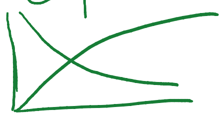
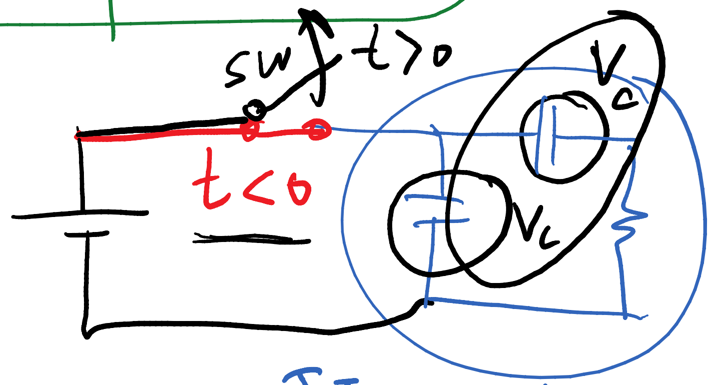
The ~~Source-free~~ RC circuit

DC condition

C	L
open	short





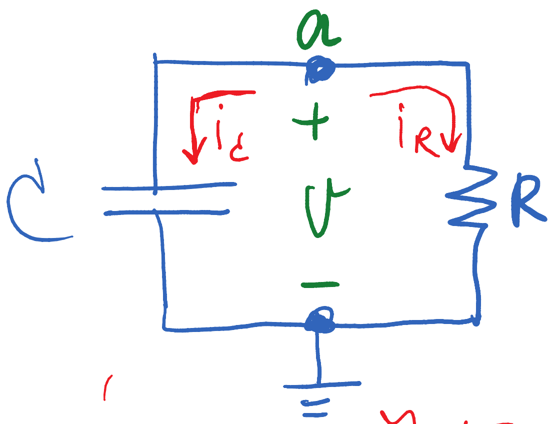
$$t=0 \longrightarrow v_c(0) = \underline{V_0} \leftarrow \text{initial voltage condition}$$

Energy (t=0)

$$\boxed{w(t=0) = \int p(t)\,dt}$$

$$w(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad W$$

อดีต. past



$$\sum I_{IN} = \sum I_{out}$$

ใช้ KCL ที่ node a จะได้

$$i_C + i_R = 0 \quad \text{---} \ (1)$$

แทนค่าของ i_C และ i_R จะได้

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad \text{---} \ (2)$$

นำ C หารตลอดในสมการที่ (2)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad \text{---} \ (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-v}{RC}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{RC}\,dt$$

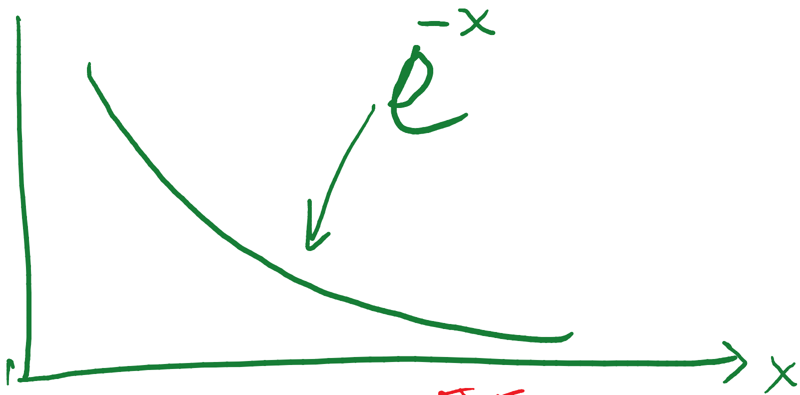
$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \underbrace{\ln A}_{\text{constant}}$$

$$\ln\left(\frac{v}{A}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\boxed{v = Ae^{-t/RC}}$$

