

Дорогой храбрый воин или храбрая воительница! Удачи тебе на первом празднике по временным рядам! Начни с того, что напиши клятву и подпишись под ней:

Я клянусь честью студента, что буду выполнять эту работу самостоятельно.

А теперь — задачки:

1. Рассмотрим уравнение $y_t = 3 - 0.4y_{t-1} + u_t$, где u_t независимы и нормальны $\mathcal{N}(0; 9)$. Я не спрашиваю, есть ли у уравнения стационарное решение и сколько их. Скажу прямо: оно есть! Верь мне! И даже добавлю, что в нём y_t представим в виде

$$y_t = c + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots$$

- (a) Найди c и все α_k .
(b) Найди $E(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$ и первые два значения автокорреляционной функции.

Дополнительно известно, что $y_{100} = 5$.

- (c) Найди 95%-й предиктивный интервал для y_{101} .
(d) Найди 95%-й долгосрочный предиктивный интервал для y_{100+h} , где $h \rightarrow \infty$. Зависит ли он от y_{100} ?
2. Временной ряд порождается $MA(2)$ процессом $y_t = 3 + u_t + 0.5u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$, где u_t — белый шум. Однако Винни-Пух строит регрессию $\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_{t-2}$ с помощью МНК.
(a) Найди $E(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$, $\text{Cov}(y_t, y_s)$.
(b) Какие коэффициенты примерно получит Винни-Пух, если у него много наблюдений?

3. Рассмотрим процесс $y_t = u_1 \sin 7t + u_2 \cos 7t$, где u_t — белый шум.

- (a) Является ли данный процесс стационарным?
(b) Можно ли представить данный процесс в виде $MA(\infty)$? На всякий случай, чтобы не гуглить, я напомню, $MA(\infty)$ -процесс имеет вид:

$$y_t = c + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

где ε_t — белый шум. И да, обращаю внимание, что шум ε_t не обязательно совпадает с шумом u_t .

Дорогой студент, храбро решающий онлайн контрольную! Я в тебя верю, осталось три задачи! Смелее переходи на следующую страницу!

4. У стационарного процесса y_t первые две обычные корреляции равны $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.2$, а ожидание равно $E(y_t) = 20$.

Известно, что $y_{101} = 25$, $y_{99} = 22$. Наблюдение y_{100} пропущено. Найди наилучший точечный прогноз для y_{100} .

Пссст, парень! Это была задача про частные корреляции!

5. Вспомни $ETS(AAN)$ модель, а я тебе даже уравнения напишу:

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \end{cases}$$

- (a) Ты вчера чатик читал? Помнишь там вопрос был? Ага! Докажи, что ни при каких ℓ_0 и b_0 этот процесс не будет стационарным. Или опровергни и приведи пример, при каких будет.

Константы α, β лежат в интервале $(0; 1)$.

- (b) При $\ell_{100} = 20$, $b_{100} = 2$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3$, $\sigma^2 = 25$ построй интервальный прогноз на один и два шага вперёд.

6. Величины x_t равновероятно равны 0 или 1, а величины u_t нормальны $\mathcal{N}(0; 1)$. Все упомянутые величины независимы. Рассмотрим процесс $z_t = x_t^2(1 - x_{t-2})u_t$.

- (a) Найди $\text{Cov}(z_t, z_s)$. Стационарен ли процесс z_t ?

- (b) Скажу тебе по секрету, что $z_{100} = 2.3$. Построй точечный и 95%-й интервальный прогноз на один и два шага вперёд. Чем интервальные прогнозы в этой задаче особенные?