Привет !!

ARMA-уравнение $\neq$ ARMA(p,q)-модель

sktime

Aad van der Vaart „Time series"

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_q u_{t-q}$$

$y_t - y_{t-1} = u_t$ у него нет вообще решений вида (4)

$$P(L)\cdot y_t = c + Q(L)\cdot u_t$$

$P(L)$ имеет степень p и $P(0) = 1$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \ldots - \alpha_p L^p)\cdot y_t = c + (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_q L^q)\cdot u_t$$

$Q(L)$ имеет степень q и $Q(0) = 1$

① ARMA-ур-ие

② $(u_t) \sim$ белый шум

$E(u_t) = 0$ $Var(u_t) = \sigma^2$

$Cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$

[чаще всего]

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ и незав.

③ $P(\ell)$ и $Q(\ell)$ несократимы (не имеют общих корней)

④ (!) y_t представим в виде

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + \ldots$$

① $\not\Rightarrow$ ④

⑤ Все корни $Q(\ell)$: $|\ell| > 1$.

исключить один-все записи для разных ур-в.

цель предпосылки (5), (3) исключить разные записи для одного и того же процесса

Задача (универс)

$y_t \sim$ ARMA-модель

$ACF_1 = \frac{1}{2}$

$ACF_2 = \frac{1}{3}$

$ACF_3 = ACF_4 = \ldots = 0.$

Существует ли такой y_t?

ACF = auto correlation function

$$ACF_1 = Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{1}{2}$$

$$ACF_2 = Corr(y_t, y_{t-2}) = \frac{1}{3}$$

$$ACF_3 = Corr(y_t, y_{t-3}) = 0$$

$\vdots$

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + \ldots$$

$$y_{t-3} = \mu + u_{t-3} + c_1 u_{t-4} + c_2 u_{t-5} + c_3 u_{t-6} \ldots$$

$$Cov(u_1 + u_2, u_1 - u_2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$$

догадка: $c_3 = 0$ $c_4 = 0$ $c_5 = 0$ ......

догадка: $y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2}$ $\forall t$ (-1)

$$y_{t-1} = \mu + u_{t-1} + \boxed{c_1} u_{t-2} + \boxed{c_2} u_{t-3} \quad (0)$$

$$Corr(y_t, y_{t-1}) = ACF_1 = \frac{Cov(u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2},\ u_{t-1} + \boxed{c_1} u_{t-2} + \boxed{c_2} u_{t-3})}{\sqrt{Var(y_t) \cdot Var(y_{t-1})}} \quad (1)$$

$$Var(y_t) = Var(u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2}) = \sigma^2 + c_1^2 \sigma^2 + c_2^2 \sigma^2 \quad (2)$$

$$= \sigma^2(1 + c_1^2 + c_2^2) \quad (3)$$

$$Var(y_{t-1}) = \sigma^2(1 + c_1^2 + c_2^2)$$

$$\sqrt{Var(y_t) Var(y_{t-1})} = Var(y_t)$$

$u_{t-2} + c_1 u_{t-3} + c_2 u_{t-4}$

$u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2}$

$Cov(y_t, y_{t-2})$

$$\frac{1}{2} = \frac{c_1 \cdot 1 \cdot \sigma^2 + c_2 \cdot c_1 \cdot \sigma^2}{\sigma^2(1 + c_1^2 + c_2^2)} = \frac{c_1 + c_1 c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2}$$

$$Corr(y_t, y_{t-2}) = \frac{1}{3} = \frac{c_2 \cdot \sigma^2}{\sigma^2(1 + c_1^2 + c_2^2)} = \frac{c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{c_1 + c_1 c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2} \\ \frac{1}{3} = \frac{c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2} \end{cases}$$

Стр1 выразить $c_1 (c_2)$ и подставить в другое ур-ие

Стр2 попробовать угадать

$c_1 = 1 \quad c_2 = 2$

проще:

$c_1 = 0$

$c_1 = 1$

$$\frac{1 + c_2}{2 + c_2^2} = \frac{1}{2}$$

$c_1 = c_2$

$$\frac{c_1 + c_1^2}{1 + 2c_1^2} = \frac{1}{2}$$

$2c_1 + 2c_1^2 = 1 + 2c_1^2$

$c_1 = \frac{1}{2}$

$c_2 = \frac{1}{2}$

случ. процесс

$P(L) = 1$ $\quad Q_A(L) = 1 + L + 2L^2$

$$y_t = 567 + u_t + u_{t-1} + 2u_{t-2}$$

$u_t \sim N(0; 146)$, независ.

$ACF_1 = \frac{1}{2}$ $\quad ACF_2 = \frac{1}{3}$ $\quad ACF_3 = 0$

$Q_B(L) = 1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L^2$

$$y_t = 123 + u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{2}u_{t-2}$$

$u_t \sim N(0; 732)$, независ

случ. процесс.

