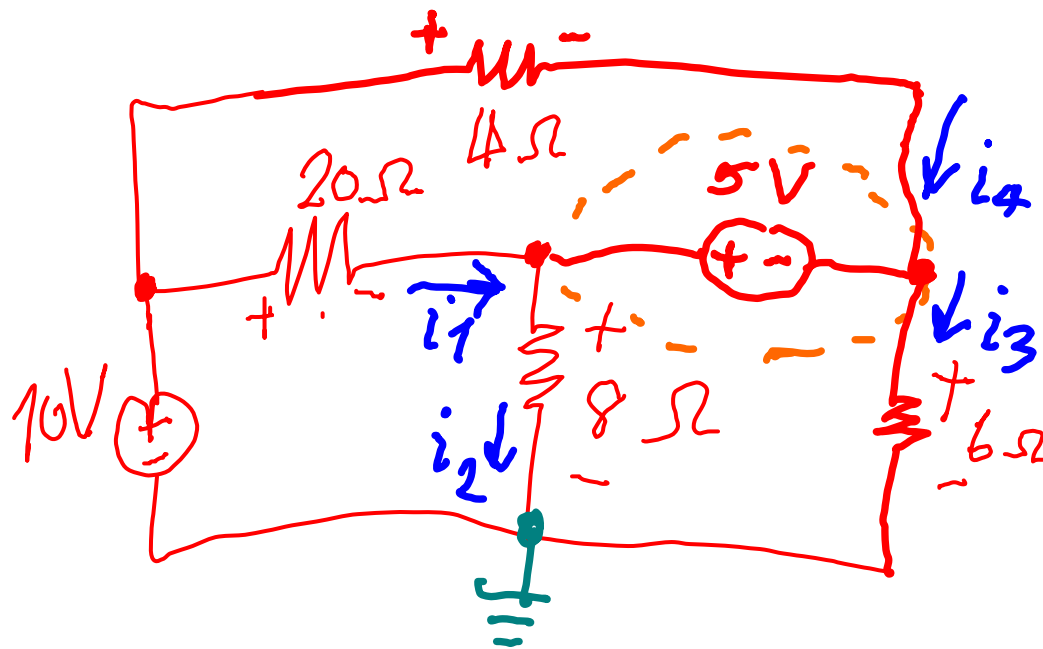


Nodal Analysis with voltage Source



ขั้นตอน

1. ถ้าแหล่งจ่ายแรงดันต่ออยู่กับ reference node
(เช่น $V_1 = 10V$) เราจะได้สมการ voltage
ที่จุดที่ 1 และ 2 โดยตรงโดยไม่ต้องมีตัวแปรที่เกี่ยวกับแหล่งจ่าย
แรงดันนั้นๆ ! ต.ย. เช่น
 $V_1 = 10V$
2. ถ้าแหล่งจ่ายแรงดันต่อระหว่างจุดที่เป็น
nonreference เราจะได้เรียกว่า Super node

3. ขั้นตอนการทำ = เลือกโหนด 3 โหนด ที่กล่าว
 ไปแล้วโดยมอง supernode เป็นเสมือน
 1 โหนด ดังนั้นจะได้สมการ KCL ดังนี้

$$KCL \rightarrow i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \quad \text{--- (1)}$$

แทนค่า i ต่างๆ ด้วยแรงดัน v ใน (1) จะได้

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_3}{4} = \frac{v_2}{8} + \frac{v_3}{6} \quad \text{--- (2)}$$

i_1 i_4 i_2 i_3

4. ใช้ supernode กับ KVL จะได้ว่า

$$-V_2 + 5 + V_3 = 0 \quad \sum_{i=1}^N V_i = 0$$

$$V_2 - V_3 = 5 \quad (3)$$

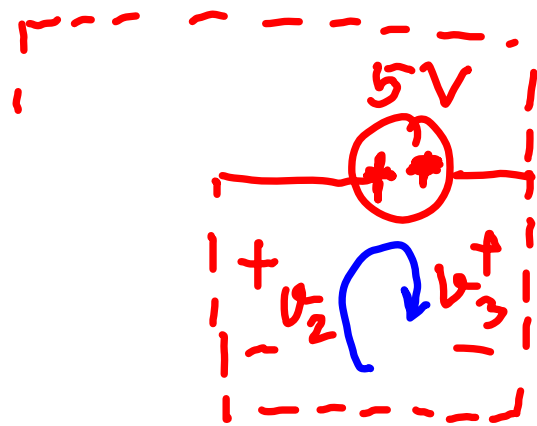
จะได้ $V_2 = V_3 + 5$

แทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{10 - V_2}{2} + \frac{10 - V_3}{4} = \frac{V_2}{8} + \frac{V_3}{6}$$

$$\frac{10 - (V_3 + 5)}{2} + \frac{10 - V_3}{4} = \frac{V_3 + 5}{8} + \frac{V_3}{6}$$

$$5 - \frac{V_3}{2} - \cancel{2.5} + \cancel{2.5} - \frac{V_3}{4} = \frac{V_3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{V_3}{6} \quad (4)$$



ทำ 4x (4) ผลอดจ = ได้ว่า

$$20 - \cancel{4V_3}^2 - V_3 = 0.5V_3 + 2.5 + 0.66V_3$$

$$\cancel{-5V_3}^3 - 1.06V_3 = -17.5$$

$$\cancel{-1.06V_3}^4 = -17.5$$

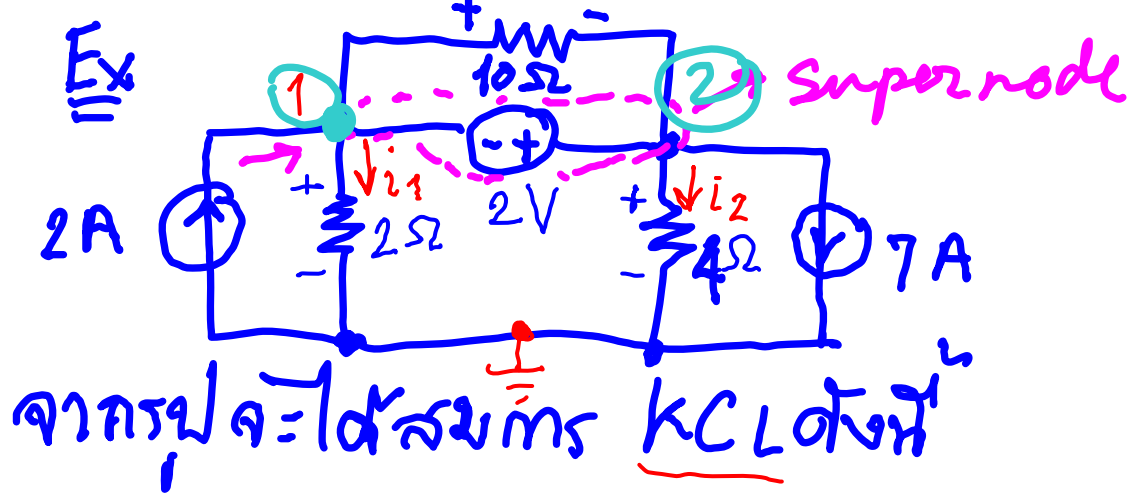
$$V_3 = \frac{-17.5}{\cancel{-1.06}^4} = \cancel{2.447}^{4.3} \quad (5)$$

ทำ (5) ไปแทนในสมการที่ (3) จ = ได้

$$V_2 - \cancel{2.887}^{4.3} = 5$$

$$V_2 = \cancel{7.887}^*$$

9.3



$$2 = i_1 + i_2 + 7 \quad \text{--- (1)}$$

แทนค่า i_1 และ i_2 จะได้

$$2 = \frac{V_1}{2} + \frac{V_2}{4} + 7 \quad \text{--- (2)}$$

นำ (4) \times (2) จะได้

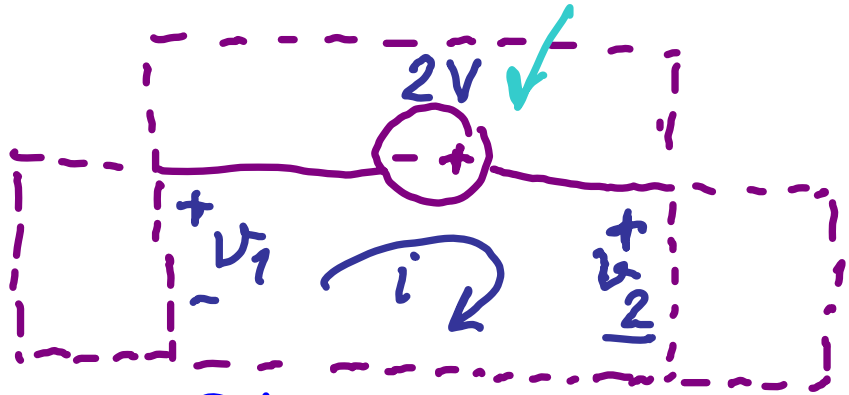
$$8 = 2V_1 + V_2 + 28 \quad \text{--- (3)}$$

