Привет !! 1.2 с.

→ White noise $u_1, u_2, u_3, \ldots$

$$E(u_t) = 0$$
$$Var(u_t) = \sigma^2$$
$$Cov(u_t, u_s) = 0 \quad \text{при } t \neq s.$$

→ как выбрать ?
→ как оценить ? } пропускаем

y_t ~ Random walk. (случ. блуждание)

$$(\forall t) \quad y_t = y_{t-1} + u_t + 2$$
$$(\forall t) \quad u_t \sim N(0; 9)$$
$$(\forall t) \quad \mathcal{F}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots)$$
$$(\forall t) \quad u_t \text{ не зав от } \mathcal{F}_{t-1}$$

y_1	y_2	y_3
1	4	8

$u_{t+1} \in y_{t-1} - y_{t-2} - 2$

здесь вместо 2, 9 оценки в реальности.

u_t не зав $(y_{t-1}^2 \cdot \cos(y_{t-1}) + \ln y_{t-3})$

а) $E(y_4 \mid \mathcal{F}_3)$, $Var(y_4 \mid \mathcal{F}_3)$,

95% PI для y_4 при условии $\mathcal{F}_3$
(predictive interval)

в) $E(y_5 \mid \mathcal{F}_3)$, $Var(y_5 \mid \mathcal{F}_3)$ и 95% PI для y_5

$$P(y_5 \in PI \mid \mathcal{F}_3) = 0,95$$

а) $E(y_4|\mathcal{F}_3) = E(y_3 + u_4 + 2|\mathcal{F}_3) =$

$= E(y_3|\mathcal{F}_3) + E(u_4|\mathcal{F}_3) + 2 = y_3 + E(u_4) + 2 =$

$= 8 + 0 + 2 = 10.$

y_3 изв. в $t=3$ — нез

$Var(y_4|\mathcal{F}_3) = Var(y_3 + u_4 + 2|\mathcal{F}_3) =$

$= Var(y_3 + u_4|\mathcal{F}_3) = Var(u_4|\mathcal{F}_3) =$

фикс. — независ

$= Var(u_4) = 9$

$E(y_4|\mathcal{F}_3) = Med(y_4|\mathcal{F}_3) = Mode(y_4|\mathcal{F}_3) =$

Идея:

будущее = известная сейчас часть + совершенно непредсказ. часть

$(y_4|\mathcal{F}_3) \sim N(10; 9)$

$\left(\frac{y_4 - 10}{\sqrt{9}}\Big|\mathcal{F}_3\right) \sim N(0;1)$

95% PI для y_4 при инфо $\mathcal{F}_3$:

$\varphi = 1.96 \approx 2$

$[10 - 1.96\cdot\sqrt{9}; 10 + 1.96\cdot\sqrt{9}]$

$0.95 = P\left(-1.96 \le \frac{y_4 - 10}{\sqrt{9}} \le 1.96 \Big| \mathcal{F}_3\right)$

б)