x

★★★



เมื่อ $t = 0$ V_0

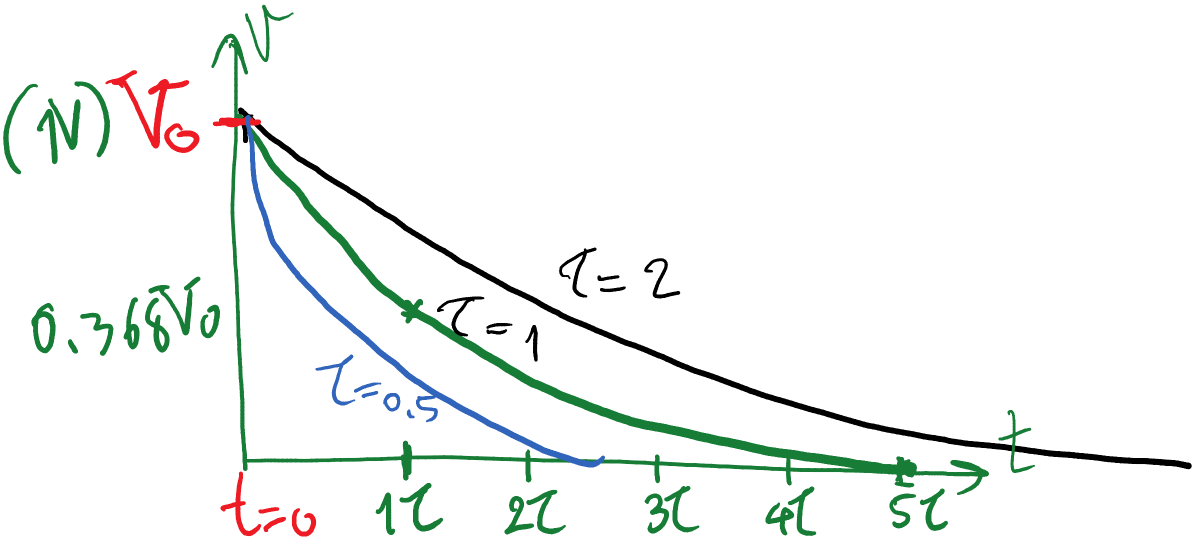
เมื่อ $t = 0$

$$\boxed{v(0) = A} \rightarrow V_0 \quad ***$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

$$\tau = RC$$

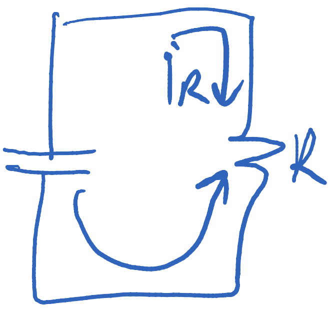
$$* \quad \boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau}} \quad **$$



$$v(\tau) = V_0 e^{-1} = \frac{V_0}{e} = \frac{V_0}{2.71828}$$

$$= 0.368 V_0$$

พลังงานของ R และกระแสของ R



$$\boxed{i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0 e^{-t/\tau}}{R}}$$

พลังงานสะสมใน R ที่เวลาใดๆ

$$w_R(t) = \int_{t_0=0}^{t} p(t)\,dt = \int_0^{t} \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt$$

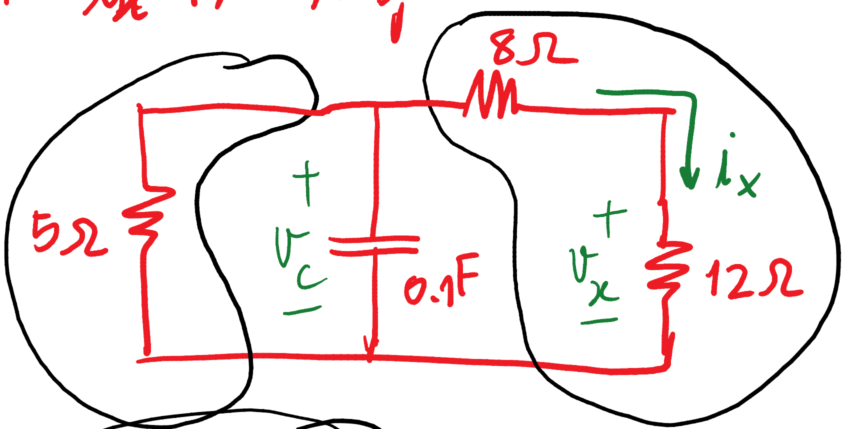
$$\boxed{w_R(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}$$