๑) KVL กับ supernode จะได้ว่า

$$-V_1 - 2 + V_2 = 0$$

$$-V_1 + V_2 = 2$$

$$\text{หรือ } V_2 = V_1 + 2 \quad \text{--- (4)}$$



แทนค่าสมการ (4) ลงในสมการ (3) จะได้

$$8 = 2V_1 + \underline{V_1 + 2} + 28$$

$$-22 = 3V_1$$

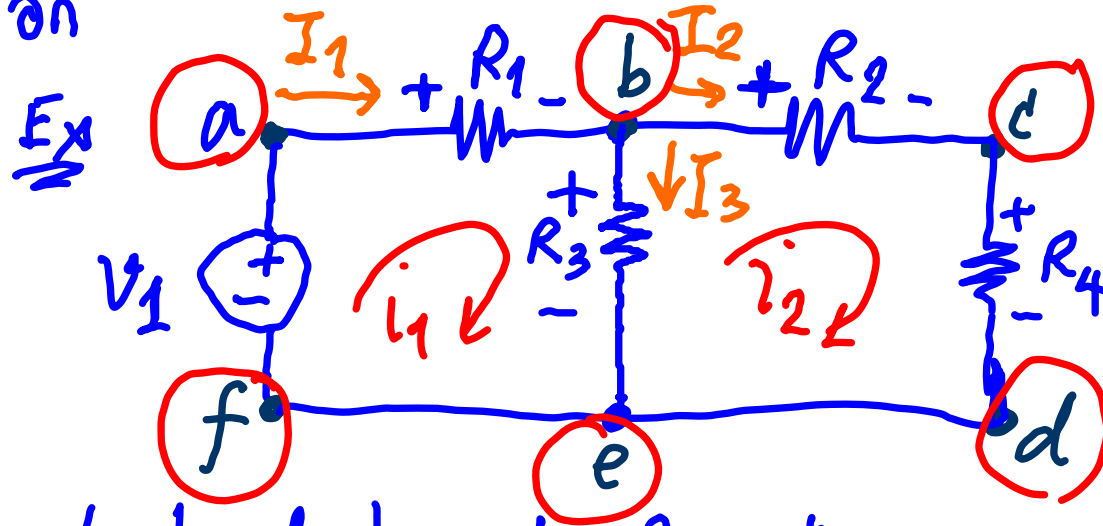
$$V_1 = \underline{\underline{-\frac{22}{3}}} = \underline{\underline{-7.33V}} \quad \text{--- (5)}$$

นำ (5) แทนในสมการ (4) จะได้

$$V_2 = -7.33 + 2 = -5.33V \quad *$$

Mesh Analysis

ถ้า Mesh หนึ่งมี loop ซ้ำกัน loop หนึ่งก็ไม่ต้อง loop หนึ่งก็ไม่ต้อง
 หนึ่งก็ไม่ต้อง



จากวงจร b c d e b, a b e f a คือ Mesh ส่วน
 a b c d e f a ไม่ใช่ Mesh

Step to Determine Mesh Currents

1. กำหนด Mesh Current $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ สัมจำนวนของ n_{mesh}
2. ใช้ KVL กับแต่ละ mesh และใช้กฎของโหนดเพื่อแสดงค่าของแรงดันในเทอมของกระแส mesh $[1 \dots n]$
3. หากระแส mesh จาก n equation
จากตัวอย่าง สามารถเขียนกระแส i_1 ได้เป็น

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) = 0 \quad \text{--- (1)}$$

หรือ $(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = V_1$ --- (2)
สำหรับ mesh ที่ 2 จะได้

$$(i_2 - i_1) R_3 + (R_2 + R_3 + R_4) i_2 = 0$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3 + R_4) i_2 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

เขียนเป็น Matrix ง่าย ๆ

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

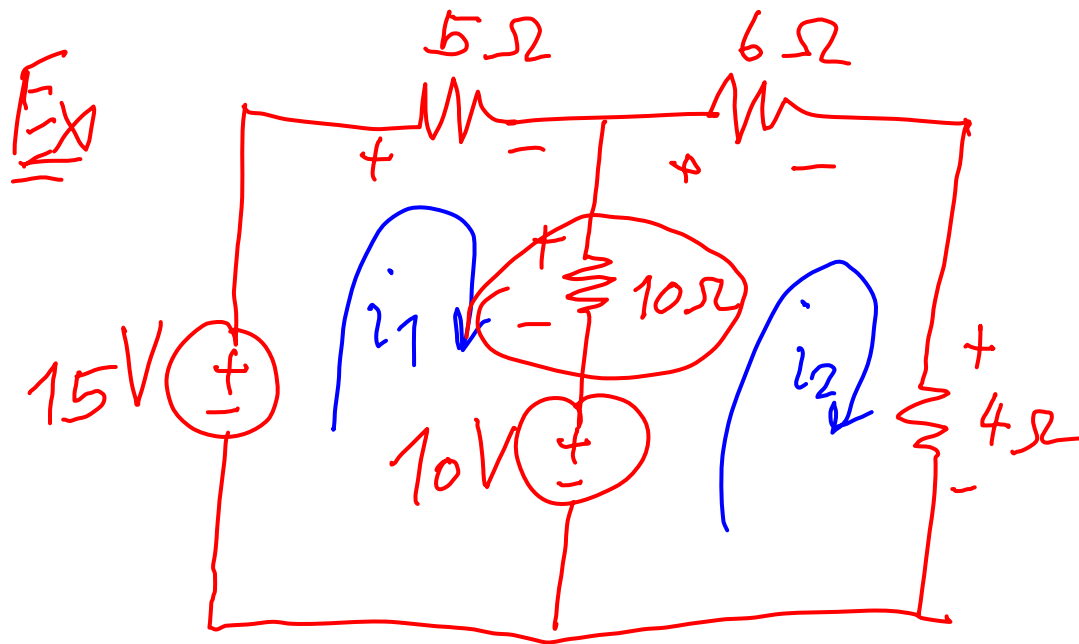
ถ้าวงจรมีจำนวน n nodes, b branches แล้ว l loops
(independent loop หรือ Mesh) แล้ว $l = b - n + 1$

$$l = b - n + 1$$

ซึ่งในที่นี้ l ก็คือจำนวน mesh ที่ต้องกำหนดค่าที่ปลายนำจากวงจร
วงจรตัวอย่าง mesh Analysis อย่างง่าย ๆ ง่าย ๆ

$$l = 3 (\text{branch}) - 2 (\text{node with reference}) + 1$$

$$l = 2 \quad \text{✗} \rightarrow$$



Loop i_1

$$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Mesh Analysis with Current source

กรณที่ 1
วงจร

มีแหล่งจ่ายแรงดัน = 10V มีตัวต้านทาน 4Ω 6Ω 3Ω และแหล่งจ่ายกระแส = 5A
หาว่าค่ากระแสใน $i_2 = -5A$



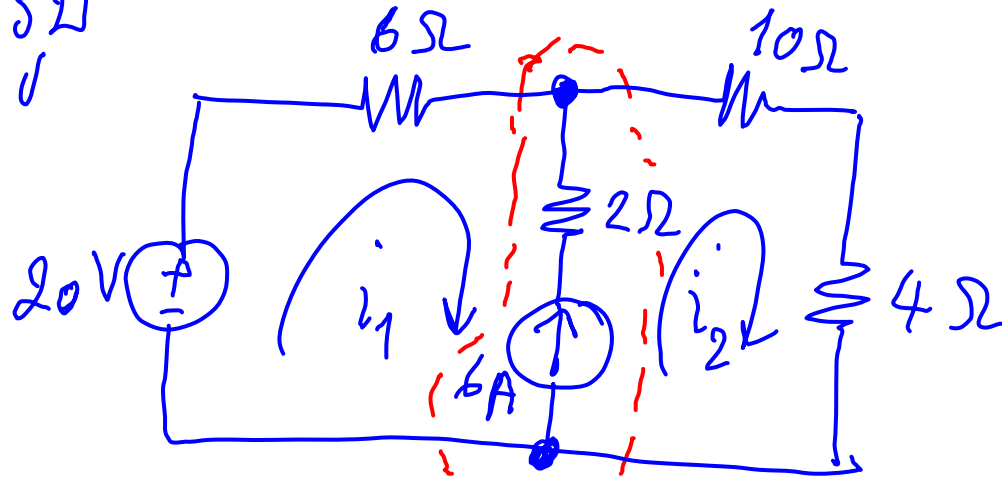
หาค่ากระแส Mesh ด้วย ตามหลักการ ซึ่งในที่นี้ mesh ของ i_1 จะได้ว่า

