

1. Анонс

За кубиком Рубика и игрой Пятнашки маячит хвостик большого раздела математики под названием теория групп. Серьёзные дяденьки и тётеньки применяют теорию групп в физике и химии.

А мы будем собирать кубик Рубика, рисовать простые группы, поймём, что a умножить на b не всегда равно b умножить на a , найдём разрешимые и неразрешимые позиции в головоломках, увидим что-то общее между умножением, надеванием носков и переворачиваниями матраса :)

2. Презентация

Презентация длится 10 минут, три дубля презентации для разных школьников. Объявленная аудитория 9-11 класс.

Знак «3» будет означать действие «умножь задуманное число на три». Тогда по смыслу тождество

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

означает два действия, выполненные в разных порядках.

Пример группы. У бедного студента на левой ноге надет носок. Студент умеет выполнять команды p — переодень носок на другую ногу и v — сними носок, выверни наизнанку и надень на исходную ногу. Рисуем для данного примера диаграмму Кэли, не произнося таких страшных снов.

Вводим нейтральный элемент группы n — ничего не делать, обнаруживаем тождества $ab = ba$, $a^2 = n$, $a^3b^2 = a$. Мы используем запись ab — сначала действие a , потом действие b .

Ещё пример группы. Аня, Белла и Вика сидят на стульях 1, 2 и 3. Они умеют выполнять инструкцию $a = (123)$ и $b = (12)$. Инструкция (345) означает, что тот, кто сидел на месте 3 садится на место 4; тот, кто сидел на месте 4, — на место 5; и тот, кто сидел на месте 5, — на место 3.

Правда ли, что $ab = ba$?

Кубик Рубика — тоже группа. Правда ли, что $ПВ = ВП$? Здесь буква означает вращение соответствующей грани по часовой на 90° .

3. Встреча 1

Андреев Павел 8
Завалова Ульяна 9
Оводов Александр 11
Алексей Корчагин 6
Ведерникова Юлия 9
Диана ... в

1. Два выключателя рядом на стене. Два образующих действия: a — переключить оба, l — переключить левый.
 - а) Нарисуйте схему всех возможных состояний и соедините их стрелочками a и l ;
 - б) В чём смысл составного действия al ?
 - в) Что по-сути означает действие a^2 ?
 - г) Сколько всего разных действий, считая исходные образующие и все действия, что можно из образующих получить?
 - д) Упростите формулу $a^5 l^2 a^3$;
 - е) Составьте таблицу умножения всех действий. По строке — первое действие, по столбцу — второе.
2. Солдат умеет выполнять всего один приказ a . Единственное образующее действие: a — повернуться вправо на 90° .
 - а) Нарисуйте схему всех возможных состояний и соедините их стрелочками a ;
 - б) В чём смысл составного действия a^{2018} ?
 - в) Сколько всего разных действий, считая исходное образующее и все действия, что можно из образующего получить?
 - г) Составьте таблицу умножения всех действий. По строке — первое действие, по столбцу — второе.
3. У бедного студента на левой ноге надет носок. Студент умеет выполнять команды p — переодень носок на другую ногу и v — сними носок, выверни наизнанку и надень на исходную ногу.
 - а) Нарисуйте схему всех возможных состояний и соедините их стрелочками p и v ;
 - б) В чём смысл составного действия $p^{12} v^{2019}$?
 - в) Что по-сути означает действие p^2 ?
 - г) Сколько всего разных действий, считая исходные образующие и все действия, что можно из образующих получить?
 - д) Составьте таблицу умножения всех действий. По строке — первое действие, по столбцу — второе.
4. Мы составили три таблицы умножения для действий в группах. Что особенного в каждой строке и в каждом столбце?

Мысль: Обратимость действия в группе приводит к тому, что ни в одной строке, ни в одном столбце нет повторяющихся действий.

5. Если возможно, постройте группу из трёх действий, с таблицей умножения

	a	b	c
a	a	b	c
b		a	
c			

4. Встреча 2

1. Аня, Белла и Вика сидят на стульях с номерами 1, 2 и 3. Учительница может попросить их выполнить одно из двух действий, $a = (123)$ и $b = (12)$.
 - а) Нарисуйте схему всех возможных состояний и соедините их стрелочками a и b ;
 - б) В чём смысл составного действия $a^{12}b^{2019}$?
 - в) Что по-сути означает действие b^2 ?
 - г) Сколько всего разных действий, считая исходные образующие и все действия, что можно из образующих получить?
 - д) Составьте таблицу умножения всех действий. По строке — первое действие, по столбцу — второе.

5. Встреча 3

1. Считаем нарушения порядка в данной последовательности с точки зрения человека-молнии и человека-змеи.
2. Определяем разрешимые и неразрешимые позиции.
3. Решаем пятнашки: слой 1, 2, 3, 4, затем слой 5, 6, 7, 8, затем 9 и 13.
4. Начали пирамидку;

6. Встреча 4

Обозначение: L — поворот на себя левых двух этажей, R — поворот на себя правых двух этажей;

И ещё: $\tilde{L} = RLR^{-1}$.

1. Чему равно L^3 ?
2. Сколько раз надо выполнить L , чтобы получилось L^{-1} ? Как это записать формулой?
3. Сделайте со стартовой позиции \tilde{L} . Какие кубики переставились?
4. Экспериментально установите, чему равно \tilde{L}^3 .
5. Какие кубики переставляет комбинация $\tilde{L}L^{-1}$?

6. Чему равно $(\tilde{L}L^{-1})^3$?
 7. Какие кубики переставляет комбинация $\tilde{L}L\tilde{L}$?
 8. Чему равно $(\tilde{L}L\tilde{L})^3$?
 9. Что делает комбинация: $\tilde{L}L^{-1}$, поворот кубика налево, $(\tilde{L}L^{-1})^2$?
- Ответ: меняет ориентацию двух кубиков

Решаем пирамидку по логике: ушки, кубики под ушками, затем «атомные кубики».

7. Встреча 5

1. Повтор про решение Пирамидки; Выписываю наши три комбинации.
2. Переходим к кубику 2 на 2:
3. Правда ли, что $RL = LR$?
4. Правда ли, что $RU = UR$?