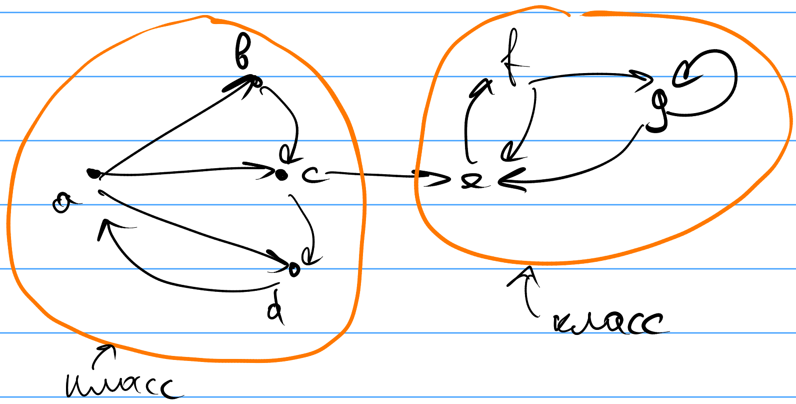
Привет !!

Идея 1: можно взять бензопилу и нарезать марки на классы.

(вер-сти не важны, главное, что все > 0)



$a \to b$?+

$b \to a$?+

$c \to d$

$d \to c$

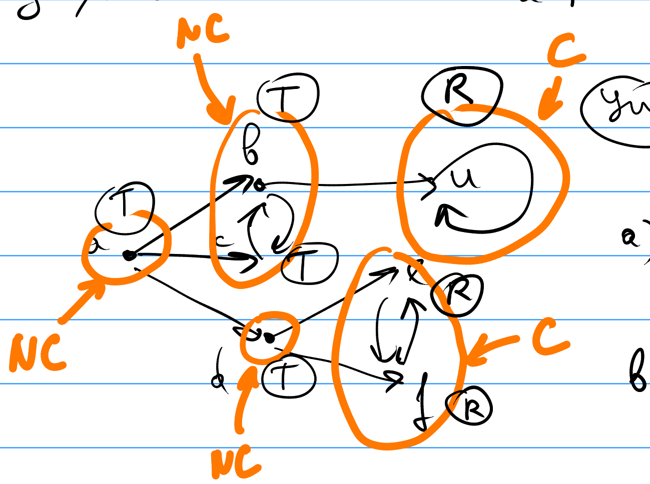
$\alpha \leftrightarrow \alpha$

$\alpha \to \beta$ из α можно попасть в β [за какое-то кол-во ходов* с вер > 0]

* возможно за 0 (!)

$c \to g$ $\alpha \leftrightarrow \beta$: $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$

$g \not\to a$ α и β сообщаются



упр

Нарежьте на классы

а) сообщающихся состояний

б) класс-те сост-ия на переходные / возвратные

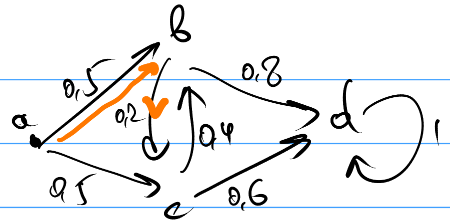
состояние → recurrent возвр (рекурр)

состояние → transient переходные (транзиентные)

recurrent state - если стартуем из него, то 100% в него когда-то вернемся.

Теоремка: В одном классе все сост-ия либо транзиентные (переходные), либо возвратные.

Упр?



$$P = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ c & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$p_{ij} = p_{i\to j}$$

$$P^2 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & \cdot & \cdot & (*) & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$p^2_{a\to c} = (0\ \ 0.5\ \ 0.5\ \ 0)\cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.1$$

$$H_{i\to A} = \min_{t\geq 0}\{t,\ X_t \in A \mid X_0 = i\}$$

$H_{i\to A}$ – (hitting time) – случайная величина – число шагов, к-рое потреб-ся, чтобы из сост-ия i достигнуть мн-ва A.

