того, что напиши клятву и подпишись под ней:

Я клянусь честью студента, что буду выполнять эту работу самостоятельно.

А теперь — задачки:

1. (5 баллов) Найди дискретное преобразование Фурье для последовательности 2, 2, 2, 7, 7, 7.
2. (5 баллов) Рассмотрим уравнение $y_t = 4.25y_{t-1} - y_{t-2} + u_t$, где (u_t) — белый шум, и его стационарное решение.

Найди α_{-1} , α_0 , α_1 в представлении

$$y_t = \dots + \alpha_{-1}u_{t+1} + \alpha_0u_t + \alpha_1u_{t-1} + \dots$$

Хинт: $(1 - 4L)(1 - 0.25L) = 1 - 4.25L + L^2$.

3. (10 баллов) Перед твоими очами стационарный $ARMA(1, 1)$ процесс вида

$$y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + u_t + 0.2u_{t-1},$$

где (u_t) — белый шум.

- а) Найди первые три значения автокорреляционной функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 .
 - б) Найди первые два значения частной автокорреляционной функции ϕ_{11}, ϕ_{22} .
4. (10 баллов) Ты бесстрашно оцениваешь $GARCH(1, 1)$ модель вида:

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \\ \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 1) \end{cases}$$

И получаешь оценки:

$$\hat{\alpha}_0 = 0.1, \quad \hat{\alpha}_1 = 0.3, \quad \hat{\beta}_1 = 0.7, \quad \hat{\sigma}_{100}^2 = 1, \quad \hat{\varepsilon}_{100} = 0.5$$

Построй **95% интервальный** прогноз модели на один и два шага вперёд.

Хинт: не забудь, что прогноз — это условное матожидание при условии доступной информации.

5. (10 баллов) Рассмотрим систему уравнений $VAR(1)$ модели:

$$\begin{cases} y_t = 0.2 + 0.5y_{t-1} + 0.1z_{t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ z_t = 0.1 + 0.2z_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{cases}, \quad \text{Var}(\varepsilon) = 9 \cdot I.$$

- а) Является ли система уравнений стабильной?
- б) Если да, то найди $E(z_t)$ и $\text{Cov}(y_t, z_t)$ у стационарного решения.

Там ещё есть задачи, держись!!!

6. Рассмотрим $MA(2)$ модель $y_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}$.

а) (5 баллов) Представь данную модель в виде модели пространства состояний (состояние-наблюдение)

б) (10 баллов) Максимально явно опиши все формулы пересчёта для фильтра Калмана в данной ситуации.

7. (10 баллов) Перед твоими очами стационарный $ARMA(1, 1)$ процесс вида

$$y_t = 2 + 0.6y_{t-1} + u_t + 0.2u_{t-1},$$

где (u_t) — белый шум.

Дополнительно известно, что $u_{100} = -1$, $y_{100} = 4$, $\sigma_u^2 = 9$.

Построй 95% предиктивный интервал на один и два шага вперёд.