$E(y_5|\mathcal{F}_3) = E(y_4 + u_5 + 2|\mathcal{F}_3) =$

$= E(y_3 + u_4 + 2 + u_5 + 2|\mathcal{F}_3) =$

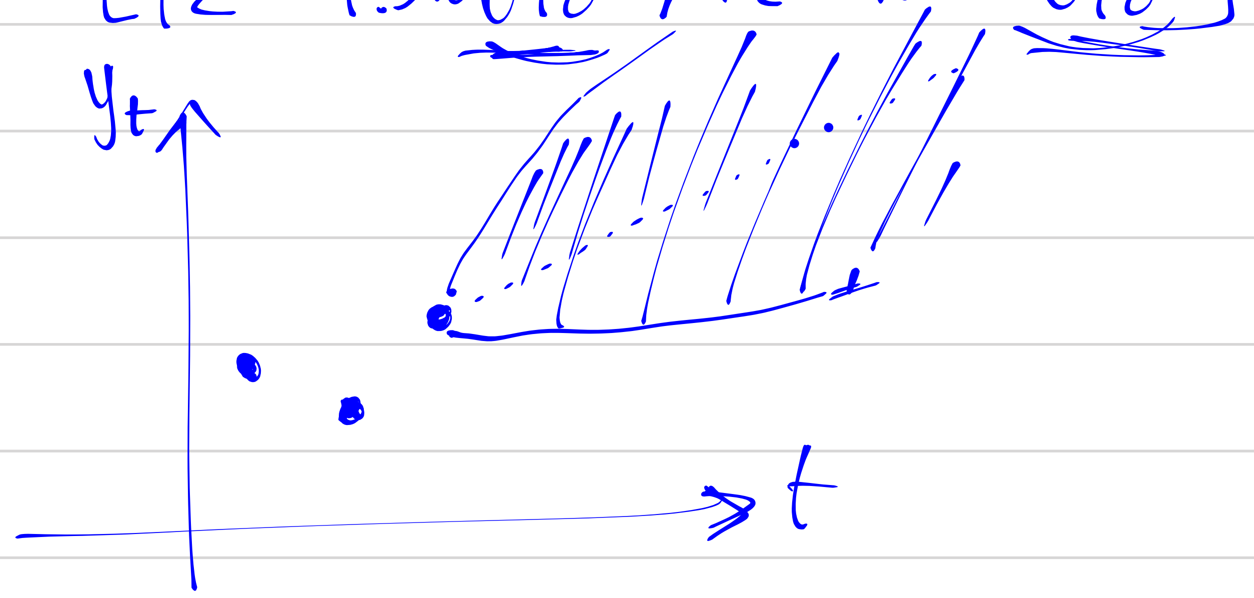
$= E(\underbrace{y_3 + 4}_{\text{предск.}} + \underbrace{u_4 + u_5}_{\text{непред.}}|\mathcal{F}_3) = y_3 + 4 =$

$= 12$

$$Var(y_5|\mathcal{F}_3) = Var(\underbrace{y_3+4}_{\text{предск}} + \underbrace{u_4+u_5}_{\text{неопр}} | \mathcal{F}_3) =$$

$$= Var(u_4+u_5) = Var(u_4) + Var(u_5) = 18$$

PI: $[12 - 1.96\sqrt{18} ; 12 + 1.96 \cdot \sqrt{18}]$



Упр.

$\ln y_t = \ln y_{t-1} + u_t + 2$ ($\ln y_t = z_t$, $\ln y_{t-1} = z_{t-1}$)

