1. Кто последний?

   (a) Найдите последнюю цифру произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9$

   Произведение делится на два и на пять. Значит произведение делится на десять. Число делящееся на десять должно оканчиваться на ноль.

   (b) Найдите последнюю цифру произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$

   Произведение делится на два и на пять. Значит произведение делится на десять. Число делящееся на десять должно оканчиваться на ноль.

   (c) Найдите последнюю цифру степени $6^{6^{2002}}$

   Сначала вспомним, что $6^{6^{2002}}$ — это шестёрка помноженная сама на себя 6^{2002} раз.

   Последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей. Начнём перемножать, обращая внимание, чем оканчивается число!

   $6 \cdot 6 = 36 = \ldots 6$

   $\ldots 6 \cdot 6 = \ldots 6$

   $\ldots 6 \cdot 6 = \ldots 6$

   Сколько шестёрок не перемножай, результат всё время оканчивается на 6.

   (d) Найдите последнюю цифру степеней 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^{44}, 3^{55}, 3^{66}

   Последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей. Начнём перемножать, обращая внимание, чем оканчивается число!

   $3^1 = 3$

   $3^2 = 9$

   $3^3 = 27 = \ldots 7$

   $3^4 = 81 = \ldots 1$

   $3^5 = 81 \cdot 3 = \ldots 1 \cdot 3 = \ldots 3$

   $3^6 = 3^5 \cdot 3 = \ldots 3 \cdot 3 = \ldots 9$

   $3^7 = 3^6 \cdot 3 = \ldots 9 \cdot 3 = \ldots 7$

   Последняя цифра начала повторяться!!! Заметим, что у повтор происходит при увеличении степени на 4: числа 3^1, 3^5, 3^9 и т.д. оканчиваются одинаково.

   Теперь пойдём в обратную сторону. Число 3^{44} оканчивается также как и 3^{40}. Идём дальше: $3^{40} \to 3^{36} \to 3^{32} \to \ldots \to 3^4$. А $3^4 = 81$, значит $3^{44} = \ldots 1$.

   Вместо того, чтобы вычитать 4 из степени несколько раз, можно просто поделить степень 44 на 4 и посмотреть на остаток. Число 44 делится на 4 нацело, в остатке 0. Значит 3^{44} оканчивается также как и $3^0 = 1$.

   Изучаем 3^{55}. Степень 55 при делении на 4 даёт в остатке 3. Значит 3^{55} оканчивается также, как и $3^3 = 27$.

   Изучаем 3^{66}. Степень 66 при делении на 4 даёт в остатке 2. Значит 3^{66} оканчивается также, как и $3^2 = 9$.

5. Кто последний? — 2
   Сколько нулей в конце $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$?

   Для того, чтобы определить количество нулей в конце числа, нужно понять, сколько раз число можно без остатка поделить на десять. Чтобы число делилось на десять, оно должно делиться на два и на пять.
   В нашем произведении сомножители делящиеся на два встречаются чаще сомножителей делящихся на пять. Значит двойки находятся в избытке. Поэтому для определения количества нулей в конце, нужно посчитать, сколько раз наше произведение делится на пять.
   Обратим внимание на сомножители делящиеся на пять:

$$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \ldots \cdot 95$$

   Здесь всего $95/5 = 19$ сомножителей. Но 19 — это еще не ответ!!!
   Дело в том, что среди сомножителей есть числа 25, 50 и 75. Каждое из этих чисел делится на 5 нацело два раза, т.е. каждое из этих чисел приносит в наше произведение не одну пятёрку, а две. Значит эти три числа нужно посчитать ещё по разу. Получаем $19 + 3 = 22$.