Привет !!

4.1.a

итоги | ARMA процесс (модель) vs ARMA ур-ие.

$(1+3L)\,u_t$

$$\boxed{y_t - 0{,}3\,y_{t-1} + 0{,}02\,y_{t-2} = u_t + 3u_{t-1}} \quad \forall t \quad +\boxed{9}$$

$u_t \sim$ б. шум : $E(u_t)=0$ $Var(u_t)=\sigma_u^2$ $Cov(u_t,u_s)=0$ при $t\neq s$

① Сколько у этого ур-ия нестац-х решений? $\infty$

ответ

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= u_0+2 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}}$$

$E(y_0)=0+2=2$

$E(y_1)=0$

$E(y_2)=-0{,}04$

$Var(y_0)=\sigma_u^2$

$Var(y_1)=0$

$$y_2 \overset{?}{=} 0{,}3y_1 - 0{,}02y_0 + u_2 + 3u_1 = \ldots$$

$$y_3 \overset{?}{=} 0{,}3\cdot y_2 - 0{,}02y_1 + u_3 + 3u_2 = \ldots$$

$y_{-1}$ ?

$$y_1 = 0{,}3y_0 - 0{,}02y_{-1} + u_1 + 3u_0$$

---

$y_t \sim$ стац. процесс

$$\boxed{Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k \qquad E(y_t)=\mu}$$

② Сколько стац-х решений?

Теорема

если ARMA ур-ие несократимо, то возможны три ситуации.

$P(L)\cdot y_t = c + Q(L)\cdot u_t$ полиномы $P(L)$ и $Q(L)$ не имеют общих корней

① у $P(\ell)$ есть корень $|\ell|=1$

стац-х реш-ий нет.

② у $P(\ell)$ все корни $|\ell|>1$

стац. реш-ие есть, единственно и имеет вид

$$y_t = \mu + u_t + c_1\cdot u_{t-1} + c_2\cdot u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + \ldots$$

③ у $P(\ell)$ нет $|\ell|=1$, но есть хотя бы один с $|\ell|<1$

стац. реш. есть единственно и имеет вид $y_t = \mu + v_t + c_1 v_{t-1} + c_2 v_{t-2} + \ldots$ где $v_t$ — некий б. шум.

Теорема

Если ARMA ур-ие несократимо, то возможны три ситуации.

$P(L)\cdot y_t = c + Q(L)\cdot u_t$, полиномы $P(L)$ и $Q(L)$ не имеют общих корней

① у $P(\ell)$ есть корень $|\ell|=1$

стац. реш-ий нет.

② у $P(\ell)$ все корни $|\ell|>1$ ...

стац. реш-ие есть, единственно и имеет вид

$y_t = \mu + u_t + c_1\cdot u_{t-1} + c_2\cdot u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + \dots$

③ у $P(\ell)$ нет $|\ell|=1$, но есть хотя бы один с $|\ell|<1$

стац. реш. есть единственно и имеет вид $y_t = \mu + v_t + c_1 v_{t-1} + c_2 v_{t-2} + \dots$ где $v_t$ – некий б. шум.

$$y_t = 0{,}3\,y_{t-1} - 0.02\,y_{t-1} + u_t + 3u_{t-1}$$

$$(1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2)\cdot y_t = (1+3L)\cdot u_t \quad [+9]$$

$P(L) = 1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2$

$Q(L) = 1 + 3L$

cos x

(x)cos

$$P(\ell) = 1 - 0{,}3\ell + 0.02\ell^2 = 0 \qquad Q(\ell) = 1 + 3\ell$$

$$\ell_1 = 10 \quad \ell_2 = 5 \qquad \ell_1 = -\frac{1}{3}$$

Вывод: стац. реш-ие есть, единственно и имеет вид $y_t = \mu + u_t + c_1\cdot u_{t-1} + c_2\cdot u_{t-2} + c_3\cdot u_{t-3} + \dots$

Как найти? → подставить кандидат-решение в исходное ур-ие и приравнять коэф-ты при $u_s$

→ делить на лестовые мономы (одночлены).