$u_t \sim N(0;9)$

$\mathcal{F}_t = \sigma(y_t, y_{t-1}, \ldots)$

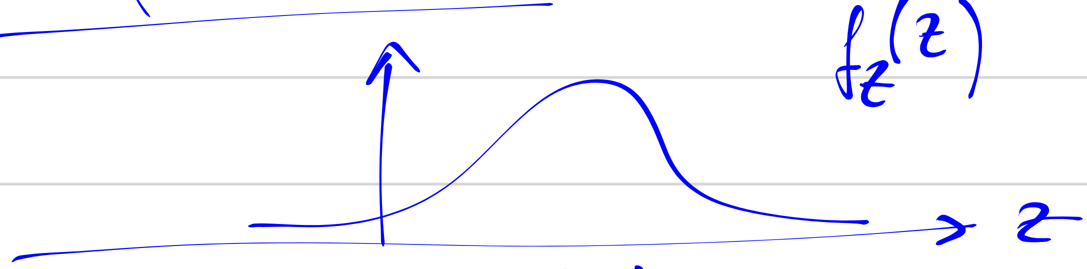
u_t не зав с $\mathcal{F}_{t-1}$

a) $E(y_4|\mathcal{F}_3)$, $Med(y_4|\mathcal{F}_3)$, $Mode(y_4|\mathcal{F}_3)$

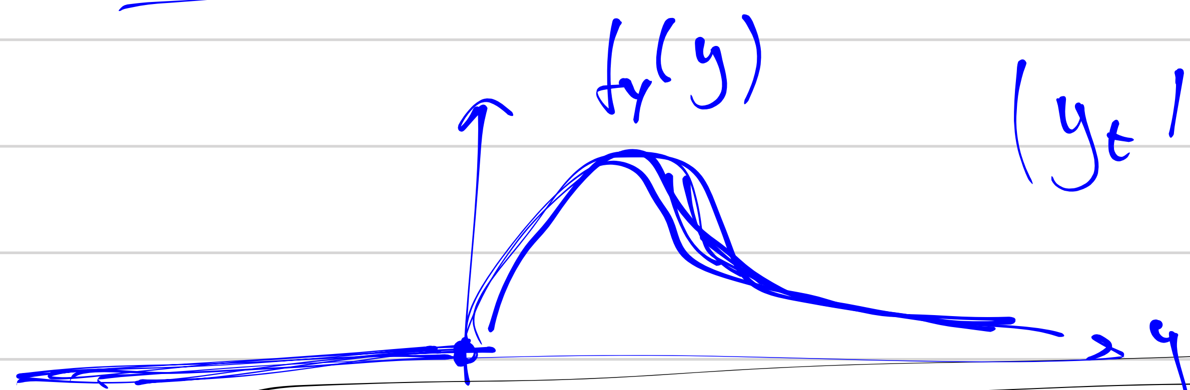
y_1	y_2	y_3
1	4	8

z_1	z_2	z_3
$\ln 1$	$\ln 4$	$\ln 8$

$(z_t|\mathcal{F}_{t-1}) \sim N(\cdot;\cdot)$



$(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) \sim \exp(N(..))$



$(z_4|\mathcal{F}_3) \sim N(\ln 8 + 2; 9)$

$$(z_4|\mathcal{F}_3) \sim N(\underbrace{\ln 8+2}_{\mu};\ \underbrace{9}_{\sigma^2})$$

$$y_4 = \exp(z_4) \qquad z_4 = \ln y_4$$

a) $$E(y_4|\mathcal{F}_3) = E(\exp(1\cdot z_4)|\mathcal{F}_3) = MGF(1)$$

$$MGF_S(u) = E(\exp(u\cdot S))$$

wiki: $$MGF_{N(\mu;\sigma^2)}(u) = \exp\left(\mu u + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot u^2\right)$$

$$MGF(1) = \exp\left((\ln 8+2)\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 1^2\right) =$$

$$= 8\cdot\exp(6.5) \approx \boxed{5321.}$$

$E(y_4|\mathcal{F}_3)$

!! Медиана и квантили – легко !!

$$P(y_4 > m|\mathcal{F}_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(\ln y_4 > \ln m|\mathcal{F}_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(z_4 > \ln m|\mathcal{F}_3) = \frac{1}{2}$$

