

TABLE A7 Quantiles of the Mann-Whitney Test Statistic^a

n	p	$m=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0.001	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0.005	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0.01	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0.025	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0.05	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	0.001	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	0.005	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	0.01	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	0.025	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	0.05	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
4	0.001	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	0.005	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	0.01	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	0.025	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	0.05	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
5	0.001	11	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	26	27	28	29	31	32	33
	0.005	15	15	15	15	15	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	0.01	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	0.025	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	27	28	29	30	31	33	34	35	36
	0.05	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	30	32	34	36	38	39	41	43	44
6	0.001	17	18	20	21	23	24	26	28	29	31	33	34	36	38	39	41	43	44	46
	0.005	21	21	21	21	21	21	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	34
	0.01	21	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31	32	33	34	35	37	38	39	40
	0.025	21	23	24	25	27	28	29	30	32	33	35	36	38	39	41	43	44	46	47
	0.05	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45	47	48	50	52	54
7	0.001	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	56	58	60
	0.005	28	28	28	28	28	28	30	31	32	34	35	36	37	38	39	40	42	43	44
	0.01	28	29	30	32	33	35	36	38	40	41	43	45	46	48	50	52	53	55	57
	0.025	28	30	32	34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
	0.05	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68
8	0.001	30	33	35	37	40	42	45	47	50	52	55	57	60	62	65	67	70	72	75
	0.005	36	36	36	37	38	39	41	42	43	45	46	48	49	51	52	54	55	57	58
	0.01	36	36	38	39	41	43	44	46	48	50	52	54	55	57	59	61	63	65	67
	0.025	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	59	61	63	66	68	71	73	75	78
	0.05	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70	73	76	78	81	84
	0.010	39	42	44	47	50	53	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91

TABLE A7 (Continued)

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	0.001	45	45	45	47	48	49	51	53	54	56	58	60	61	63	65	67	69	71	72
	0.005	45	46	47	49	51	53	55	57	59	62	64	66	68	70	73	75	77	79	82
	0.01	45	47	49	51	53	55	57	60	62	64	67	69	72	74	77	79	82	84	86
	0.025	46	48	50	53	56	58	61	63	66	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94
	0.05	47	50	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100
10	0.001	48	51	55	58	61	64	68	71	74	77	81	84	87	91	94	98	101	104	108
	0.005	55	55	56	57	59	61	62	64	66	68	70	73	75	77	79	81	83	85	88
	0.01	55	56	58	60	62	65	67	69	72	74	77	80	83	86	89	92	94	97	100
	0.025	55	57	59	62	64	67	69	73	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	111
	0.05	56	59	61	64	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100	104	107	111	118
11	0.001	57	60	63	67	70	73	77	80	84	88	92	95	99	103	107	110	114	118	126
	0.005	59	62	66	69	73	77	80	84	88	92	95	99	103	107	110	114	118	122	126
	0.01	66	66	67	69	71	73	75	77	79	82	84	87	89	91	94	96	99	101	104
	0.025	66	67	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115
	0.05	67	70	73	76	80	83	86	90	93	97	100	104	107	111	114	118	122	125	129
12	0.001	67	70	73	76	80	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117	121	124	128	136
	0.005	68	72	75	79	83	86	90	94	98	103	107	111	115	119	124	128	132	136	145
	0.01	70	74	78	82	86	90	94	98	103	107	111	115	119	124	128	132	136	140	145
	0.025	78	78	79	81	83	86	88	91	93	96	98	102	104	106	110	113	116	118	121
	0.05	78	80	82	85	88	91	94	97	100	103	106	110	113	116	120	123	126	130	133
13	0.001	78	81	84	87	90	93	96	100	103	106	109	112	115	118	121	124	127	130	137
	0.005	80	83	86	89	92	96	100	105	109	111	116	120	124	128	132	136	140	144	148
	0.01	80	83	86	90	93	97	101	105	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148
	0.025	81	84	88	92	96	100	105	109	111	117	121	125	129	133	137	142	146	151	156
	0.05	83	87	91	96	100	105	109	114	118	123	128	132	137	142	146	151	156	160	165
14	0.001	91	93	95	99	102	105	109	112	116	119	123	126	130	134	137	141	145	149	152
	0.005	91	93	95	101	104	108	112	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159
	0.01	92	94	97	101	104	108	112	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159
	0.025	93	96	100	104	108	112	116	120	125	129	134	139	143	148	153	157	162	167	172
	0.05	94	98	102	107	111	116	120	125	130	134	139	145	150	155	160	166	171	176	181
15	0.001	96	101	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	166	171	176	181	186
	0.005	105	105	107	109	112	115	118	121	125	128	131	135	138	142	145	149	152	156	160
	0.01	105	107	110	113	117	121	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	169	173
	0.025	106	108	112	116	119	123	128	132	136	140	144	149	153	157	162	166	171	175	179
	0.05	107	111	115	119	123	128	132	137	142	146	151	156	161	165	170	175	180	184	189
16	0.001	109	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172	177	183	188	193	198
	0.005	110	116	121	126	131	137	142	147	153	158	164	169	175	180	186	191	197	203	208
	0.01	120	120	122	125	128	133	138	142	147	152	157	163	168	173	178	183	188	193	198
	0.025	120	123	126	129	133	137	141	145	150	154	158	163	168	173	178	183	188	193	198
	0.05	121	124	128	132	136	140	145	149	154	158	163	168	173	178	183	188	193	198	203

