Привет !!

ETS пар-ры : $\boxed{l_0,\ b_0,\ \alpha,\ \beta,\ \sigma^2}$ → пар-ры
ETS(AAN) → ур-ия.

ARMA → ур-ия с пар-ры
→ (!) правильно понимая конкретного решения ур-ия.

ARMA-модель с ур-ием
$$y_t = 6 + 0{,}3\,y_{t-1} + u_t - 0{,}25\,u_{t-1},$$
u_t – б. шум $Var(u_t) = \sigma^2$

→ подразумеваем стац-ое решение ук-го ур-ия вида $MA(\infty)$ отн-но (u_t), т.е.:
$$y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + c_3 \cdot u_{t-3} + \ldots$$

Упр.
A. $y_t = 0{,}8\,y_{t-1} - 0{,}07\,y_{t-2} + u_t + u_{t-1} + 23$
Б. $y_t = 8\,y_{t-1} - 17\,y_{t-2} + u_t - u_{t-1} + 34$

① лаговый и хар-ий полином для AR и для MA части?
② найдите корни лаг. полинома / хар-кого. Как они связаны.
③ по корням хар-го полинома AR части угадайте кол-во стац-х решений и их вид.

ур-ие A $(1 - 0{,}8L + 0{,}07L^2)\,y_t = 23 + (1+L)\cdot u_t$

лаг. полином AR части

$P(L) = 1 - 0{,}8L + 0{,}07L^2$

лаг. полином MA части

$Q(L) = 1 + L$

нестац-х решений всегда ∞ много (если есть хотя бы один лаг y_t)

хар-ий полином AR-части

оставим только y_t и его лаги

$$y_t = 0{,}8y_{t-1} - 0{,}07y_{t-2}$$
$$y_t = \lambda^t$$

$$\lambda^t = 0{,}8\lambda^{t-1} - 0{,}07\lambda^{t-2} \quad / \lambda^{t-2}$$

хар-ий многочлен AR части

$$\lambda^2 - 0{,}8\lambda + 0{,}07 = 0$$

замена $\lambda = \frac{1}{L}$

$$\lambda_1 = 0{,}1 \qquad \lambda_2 = 0{,}7$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}8$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0{,}07$$

$$\frac{1}{L^2} - 0{,}8\frac{1}{L} + 0{,}07 = 0 \quad \cdot L^2$$

$$1 - 0{,}8L + 0{,}07L^2 = 0$$

лаговый многочлен AR-части

$$L_1 = \frac{1}{0{,}1} \qquad L_2 = \frac{1}{0{,}7}$$

Хар-ий мн. MA части

$$u_t + u_{t-1} = 0$$
$$u_t = \lambda^t \qquad \lambda^t + \lambda^{t-1} = 0$$
$$\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = -1$$

$L_1, \dots, L_p$ – корни лаг-го AR полин.

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – –||– хар-го AR полин.

Теоремища Расм-м рекур-ое ур-ие с б. шумом u_t

$$P(L) \cdot y_t = c + Q(L) \cdot u_t$$

, с несократимыми P и Q {без общих корней}. Возможно 3 ситуации.

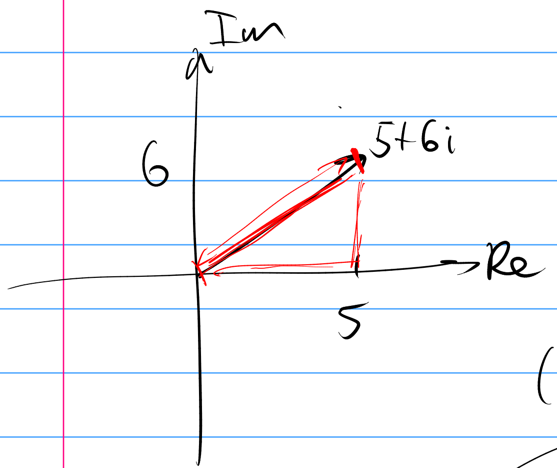
1. нет стац-х решений $\{ \exists |L_j| = 1 \qquad \exists |\lambda_j| = 1$
2. единств. стац. решение вида MA(∞) отн-но (u_t) $\qquad \forall |L_j| > 1 \qquad \forall |\lambda_j| < 1$
   $y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + \dots$ $\qquad \forall |L_j| \neq 1 \ \exists |L_j| < 1 \qquad \forall |\lambda_j| \neq 1$ и $\exists |\lambda_j| > 1$
3. единств. стац. решение вида MA (∞) отн-но нек-го б. шума V_t (не u_t) $\quad y_t = \mu + V_t + c_1 \cdot V_{t-1} + \dots$

ур-ие А несократимо ($\overset{AR}{\lambda_1 = 0.1 \quad \lambda_2 = 0.7}$ $\quad \overset{MA}{\lambda = -1}$)

У ур-ия А единственное стац-ое решение. И оно имеет вид

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \dots$$

Б. $y_t = 8y_{t-1} - 17y_{t-2} + u_t - u_{t-1} + 34$



$|5+6i| = \sqrt{5^2+6^2}$

(через лаговый)

