

8 rubles !!

ARMA-ур-ие

ур.

$$y_t = 10 - 0.4 y_{t-1} - 0.03 y_{t-2} + u_t + 2u_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$u_t \sim \text{б.м.м.}$

а) сколько постоянных решений у ур-ия?  
приведите пример хотя бы одного постоян-го.

б) сколько случайных решений?  
найдите их все.

а)  $\infty$  много

конст.  
усл.

$$y_0 = u_0 + 4$$

$$y_1 = 0$$

$$y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_2, y_3, \dots$$

$(y_t)$  - не-стационар.

$$0 = y_1 = 10 - 0.4(u_0 + 4) - 0.03 y_{-1} + u_1 + 2u_0$$

$$y_2 = 10 - 0.4 \cdot 0 - 0.03 \cdot (u_0 + 4) + u_2 + 2u_1$$

$$y_3 = 10 - 0.4 \cdot y_2 - 0.03 \cdot 0 + u_3 + 2u_2$$

$$E(y_0) = E(u_0 + 4) = 0 + 4 = 4$$

$$E(y_1) = 0$$

$$\text{Var}(y_0) = \text{Var}(u_0 + 4) = \sigma_u^2 + 0$$

$$\text{Var}(y_1) = \text{Var}(0) = 0$$

Если

ARMA ур-ие  $P(L) \cdot y_t = Q(L) \cdot u_t + c$  несовместимо

{  $P(L)$  и  $Q(L)$  не имеют общих корней }, то возможно при

случае

$y P(L)$   
есть корни  $|L|=1$

стационар.  
решение  
нет

$y P(L)$  есть хотя бы  
один корень  $|L| < 1$   
решение имеет вид

$$y_t = \mu + \sqrt{t} + c_1 \sqrt{t} + c_2 \sqrt{t} + \dots, \text{ где } \sqrt{t} - \text{нечетный делитель нуля } (\neq u_t)$$

все корни  $y P(L)$   
 $|L| \neq 1$

стационар. реш-ие есть  
и ровно одно

все корни  $y P(L)$   
 $|L| > 1$

$$y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 \cdot u_{t-2} + \dots$$

Если

ARMA ур-ие  $P(L) \cdot y_t = Q(L) \cdot u_t + c$  неслучайно

$\{ P(L) \text{ и } Q(L) \text{ не имеют общих корней} \}$ , то возможно при

состоянии

если корни  $|L|=1$

все корни  $y P(L)$   
 $|L| \neq 1$

Had van der Vaart  
"Time Series"

стационарное решение

стационарное решение и ровно одно

если хотя бы один корень  $|L| < 1$   
решение имеет вид

все корни  $y P(L)$   
 $|L| > 1$

решение имеет вид

$$y_t = \mu + \nu_t + c_1 \nu_{t-1} + c_2 \nu_{t-2} + \dots, \text{ где } \nu_t - \text{некий белый шум } (\neq u_t)$$

$$y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \dots$$

MA( $\infty$ ) отсюда то же  $(u_t)$ , что был в ур-ии

$$y_t = 10 - 0.4 y_{t-1} - 0.03 y_{t-2} + u_t + 2 u_{t-1}$$

$$(1 + 0.4L + 0.03L^2) y_t = (1 + 2L) u_t + 10$$

$$P(L) = 0$$

$$Q(L) = 0$$

$$1 + 0.4L + 0.03L^2 = 0$$

$$1 + 2L = 0$$

$$L = -\frac{1}{2}$$

$$0.3 + 0.1 \quad 0.3 \cdot 0.1$$

$$(1 + 0.3L)(1 + 0.1L) = 0$$

$$L = -\frac{1}{0.3} \quad L = -\frac{1}{0.1}$$

$$L_1 = -\frac{10}{3} \quad L_2 = -10$$

8) стационарное решение есть и единственное.

$$L y_t = y_{t+1}$$

$$F y_t = y_{t+1}$$

$$L \cdot F = F \cdot L = 1$$

$$L \cdot F y_t = F \cdot L y_t = y_t$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha L} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots \\ |\alpha| < 1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha F} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \alpha F + \alpha^2 F^2 + \dots \\ |\alpha| < 1 \end{aligned} \right\}$$

Теорема при заданном / фиксированном на начальном от  
 $L$  или  $F$  с корнями  $|l| \neq 1$  много-сво стая. рин.  
 не уменьшается.

Как найти стая. рин-ие?

Способ 1: у нашего ур-ия вв  $y_t = \mu + u_t + C_1 u_{t+1} + C_2 u_{t+2} + \dots$   
 подставим в наше ур-ие и  
 приравняем коэф-ты.

