Привет!! Видно? Слышно?

! ARMA ур-ие $\neq$ ARMA-модель

ARMA-модель $= \left\{ \text{ARMA-ур-ие} + \text{ещё предпосылки} \right.$

Aad van der Vaart „Time series"

! участвуйте во всяких штуках, св-х с анализом данных / эконометрикой / / статистикой ... !

universiade-econ.com

упр.

? Существует ли стац-ный ARMA-процесс т. что $ACF_1 = \frac{1}{2}$, $ACF_2 = \frac{1}{3}$, $ACF_3 = ACF_4 = \ldots = 0$

Autocorrelation function

$Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{1}{2}$, $Corr(y_t, y_{t-2}) = \frac{1}{3}$

$\ldots u_{t-3}\; u_{t-2}, u_{t-1}, u_t \ldots u_{t+1}\; u_{t+2}\; u_{t+3}\; u_{t+4}\; u_{t+5}$

$y_t\; y_{t+1}\; y_{t+2}\; y_{t+3}\; y_{t+4}\; y_{t+5}$

$(u_t) \sim$ б.шум
$E(u_t) = 0$
$Var(u_t) = \sigma^2$
$Cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$

ARMA-ур-ие

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_q u_{t-q} \quad \forall t$$

$$\forall t \quad P(L)\cdot y_t = c + Q(L)\cdot u_t$$

ARMA(p, q)-процесс stat.

1. ARMA-ур-ие
2. $P(L)$ степень p, $Q(L)$ степень q, $P(0) = 1$, $Q(0) = 1$
3. $P(z)$ и $Q(z)$ взаимно просты (не имеют общих корней)
4. $(u_t) \sim$ б.шум иногда $(u_t) \sim N(0; \sigma^2)$ незав.
5. y_t представим в виде $MA(\infty)$ отн-но u_t, т.е.

$$\forall t \quad y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + c_3 u_{t-3} + \ldots$$

6. Все корни $Q(z)$ $|z| > 1$.

$$\boxed{y_t = \mu + u_t + c_1 \cdot u_{t-1} + c_2 u_{t-2}}$$

μ — не влияет на корр.

MA(2) ARMA(0,2)

$$\boxed{Var(u_t) = \sigma^2}$$

$$Corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{Var(y_t)\,Var(y_{t-1})}} =$$

$$Var(y_t) = 0 + \sigma^2 + c_1^2\sigma^2 + c_2^2\sigma^2$$

$$Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2},\; u_{t-1} + c_1 u_{t-2} + c_2 u_{t-3}) = c_1 \sigma^2 + c_1 c_2 \sigma^2$$

$$= \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t)} = \frac{\sigma^2 (c_1 + c_2 c_1)}{\sigma^2(1^2 + c_1^2 + c_2^2)}$$

$$Cov(c_2 u_{t-2}, c_1 u_{t-2}) = c_1 c_2\, Cov(u_{t-2}, u_{t-2}) = c_1 c_2 \sigma^2$$

$$ACF_1 = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{c_1 + c_1 c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2} \quad (1)$$

$$ACF_2 = \frac{1}{3} = \frac{Cov(y_t, y_{t-2})}{Var(y_t)} = \frac{c_2 \cdot \sigma^2}{(1 + c_1^2 + c_2^2)\sigma^2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{c_2}{1 + c_1^2 + c_2^2} \quad (2) \qquad \frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{3}{2} = \frac{c_1 + c_1 c_2}{c_2}$$

$$3c_2 = 2c_1 + 2c_1 c_2$$

угад. простое — честно выразить c_2 и подставить

$$1 + c_1^2 + c_2^2 = 6$$

$c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $c_2 = 2$, $c_1 = 1$ $\qquad$ ~~? $c_1 = 0$~~ ~~? $c_1 = 1$~~ ? $c_1 = c_2$

нестац. реш. множество реш-ий (стац. реш.)

Упр.

$$\boxed{x_t = 1{,}3 x_{t-1} - 0{,}4 x_{t-2} + u_t - 0{,}5 u_{t-1}} \quad (*)$$

u_t — б. шум

Является ли процесс x_t стац-м?

(!) честно, но не идеальная (!)

Аккур: существует ли стац-ое решение (*), где $y_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \ldots$

(*) — это ур-ие! У него ∞ решений!

В чём неаккуратность?

