Сем 7.1.а

наука → более сложные модели (как прогнозировать?)

наука → как оценить модель?

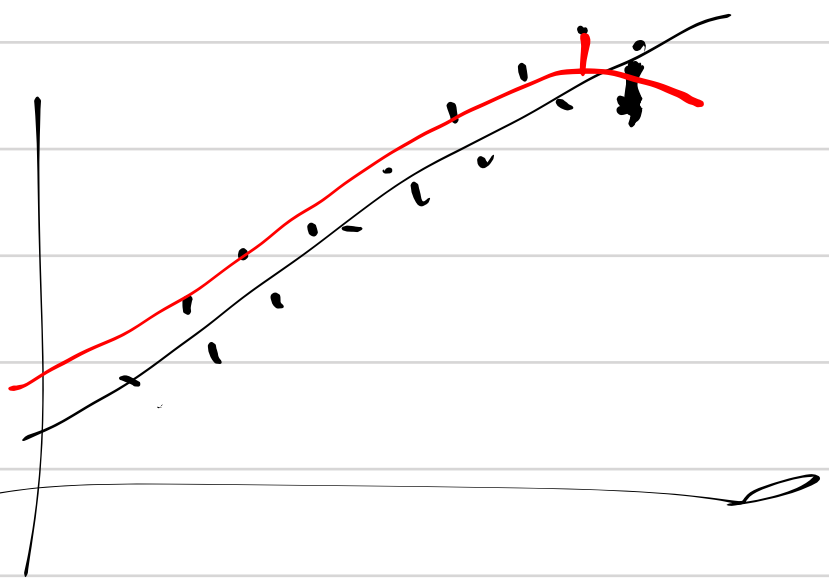
наука + искусство → как выбрать модель?

ETS - модели (error - trend - seasonality)
/ годов / квартал / месяц / неделя /

единорогов ничего не ведет

y_1
y_2
⋮
y_T

$y_t = Trend_t + Remainder_t$



ETS(A,A,N)

A = additive
M = multiplicative
N = N_0
...

error trend season.

Forecasting principles and practice
Rob Hyndman.

{fpp3} Hyndman

---

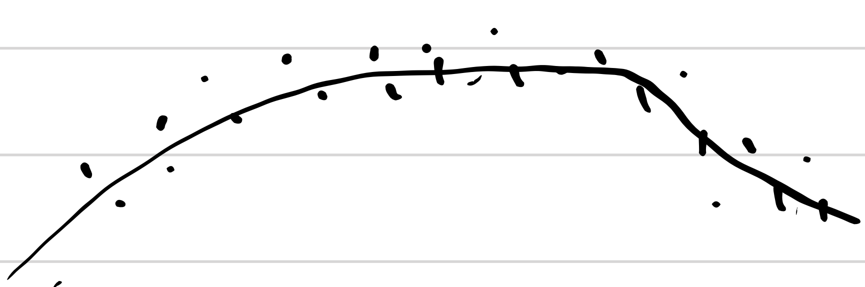
y_t - наблюдаемый ряд

еди нормы:

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ незав.

$l_t \sim$ level (trend), тренд, сглаж-ый ряд

b_t - локальный наклон тренда.



наклон тренда слабо меняется

$$\begin{cases} b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав} \end{cases}$$

все пар-ры: α, β, [b_0, l_0], σ^2

нач. зн.

Упр

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = 4$ $l_0 = 10$ $b_0 = 1$

	$l_0 = 10$	$b_0 = 1$	
$y_1 = 12$	$l_1 = 11.5$	$b_1 = 1.5$	$u_1 = 1$
$y_2 = 14$	$l_2 = 13.5$	$b_2 = 2$	$u_2 = 1$
$y_3 = 15$	$l_3 = 15.25$	$b_3 = 1.75$	$u_3 = -0.5$

решение

① $u_t = y_t - l_{t-1} - b_{t-1}$

② $b_t = b_{t-1} + \frac{1}{2} u_t$

③ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \frac{1}{2} u_t$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$
$$b_t = b_{t-1} + \frac{1}{2} \cdot u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \frac{1}{2} u_t$$

$$\begin{pmatrix} b_t \\ l_t \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} b_{t-1} \\ l_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot u_t$$

Упр те же модель, те же пар-ры.

а) $E(y_4 | \mathcal{F}_3)$, $Var(y_4 | \mathcal{F}_3)$, PI для y_4

б) $E(y_5 | \mathcal{F}_3)$, , . . . — — —

$$\mathcal{F}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots)$$

l_t, b_t и u_t изм-мы отн-но $\mathcal{F}_t$

$$E(y_4 | \mathcal{F}_3) = E(l_3 + b_3 + u_4 | \mathcal{F}_3) =$$
(незав)
$$= l_3 + b_3 + E(u_4) = l_3 + b_3 = 15.25 + 1.75 = 17$$

$$Var(y_4 | \mathcal{F}_3) = Var(l_3 + b_3 + u_4 | \mathcal{F}_3) = Var(u_4 | \mathcal{F}_3) = Var(u_4) = 4$$

95% PI $[17 - 1.96 \cdot \sqrt{4};\ 17 + 1.96 \cdot \sqrt{4}]$

→ как оценивать модели!

RW $\quad y_1 = 2, \; y_2 = 5, \; y_3 = 7$

$$y_t = y_{t-1} + \alpha + u_t$$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$, нужен ли $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} \dots$

α, σ^2

a) likelihood function $L(y_3, y_2 | y_1)$

б) $\max\limits_{\alpha, \sigma^2} \ln L(y_3, y_2 | y_1)$

$$L(y_3, y_2 | y_1) = f(y_3, y_2 | y_1) =$$

трюк: разложить по шагам.

$$= f(y_3 | y_2, y_1) \cdot f(y_2 | y_1)$$

$$\ln L = \ln f(y_3 | y_2, y_1) + \ln f(y_2 | y_1)$$

? !

$$\begin{cases} y_t = y_{t-1} + \alpha + u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ и не зав от } y_{t-1}, y_{t-2} \dots \end{cases}$$

$(y_2 | y_1) \sim N(y_1 + \alpha; \sigma^2)$

$(y_3 | y_2, y_1) \sim N(y_2 + \alpha, \sigma^2)$

$(y_3 | y_1)$? !

$$\ln pdf = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$pdf = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\ln L(y_3, y_2 | y_1) =$$

$$= \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2}\frac{(y_3-(y_2+\alpha))^2}{\sigma^2}\right] + \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2}\frac{(y_2-(y_1+\alpha))^2}{\sigma^2}\right]$$

$$(y_3 | y_2, y_1) \sim N(y_2+\alpha; \sigma^2)$$

$$(y_2 | y_1) \sim N(y_1+\alpha; \sigma^2)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y_3 - y_2 - \alpha)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y_2 - y_1 - \alpha)^2$$

$$\alpha^* = \frac{y_3 - y_2 + y_2 - y_1}{2} =$$

$$\alpha^* = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

$$(2)^* =$$