Привет!

Упр

А. $y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + u_t + u_{t-1}$

Б. $y_t = 5 + 6y_{t-1} - 10y_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1}$

Для $\forall$ ур-ия:

А	Б
∞	∞

!! ① сколько нестац-х реш-ий?

!! ② лаговый полином ~~и хар-ий полином~~ АR и МА частей?

$P(L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + c$

имеют ли нет $P(L)$ и $Q(L)$ общ. корни?

③. сократимы ли ур-ия? есть ли общий корень у лаговых полином АR и МА части?

!! ④ Корни лагового полинома? АR часть корни хар-го? как они связаны?

⑤ сколько стац-х решений?

⑥ имеет ли стац-ое решение вид МА(∞) отн-но (u_t)

А. $y_t = 3 + 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + u_t + u_{t-1}$

Б. $y_t = 5 + 6y_{t-1} - 10y_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1}$

$\boxed{\text{Лаговый полином}}$

$(1-0{,}3L)(1-0{,}4L)$

А $(1-0{,}7L+0{,}12L^2)\,y_t = 3 + (1+L)\cdot u_t$

↑ лаговый полином АR части ↑ лаг. полином МА части $l_1=-1$

$l_1=\frac{10}{3}$ $l_2=\frac{10}{4}$

Б $(1-6L+10L^2)y_t = 5 + (1-0{,}5L)u_t$ $l_1=2$

убрали всё кроме y_t

$y_t - 0{,}7y_{t-1} + 0{,}12y_{t-2} = 0$

$y_t = \lambda^t$ (попытка угадать решение) $\lambda_1=0{,}3$ $\lambda_2=0{,}4$

$\lambda^t - 0{,}7\lambda^{t-1} + 0{,}12\lambda^{t-2} = 0$

А $\{\lambda^2 - 0{,}7\lambda + 0{,}12 = 0\}$

хар-ое ур-ие АR части

хар-ое ур-ие МА части $\lambda+1=0$

$\lambda_1=-1$

хар-ие многочлены для Б

$\boxed{\lambda^2-6\lambda+10}=0$ $\lambda - 0{,}5 = 0$

АR часть МА часть

Связь между ~~корнями~~

$\boxed{l_j \cdot \lambda_j = 1}$

урок 6

Лаговый мн-н AR части $\quad 1-6l+10l^2=0$

Хар ий мно-н AR части $\quad \lambda^2-6\lambda+10=0$

$$(\lambda^2-6\lambda+9)+1=0$$

$$(\lambda-3)^2=-1$$

$$\lambda-3=\pm i$$

$$\lambda_1=3+i \quad \lambda_2=3-i$$

$$l_1=\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{9-i^2}=\frac{3-i}{10}$$

$$l_2=\frac{1}{3-i}=\frac{3+i}{9-i^2}=\frac{3+i}{10}$$

$$l=\frac{1}{\lambda}$$

$$1-6\cdot\frac{1}{\lambda}+10\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+10=0$$

Теорема

Если $\quad P(L)\cdot y_t=c+Q(L)\cdot u_t \quad$, $u_t\sim$ б. шум,

$P(L)$ и $Q(L)$ не имеют общих корней то есть 3 случая:

$l_1, l_2 \ldots l_p$ – корни лаг полинома AR-части

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ — // – хар-го — // —

① нет стац-х решений у ур-ия

$\exists\, |l_j|=1 \qquad \exists\, |\lambda_j|=1$

② ровно одно стац-ое решение вида MA(∞) отн-но (u_t) т.е. $\quad y_t=\mu+u_t+c_1\cdot u_{t-1}+c_2\cdot u_{t-2}+\ldots$

$\forall\, |l_j|>1 \qquad \forall\, |\lambda_j|<1$

③ ровно одно стац-ое решение вида MA(∞) отн-но нек-го б. шума (v_t), не относительно (u_t)!

$$y_t=\mu+v_t+c_1 v_{t-1}+c_2\cdot v_{t-2}+\ldots$$

$\forall\, |l_j|\neq 1 \qquad \forall\, |\lambda_j|\neq 1$

$\exists\, |l_j|<1 \qquad \exists\, |\lambda_j|>1$

AR-корни: (головоло)