TABLE A7 (Continued)

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>m</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
17	0.001	153	154	156	159	163	167	171	175	179	183	188	192	197	201	206	211	215	220	224	224
	0.005	153	156	160	164	169	173	178	183	188	193	198	203	208	214	219	224	229	235	240	240
	0.01	154	158	162	167	172	177	182	187	192	198	203	209	214	220	225	231	236	242	247	247
	0.025	156	160	165	171	176	182	188	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	259	259
	0.05	157	163	169	174	180	187	193	199	205	211	218	224	231	237	243	250	256	263	269	269
18	0.001	160	166	172	179	185	192	199	206	212	219	226	233	239	246	253	260	267	274	281	281
	0.005	171	172	175	178	182	186	190	195	199	204	209	214	218	223	228	233	238	243	248	248
	0.01	171	174	178	183	188	193	198	203	209	214	219	225	230	236	242	247	253	259	264	264
	0.025	172	176	181	186	191	196	202	208	213	219	225	231	237	242	248	254	260	266	272	272
	0.05	174	179	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	246	252	258	265	271	278	284	284
19	0.001	176	181	188	194	200	207	213	220	227	233	240	247	254	260	267	274	281	288	295	295
	0.005	178	185	192	199	206	213	220	227	234	241	249	256	263	270	278	285	292	300	307	307
	0.01	190	191	194	198	202	206	211	216	220	225	231	236	241	246	251	257	262	268	273	273
	0.025	191	194	198	203	208	213	219	224	230	236	242	248	254	260	266	272	278	284	290	290
	0.05	192	195	200	206	211	217	223	229	235	241	247	254	260	266	273	279	285	292	298	298
20	0.001	193	198	204	210	216	223	229	236	243	249	256	263	269	276	283	290	297	304	310	310
	0.005	195	201	208	214	221	228	235	242	249	256	263	271	278	285	292	300	307	314	321	321
	0.01	198	205	212	219	227	234	242	249	257	264	272	280	288	295	303	311	319	326	334	334
	0.025	210	211	214	218	223	227	232	237	243	248	253	259	265	270	276	281	287	293	299	299
	0.05	211	214	219	224	229	235	241	247	253	259	265	271	278	284	290	297	303	310	316	316
20	0.001	212	216	221	227	233	239	245	251	258	264	271	278	284	291	298	304	311	318	325	325
	0.005	213	219	225	231	238	245	251	259	266	273	280	287	294	301	309	316	323	330	338	338
	0.01	215	222	229	236	243	250	258	265	273	280	288	295	303	311	318	326	334	341	349	349
	0.025	218	226	233	241	249	257	265	273	281	289	297	305	313	321	330	338	346	354	362	362
	0.05	218	226	233	241	249	257	265	273	281	289	297	305	313	321	330	338	346	354	362	362

For *n* or *m* greater than 20, the *p*th quantile w_p of the Mann-Whitney test statistic may be approximated by

$$w_p = n(N+1)/2 + z_p \sqrt{nm(N+1)/12}$$

where z_p is the *p*th quantile of a standard normal random variable, obtained from Table A1, and where $N = m + n$.