Задачка. (универс) 2019

$$x_t = 1.3x_{t-1} - 0.4x_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1} \quad (*)$$

$u_t \sim$ б. шум.

Стац-н ли этот процесс? (сложн)

есть ли у этого ур-ия стац-ое решение вида

$$x_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + c_4 u_{t-4} + \dots \text{ ?}$$

(!) у ур-ия (*) есть ∞ кол-во решений!

$x_0 = 27$

$x_1 = 42u_1$

задав начальн условие,

$x_2 = 1.3 \cdot 42u_1 - 0.4 \cdot 27 + u_2 - 0.5u_1$

$x_3 = 1.3 \cdot (\underbrace{\qquad}_{x_2}) - 0.4 \cdot 42u_1 + u_3 - 0.5u_2$

$\vdots$

получаем решение

$E(x_0) = 27$ $\quad$ $E(x_1) = E(42u_1) = 0$ $\quad$ нестац.

$E(x_2) = -0.4 \cdot 27$

$Var(x_0) = 0$ $\quad$ $Var(x_1) = 42^2 \cdot \sigma^2$, ...

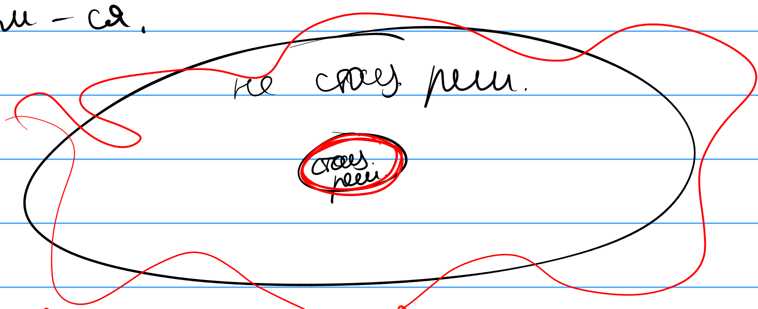
Стац-сть

$E(x_t) = \mu$ $\quad (\forall t)$

$Var(x_t) = \sigma_x^2 = \gamma_0$ $\quad (\forall t)$

...

Теорема если умножить (или поделить) ARMA-уравнение на $P(L)$, у к-рого нет корней $|l|=1$, то мн-во стац-х решений не изм-ся.



$$(1 - 1.3L + 0.4L^2) \cdot x_t = (1 - 0.5L) \cdot u_t$$

$$(1-1{,}3L+0{,}4L^2)\cdot x_t=(1-0{,}5L)\cdot u_t$$

Что значит поделить на линейную ф-цию от лага?

$$\frac{1}{1-\alpha L}\overset{def}{=}1+\alpha L+(\alpha L)^2+(\alpha L)^3+(\alpha L)^4+\ldots$$

$|\alpha|<1$

$F\cdot L=1$

$F=L^{-1}$

$Fy_t=y_{t+1}$

$$\frac{1}{1-\alpha L}\overset{def}{=}\frac{-F}{\alpha-F}=\frac{-F/\alpha}{1-\frac{1}{\alpha}F}=-F\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha}F+\left(\frac{1}{\alpha}F\right)^2+\ldots\right)$$

$|\alpha|>1$

$$1-1{,}3\ell+0{,}4\ell^2=0\ ?\qquad 0{,}4(\ell-2)(\ell-1{,}25)$$

$\to\ \ldots\to\ \ell_1=2\quad \ell_2=1{,}25$

$$0{,}4\underbrace{(L-2)}_{-2}(L-1{,}25)\cdot x_t=\cancel{(1-0{,}5L)}\cdot u_t$$

мн-во стац-х реш-ий сохр-ся

мн-во нестац. реш уменьшется

$$-0{,}8(L-1{,}25)x_t=u_t$$

$$(1-0{,}8L)x_t=u_t$$

—//—

$$x_t=\frac{1}{1-0{,}8L}u_t$$

$$x_t=(1+0{,}8L+0{,}8^2L^2+0{,}8^3L^3+0{,}8^4L^4+\ldots)\cdot u_t$$

нач. условия

$x_0=u_0+0{,}8u_{-1}+0{,}8^2u_{-2}+\ldots$

$x_1=u_1+0{,}8u_0+0{,}8^2u_{-1}+\ldots$

стац. решение

$$\boxed{x_t=u_t+0{,}8u_{t-1}+0{,}8^2u_{t-2}+0{,}8^3u_{t-3}+\ldots}$$

исх-ое ур-ие имеет 1 (одно!) стац решение. И вот оно

множ-во решений исх-го ур-ия

нестац-ое

$E(x_t)=0\ \Leftarrow$ не зав от t

$Var(x_t)=\sigma^2+0{,}8^2\sigma^2+0{,}8^4\sigma^2+\ldots\ \Leftarrow$ не зав от t

1^2