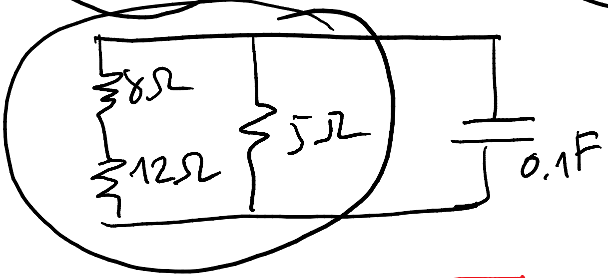
ถ้า $t \to \infty$

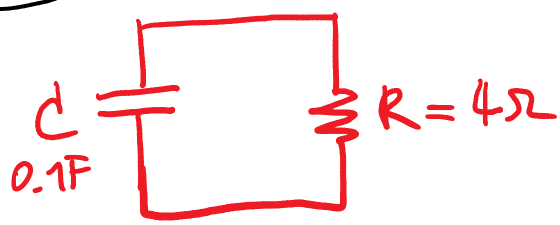
$$= \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - \cancel{e^{-\infty}}\right) \qquad \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$\boxed{w_R(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2}$$

Ex ให้ $\underbrace{V_c(0) = 15V}_{V_0}$ จงหา $v_c(t)$, $v_x(t)$ และ $i_x(t)$ จากรูปต่อไปนี้







$$\tau = RC = 4\Omega \times 0.1F = 0.4\ \text{Sec.}$$

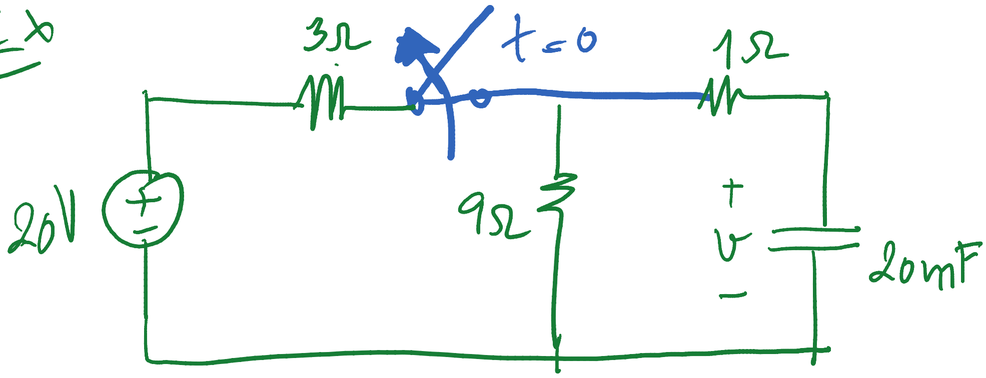
$$v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$v_c(t) = 15 e^{-t/0.4} = 15 e^{-2.5t}\ V \ast$$

$$i_x(t) = \frac{\cancel{15}^{\,3} e^{-2.5t}}{\cancel{(8+12)}^{\,4}\ \Omega} = \frac{3}{4} e^{-2.5t}\ A \ast$$

$$v_x(t) = \cancel{12}^{\,3} \times \frac{3}{\cancel{4}} e^{-2.5t} = 9e^{-2.5t}\ V \ast$$