$x_0 = u_0 + 2u_1$, $x_1 = u_0$, $x_2 =$, $x_3 =$, ⋮

$x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \ldots$, $x_3 = \ldots$, $x_4 = \ldots$

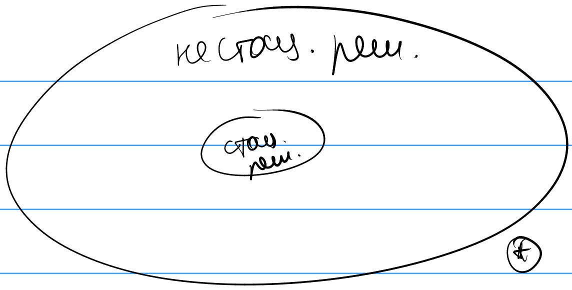
$x_0 = 2$, $x_1 = 5$ — нестац. реш.

$x_2 = 1{,}3 \cdot 5 - 0{,}4 \cdot 2 + u_2 - 0{,}5 u_1$

$x_3 = 1{,}3 \cdot (\ldots) - 0{,}4 \cdot 5 + u_3 - 0{,}5 u_2$

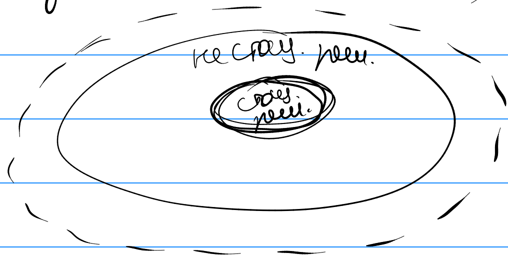
⋮

$E(x_0) = 2$, $E(x_1) = 5$, $E(x_2) = 1{,}3 \cdot 5 - 0{,}4 \cdot 2$



LHS = RHS

* домножаем на $P(L)$ без ед. корней $|l|\neq 1$



$f(x) = x^2-3x+2$

с ед. корнем

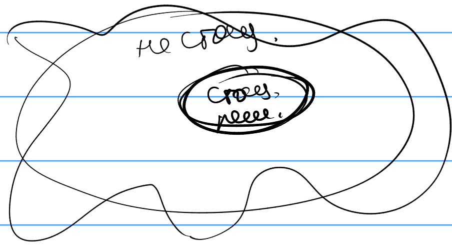
$f(x) = x^2-3x+6$

без ед. корня

$|l|\neq 1$

* деление на $P(L)$ без ед. корней.

$$\boxed{\frac{1}{1-\alpha L} \overset{\text{огр}}{=} 1+\alpha L+(\alpha L)^2+(\alpha L)^3+\dots}$$



$$x_t = 1{,}3x_{t-1} - 0{,}4x_{t-2} + u_t - 0{,}5u_{t-1}$$

$$(1-1{,}3L+0{,}4L^2)x_t = (1-0{,}5L)\cdot u_t$$

$x^2+bx+c=0$

$l_1+l_2=-b$

$l_1\cdot l_2 = c$

$ax^2+bx+c=0$

$l_1+l_2=-\frac{b}{a}$

$l_1\cdot l_2=\frac{c}{a}$

$l_1=2 \qquad l_1\cdot l_2=\frac{1}{0{,}4}$

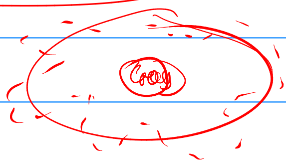
$l_2=1{,}25$

$0{,}5(2-L)$

$$0{,}4(L-2)\cdot(L-1{,}25)\cdot x_t = (1-0{,}5L)\cdot u_t$$

$(2-L)$

чего-то произошло с мн-вом не стац-х реш.
мн-во стац. решений не изменилось



$$-0{,}4\cdot(L-1{,}25)x_t = 0{,}5\cdot u_t$$

$$-0{,}8(L-1{,}25)\cdot x_t = u_t$$

$-\frac{4}{5} \qquad -\frac{5}{4}$

$$(1-0{,}8L)\cdot x_t = u_t$$

$$x_t - 0{,}8x_{t-1} = u_t$$

Есть ли стационарные решения вида $x_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \ldots$ у ур-ния?

$$x_t - 0{,}8 x_{t-1} = u_t \ ?$$

$$(1 - 0{,}8L) x_t = u_t \ ?$$

$$x_t = \frac{1}{1-0{,}8L} \cdot u_t$$

$$\frac{1}{1-0{,}8L} \overset{def}{=} 1 + (0{,}8L) + (0{,}8L)^2 + (0{,}8L)^3 + \ldots$$

$$x_t = (1 + 0{,}8L + 0{,}8^2 L^2 + 0{,}8^3 L^3 + 0{,}8^4 L^4 + \ldots) \cdot u_t$$

$$x_t = u_t + 0{,}8 u_{t-1} + 0{,}8^2 u_{t-2} + 0{,}8^3 u_{t-3} + 0{,}8^4 u_{t-4} \ldots$$

Ответ: стационарное решение вида $x_t = \mu + u_t + c_1 u_{t-1} + c_2 u_{t-2} + \ldots$ есть и мы его даже явно выписали!