$$-10 + 4i_1 + 6i_1 - \textcircled{6i_2} = 0$$

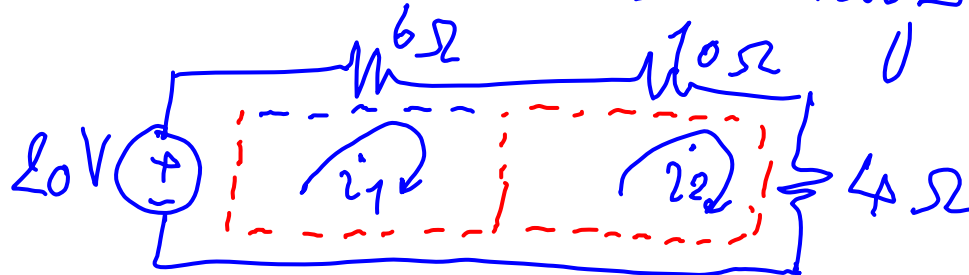
$$-10 + 10i_1 + 30 = 0$$

$$i_1 = -2A$$

กรณี 2 เมื่อแหล่งจ่ายกร: หลมีอยู่ 5-หน่วย 2 mesh
 ดังรูป



เมื่อทำการทำแวนจ=ไม่เข้าแหล่งจ่ายกร: หลสามารถ
 รวมไปซึ่งอุปกรณ์ R ต่างๆ ที่ต่อแอมกับแหล่งจ่าย
 กร: หลนั้น ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้



จากกฎเคชเชน KVL จ.10²

$$-20 + 6\underline{i_1} + 10\underline{i_2} + 4\underline{i_2} = 0$$

จากกฎเคชเชน KCL ที่ supermesh จ.10² ว่า

$$6i_1 + 14i_2 = 20 \quad \text{--- (1)}$$

นำ (2) แทนลงใน (1) จ.10² ว่า

$$i_2 = i_1 + 6 \quad \text{--- (2)}$$

$$6i_1 + 14(i_1 + 6) = 20$$

$$20i_1 + 84 = 20$$

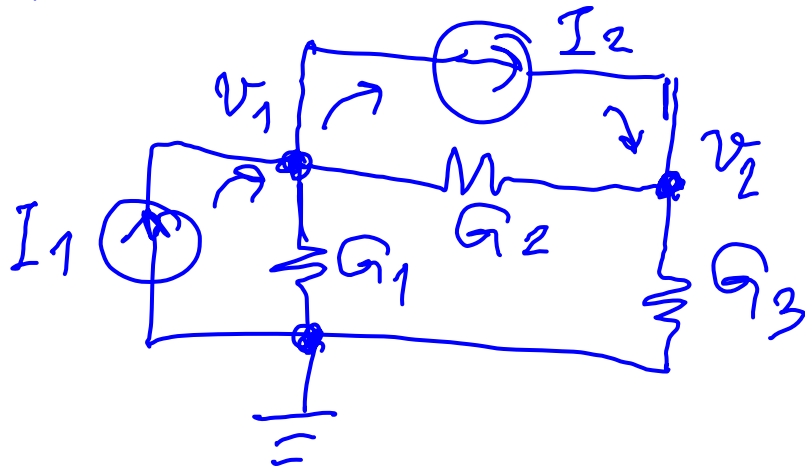
$$i_1 = \frac{-64}{20} = -3.2 \text{ A} \quad \text{--- (3)}$$

นำ (3) แทนใน (2)

$$i_2 = -3.2 + 6 = 2.8 \text{ A} \quad *$$

Nodal and Mesh Analysis by inspection

เมื่อมีแหล่งจ่ายทุกๆ 1 ของวงจรเป็น independent current source เราไม่จำเป็นต้องใช้ KCL สมการแต่ละโหนดเพื่อหาสมการของโหนดที่โหนดนั้นๆ เราสามารถเขียนสมการโหนดจากวงจรแล้วเขียนสมการในรูปแบบ Matrix ของ G (conductance) ได้เช่น ,



ที่ node v_1 และ v_2

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ Y นั้นว่าในแนวทแยงมุม (diagonal) จะเป็นผลบวกของ conductance ซึ่งต่อกับโนดที่ 1 หรือ 2 ขณะที่ค่าหนึ่งที่ไม่ใช่ 0 อยู่ในแนวทแยงมุมจะเป็นค่า conductance ที่ต่ออยู่ระหว่างโนดแต่ละด้าน เมทริกซ์ของตัวนำจะมีชื่อผลรวมที่ชัดเจนของกร. 15 ที่ในล. 6 ข้าง ล. โหนด

ถ้ากรณีที่ มีจำนวน node ที่ไม่ใช่ node อ้างอิง เป็นจำนวน n โหนด จะสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & G_{M2} & \dots & G_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

นรี! 1. จักรเยื่อมี $\boxed{G_{ij} = i}$ column vector
 650 G_{kk} = ผลรวมของ conductance ที่ต่ออยู่กับโหนด k
 (แนวเส้นที่ 1 ของแถว)

$G_{kj} = G_{jk}$ เป็นค่าลบ (-) ของผลรวมของ conductance
 ที่ต่ออยู่ระหว่างโหนด j กับ k โดยที่ $j \neq k$

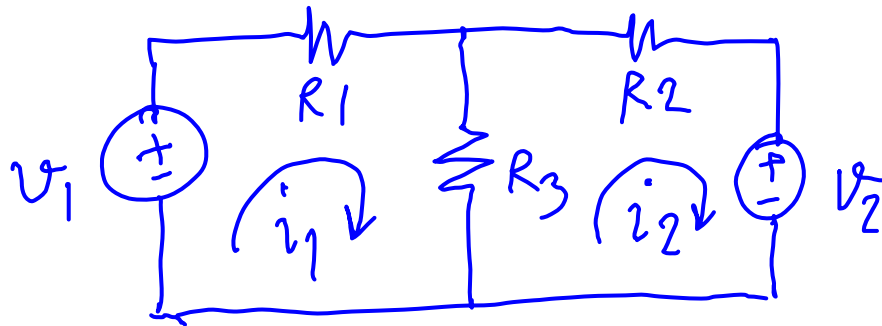
i เป็นเวกเตอร์
 1

V_k = แรงดันที่โหนด k ที่โหนด k j กับ $k; j \neq k$

i_k = ผลรวมของแหล่งจ่ายกระแสที่ต่อ
 เข้ากับโหนด k โดยที่กระแสไหลเข้าใน "เป็นบวก"

กระแสไหลออกใน "เป็นลบ"
 G คือ conductance Matrix, V เป็นเวกเตอร์อัตรา

Mesh เราสามารถเขียนสมการในรูปแบบ Mesh ได้เป็น



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

และถ้ามีจำนวน N mesh สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{M1} & R_{M2} & \dots & R_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{R}\vec{i} = \vec{V}}$$

โดยที่ $R_{kk} =$ ผลรวมของค่าความต้านทานใน Mesh k

$R_{kj} = R_{jk}$ เป็นค่าลบของผลรวมของความต้านทานที่ต่ออยู่
ระหว่าง mesh k และ j โดยที่ $k \neq j$

$i_k =$ เป็นกระแส Mesh ที่ไหลวนตามเข็มนาฬิกาใน Mesh k ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

$V_k =$ ผลรวมของแหล่งจ่ายทั้งแปดตามทิศทางตามเข็มนาฬิกาใน Mesh k

ในที่นี้ R ถูกเรียกว่าเมทริกซ์ความต้านทาน
→ เป็นอินพุต 6x6 เมอร์
→ เป็นเอาต์พุต 6x6 เมอร์

Superposition

ถ้าวงจรมีแหล่งจ่ายอิสระ (Independent Source) 2 ตัวหรือมากกว่านั้น วิธีหนึ่งที่เราจะกำหนดค่าของตัวแปรเฉพาะ (แรงดันหรือ กระแส) คือการใช้วิธีการของ node หรือ Mesh

วิธีการของ Superposition แสดงให้เห็นว่า แรงดันตกคร่อม (หรือ กระแสไหลผ่าน) องค์ประกอบในวงจร linear เป็นผลรวมของแรงดันตกคร่อม (หรือ กระแสไหลผ่าน) องค์ประกอบนั้นเนื่องจากแหล่งจ่ายแต่ละแหล่งทำงาน 6 พียงลำพัง

ขั้นตอน

1. เราจะพิจารณา แหล่งจ่ายที่ละแหล่งจ่าย $V_{th} =$ ที่แหล่งจ่าย
อื่นๆ จะถูกปิดลง (ถ้าเป็นแหล่งแรงดัน) ที่ short circuit
ถ้าเป็นแหล่งกระแสไฟ open circuit)