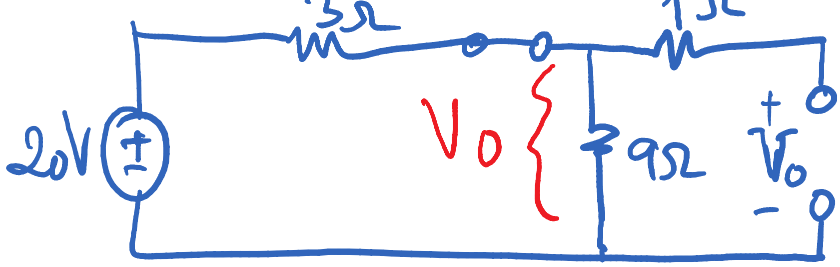
Ex



จงหา $v(t)$ at $t > 0$

ที่เวลา $t<0$, หา V_0

เมื่อ C → ชาร์จเต็มจะ: open

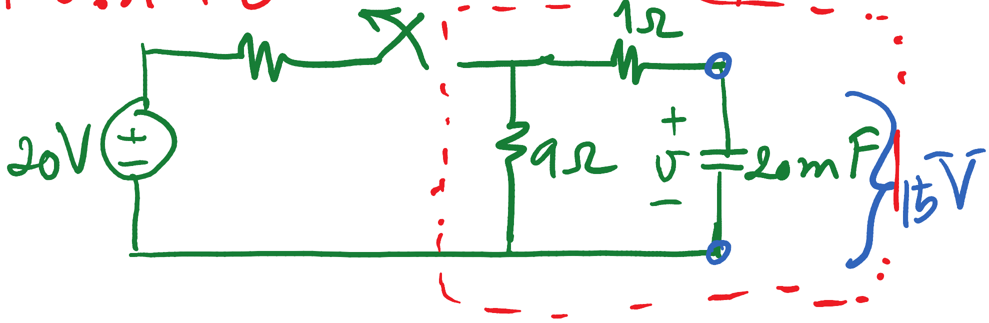


ใช้ Voltage divider

$$V_0 = \frac{9\Omega \times 20V}{9\Omega + 3\Omega} = 15\ V \ast$$

เมื่อเวลา $t=0$ แล้ว SW → opened

เมื่อเวลา $t=0$ แล้ว SW → opened



หา $V_0 = 15\ V$

หา $\tau = R_{eq} \times C = \underbrace{(9\Omega + 1\Omega)}_{R_{eq}} \times 20mF$

$\tau = 0.2\ sec = \frac{1}{5}\ sec$

$\therefore\ v_c(t) = 15\, e^{-t/0.2} = 15\, e^{-5t}\ V$ #

ถ้า $t = 5$ sec. จะได้แรงดันเท่าไร

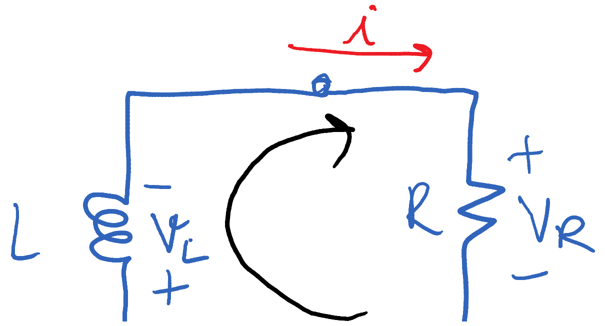
$v_c(5) = 15 e^{-5\times 5} = 15 e^{-25}\ V$ #

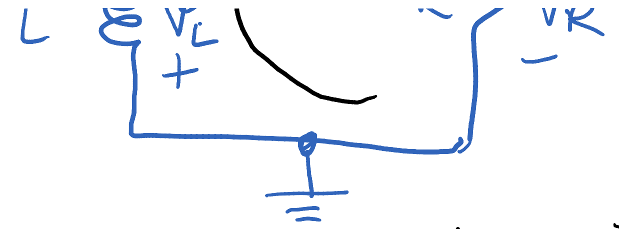
Energy → $w_c(t) = \frac{1}{2} C V_0^2$

$= \frac{1}{2} (20mF)(15)^2$

$$\boxed{w_c(t) = 2.25\ J}$$

RL source-free circuit





ที่เวลา $t=0$ จะได้ $i(0)=I_0$ —— (1)

พลังงานที่เก็บสะสมในขดลวด (coil)

$$W_L(0) = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad —— (2)$$

→ใช้ KVL วิเคราะห์หากระแสในวงจร

$$v_L + v_R = 0 \quad —— (3)$$

แทนค่า $v_L = L\frac{di}{dt}$, $v_R = iR$ ใน (3)

dif 1st order equa → $L\frac{di}{dt} + iR = 0$ —— (4)

หาร L ตลอด

$$\frac{di}{dt} + \frac{iR}{L} = 0$$

$$\int \frac{1}{i}\,di = \int -\frac{R}{L}\,dt$$

$$\ln(i) = -\frac{Rt}{L} + \ln(A)$$

$$i(t) = I_0 e^{-t\frac{R}{L}}$$

ให้ $\tau = \frac{L}{R}$

$$\boxed{\therefore\ i(t) = I_0 e^{-t/\tau}}$$

หากำลังงาน (power) ที่ R

$$p = v_R \times i = R \cdot I_0 e^{-t/\tau} \cdot I_0 e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{p = R I_0^2 e^{-2t/\tau}}$$

