Привет !! / 22C

$\to$ „увидеть единорогов" ← случ. сост.

ETS
ORBIT (LGT...)
UCM ....

$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$

l_{t-1} — прошл. зн. тренд

b_{t-1} — лок. ск. роста

ARMA
VAR
...

$\to$ запутать кучу коэфф-в.

$y_t = u + u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 \cdot u_{t-2} + \alpha_3 \cdot u_{t-3}$

$$\boxed{y_t = u + u_t + 0.9 u_{t-12}}$$

y_{10} и y_{22}

$u_{10} + 0.9\, u_{-2}$ $\quad$ $u_{22} + 0.9\, u_{10}$

обозначения.

$L \cdot y_t = y_{t-1}$

$L^{12} \cdot y_t = L \cdot L \cdot L \cdot \ldots \cdot \underbrace{L \cdot y_t}_{y_{t-1}} = y_{t-12}$

$P(L) = 1 - 0.7L + 0.8L^2$ ← действие над посл-ми.

$P(L) \cdot u_t = u_t - 0.7\, u_{t-1} + 0.8\, u_{t-2}$

можно!

$P(L) + Q(L) = Q(L) + P(L)$

$P(L) \cdot Q(L) = Q(L) \cdot P(L)$

с делением осторожно!

$$(a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$$

...	$t=-2$	$t=-1$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$ ...
...	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3 ...

$$(b)_{t=-\infty}^{t=+\infty} = L\left((a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z} \\ b_t = a_{t-1} \end{array} \right.$$

...	$t=-2$	$t=-1$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$ ...
...	b_{-2}	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	...
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	
	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	

$$L\left((a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty} + (b_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}\right) =$$
$$= L\left((a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}\right) + L\left((b_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}\right)$$

! Ловушка !

$$y_t = x_{-t}$$

$$y_7 = x_{-7}$$
$$y_{-5} = x_5$$

$$L x_{-5} = x_{-6}$$
$$\parallel \qquad\qquad ?$$
$$L y_5 = y_4 = x_{-4}$$

ARMA: модель.

Auto-Regression Moving Average.

$y_t \sim ARMA(p, q)$ модель, если y_t можно предст-ть в виде

(1) $P(L) \cdot y_t = c + Q(L) \cdot u_t$

$P(L)$, $Q(L)$ - полиномы от лага

(2) $P(L)$ степени p $\boxed{P(0)=1}$

$Q(L)$ степени q $\boxed{Q(0)=1}$

(3) $(u_t) \sim$ white noise $E(u_t)=0$ $Var(u_t)=\sigma^2$

$Cov(u_t, u_s)=0$ при $t \neq s$

[по дефолту: $u_t \sim N(0; \sigma^2)$ и незав]

(4) $P(L)$ и $Q(L)$ не имеют общих корней

(5) y_t представим в виде $MA(\infty)$ отн-но (u_t), упомянутого в ур-нии (1)

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 \cdot u_{t-2} + \alpha_3 u_{t-3} + \ldots$$

ARMA(2,1)

$P(L) = 1 - 0{,}6L + 0{,}08L^2$

$Q(L) = 1 + 0{,}9L$

$c = 2$

$y_t - 0{,}6 y_{t-1} + 0{,}08 y_{t-2} = 2 + u_t + 0{,}9 u_{t-1}$

нужно, для единств. описания.

Упр.

$y_t \sim \underline{ARMA}(2,0) = AR(2)$ модель.

$\boxed{y_t - 0{,}7y_{t-1} + 0{,}12y_{t-2}} = 3 + u_t$

$$y_t = 3 + 0{,}7y_{t-1} - 0{,}12y_{t-2} + u_t$$

$u_t \sim N(0; 16)$ незав.

[и ост-ые предп-ки!]

$Q(L) = 1$

$P(L) = 1 - 0{,}7L + 0{,}12L^2$

$P(L)\cdot y_t = c + Q(L)\cdot u_t$, $c = 3$

а) $P(L)$? $Q(L)$?

нет общих корней

б) $E(y_t)$?

