1. Встреча 1

Пришло 9 школьников, 2 вожатых.

Техника решения задач и обозначения.

1.1. Табличка

Составили табличку 2 на 2: сколько 10 классников и не 10 классников, сколько любят ваниальное мороженое, сколько не любят. Предположим, что один из нас (из 12), мистер или мисс X, случайно заканчивает обедать первым.

	V+	V-
10+	6	1
10-	2	3

Какова вероятность, что это будет 10-классник? Любитель ванильного? Одновременно 10-классник И любитель ванильного? 10-классник ИЛИ любитель ванильного? 10-классник ЕСЛИ любитель ванильного?

Значки $\cap$, $\cup$, $|$.

1.2. Дерево

Красная Шапочка (КШ) выбирает тропинки наугад и равновероятно.

Сначала дорога делится на три: L, M и R. L делится на две, R делится на 3, R делится на две.

Дороги LL, LR, ML, MM, MR патрулирует Волк.

Дороги LL, LR, MR ведут в Овраг.

Дороги ML, MM, RL, RR ведут к Бабушке.

События:

- Б — КШ попадёт к Бабушке
- В - КШ встретит Волка

$P(\text{Б})$? $P(\text{В})$? $P(\text{Б} \cap \text{В})$? $P(\text{Б}|\text{В})$?

2. Встреча 2

Пришло два новых школьника и одна вожатая.

Начали с повторения формулы

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Рисую два пересекающихся круга A и B на доске. Вопрос: какова вероятность попадания тряпкой в круг A, если известно, что я попал в круг B? Для наглядности кидаю тряпку.

Даже слабые школьники сказали, что условная вероятность есть отношение площадей:

$$P(A|B) = \frac{S(A \cap B)}{S(B)}.$$

Так формулу условной вероятности и мотивировали.

Далее решили 1а, 1б, 1в, 1г самостоятельно, 2а, 2в, 2б. Задачу 2б решали после 2в, так как она требует дорисовки дерева. На дом задал задачу 2г.

1. В городе примерно 4% такси зелёного цвета и остальные жёлтые. Свидетель путает цвет на показаниях в суде с вероятностью 10%.

   а) Какова вероятность того, свидетель скажет, что видел зелёное такси?

   б) Какова вероятность того, свидетель ошибётся?

   в) Какова вероятность того, что такси было зелёным, если свидетель говорит, что оно было зелёным?

   г) Какова вероятность того, что такси было жёлтым, если свидетель говорит, что оно было жёлтым?

2. У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из ситуаций найдите условную вероятность того, что у тёти Маши есть дети обоих полов.

   а) Известно, что старший ребенок — мальчик.

   б) Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть метлу. Это оказывается мальчик.

   в) На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын?» тётя Маша ответила: «Да».

   г) На вопрос: «А правда ли тётя Маша, что у Вас есть хотя бы один сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

3. Ты смертельно болен. Спасти тебя может только один вид целебной лягушки. Целебны у этого вида только самцы. Самцы и самки встречаются равновероятно. Ты на дороге и предельно ослаб. Слева в 100 метрах от тебя одна лягушка целебного вида, но не ясно, самец или самка. Справа в 100 метров аж две лягушки целебного вида, но тоже издалека неясно кто. От двух лягушек в твою сторону дует ветер, поэтому ты можешь их слышать.

   В какую сторону стоит ползти из последних сил в каждой из ситуаций?

   а) Самцы и самки квакают одинаково, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье.

   б) Самки квакают, самцы — нет, со стороны правых двух лягушек ты слышишь кваканье, но не разобрать, одной лягушки или двух.

   в) Самцы и самки квакают по разному, но одинаково часто. Ты слышишь отдельный квак одной из двух лягушек справа и это квак самки.

4. Monty-Hall

   Есть три закрытых двери. За двумя из них — по козе, за третьей автомобиль. Ты выбираешь одну из дверей. Допустим, ты выбрал дверь A. Ведущий шоу открывает дверь B и за ней нет автомобиля. В этот момент ведущий предлагает тебе изменить выбор двери.

   Имеет ли смысл изменить выбор в каждой из трёх ситуаций?

   а) Ведущий выбирал одну из трёх дверей равновероятно.

   б) Ведущий выбирал одну из двух дверей не выбранных тобой равновероятно.

   в) Ведущий выбирал дверь без машины и не совпадающую с твоей.

3. Встреча 3

Состав: 13 (или 12?) школьников и 1 вожатая.

Настя с моей поддержкой разобрала 2г. Решили 3а, 3б, 3в.