หาพลังงาน (Energy) ที่ R

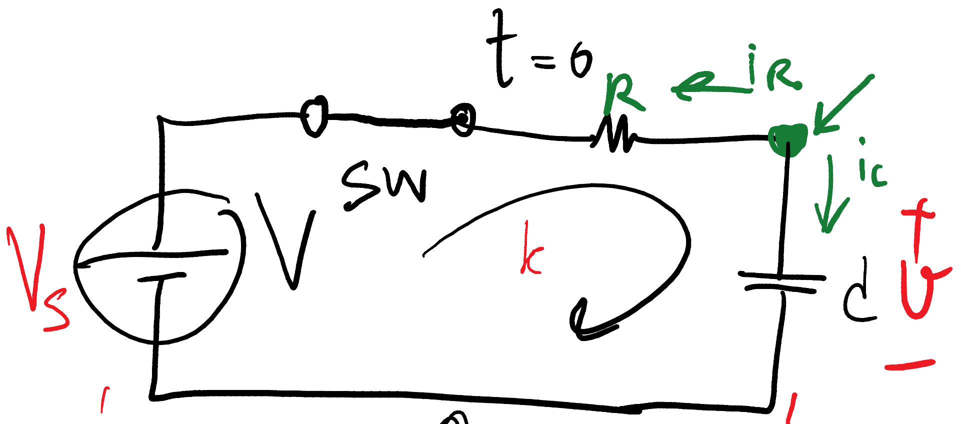
$$w_R(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt$$

$$w_R(t) = \int_0^t R I_0^2 e^{-2t/\tau}\,dt$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right) \quad ***$$

Source-~~free~~

Step Response of an RC Circuit



ที่เวลา $t > 0$ ใช้ KCL เพื่อหา v

$$\frac{\quad}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

นำ C หารตลอด

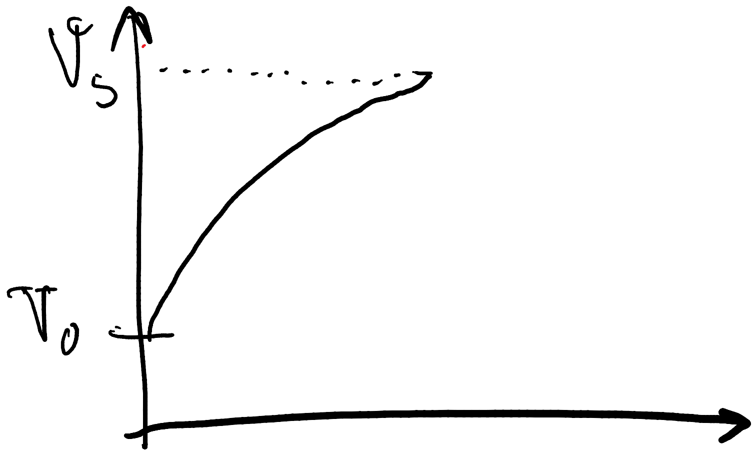
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} \quad \text{—— } 2$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{1}{RC}\right)v + \frac{V_s}{RC} \quad \text{—— } 3$$

☆ ☆ $$\boxed{v(t) = \underline{\underline{V_s}} + (V_0 - \underline{\underline{V_s}})e^{-t/\tau}}$$

