Привет !!

ARMA-ур-ия

Упр.

$$y_t = 10 - 0.4\,y_{t-1} - 0.03\,y_{t-2} + u_t + 2u_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$u_t \sim$ б. шум.

а) сколько нестац-х решений у ур-ия? приведите пример хотя бы одного нестац-го.

б) сколько стац-х решений? найдите их все.

а) ∞ много

нач. усл.

$$y_0 = u_0 + 4, \quad y_1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$y_{-1}, y_{-2}, \dots\ y_2, y_3 \dots$$

(y_t) – не стац.

$0 = y_1 = 10 - 0{,}4(u_0+4) - 0{,}03\,y_{-1} + u_1 + 2u_0$ → y_{-1}

$y_2 = 10 - 0{,}4\cdot 0 - 0{,}03\cdot(u_0+4) + u_2 + 2u_1$

$y_3 = 10 - 0{,}4\cdot y_2 - 0{,}03\cdot 0 + u_3 + 2u_2$

$\vdots$

$$E(y_0) = E(u_0+4) = 0 + 4 = 4$$

$$E(y_1) = 0$$

$$Var(y_0) = Var(u_0+4) = \sigma_u^2 + 0$$

$$Var(y_1) = Var(0) = 0$$

! Если

ARMA ур-ие $P(L)\cdot y_t = Q(L)\,u_t + c$ несократимо $\{P(\ell)$ и $Q(\ell)$ не имеют общих корней$\}$, то возможно три ситуации

- у $P(\ell)$ есть корень $|\ell| = 1$ ① → стац. решений нет
- все корни у $P(\ell)$ $|\ell| \neq 1$ → стац. реш-ие есть и ровно одно
  - у $P(\ell)$ есть хотя бы один корень $|\ell| < 1$ ③ → решение имеет вид $y_t = \mu + v_t + c_1\cdot v_{t-1} + c_2\cdot v_{t-2} + \dots$, где v_t – некий белый шум ($\neq u_t$)
  - ② все корни у $P(\ell)$ $|\ell| > 1$ → решение имеет вид $y_t = \mu + u_t + c_1\cdot u_{t-1} + c_2\cdot u_{t-2} + \dots$

$\boxed{1^\circ \text{ Если}}$

ARMA ур-ие $P(L)\cdot y_t = Q(L)\cdot u_t + c$ несократимо

{ $P(l)$ и $Q(l)$ не имеют общих корней }, $\boxed{\text{то}}$ возможно при ситуации

Ad van der Vaart „Time series"

(1) у $P(l)$ есть корень $|l|=1$ → стац. решений нет

все корни у $P(l)$ $|l|\neq 1$ → стац. реш-ие есть и ровно одно

(3) у $P(l)$ есть хотя бы один корень $|l|<1$

решение имеет вид

$$y_t = \mu + v_t + c_1 v_{t-1} + c_2 v_{t-2} + \dots,$$

где v_t – некий белый шум ($\neq u_t$)

MA(∞) отн-но нек-рого (v_t) [это не u_t]

(2) все корни у $P(l)$ $|l|>1$

решение имеет вид

$$y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + \dots$$

MA(∞) отн-но того же (u_t), что был в ур-ии

$$y_t = 10 - 0.4\, y_{t-1} - 0.03\, y_{t-2} + u_t + 2u_{t-1}$$

$$\underbrace{(1 + 0.4L + 0.03L^2)}\, y_t = \underbrace{(1+2L)}\cdot u_t + 10$$

$P(l)=0$

$1 + 0.4l + 0.03l^2 = 0$

$0{,}3+0{,}1 \qquad 0{,}3\cdot 0{,}1$

$(1+0{,}3l)\cdot(1+0{,}1l) = 0$

$l = -\frac{1}{0{,}3} \qquad l = -\frac{1}{0{,}1}$

$l_1 = -\frac{10}{3} \qquad l_2 = -10$

$Q(l) = 0$

$1 + 2l = 0$

$l = -\frac{1}{2}$

б) стац. решение есть и единственно.

$L y_t = y_{t-1} \qquad F\cdot y_t = y_{t+1}$

$L\cdot F = F\cdot L = 1$

$L\cdot F\cdot y_t = F\cdot L\cdot y_t = y_t$

$$\frac{1}{1-\alpha L} \overset{def}{=} 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots \quad |\alpha|<1$$

$$\frac{1}{1-\alpha F} \overset{def}{=} 1 + \alpha F + \alpha^2 F^2 + \dots \quad |\alpha|<1$$

Теорема: при делении / умножении на полиномы от L или F с корнями $|e| \neq 1$ множество стац. реш. не изменяется.

Как найти стац. реш-ие?