4. Встреча 4

Состав: 12 школьников и 1 вожатая.

Раздал каждому по 10 кубиков. Случайная величина X — количество очков при одном броске.

Составили табличку значений X с их вероятностями из здравого смысла. Далее подбросили каждый и посчитали среднее количество очков на один бросок. Получилось около 3.6. Снова повторили опыт, тоже результат около 3.6. Снова повторили и 3.8. Каждый повтор давал нам 140 подбрасываний (я тоже бросал). Мораль: результат отдельного броска плохо предсказуем, среднее по 140 броскам хорошо предсказуемо.

Понятие математического ожидания. Интуитивно: среднее арифметическое значений случайной величины при большом количестве повторений опыта.

Посчитали математическое ожидание и получили 3.5.

Сколько в среднем нужно подбрасывать кубик до получения 6?

Провели 25 опытов, получили в среднем 5.2. Составили табличку со значениями и вероятностями этой величины. Нарисовали дерево. Среднее считали через рекуррентное соотношение. Получили 6, но с трудом. Идеально поняли идею уравнения немногие.

5. Встреча 5

Состав: 12 школьников + 1 вожатая.

Вернулись к задаче про Красную Шапочку. И нашли вероятность попадения в овраг новым способом — по принципу Беллмана.

Принцип Беллмана в нашей версии: находи искомое число в каждом узле, решая задачу с конца.

Упражнение на принцип Беллмана. Нарисовано дерево, частично известны вероятности над веточках и вероятность нахождения клада из некоторых узлов. Надо найти вероятность нахождения клада из стартового узла.

Мы сразу решали упражнение на сложном дереве, а разумно было решить сначала совсем простое (два ветвления, далее известны значения вероятности приза).

Далее решали задачу: Олег и Рома подбрасывают одну монетку. Если сначала выпадет ОРР, то выигрыват Олег, если сначала РОР, то Рома. В чью пользу эта игра?

Начинаем рисовать дерево. Понимаем, что оно бесконечное, и что нарисовать его целиком не получится. Находим эквивалентные ситуации. Например, в начале игры ОО оба игрока согласны заменить на О. Также в начале игры РР оба игрока согласны заменить на Р. Получаем дерево с циклами (с «ушами»). Упрощаем дерево с ушами: те уши, из которых есть выход только в одну сторону можно смело отрезать потому, что из них больше некуда выйти. Отрезаем уши. Сокращаем ветви с вероятностью 1. Получаем упрощённое дерево. Оно в данном случае симметрично.

Находим, что ОРР выпадет раньше РОР с вероятностью $1/2$.

Повторяем с ООО против ОРО. Аналогично рисуем дерево с ушами. Отрезаем уши. Получается несимметричное дерево. Вводим неизвестные a, b, c — вероятности выигрыша ООО, если начинать игру с разных точек упрощённого дерева. Получаем систему линейных уравнений. Решаем. Получаем, что ОРО чаще выпадает.

Здесь школьники не очень удивляются. Проблема похоже в том, что последовательность ООО выглядит очень особой, и как-бы редкой психологически. Для пущей психологической неожиданности лучше было сравнивать ООР и ОРР.

Выводы: лучше рассказывать с большей неожиданностью. Сначала спросить, кто выигрывает чаще, кто ждёт О или ОО? Кто ждёт ОР или РРР? Кто ждёт ООО или РР? А потом уже спросить про последовательности одинаковой длины.

Здесь для наглядности можно было бы привести таблицу сравнение всех комбинаций. Я её посчитал после окончания курса и объяснил школьникам, делавшим презентацию. В клетке (i, j) находится оценка вероятности того, что комбинация i появится раньше комбинации j. Оценка проводилась по 5000 экспериментов. Код R в материалах курса.

	ООО	ООР	ОРО	ОРР	РОО	РОР	РРО	РРР
ООО	0.00	0.51	0.40	0.39	0.13	0.42	0.30	0.48
ООР	0.49	0.00	0.67	0.67	0.25	0.62	0.49	0.69
ОРО	0.60	0.33	0.00	0.49	0.50	0.50	0.38	0.59
ОРР	0.61	0.33	0.51	0.00	0.51	0.50	0.75	0.87
РОО	0.87	0.75	0.50	0.49	0.00	0.51	0.34	0.60
РОР	0.58	0.38	0.50	0.50	0.49	0.00	0.34	0.61
РРО	0.70	0.51	0.62	0.25	0.66	0.66	0.00	0.51
РРР	0.52	0.31	0.41	0.13	0.40	0.39	0.49	0.00