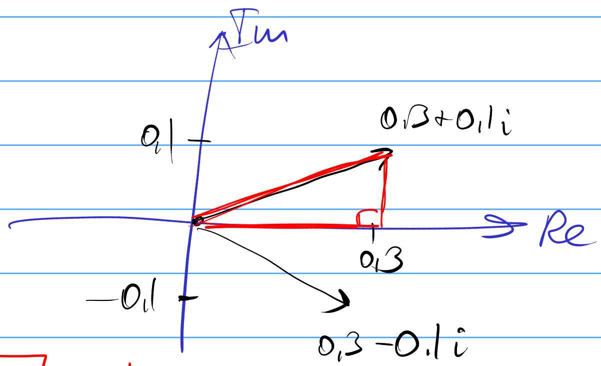
ур-ие (A) $\ell_1 = \frac{1}{0{,}3}$ $\ell_2 = \frac{1}{0{,}4}$ $\forall |\ell_j| > 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Одно стац-ое решение, оно имеет вид MA(∞) отн-но (u_t) из ур-ия:

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \ldots$$

ур-ие (Б) $\ell_1 = \frac{3+i}{10}$ $\ell_2 = \frac{3-i}{10}$

$\ell_1 = 0{,}3 + 0{,}1i$ $\ell_2 = 0{,}3 - 0{,}1i$



$|0{,}3 + 0{,}1i| = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}1^2} = \sqrt{0{,}10} < 1$

$|0{,}3 - 0{,}1i| = |0{,}3 + 0{,}1i|$

У ур-ия Б одно стац-ое решение, но оно не представимо в виде MA(∞) отн-но (u_t) из ур-ия. Оно имеет вид MA(∞) отн-но нек-рого V_t, некоторого белого шума.

$$y_t = \mu + V_t + c_1 \cdot V_{t-1} + c_2 \cdot V_{t-2} + \ldots$$

„ARMA(2,1) модель (процесс) с ур-ием $y_t = ? + ?y_{t-1} + ?y_{t-2} + u_t + ?u_{t-1}$, где $u_t \sim$ б. шум"

$\boxed{\text{За кадром}}$:

① $y_t \sim$ стац. решение ур-ие вида MA(∞) отн-но u_t

② ур-ие несоар-мо

③ корни хар-го ур-ия AR-части $|\lambda_j| < 1$.

Упр

ARMA(1,0) модель AR(1) модель с ур-ием

$$y_t = 5 + 0{,}7 y_{t-1} + u_t \quad , u_t \sim \text{б шум}$$

а) автокорр-ая ф-ция $\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k})$

б) частная автокорр-ая ф-ция $\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t-k};\ y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k+1})$

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \ldots$$

$$Cov(y_t, u_{t+1}) = 0$$

$$\rho_1 = Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{Var(y_t)\, Var(y_{t-1})}} = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

$$\underline{Cov(y_{t-1}, y_t)} = Cov(\underline{y_{t-1}}, 5 + 0{,}7 y_{t-1} + \underline{u_t})$$

$$\gamma_1 = 0{,}7 \cdot \gamma_0 + 0 \qquad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0{,}7$$

$$Cov(y_{t-2}, y_t) = Cov(y_{t-2}, 5 + 0{,}7 y_{t-1} + u_t)$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0{,}7 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0} + 0 \qquad \rho_2 = 0{,}7 \cdot \rho_1 = 0{,}7^2$$

$$\ldots$$

$$\rho_k = 0{,}7^k$$

— partial corr

$$\varphi_{11} = pCorr(y_t, y_{t-1}; \emptyset) = corr(y_t, y_{t-1}) = 0.7$$

$$\varphi_{22} = pCorr(y_t, y_{t-2}; y_{t-1})$$

$y_1 \to y_2 \to y_3$

$$\varphi_{21} = pCorr(y_t, y_{t-1}; y_{t-2})$$

представить y_t в виде

$$y_t = \alpha + \varphi_{21} \cdot y_{t-1} + \varphi_{22} \cdot y_{t-2} + w_t, \text{ где}$$

$$\begin{cases} Cov(y_{t-1}, w_t) = 0 \\ cov(y_{t-2}, w_t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_{21}, \varphi_{22}$$

$$\varphi_{33} = pCorr(y_t, y_{t-3}; y_{t-1}, y_{t-2})$$

$$y_t = 5 + 0{,}7\, y_{t-1} + u_t$$

$$y_t = \alpha + \varphi_{31} \cdot y_{t-1} + \varphi_{32} \cdot y_{t-2} + \varphi_{33} \cdot y_{t-3} + u_t$$

$$y_t = 5 + 0{,}7 \cdot y_{t-1} + 0 \cdot y_{t-2} + u_t$$

$$\begin{cases} Cov(y_{t-1}, u_t) = 0 \\ cov(y_{t-2}, u_t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi_{22} = 0}$$

$$\rho_2 = 0{,}7^2 > 0$$