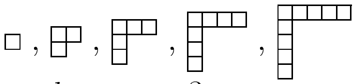
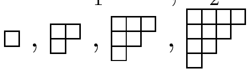
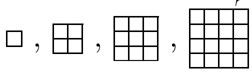
Листок №1. Геометрическое суммирование

Задача 1. Рассмотрим последовательность «уголков»:  , . . . Сколько клеток в k-том уголке и чему равна суммарная площадь первых k уголков?

Задача 2. **а)** Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? **б)** Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? **в)** Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная с 57.

Задача 3. Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, . . . греческий математик Диофант называл *треугольными*:  , . . . *Четырёхугольные числа*  , . . . — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
Что получится при сложении T_n с T_n? Выразите T_n через n.

Задача 4. Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.

Задача 5. Докажите геометрически теорему сложения треугольных чисел: $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

Задача 6. *(Пифагорова таблица умножения.)*

а) Докажите тождество $mk = km$ (т. е. докажите, что $\underbrace{k + k + \ldots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k}$).

б) Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке 1?

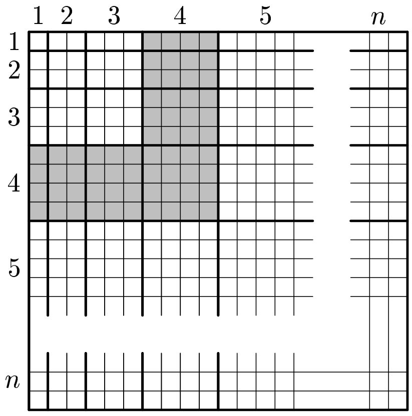


Рис. 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

Задача 7. Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, вершина которого — квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k$, . . . , $(k-1) \times k$ клеток?

Задача 8. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Задача 9. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, . . .

Задача 10. *Пятиугольные числа* $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, . . . показаны на рисунке 2. Найдите разность $P_k - P_{k-1}$ между последовательными пятиугольными числами. Выразите P_n через n.

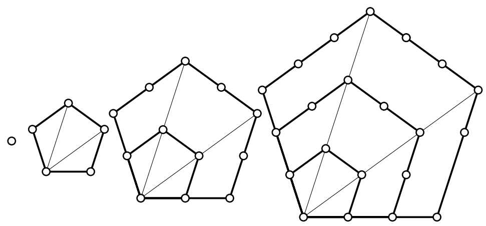


Рис. 2. Пятиугольные числа.

Задача 11. Докажите геометрически, что сумма n-го треугольного и n-го квадратного числа на n больше, чем n-ое пятиугольное число.

Задача 12*. Число k^2 можно представлять себе как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ — как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов (на рисунке 3 изображена пирамида для суммы $1^2 + 2^2$). Попробуйте, комбинируя такие пирамиды, получить какую-нибудь фигуру, объём которой легко сосчитать (например, куб, параллелепипед, призму и т. п.) и выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

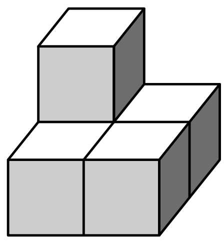


Рис. 3.

Задача 13*. Сумму треугольных чисел $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ тоже можно представлять себе как объём некоторой пирамиды. Попробуйте геометрически найти формулу для суммы треугольных чисел (эта сумма обозначается Π_n и называется *n-ым пирамидальным числом*).

Задача 14*. Найдите сумму квадратов первых n нечётных чисел.

Интересно, какие ещё суммы можно найти с помощью геометрических рассуждений?

Задача 15*. Придумайте какой-нибудь способ получения формул для следующих сумм (геометрическое решение составителям неизвестно): **а)** $\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$; **б)** $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.