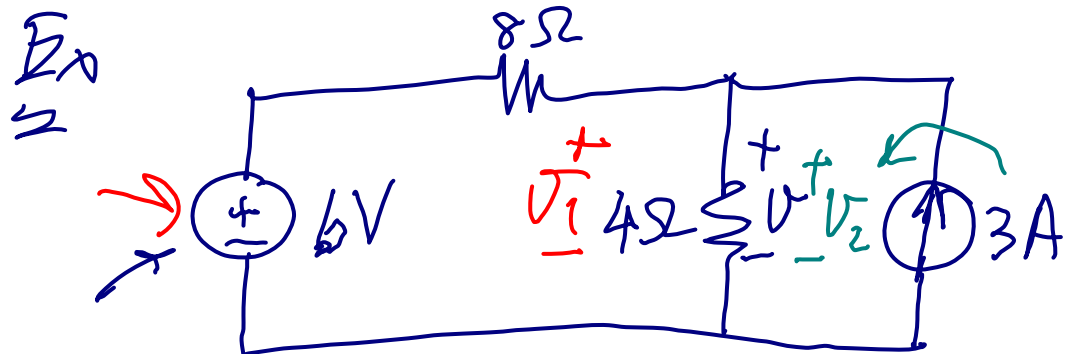
2. ถ้าเป็นแหล่งจ่าย dependent source จะต้องดูไว้

ขั้นที่ 3 ในกรณี Superposition $\rightarrow 2ix$ $\rightarrow 2V_x$

1. short circuit, เมื่อเป็นแหล่งจ่ายแรงดัน, open circuit
เมื่อเป็นแหล่งจ่ายกระแส

2. ทำซ้ำข้อที่ 1 คำนวณแหล่งจ่ายอื่นๆ จนครบทุกแหล่ง
แล้ว

3. หาผลรวมของกระแสในหรือแรงดัน ตามผลรวมที่ขอ



จาก V_{th} ของวงจร

solⁿ ถ้าหาออกัน $V = V_1 + V_2$

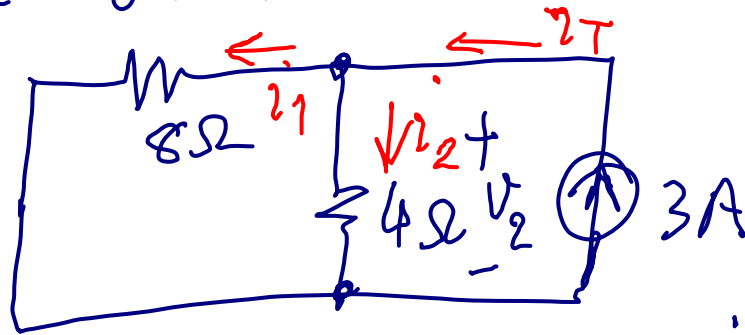
1. Open current source (3A)



$$V = iR_{4\Omega} \text{ หรือ } \frac{4A \times 6V}{8\Omega + 4\Omega}$$

$$V_1 = \frac{24}{12} = 2V$$

2. Short mạch hỗn hợp (6V)



$$i_2 = \frac{8\Omega \times 3A}{8\Omega + 4\Omega}$$

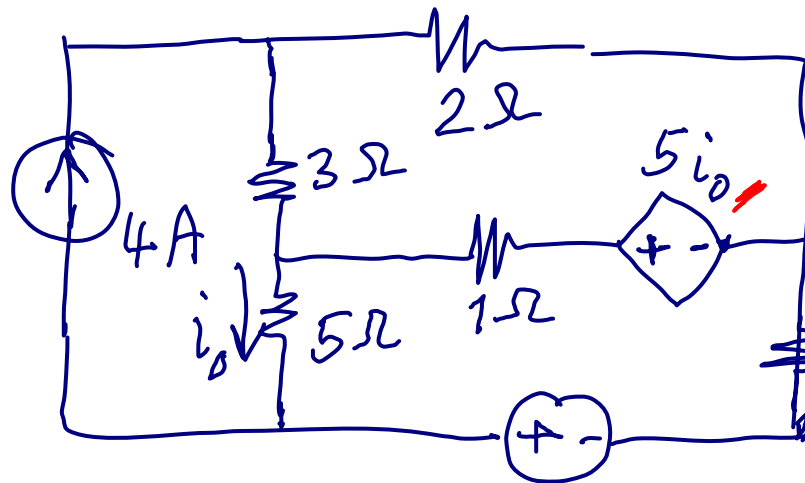
$$i_2 = \frac{24}{12} = 2A$$

$$\therefore V_2 = i_2 \times R_{4\Omega} = 2A \times 4\Omega$$

$$V_2 = 8V$$

$$\therefore V = V_1 + V_2 = 2V + 8V = 10V$$

~~E~~



đơn vị flows

$$i_o = i_o' + i_o''$$

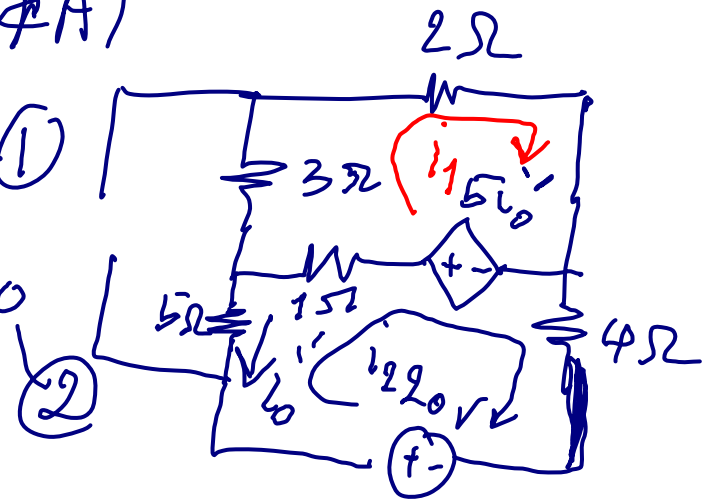
1. Open current source $20V$ ($4A$)

Loop i_1 $6i_1 - i_2 - 5i_o' = 0 \rightarrow (1)$

Loop i_2 $10i_2 - i_1 - 20 + 5i_o' = 0$

$i_2 = -i_o' \rightarrow (3)$

thay i_2 vào (1) và (2)



$$\text{KKT ①} \quad 6i_1 + i_0' - 5i_0' = 0$$

$$6i_1 - 4i_0' = 0 \quad \text{--- ④}$$

KKT ②

$$-i_1 - 10i_0' + 5i_0' - 20 = 0$$

$$-i_1 - 5i_0' = 20 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$i_0' = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}} = \frac{120}{-34} \approx -\frac{60}{17} \text{ A} \quad \#$$

2. Short circuit (20V)

$$i_3 = 4A$$

Loop i_4

$$6i_4 - i_5 - 5i_0'' - 3i_3 = 0 \quad \text{--- (6)}$$

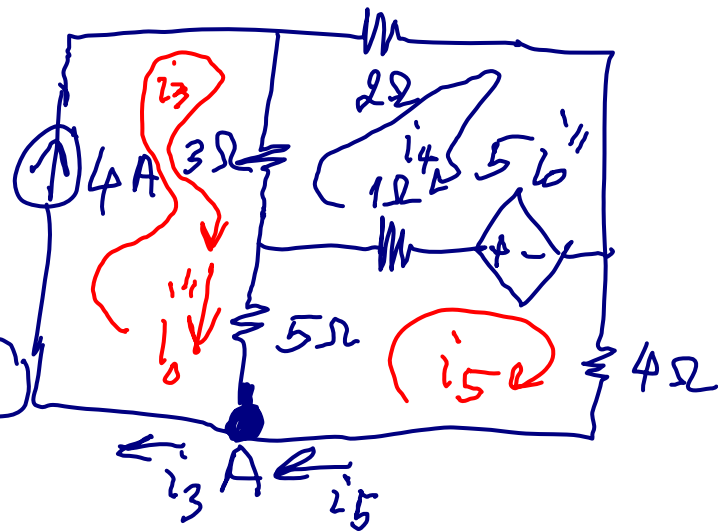
Loop i_5

$$10i_5 - i_4 - 5i_3 + 5i_0'' = 0 \quad \text{--- (7)}$$

ที่ Node A ใช้ KCL จะได้ $i_5 = i_3 - i_0''$, $i_3 = 4A$

$$\therefore i_5 = 4 - i_0'' \quad \text{--- (8)}$$

นำ (8) ไปแทนใน (6) และ (7)