$$(1-0{,}3L+0{,}02L^2)\cdot y_t=(1+3L)\cdot u_t$$

$$y_t=\frac{1+3L}{1-0{,}3L+0{,}02L^2}\cdot u_t \qquad (1-?L)(1-?L)$$

$$1-0{,}3L+0{,}02L^2=0{,}02(L-10)(L-5)=(1-0{,}1L)(1-0{,}2L)$$

$l_1=10 \quad l_2=5$

$0{,}2 \quad 0{,}1$

$$y_t=(1+3L)\cdot\frac{1}{1-0{,}1L}\cdot\frac{1}{1-0{,}2L}\cdot u_t$$

{при делении / умножении на $P(L)$ с корнями $|l|\neq 1$ мн-во стац-х решений сохраняется}

$$\left\{\frac{1}{1-\alpha L}\overset{def}{=}1+\alpha L+\alpha^2L^2+\alpha^3L^3+\ldots\right\}$$

$|\alpha|<1$

$$y_t=(1+3L)\cdot(1+0{,}1L+0{,}1^2L^2+0{,}1^3L^3+\ldots)\cdot(1+0{,}2L+0{,}2^2L^2+\ldots)\cdot u_t$$

$$y_t=u_t+(3+0{,}1+0{,}2)u_{t-1}+(0{,}1^2+0{,}2^2+3\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2)u_{t-2}+\ldots$$

единственное стац-ое решение.

$$y_t = 2y_{t-1} + u_t + 7 \qquad u_t \sim \text{б. шум}$$

$E(u_t)=0$

$Var(u_t)=\sigma_u^2$

$Cov(u_t, u_s)=0$ при $t \neq s$

1. Сколько нестац-х реш-ий? — $\infty$ реш.
2. Сколько стац-х реш-ий?
3. Если есть стац-ое, то найдите его!

① $y_1 = 2$ $\quad E(y_1)=2 \quad Var(y_1)=0$

$y_2 = 11 + u_2 \quad E(y_2)=11 \quad Var(y_2)=\sigma_u^2$

② $P(L)\, y_t = Q(L)\cdot u_t + 7$

$$(1-2L)\cdot y_t = 1\cdot u_t + 7$$

$1 - 2\ell = 0 \quad \ell_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ есть ровно одно. стац. решение

$$y_t = \mu + \nu_t + c_1\nu_{t-1} + c_2\nu_{t-2} + \ldots$$

$$(1-2L)\cdot y_t = u_t + 7$$

$F y_t = y_{t+1} \qquad F^2 y_t = y_{t+2} \qquad L\cdot F = 1$

$$\frac{1}{1-\alpha F} \overset{def}{=} (1 + \alpha F + \alpha^2 F^2 + \ldots)$$

$|\alpha| < 1$

$$(1-2L)\, y_t = u_t + 7$$

$$(-2L)(1 - \tfrac{1}{2}F)\, y_t = u_t + 7$$

$$y_t = \frac{1}{-2L} \circ \frac{1}{1-\frac{1}{2}F}(u_t + 7)$$

$$y_t = \frac{1}{-2L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}F}(u_t+7)$$

$L\cdot F = 1$

$\frac{1}{L} = F$

$$y_t = \left(-\frac{F}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}F+\left(\frac{1}{2}\right)^2F^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3F^3\dots\right)\cdot(u_t+7)$$

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{2}u_{t+1} - \frac{1}{4}u_{t+2} - \frac{1}{8}u_{t+3}\dots\dots -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot 7}$$

$\mu$

ед. стац. реш.

$$F\cdot 7 = 1\cdot 7$$

$$(1+0{,}2F+0{,}2^2F^2+\dots)7 = (1+0{,}2+0{,}2^2+0{,}2^3\dots)7$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}F}\cdot 7 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1}\cdot 7$$

(8) Выразите $v_t$ из теоремы через $u_t$

$$y_t = -\frac{F}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}F}u_t + \mu$$

$\|$

$$y_t = \frac{1}{1-\frac{1}{2}L}\cdot v_t + \mu$$

$$v_t = -\frac{F}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}L}{1-\frac{1}{2}F}\cdot u_t$$

$v_t = \dots\dots$

$v_t$ — б. шум.

$\operatorname{Cov}(v_t, v_s) = 0$

$$v_t = -\frac{F}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}L\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}F+\left(\frac{1}{2}\right)^2F^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3F^3+\dots\right)\cdot u_t$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{F}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}F \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \right)\cdot u_t$$

$$= \frac{1}{4}u_t + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)u_{t+1} + \dots\dots\dots$$