Привет !!

2021-12-03
TSSP QA

Q. Что такое dX_t?

A. Его нет!
Нет у него никакого смысла!

краткая запись: $dX_t = 7dt + W_t \cdot dW_t$

подразумеваем: $X_t = X_0 + \int_0^t 7\,du + \int_0^t W_u \, dW_u$

RV

→ что такое dX?

→ $\boxed{dX_t \text{ не существует как мат. объект.}}$

интуитивно, примерно $\Delta t \approx 0$

$$\Delta X_t = \underbrace{X_{t+\Delta t} - X_t}_{\text{сл. вел.}} \approx 7 \cdot \underbrace{\Delta t}_{\text{число}} + \underbrace{W_t}_{\text{с.в.}} \cdot (W_{t+\Delta t} - W_t)$$

$o(x) + o(x) = o(x)$

ф-ция

кратк.

$x^2 = o(x)$

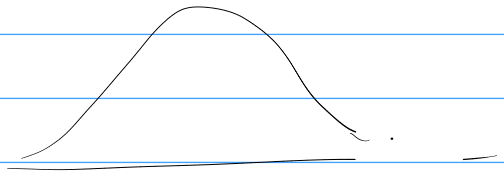
$x^3 = o(x)$

$x^2 = x^3$?

полная запись.

$$x^2 \in \left\{ f(x) \;\middle|\; \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \right\}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2)\, dx$$ не выр. через эл. ф-ции



Инт	Ито	$\int_0^t A_u\, dW_u$	$E\left(\int_0^t A_u\, dW_u\right) = 0$ [интуиция: инвест в броун. движ] $Var\left(\int_0^t A_u\, dW_u\right) = \int_0^t E(A_u^2)\, du$
Инт	Римана	$\int_0^t B_u\, du$	$E\left(\int_0^t B_u\, du\right) = \int_0^t E(B_u)\, du$

$$Var\left(\int_0^t B_u\, du\right) =$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$= E\left(\int_0^t B_u\, du \cdot \int_0^t B_u\, du\right) - E\left(\int_0^t B_u\, du\right) \cdot E\left(\int_0^t B_u\, du\right);$$

$$E\left(\int_0^t B_u\, du \cdot \int_0^t B_u\, du\right) = E\left(\int_0^t B_u\, du \cdot \int_0^t B_s\, ds\right) =$$

$$= E\left(\int_0^t \int_0^t B_u \cdot B_s\, du \cdot ds\right) = \int_0^t \int_0^t E(B_u B_s)\, du\, ds$$

$$E(W_t \cdot W_s) = \min(t, s)$$ [см. сем.]

$$\mathrm{Cov}\Big(\underbrace{\int_0^t A_u\,dW_u}_{\text{Ито}},\ \underbrace{\int_0^t B_u\,dW_u}_{\text{Ито}}\Big) = \int_0^t E(A_u B_u)\,du$$

$$\mathrm{Cov}\Big(\underbrace{\int_0^t A_u\,du}_{\text{Риман}},\ \underbrace{\int_0^t B_u\,du}_{\text{Риман.}}\Big) = E\Big(\int_0^t A_u\,du \cdot \int_0^t B_s \cdot ds\Big) - E\Big(\int_0^t A_u\,du\Big)\cdot E\Big(\int_0^t B_u\,du\Big) =$$

$$= (\text{тот же приём}) = \int_0^t\int_0^t E(A_u B_s)\,du\,ds - \int_0^t E(A_u)\,du \cdot \int_0^t E(B_u)\,du$$

Q. как инверсию делать?

W_t

$Z_t = t\cdot W_{1/t}$

$\frac{1}{t}\cdot Z_t = W_{1/t}$ $1/t = a$

$Z_t = t\cdot W_{1/t}$

$a\cdot Z_{1/a} = W_a$

$W_t = t\cdot Z_{1/t}$

Сигма-алгебра = список событий, про которые индивид знает, произошли они или нет

X — с.в.

$$\underline{\sigma(X)} = \big\{ \{X<3\}, \{X>15\}, \{X\in[0;3]\}, \{X\in\mathbb{N}\}, \{X\geq 0\}, \{X\in(-\infty;17]\}, \{X=1\}, \big\}$$

все события, которые можно описать с помощью случ-ой величины X.