$$\text{จาก (6)} \quad 6i_4 - (4 - i_0'') - 5i_0'' - 3(4)^{i_3} = 0$$

$$6i_4 - 4i_0'' = 16 \quad \text{--- (9)}$$

ถ้า 2 พย (9) คูณ 3

$$3i_4 - 2i_0'' = 8 \quad \text{--- (10)}$$

$$\text{จาก (7)} \quad -i_4 + 10(4 - i_0'') + 5i_0'' - 5(4)^{i_3} = 0$$

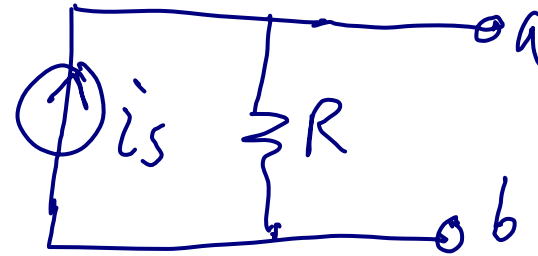
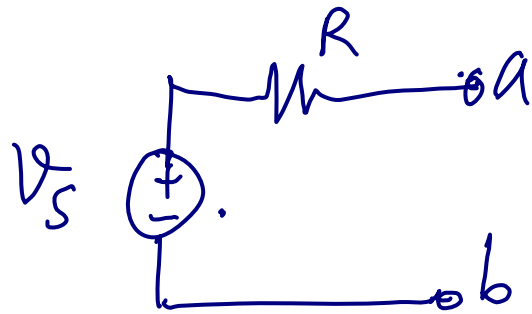
$$-i_4 + 40 - 10i_0'' + 5i_0'' - 20 = 0$$

$$-i_4 - 5i_0'' = -20 \quad \text{--- (11)}$$

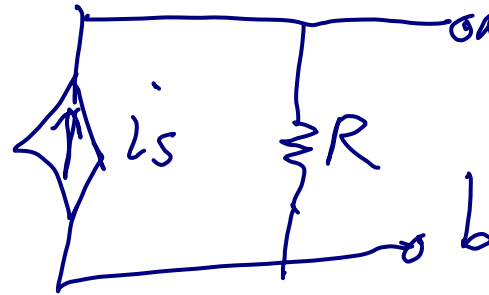
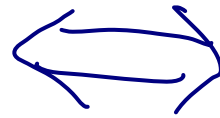
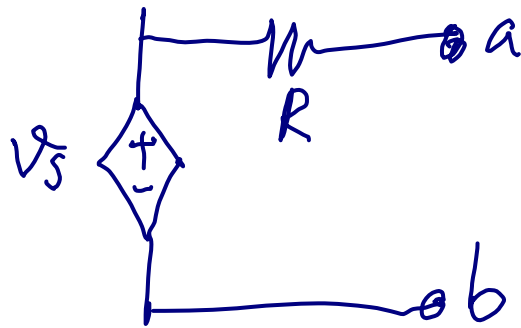
ถ้า (10) คูณ (11) จะได้ $i_0'' = 52/17 \text{ A}$

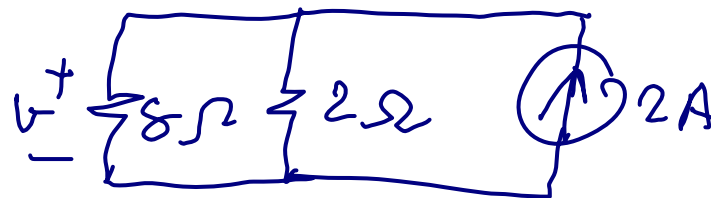
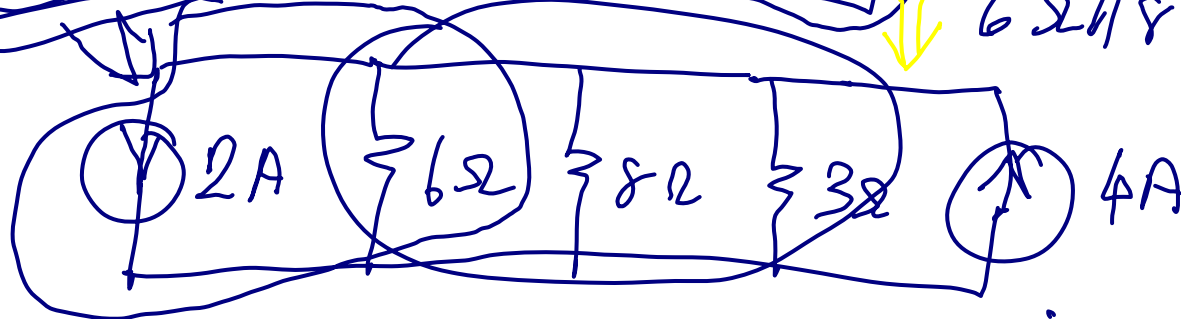
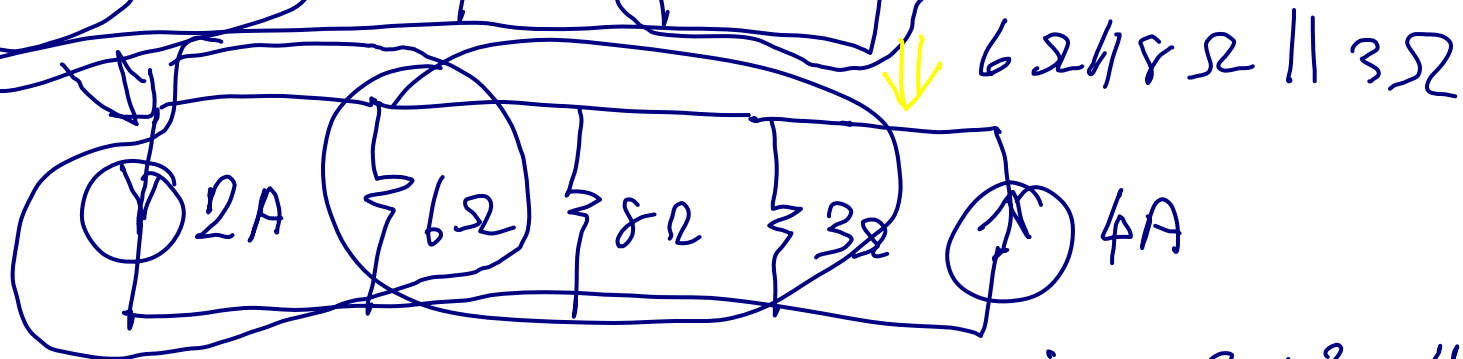
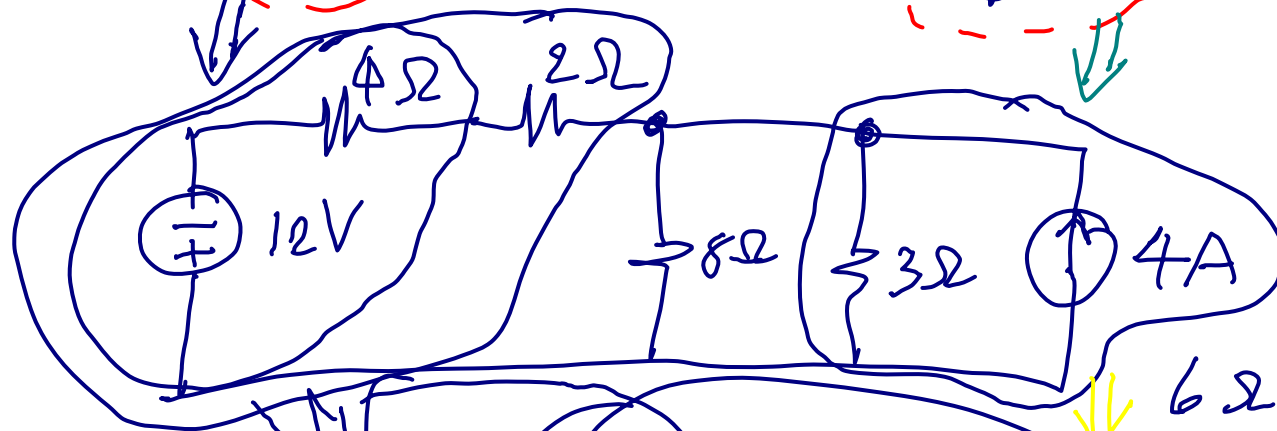
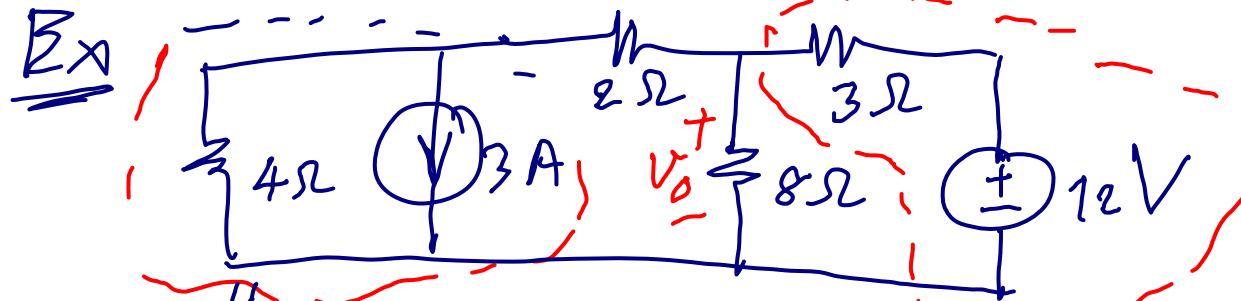
$$\therefore i_0 = i_0' + i_0'' = \frac{-60}{17} + \frac{52}{17} = \frac{-8}{17} \text{ A} \quad \times$$

