TD 4
Intégrales – Dichotomie

Exercice 1. Intégrales

Rappels mathématiques Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $I = [a, b] \in \mathbb{R}$. L'intégrale sur $[a, b]$ de f est notée $\int_a^b f(x)dx$, elle correspond à l'aire définie par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

f admet une primitive si il existe F appelée primitive de f tel que $F'(x) = f(x)$ et alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

1. Donner l'intégrale de la fonction $f(x) = x^2 + x/3$ entre 0 et 1.
   Astuce: chercher la primitive de la fonction.

2. Donner l'intégrale de $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$ entre 1 et e.
   Astuce: faire une intégration par partie (u et v sont deux fonctions dérivables et de dérivées continues):
   $$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

3. Par contre, il sera difficile de déterminer numériquement l'intégrale de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous allons approcher le résultat numériquement en cherchant à calculer l'aire sous la courbe $C(x)$. Pour cela, il s'agit de découper l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles du type $[k/n; (k + 1)/n]$ pour $k \in [0; n - 1]$. On prendra d'abord $n = 10$, puis $n = 100$.

   Tracer la courbe avec `matplotlib.pyplot` en utilisant la fonction `scatter` puis `plot` de `pyplot`.

4. Déterminer l'intégrale par la méthode des carrés. Commencer par prendre $n = 10$ puis augmenter cette valeur et noter à chaque fois le résultat de l'intégrale.
   Astuce: Pour chaque intervalle $[k/n; (k + 1)/n]$, on remplace la courbe $C(x)$ par la droite $y = f(k/n)$ (voir cours)

5. Utiliser cette fois la méthode des trapèzes. Comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus avec la fonction `numpy.trapz(f,x)`.

6. Enfin tester la méthode de Simpson.

7. Comparer les 3 méthodes en traçant la valeur de l'aire obtenue avec chacune des méthodes en fonction du nombre d'échantillon n (on prendra une échelle logarithmique).

Exercice 2. Dichotomie

La dichotomie permet de résoudre des équations du type $f(x) = 0$ en encadrant la solution par deux valeurs a et b telles que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

1. Albert a choisi un nombre compris entre 1 et 100, Bertrand doit le deviner. Bertrand fait des propositions et Albert répond "trop grand", "trop petit" ou "gagné". Le jeu s'arrête lorsque Bertrand a trouvé le nombre.
   Proposer un programme en python simulant ce jeu en choisissant à l'avance N le nombre d'Albert entre 1 et 100. Et en simulant les propositions de Bertrand avec une entrée clavier.

2. Maintenant proposer une méthode de recherche automatique du nombre N sans simuler les propositions de Bertrand. On évaluera les performances de deux méthodes:
   - Sachant l'intervalle dans lequel se trouve N proposer un nombre aléatoirement dans cet intervalle
   - Sachant l'intervalle dans lequel se trouve N proposer le nombre situé au milieu de l'intervalle.

3. Soit l'équation
   $$\ln(x) + x^2 = 0 \tag{1}$$
   Donner l'intervalle de définition de la fonction $f(x) = \ln(x) + x^2$ et étudier sa monotonie. Combien de racines possède-elle ? Essayer de trouver une ou plusieurs racines évidente à la main.

4. Proposer un programme permettant de trouver une (ou plusieurs) solution approchée pour l'équation (1) par dichotomie avec une précision de 0.001.

5. Déterminer théoriquement le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution à 0.001 près. Vérifier cette valeur expérimentalement.

Exercice 3. Multiplication de valeurs proches de 0

1. Est-ce que l'égalité suivante : `0.1 + 0.1 + 0.1 == 0.3` est vraie en Python?

2. La fraction décimale `0.125` peut s'écrire sous la forme $0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.
   De la même manière, la fraction binaire `0.001` peut s'écrire sous la forme $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$.
   Donner la forme des fractions binaires `0.1` et `0.3` ?

3. En utilisant le format d'affichage des flottants en python, par exemple `'%.2f' % 0.1` donner la valeur exacte en décimale de l'approximation en binaire stockée en machine pour `0.1`

4. Expliquer, à présent, votre résultat à la première question.

5. Que se passe-t-il lorsque l'on multiplie deux valeurs proches de 0 à l'aide d'un ordinateur?

6. Ce type de multiplication est souvent nécessaire lorsque nous cherchons à calculer la séquence d'événements la plus probable. Comment peut-on surmonter le problème énoncé dans la question précédente ?