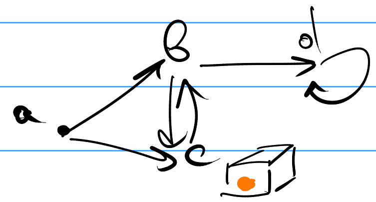
$$h_{i\to A} = P(H_{i\to A} < \infty)$$

$$\boxed{f_{i\to A} = E(H_{i\to A})}$$

Теорема: Величины $h_{i\to A}$ и $f_{i\to A}$ находятся как наим-ие неотриц-ые решения* системы ур-ий метода первого шага.

* ∞ допускается как решение для f.

Пример.



$f_{a\to c}$?

$$\begin{cases} f_{c\to c} = 0 \\ f_{d\to c} = 1 + f_{d\to c} \\ f_{b\to c} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot f_{d\to c} \\ f_{a\to c} = 1 + \frac{1}{2} f_{b\to c} + \frac{1}{2}\cdot 0 \end{cases}$$

$f_{c\to c} = 0$

$f_{d\to c} = +\infty$

$f_{b\to c} = +\infty$

$f_{a\to c} = +\infty$

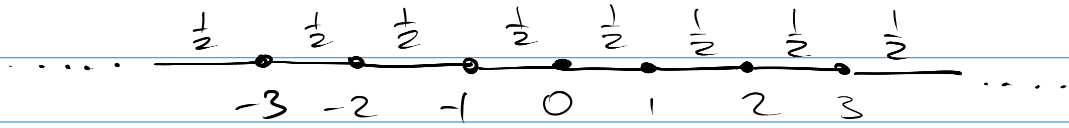
Как понимать $E(H_{i\to A})=\infty$?

1) есть положит. вер-сть того, что я никогда не попаду в A, стартовав в i.

$$P(H_{i\to A}=\infty)>0$$

2) $P(H_{i\to A}=\infty)=0$

Пример.



а) $E(H_{0\to 1})$? =

x	1	3	5	...	...	.		∞
$P(H_{0\to 1}=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$2\left(\frac{1}{2}\right)^5$	...	...	..		0

б) $P(H_{0\to 1}<\infty)$?

а) solution

$$\begin{cases} E(H_{0\to 1})=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot E(H_{-1\to 1}) \\ E(H_{-1\to 1})=E(H_{-1\to 0})+E(H_{0\to 1})= \\ =2E(H_{0\to 1}) \end{cases}$$

$$H_{-1\to 0}\sim H_{0\to 1}$$

$$E(H_{0\to 1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2E(H_{0\to 1})$$

$$E(H_{0\to 1})=+\infty \quad (*)$$

б)

$$h_{0\to 1}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}P(H_{-1\to 1}<\infty)$$

$$h_{0\to 1}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot P(H_{-1\to 0}<\infty)\cdot P(H_{0\to 1}<\infty)$$

$$h_{0\to 1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h_{0\to 1}^2 \qquad h_{0\to 1}=1$$

$$h_{0\to 1}^2-2h_{0\to 1}+1=0 \qquad h_{0\to 1}=1$$

state → recurrent
state → transient

так вышло все сост-ия в классе одинакового вида

→ class → recurrent
→ class → transient

---

class → closed : класс нельзя покинуть
class → not closed

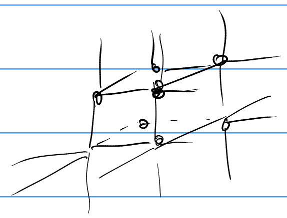
Качественно:

Бывает ли?

хитрый! бывает! А. замкнутый класс из переходных сост-ий?

Б незамкнутый класс из возвратных сост-ий?

! пример А. 3D решётка бес-ая во все стороны с равновер-ми переходами (по $\frac{1}{6}$)



→ один класс ✓

→ замкнутый ✓

→ (есть теорема)

P(вернуться из i в i) < 1 (!)

Б не бывает!