Source Transformation



$$i_s = \frac{V_s}{R}$$

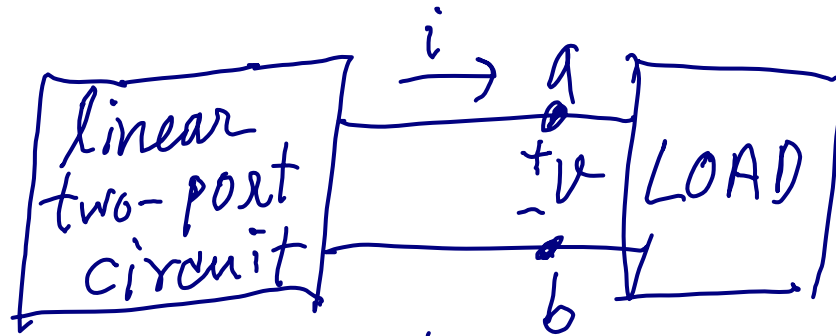




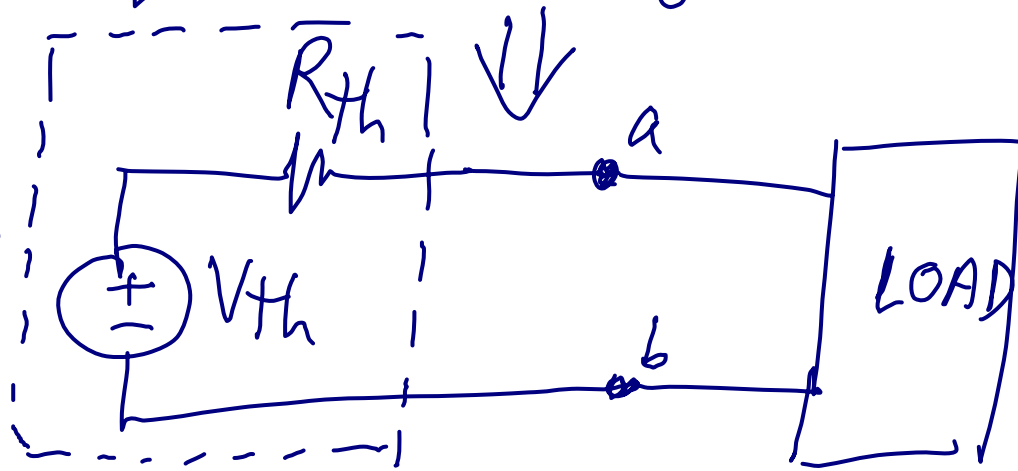
$$i_{8\Omega} = \frac{2 \times 2}{8 + 2} = \frac{4}{10} \text{ A}$$

$$v_{8\Omega} = \frac{4}{10} \times 8 = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ V}$$

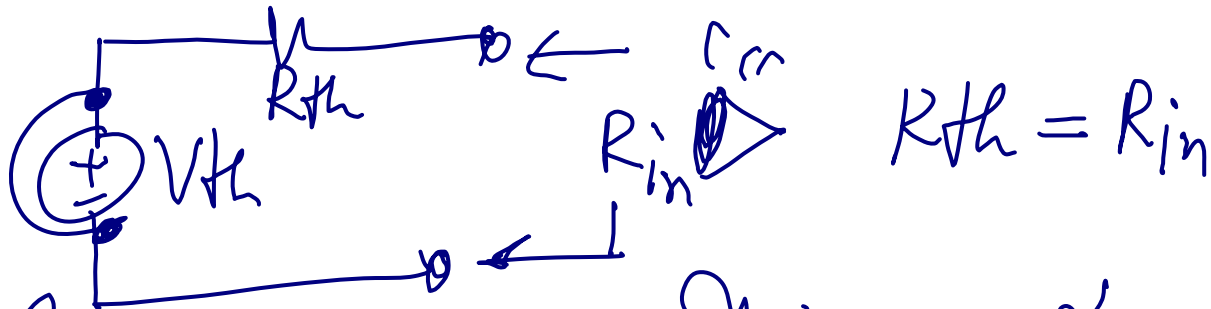
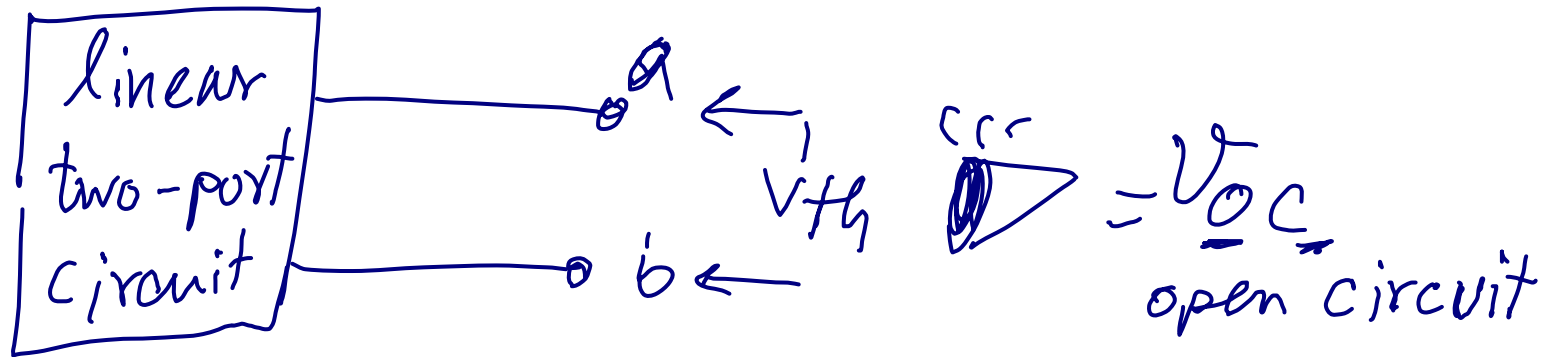
THEVENIN'S THEOREM



Thevenin
equivalent
circuit
data



M, Leon Thevenin

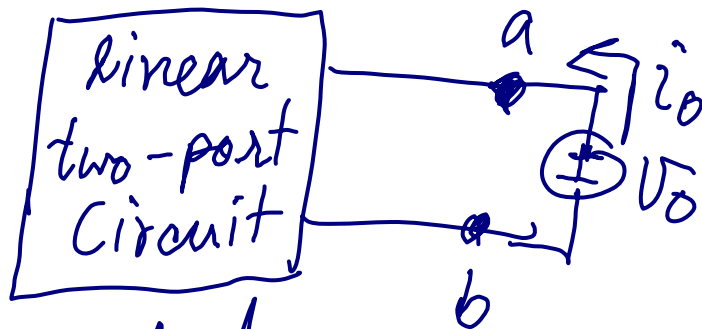


หาค่า R_{th} พิจารณาจาก 2 วิธี

วิธีที่ 1 ถ้าวงจรไม่มี dependent source 187: 20

หาค่า (แรงดัน) ที่ออก หรือเป็นแหล่งกระแส

กรณี 2 ถ้ามี dependent source เราจะไม่ independent source (เช่น ถ้าเราใช้หลักการซ้อนทับ superposition) จากนั้นเราต้องหาหาค่าแรงดัน V_o มาตรฐานที่จุด a-b หรือหากระแส I_o แล้วหา $R_{th} = \frac{V_o}{I_o}$



$$R_{th} = \frac{V_o}{I_o}$$

หรืออีกกรณีหนึ่ง เราสามารถหาแรงดันมาตรฐานที่จุด a-b แล้วหารด้วยกระแส I_o ตามนี้ก็ได้ $R_{th} = \frac{V_o}{I_o}$
 ในที่นี้ค่ามาตรฐาน $V_o = 1V$, $I_o = 1A$

การแก้ถ้าพบว่า R_{th} เป็นลบ "-" จะแปลว่า
วงจรเป็นแหล่งจ่ายกำลัง ซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับวงจรที่มี
dependent source ใดๆ