* The entries in this table are quantiles w_p of the Mann-Whitney test statistic T , given by Equation 5.1.1, for selected values of *p*. Note that $P(T < w_p) \leq p$. Upper quantiles may be found from the equation

$$w_p = n(n + m + 1) - w_{1-p}$$

Critical regions correspond to values of T less than (or greater than) but not equal to the appropriate quantile.

5.2: Several Independent Samples

(1)

Ho: $\mu_1 = \dots = \mu_k$

Ha: Not all equal

$$N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(x_{ij}) \quad i=1, 2, \dots, k$$

$$F = \frac{1}{S^2} \left(\sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4} \right)$$

$$\text{where } S^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^k R(x_{ij})^2 - N \frac{(N+1)^2}{4} \right)$$

No ties:

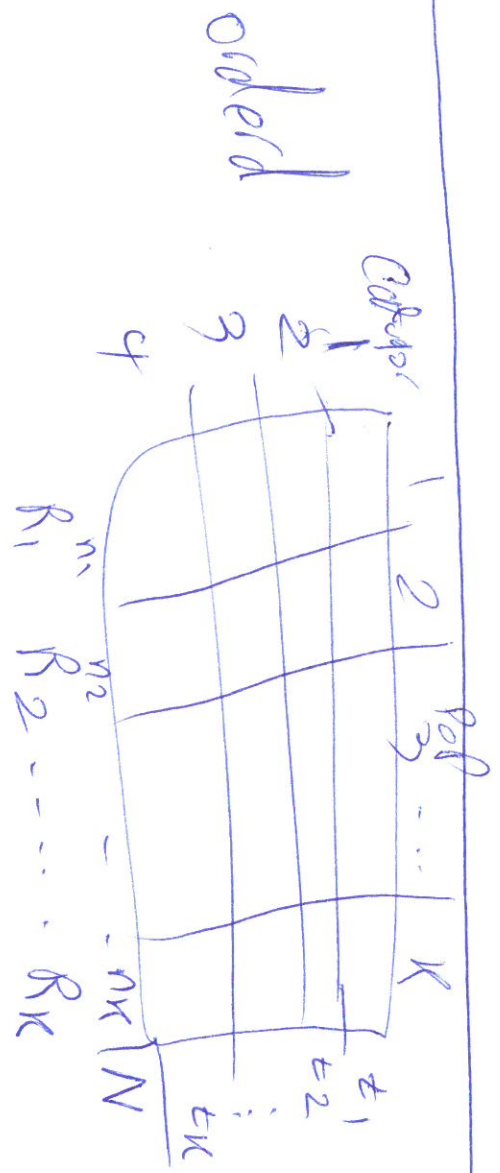
$$F = \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \right)$$

reject if $F > F_{k-1, N-k}$

Note: Use table A8 for $k=3$ and $n_i \leq 5$

Pairwise Comparison

$$\left| \frac{R_i}{n_i} - \frac{R_j}{n_j} \right| > t_{1-(\alpha/2)} \left(S^2 \frac{N-1-1}{N-k} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)^{1/2}$$



$\bar{R}_i = \text{Average Rank}$
 $(t_1 + 1)/2$
 $t_1 + (t_2 + 1)/2$
 $t_1 + t_2 + (t_3 + 1)/2$

$$\sum \dots = \bar{R}_C$$

$$R_j = \sum_{i=1}^c O_{ij} \bar{R}_i$$

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum t_i \bar{R}_i^2 - \frac{N(N+1)^2}{4} \right]$$

$$T = \frac{1}{S^2}$$