$(1-8L+17L^2)\cdot y_t = 34 + (1-L)\cdot u_t$

AR часть

$1-8\ell+17\ell^2=0$

не подходит

MA часть

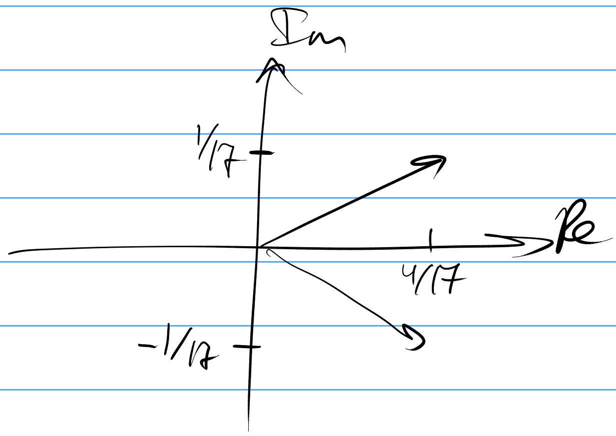
$\ell_1 = 1$

ур-ие несократимо.

$1-8\ell+16\ell^2+\ell^2=0$

$(1-4\ell)^2=-\ell^2$

$1-4\ell=\pm i\ell$



$17\ell^2-8\ell+1=0$

$\frac{D}{4} = 16-17=-1$

$\ell = \frac{4\pm i}{17} \qquad \ell_1=\frac{4+i}{17} \qquad \ell_2 = \frac{4-i}{17}$

У ур-ия Б $\qquad |\ell_1|=|\ell_2|<1$

Есть един. стац. решение. Оно не MA(∞) отн-но (u_t).

Оно предс-мо ~~в виде~~ $y_t = \mu + v_t + c_1 v_{t-1} + c_2 v_{t-2} + \dots$, где v_t — нек. б. шум

Упр

AR(1) - модель

ARMA(1,0) - модель с ур-нием
$y_t = 17 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t,\quad u_t$ - б. шум.

ACF а) автокор-ая ф-ция $\rho_k = corr(y_t, y_{t-k})$?

PACF б) частная —"— $\varphi_{kk} = pcorr(y_t, y_{t-k};\ y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_{t-k+1})$

---

y_t - стац! $\quad y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + \ldots$

$$Cov(y_{t-1}, u_t) = 0$$

$$y_{t-1} = \mu + u_{t-1} + c_1 \cdot u_{t-2} + c_2 u_{t-3} + c_3 \cdot u_{t-4} + \ldots$$

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k})$$

$$\rho_k = corr(y_t, y_{t-k}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)\, Var(y_{t-k})}} = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{Var(y_t)}$$

$$\rho_1 = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t)} \qquad y_t = 17 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t$$

$$\gamma_0 = Cov(y_t, y_t) = Var(y_t) \qquad Cov(y_{t-1}, LHS) = Cov(y_{t-1}, RHS)$$

$$Cov(y_{t-1}, y_t) = Cov(y_{t-1}, 17 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t)$$

$$\gamma_1 = 0 + 0{,}4 \cdot \gamma_0 + 0 \qquad \gamma_1 = 0{,}4\gamma_0$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0{,}4}$$

$$Cov(y_{t-2}, y_t) = Cov(y_{t-2}, 17 + 0{,}4\, y_{t-1} + u_t)$$

$$\gamma_2 = 0 + 0{,}4 \cdot \gamma_1 + 0$$

$$\gamma_2 = 0{,}4 \cdot \gamma_1 = 0{,}4^2 \gamma_0 \qquad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0{,}4^2$$

...

$$\boxed{\rho_k = 0{,}4^k}$$

ρ_3

$$y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4$$

$$\rho_3 = Corr(y_1, y_4)$$

$$\varphi_{33} = pCorr(y_1, y_4;\ y_2, y_3)$$

partial

$$\varphi_{11} = pCorr(y_t, y_{t-1};\ \varnothing) = Corr(y_t, y_{t-1}) = 0{,}4$$

$$\varphi_{22} = pCorr(y_t, y_{t-2};\ y_{t-1})$$

Хитро

$$\begin{cases} y_t = \alpha + \varphi_{21}\cdot y_{t-1} + \varphi_{22}\cdot y_{t-2} + w_t \\ \begin{cases} Cov(y_{t-1}, w_t) = 0 \\ Cov(y_{t-2}, w_t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\varphi_{21}, \varphi_{22}$

φ_{22}?

путь простачка

путь самурая

$$y_t = 14 + 0{,}4 y_{t-1} + u_t$$

$$\begin{cases} Cov(y_{t-1},\ y_t - \alpha - \varphi_{21}\cdot y_{t-1} - \varphi_{22} y_{t-2}) = 0 \\ \gamma_1 - 0 - \varphi_{21}\cdot\gamma_0 - \varphi_{22}\cdot\gamma_1 = 0 \quad /\gamma_0 \\ 0{,}4 - \varphi_{21}\cdot 1 - \varphi_{22}\cdot 0{,}4 = 0 \\ Cov(y_{t-2},\ y_t - \alpha - \varphi_{21} y_{t-1} - \varphi_{22}\cdot y_{t-2}) = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$y_t = 14 + 0{,}4 y_{t-1} + 0\cdot y_{t-2} + u_t$$

$$\begin{cases} Cov(y_{t-1}, u_t) = 0 \\ Cov(y_{t-2}, u_t) = 0 \end{cases}$$

$\alpha =$

$\varphi_{21} = 0{,}4$

$\varphi_{22} = 0$

$pCorr(y_t, y_{t-2}; y_{t-1}) = 0$