Способ 1: у нашего ур-ия есть $y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + \dots$ подставим в исх-ое ур-ие и приравняем коэф-ты

Способ 2: поделим на $P(L)$

$$(1+0{,}3L)\cdot(1+0{,}1L)\cdot y_t = 10 + (1+2L)\cdot u_t$$

$$\frac{10}{1.3\cdot 1.1}$$

$?u_{t-7}$

$$y_t = \boxed{\frac{1}{1+0{,}3L}\cdot\frac{1}{1+0.1L}\cdot 10} + (1+2L)\cdot\frac{1}{1+0{,}3L}\cdot\frac{1}{1+0{,}1L}\cdot u_t$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots$$

$$\frac{1}{1+q} = 1-q+q^2-q^3\dots$$

$$y_t = (1-0{,}3L+0{,}3^2L^2-0{,}3^3L^3+\dots)\cdot(1-0{,}1L+0{,}1^2L^2-0{,}1^3L^3\dots)\cdot$$
$$\cdot(10+(1+2L)\cdot u_t)$$

$$L\cdot 10 = F\cdot 10 = 10$$

$$(1+5L^2+6L^3)\cdot 10 = (1+5+6)\cdot 10$$

$$\frac{1}{1+0{,}3L}\cdot 10 = \frac{1}{1+0{,}3\cdot 1}\cdot 10 = \frac{10}{1.3}$$

$$y_t = \frac{10}{1{,}3\cdot 1{,}1} + (1-0{,}3L+0{,}3^2L^2\dots)\cdot(1-0{,}1L+0{,}1^2L^2\dots)(1+2L)u_t$$

$$y_t = \frac{1000}{11\cdot 13} + 1\cdot u_t + (-0{,}3-0{,}1+2)\cdot u_{t-1} + (0{,}3\cdot 0{,}1 - 0{,}1\cdot 2 - 0{,}3\cdot 2 + 0{,}3^2 + 0{,}1^2)u_{t-2} + \dots$$

$$y_1 = \frac{1000}{11\cdot 13} + u_1 + 1{,}6u_0 + \dots$$

$$y_0 = \text{—} (\dots\dots \text{—})$$

$$y_t = 5y_{t-1} + u_t + 2u_{t-1} + 7 \qquad u_t \sim \text{б. шум}$$

а) сколько нестац реш-ий?
б) сколько стац-х —״— ?
в) найдите стац-ое, если оно есть.
г) если стац-ое есть, то представьте его в виде, обещ-м теоремой.

$$(1-5L)\cdot y_t = (1+2L)\cdot u_t + 7$$

$$l_1 = \frac{1}{5} \qquad l_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-5L\left(1-\frac{1}{5}F\right) y_t = (1+2L)\cdot u_t + 7$$

$$\boxed{y_t = \frac{1}{-5L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}F}(1+2L)\cdot u_t + \frac{1}{-5L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}F}\cdot 7}$$

$$y_t = -\frac{1}{5L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}F}(1+2L)u_t - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot 7$$

$$y_t = -\frac{1}{5}F\left(1+\frac{1}{2}F+\left(\frac{1}{2}\right)^2F^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3F^3+\dots\right)\cdot(1+2L)\cdot u_t - \frac{7}{4}$$

$$y_t = \left(1+\frac{1}{2}F+\left(\frac{1}{2}\right)^2F^2+\dots\right)\cdot(-0{,}4-0{,}2F)\cdot u_t - \frac{7}{4}$$

$$\boxed{y_t = -0{,}4\cdot u_t - 0{,}4\,u_{t+1} + ?\,u_{t+2} + ?\,u_{t+3} + \dots - \frac{7}{4}}$$

$$\left(-0{,}4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}2\,\frac{1}{2}\right)$$

мини упр.

$$?\ u_{t+1000}$$

$$-0{,}4\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} - 0{,}2\left(\frac{1}{2}\right)^{999}$$

$$y_t = \frac{1}{-5L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}F}\left(1+2L\right)\cdot u_t + \frac{1}{-5L}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}F}\cdot 7$$

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{1-\frac{1}{5}F}\left(0{,}2F+0{,}4\right)\cdot u_t - \frac{7}{4}}$$

немот.

$$y_t = \frac{1-\frac{1}{5}L}{1-\frac{1}{5}L}\cdot\underbrace{\frac{(-1)}{1-\frac{1}{5}F}\left(0{,}2F+0{,}4\right)\cdot u_t}_{v_t} - \frac{7}{4}$$

$$y_t = \frac{1}{1-\frac{1}{5}L}\cdot v_t - \frac{7}{4}$$

$$v_t = \frac{1-\frac{1}{5}L}{1-\frac{1}{5}F}\left(-0{,}2F-0{,}4\right)\cdot u_t$$

$\mathrm{cov}(v_t, v_s) = \ldots$

$=$ оч-сь $= 0$

при $t \neq s$

$$y_t = \left(1 + \frac{1}{5}L + \left(\frac{1}{5}L\right)^2 + \ldots\right)\cdot v_t - \frac{7}{4}$$

$$\boxed{y_t = v_t + \frac{1}{5}v_{t-1} + \frac{1}{25}v_{t-2} + \ldots - \frac{7}{4}}$$