в) первые два коэф-та α_1, α_2:

в $MA(\infty)$ предст.: $y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$

$$E(y_t) = 3 + 0{,}7E(y_{t-1}) - 0{,}12E(y_{t-2}) + 0$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$$

$$E(y_t) = \mu + 0 + 0 + \ldots$$

$$\mu = 3 + 0{,}7\cdot\mu - 0{,}12\cdot\mu$$

$$\mu = \frac{3}{0.42} = 7.142\ldots$$

как найти α_1, α_2?

* подставить $y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots$ в исх-ое ур-ие.

* исходное ур-ие подставив в себя.

* делить полиномы от лага.

$$y_t = 3 + 0{,}7y_{t-1} - 0{,}12y_{t-2} + u_t =$$

$$= 3 + u_t + 0{,}7(3 + 0{,}7y_{t-2} - 0.12y_{t-3} + u_{t-1}) - 0{,}12y_{t-2} =$$

$$= 5.1 + u_t + \underbrace{0{,}7}_{\alpha_1}u_{t-1} + 0{,}37\underbrace{y_{t-2}}_{\mu + \alpha_1\cdot u_{t-2} + \alpha_2\cdot u_{t-3} + \ldots} - 0{,}7\cdot 0{,}12\underbrace{y_{t-3}}_{\mu + u_{t-3} + \alpha_1\cdot u_{t-4} + \ldots}$$

$$= 5.1 + u_t + 0{,}7 u_{t-1} + 0{,}37 y_{t-2} - 0{,}7 \cdot 0{,}12 y_{t-3} =$$

α_1 $\quad \mu + \alpha_1 \cdot u_{t-2} + \alpha_2 \cdot u_{t-3} + \dots$ $\quad \mu + u_{t-3} + \alpha_1 \cdot u_{t-4} + \dots$

$$= 5.1 + \boxed{u_t + 0{,}7 u_{t-1}} + 0{,}37 \cdot (3 + 0{,}7 y_{t-3} - 0{,}12 y_{t-4} + u_{t-2})$$

$+ (\text{остальное})$;

$\alpha_1 = 0{,}7 \qquad \alpha_2 = 0{,}37$

[!] 2) $\mathrm{Cov}(y_t, u_t)$?

$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots$

$\mathrm{Cov}(y_t, u_t) =$

$= \mathrm{Var}(u_t) = 16$

$\mathrm{Cov}(y_t, y_t) = \gamma_0$?

$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \gamma_1$?

$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-2}) = \gamma_2$?

стац-н ли наш процесс?

$E(y_t) = \mu$

$\mathrm{Var}(y_t) = \gamma_0$

$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \gamma_1$

$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-2}) = \gamma_2$

$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_5, y_6) = \mathrm{Cov}(\mu + u_5 + \alpha_1 u_4 + \alpha_2 u_3 + \dots, \mu + u_6 + \alpha_1 u_5 + \dots)$$

$$= 1 \cdot \alpha_1 16 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot 16 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot 16 + \dots$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_9, y_8) = \dots \quad 1 \cdot \alpha_1 \cdot 16 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot 16 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot 16 + \dots$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

LHS $\qquad$ RHS

$$y_t = \boxed{3} + 0{,}7 y_{t-1} - 0{,}12 y_{t-2} + u_t$$

LHS = RHS

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = ?$

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(y_t, LHS) = \mathrm{Cov}(y_t, RHS) \\ \mathrm{Cov}(y_{t-1}, LHS) = \mathrm{Cov}(y_{t-1}, RHS) \\ \mathrm{Cov}(y_{t-2}, LHS) = \mathrm{Cov}(y_{t-2}, RHS) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 + 0{,}7 \gamma_1 - 0{,}12 \gamma_2 + 16 \\ \gamma_1 = 0 + 0{,}7 \cdot \gamma_0 - 0{,}12 \gamma_1 + 0 \\ \gamma_2 = 0 + 0{,}7 \cdot \gamma_1 - 0{,}12 \cdot \gamma_0 + 0 \end{cases}$$

$\dots$

$\mathrm{Cov}(y_{t-1}, u_t) = 0$

$\mu + u_{t-1} + \alpha_1 u_{t-2} + \dots$