Способ 2: подставим на  $P(L)$

$$(1+0.3L) \cdot (1+0.1L) \cdot y_t = 10 + (1+2L) \cdot u_t \quad \frac{10}{1.3 \cdot 1.1} \quad (? u_{t+7})$$

$$y_t = \left( \frac{1}{1+0.3L} \right) \cdot \frac{1}{1+0.1L} \cdot 10 + (1+2L) \cdot \frac{1}{1+0.3L} \cdot \frac{1}{1+0.1L} \cdot u_t$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots$$

$$\frac{1}{1+q} = 1-q+q^2-q^3+\dots$$

$$y_t = (1-0.3L+0.3^2L^2-0.3^3L^3+\dots) \cdot (1-0.1L+0.1^2L^2-0.1^3L^3+\dots) \cdot (10 + (1+2L) \cdot u_t)$$

$$L \cdot 10 = F \cdot 10 = 10$$

$$(1+5L^2+6L^3) \cdot 10 = (1+5+6) \cdot 10$$

$$\frac{1}{1+0.3L} \cdot 10 = \frac{1}{1+0.3 \cdot 1} \cdot 10 = \frac{10}{1.3}$$

$$y_t = \frac{10}{1.3 \cdot 1.1} + (1-0.3L+0.3^2L^2+\dots) \cdot (1-0.1L+0.1^2L^2+\dots) \cdot (1+2L) u_t$$

$$y_t = \frac{1000}{11 \cdot 13} + 1 \cdot u_t + (-0.3 - 0.1 + 2) \cdot u_{t+1} + (0.3 \cdot 0.1 - 0.1 \cdot 2 - 0.3 \cdot 2) u_{t+2} + 0.3^2 + 0.1^2 \dots$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1000}{11 \cdot 13} + u_1 + 1.6 u_0 + \dots \\ y_0 = \dots \end{cases}$$

$$y_t = 3y_{t-1} + u_t + 2u_{t-1} + 7$$

$u_t \sim \text{d.i.i.d.}$

- а) можно ли найти рекуррентное уравнение?
- б) можно ли найти стационарное состояние?
- в) найдите стационарное состояние, если оно есть.
- г) если стационарное состояние есть, то представьте его в виде, следуя теореме.

$$(1 - 5L) \cdot y_t = (1 + 2L) \cdot u_t + 7$$

$$l_1 = \frac{1}{5} \quad l_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-5L(1 - \frac{1}{5}F) y_t = (1 + 2L) \cdot u_t + 7$$

$$y_t = \frac{1}{-5L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}F} (1 + 2L) \cdot u_t + \frac{1}{-5L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}F} \cdot 7$$

$$y_t = -\frac{1}{5L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}F} (1 + 2L) u_t - \left( \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \cdot 7 \right)$$

$$y_t = \left( -\frac{1}{5}F \left( 1 + \frac{1}{2}F + \left(\frac{1}{2}\right)^2 F^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 F^3 + \dots \right) \cdot (1 + 2L) \right) \cdot u_t - \frac{7}{4}$$

$$y_t = \left( 1 + \frac{1}{2}F + \left(\frac{1}{2}\right)^2 F^2 + \dots \right) \cdot (-0.4 - 0.2F) \cdot u_t - \frac{7}{4}$$

$$y_t = -0.4 \cdot u_t - 0.4 u_{t+1} + ? u_{t+2} + ? u_{t+3} + \dots - \frac{7}{4}$$

$$\left( -0.4 \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 0.2 \frac{1}{2} \right)$$

мнимый

$$? u_{t+1000}$$

$$-0.4 \left( \frac{1}{2} \right)^{1000} - 0.2 \left( \frac{1}{2} \right)^{999}$$

$$y_t = \frac{1}{-5L} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}F} (1+2L) \cdot u_t + \frac{1}{-5L} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}F} \cdot 7$$

$$y_t = - \frac{1}{1-\frac{1}{5}F} (0.2F+0.4) \cdot u_t - \frac{7}{4}$$

remot.

usage:  $\sqrt{t}$

$$y_t = \frac{1-\frac{1}{5}L}{1-\frac{1}{5}L} \cdot \frac{(-1)}{1-\frac{1}{5}F} \cdot (0.2F+0.4) \cdot u_t - \frac{7}{4}$$

$$y_t = \frac{-1(0.2F+0.4)}{1-\frac{1}{5}L} \cdot \sqrt{t} - \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{t} = \frac{1-\frac{1}{5}L}{1-\frac{1}{5}F} u_t$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\sqrt{t}, \sqrt{s}) &= \dots \\ &= 0 \text{ or } -\omega = 0 \\ &\text{nur } t \neq s \end{aligned}$$