$$(z_4|\mathcal{F}_3) \sim N(\ln 8+2, 9)$$

$$\ln m = \ln 8+2$$

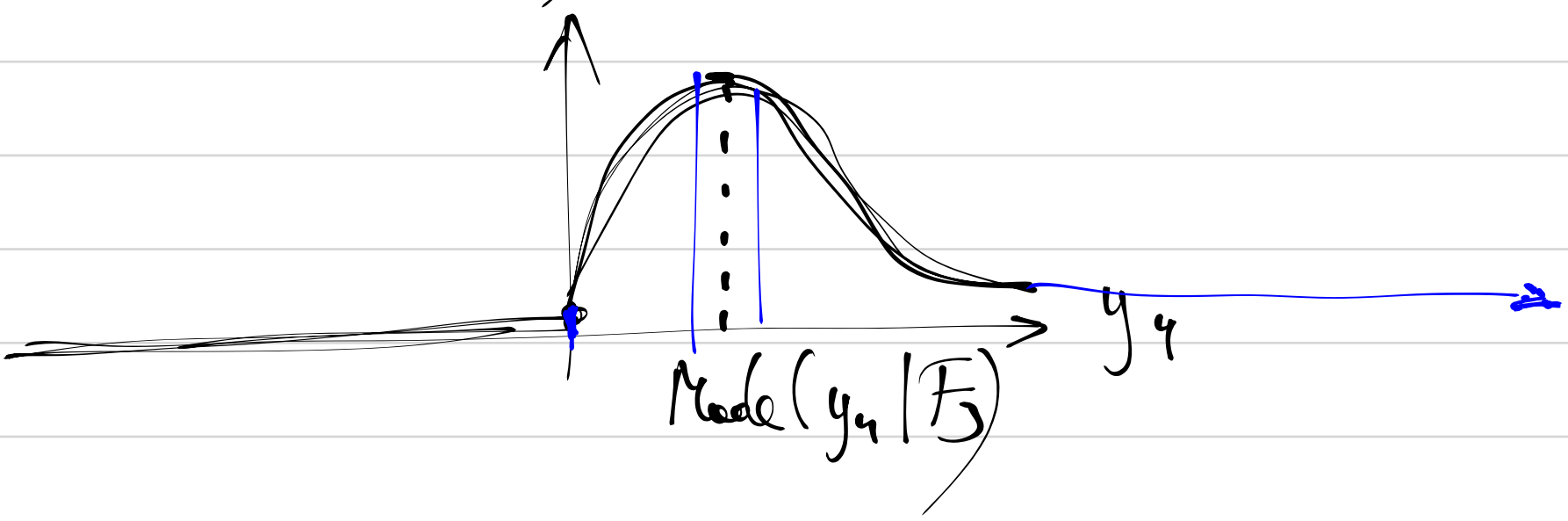
$$\text{Med}(y_4|\mathcal{F}_3) = m = \exp(\ln 8+2) = 8\cdot e^2 \approx 59.$$

pI z_4 : $[\ln 8+2 - 1.96\sqrt{9};\ \ln 8+2+1.96\sqrt{9}]$

pI y_4 : $[\exp(\ln 8+2-1.96\sqrt{9});\ \exp(\ln 8+2+1.96\sqrt{9})]$

не симм-я отн-но $E(y_4|\mathcal{F}_3)$, $Med(y_4|\mathcal{F}_3)$

c) $Mode(y_4|\mathcal{F}_3) \leftarrow$ макс $pdf(y_4|\mathcal{F}_3)$



ср: найдём pdf для y_4 и затем её максимум.

$$f_{y_4}(b) = \frac{d F_{y_4}(b)}{db} \overset{cdf(b)}{=} \frac{d\, P(\exp(z_4) \le b)}{db} =$$

$$= \frac{d\, P(z_4 \le \ln b)}{db} = \frac{d F_z(\ln b)}{db} = f_z(\ln b)\cdot\frac{1}{b}$$

wiki

$$pdf_{z_4}(b) = \frac{d\, cdf_{z_4}(b)}{db} = \frac{d\, P(z_4 \le b)}{db} = \frac{d F_z(b)}{db}$$

$$f_{y_4}(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 9}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\ln b - (\ln 8+2))^2}{9}\right)\cdot\frac{1}{b}$$

$$f_{Y_4}(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 9}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\ln b - (\ln 8+2))^2}{9}\right) \cdot \frac{1}{b}$$

$$\ln f_{Y_4}(b) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi 9}} - \frac{1}{2 \cdot 9}\left((\ln b)^2 + (\ln 8+2)^2 - 2 \cdot \ln b \cdot (\ln 8+2)\right) - \ln b$$

$$\ln b^* = \left[\begin{matrix} -b^{-1} \\ \frac{}{2a} \end{matrix}\right] = -\frac{\left(-1 + \frac{(\ln 8+2)}{9}\right)}{-1/9}$$

$$= \frac{-9 + \ln 8 + 2}{1} = \ln 8 + 2 - 9.$$

$$b^* = \exp(\ln 8 - 7) = 8/e^7$$

$$\text{Mode}(Y_4 | F_3) = 8/e^7$$