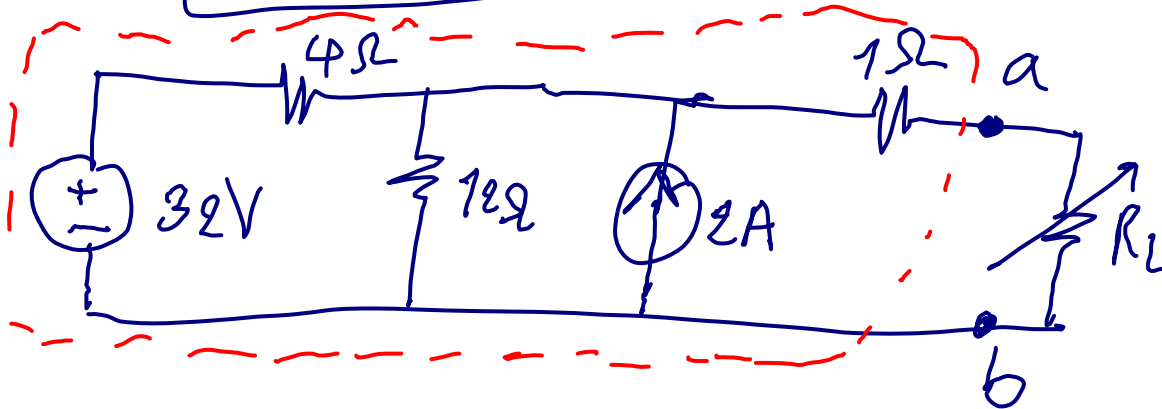
Solⁿ



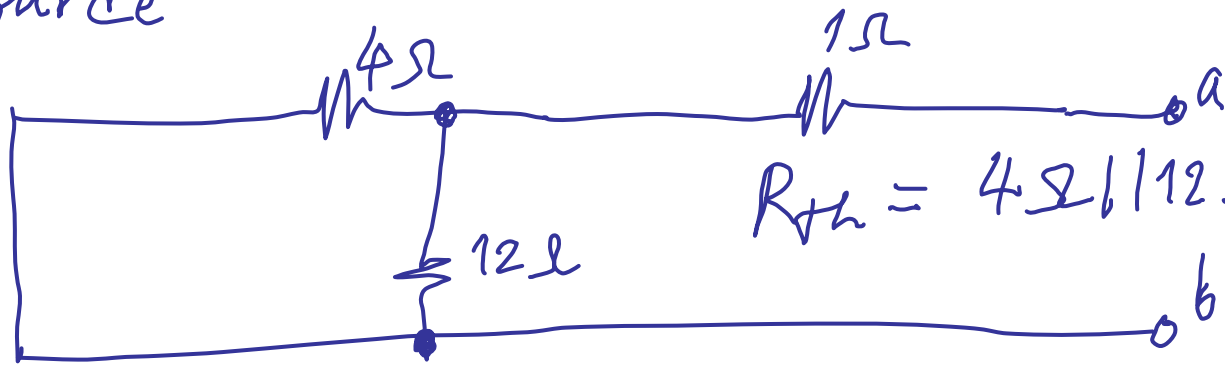
$$\therefore I_L = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

$$V_L = R_L I_L = \frac{R_L \cdot V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

Ex

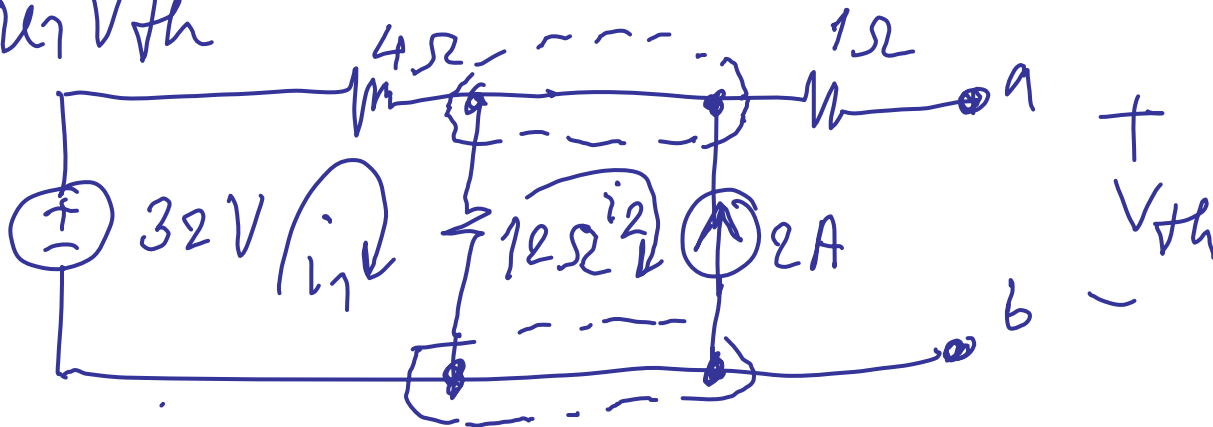


- U_1 Rth Tow short voltage Source & open current Source



$$R_{th} = 4\Omega \parallel 12\Omega + 1\Omega = 4\Omega$$

- U_1 V_{th}



$$16i_1 - 12i_2 - 32 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$16i_1 - 12i_2 = 32$$

จากกราฟ $i_2 = -2 \text{ A}$ --- (2)

นำ (2) ไปแทนใน (1) จะได้

$$16i_1 - 12(-2) = 32$$

$$i_1 = \frac{8}{16} = 0.5 \text{ A} \quad \#$$

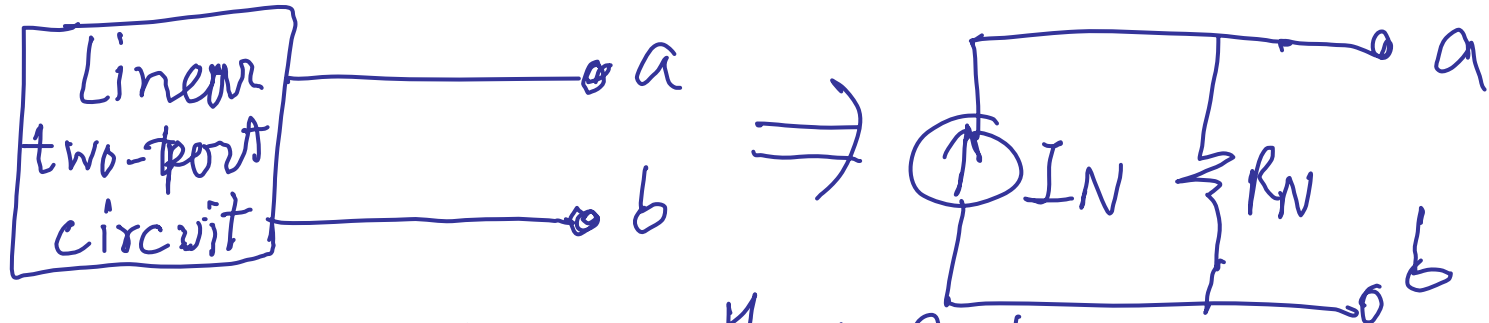
$$V_{th} = 12(i_1 - i_2) = \frac{12}{16}(0.5 - (-2)) = 30 \text{ V} \quad \#$$

จากนั้นนำค่า V_{th} และ Thevenin equivalent circuit จะได้



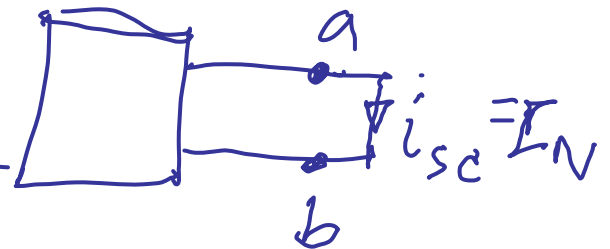
NORTON'S THEOREM

သော E.L. Norton နိဒါန်း 43



1. measure R_N in Δ R_{th} (Thevenin) $\Rightarrow R_{th} = R_N$

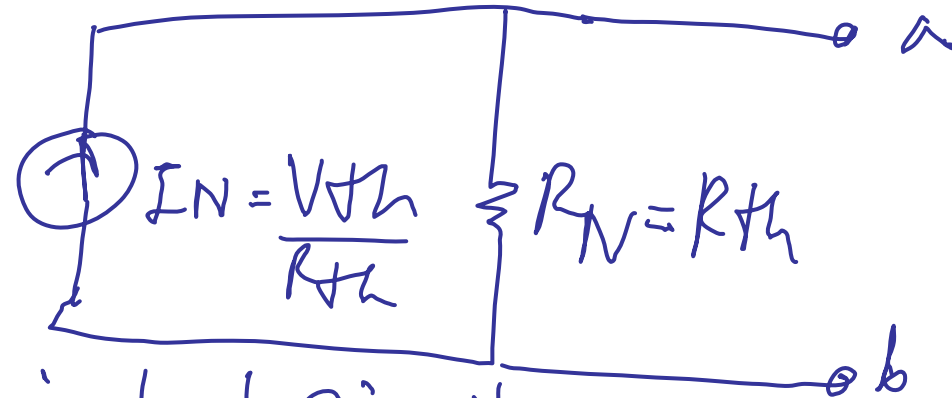
2. measure I_N by short-circuiting $a-b$
 $\Rightarrow I_N = I_{sc}$
 short circuit



