

Дорогой храбрый воин или храбрая воительница! Удачи тебе на первом празднике по временным рядам! Начни с того, что напиши клятву и подпишись под ней:

*Я клянусь честью студента, что буду выполнять эту работу самостоятельно.*

А теперь — задачки:

1. Рассмотрим уравнение  $y_t = 3 + 0.4y_{t-1} + u_t$ , где  $u_t$  независимы и нормальны  $\mathcal{N}(0; 9)$  Я не спрашиваю, есть ли у уравнения стационарное решение и сколько их. Скажу прямо: оно есть! Верь мне! И даже добавлю, что в нём  $y_t$  представим в виде

$$y_t = c + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots$$

- (a) Найди  $c$  и все  $\alpha_k$ .  
(b) Найди  $E(y_t)$ ,  $\text{Var}(y_t)$  и первые два значения автокорреляционной функции.

Дополнительно известно, что  $y_{100} = 5$ .

- (c) Найди 95%-й предиктивный интервал для  $y_{101}$ .  
(d) Найди 95%-й долгосрочный предиктивный интервал для  $y_{100+h}$ , где  $h \rightarrow \infty$ . Зависит ли он от  $y_{100}$ ?  
2. Временной ряд порождается  $MA(2)$  процессом  $y_t = 3 + u_t + 0.5u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$ , где  $u_t$  — белый шум. Однако Винни-Пух строит регрессию  $\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-1}$  с помощью МНК.  
(a) Найди  $E(y_t)$ ,  $\text{Var}(y_t)$ ,  $\text{Cov}(y_t, y_s)$ .  
(b) Какие коэффициенты примерно получит Винни-Пух, если у него много наблюдений?  
3. Рассмотрим процесс  $y_t = u_1 \sin 5t + u_2 \cos 5t$ , где  $u_t$  — белый шум.

- (a) Является ли данный процесс стационарным?  
(b) Можно ли представить данный процесс в виде  $MA(\infty)$ ? На всякий случай, чтобы не гуглить, я напомню,  $MA(\infty)$ -процесс имеет вид:

$$y_t = c + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум. И да, обращаю внимание, что шум  $\varepsilon_t$  не обязательно совпадает с шумом  $u_t$

Дорогой студент, храбро решающий онлайн контрольную! Я в тебя верю, осталось три задачи! Смелее переходи на следующую страницу!

4. У стационарного процесса  $y_t$  первые две обычные корреляции равны  $\rho_1 = 0.5$ ,  $\rho_2 = 0.2$ , а ожидание равно  $E(y_t) = 20$ .

Известно, что  $y_{100} = 25$ ,  $y_{99} = 22$ . Найди наилучший точечный прогноз для  $y_{101}$ .

Пссст, парень! Это была задача про частные корреляции!

5. Вспомни  $ETS(AAN)$  модель, а я тебе даже уравнения напишу:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \end{cases}$$

- (a) Ты вчера чатик читал? Помнишь там вопрос был? Ага! Докажи, что ни при каких  $\ell_0$  и  $b_0$  этот процесс не будет стационарным. Или опровергни и приведи пример, при каких будет.

Константы  $\alpha, \beta$  лежат в интервале  $(0; 1)$ .

- (b) При  $\ell_{100} = 20$ ,  $b_{100} = 2$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\sigma^2 = 16$  построй интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

6. Величины  $x_t$  равновероятно равны 0 или 1, а величины  $u_t$  нормальны  $\mathcal{N}(0; 1)$ . Все упомянутые величины независимы. Рассмотрим процесс  $z_t = x_t^2(1 - x_{t-1})u_t$ .

- (a) Найди  $\text{Cov}(z_t, z_s)$ . Стационарен ли процесс  $z_t$ ?

- (b) Скажу тебе по секрету, что  $z_{100} = 2.3$ . Построй точечный и 95%-й интервальный прогноз на один и два шага вперёд. Чем интервальные прогнозы в этой задаче особенные?