Упр. Обяз-но ли совпадают σ-алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$?

a) $\mathcal{F}_1 = \sigma(X)$ $\qquad$ $\mathcal{F}_2 = \sigma(2X)$

б) $\mathcal{F}_1 = \sigma(X, Y)$ $\qquad$ $\mathcal{F}_2 = \sigma(X-Y, Y)$

c) $\mathcal{F}_1 = \sigma(X)$ $\qquad$ $\mathcal{F}_2 = \sigma(X^2)$

---

a) $\{X \in [2;17]\} = \{2X \in [4;34]\}$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

б) $\{X \in \{2,1\}, Y \in \{3,5\}\} = \left\{ \begin{cases} X-Y=-1 \\ Y=3 \end{cases}, \begin{cases} X-Y=-2 \\ Y=3 \end{cases}, \begin{cases} X-Y=-3 \\ Y=5 \end{cases}, \begin{cases} X-Y=-4 \\ Y=5 \end{cases} \right\}$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

c) $\sigma(X) \supseteq \sigma(X^2) = \{\Omega, \varnothing, \{a,b\}, \{c,d\}\}$

$\{\{X=1\}, \{X=-1\}, \ldots\}$

w	a	b	c	d
$X(w)$	-1	1	2	-2
$P(w)$	✓	✓	✓	✓
$X^2(w)$	1	1	4	4

$\{X^2 = 4\}$

$\{X^2 = 1\}$

$\{X^2 \geq 0\}$

$\{X^2 < 0\}$

$\{X^2 > 2\}$

$$\boxed{\sigma(3X) = \sigma(X)}$$ [мн-во событий]

Q как делать инверсию? $\quad 10 < 20$

$X_t = t \cdot W_{1/t}$ $\qquad$ $W_t = t \cdot X_{1/t}$

(X_t) – Винер. процесс

$$E(W_{10} \mid W_{20}) =$$

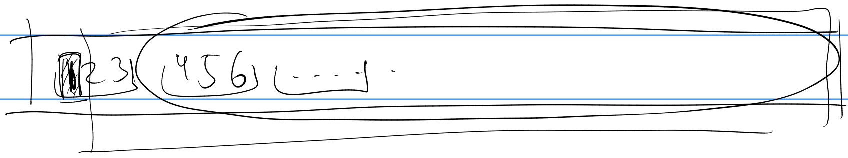
инфо

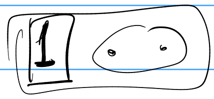
$$= E(10 \cdot X_{1/10} \mid 20 \cdot X_{1/20}) = E(10 \cdot X_{1/10} \mid \sigma(20 \cdot X_{1/20})) =$$

$$= 10 \cdot E(\underbrace{X_{1/10}}_{\text{с.в.}} \mid \underbrace{\sigma(X_{1/20})}_{\sigma\text{-алгебра}}) = 10 \cdot E(\underbrace{X_{1/10}}_{\text{св}} \mid \underbrace{X_{1/20}}_{\text{св}}) = 10 \cdot X_{1/20} = 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot W_{20} = \frac{W_{20}}{2}$$

$1/10 > 1/20$

Упр. n групп $3n$ человек.





$P($хотя бы 1-го знакомого$) =$

$$= 1 - \frac{C^2_{3n-3}}{C^2_{3n-1}} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{(3n-3)!}{2!\,(3n-5)!}}{\frac{(3n-1)!}{2!\,(3n-3)!}} =$$

$$= 1 - \frac{(3n-3)\cdot(3n-4)}{(3n-1)\cdot(3n-2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\frac{(3n-3)\cdot(3n-4)}{(3n-1)\cdot(3n-2)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$