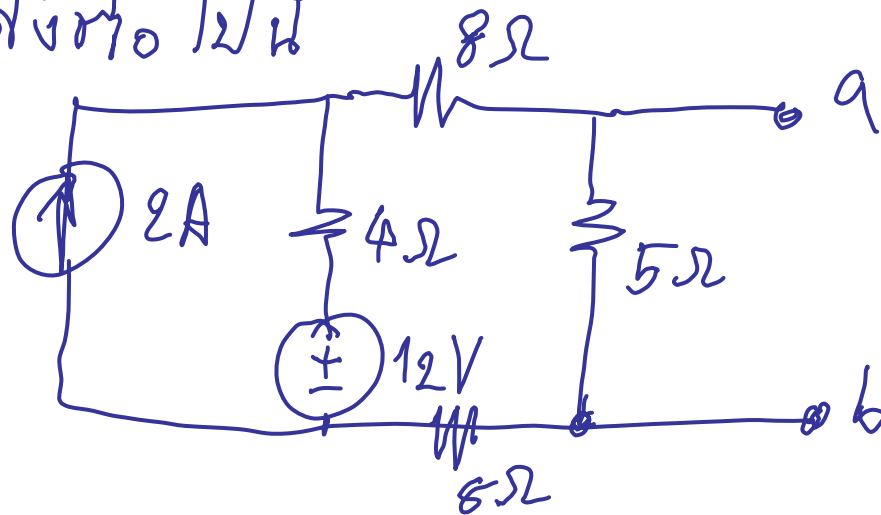
การหาค่าพารามิเตอร์ของ Thevenin และ Norton

$$R_N = R_{th}$$

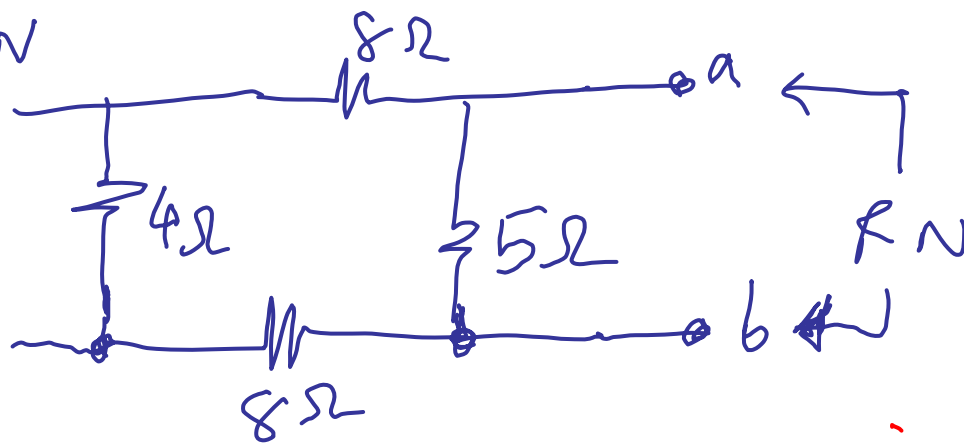
$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$



Ex. หา Norton Equivalent Circuit ของ
วงจรต่อไปนี้



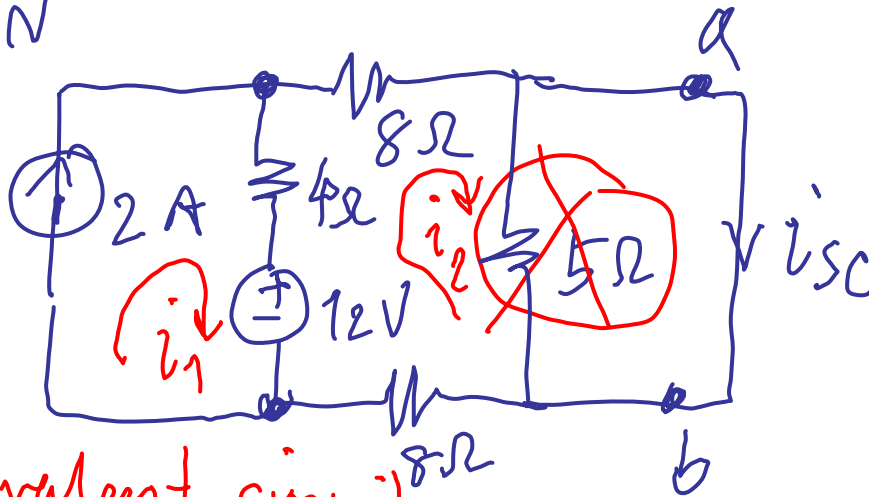
W RN



$$\therefore R_N = 20 \parallel 5$$

$$R_N = 4 \Omega$$

27 IN



$$i_1 = 2A$$

Loop i2

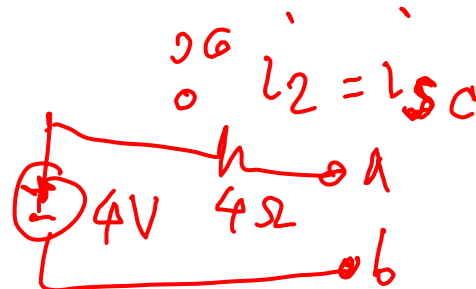
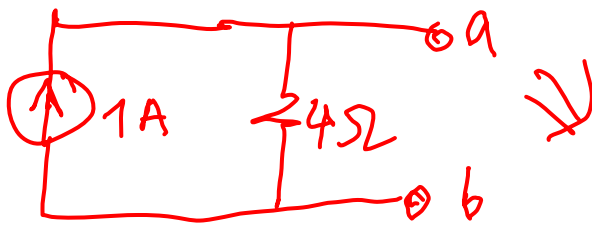
$$20i_2 - 4i_1 = 12$$

$$20i_2 - 4(2) = 12$$

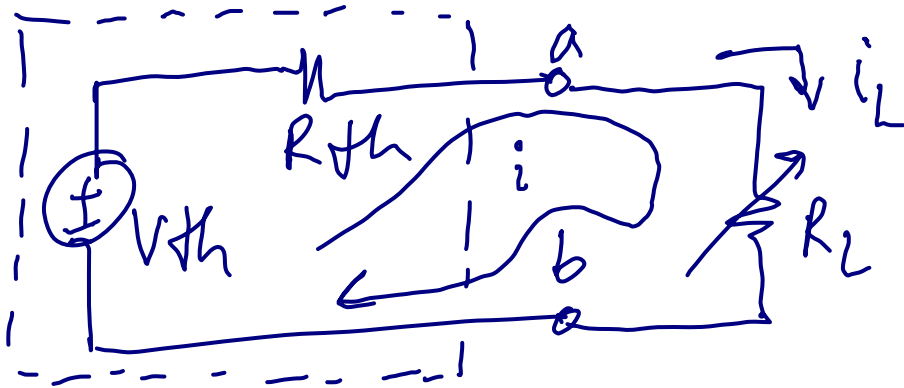
$$i_2 = \frac{20}{20}$$

$$i_2 = 1A$$

\therefore equivalent circuit



MAXIMUM POWER TRANSFER

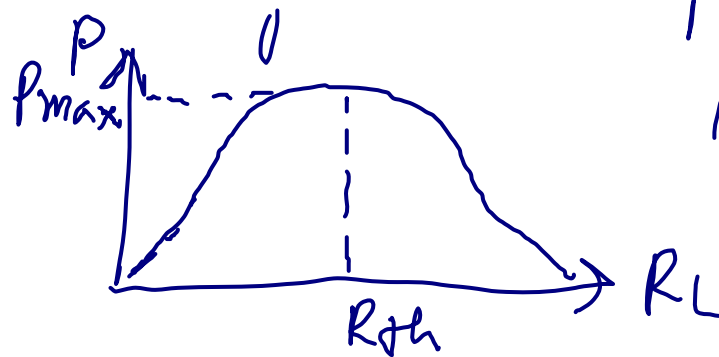


$$P = i^2 R_L$$

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

$$P = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 \cdot R_L \quad \text{--- (1)}$$

เมื่อ V_{th} และ R_{th} คงที่ เราจะได้ว่า P จะเป็นฟังก์ชันของ R_L เราจึงสามารถหา P_{max} ได้โดยหา R_L ที่ทำให้ P มีค่ามากที่สุด



Maximum power
เมื่อ $R_L = R_{th}$

จงหา ① อัตราการไหลสูงสุดเมื่อ $R_L = R_{Th}$ จงหา

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L} \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 \cdot R_L$$

$$R_{Th} = R_L$$