โดย $\tau = RC$

Initial Voltage

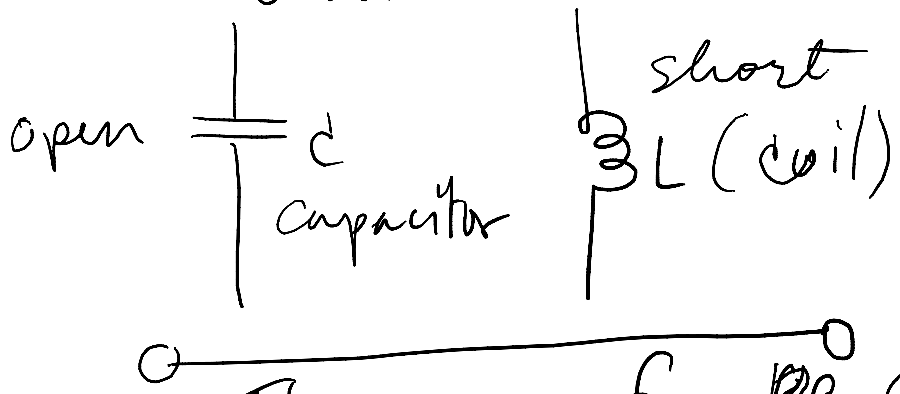


$$\longrightarrow \quad v(t) = v(\infty) + (v(0) - v(\infty))e^{-t/\tau}$$

$V(0) \rightarrow$ แรงดันจาก $-\infty \rightarrow t=0$

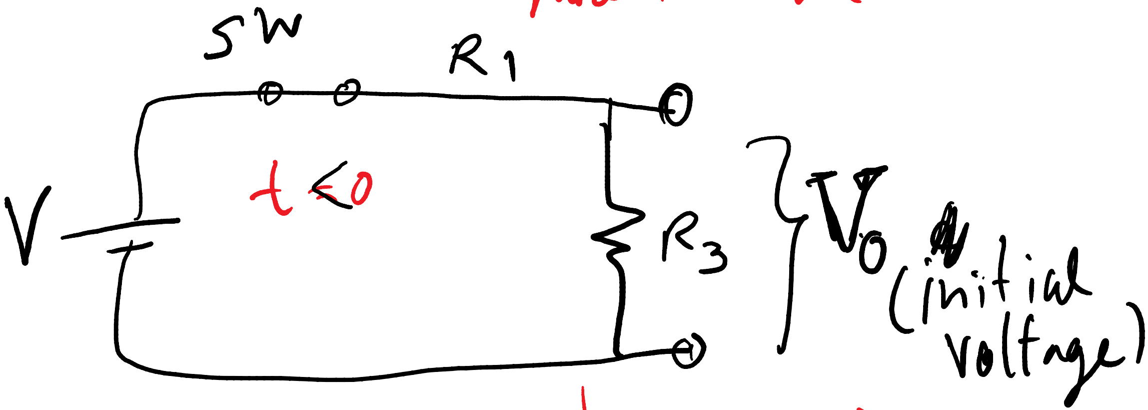
$V(\infty) \rightarrow$ 〃 —— 〃 $t>0$

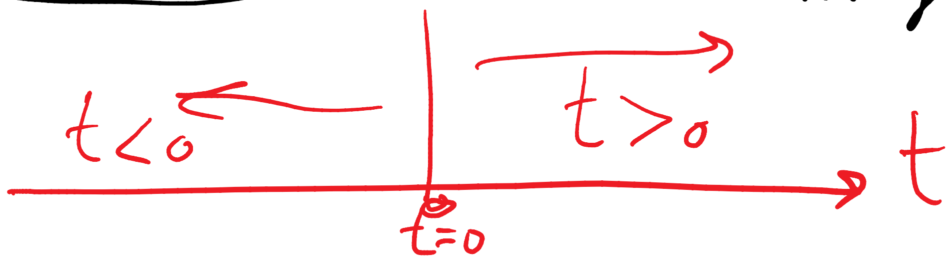
Under DC condition

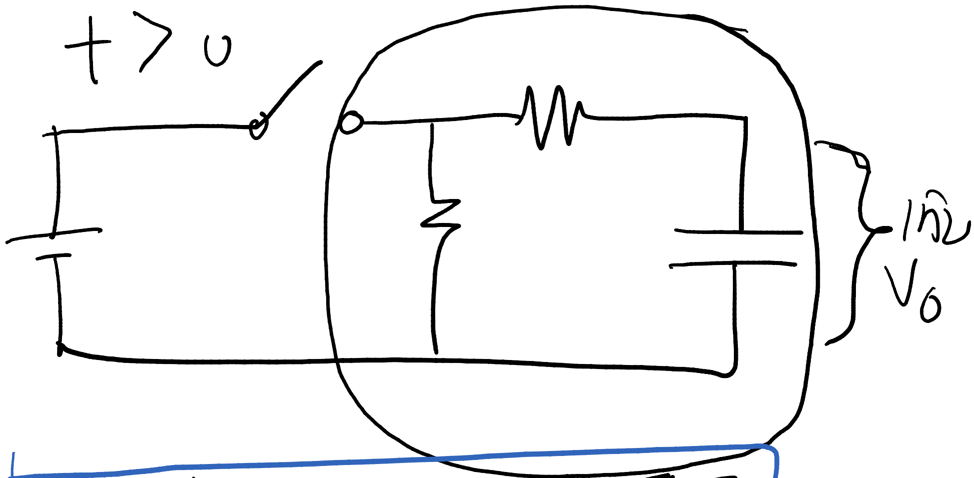


The source-free RC Circuit

ไม่มีแหล่งจ่าย (ไฟ)





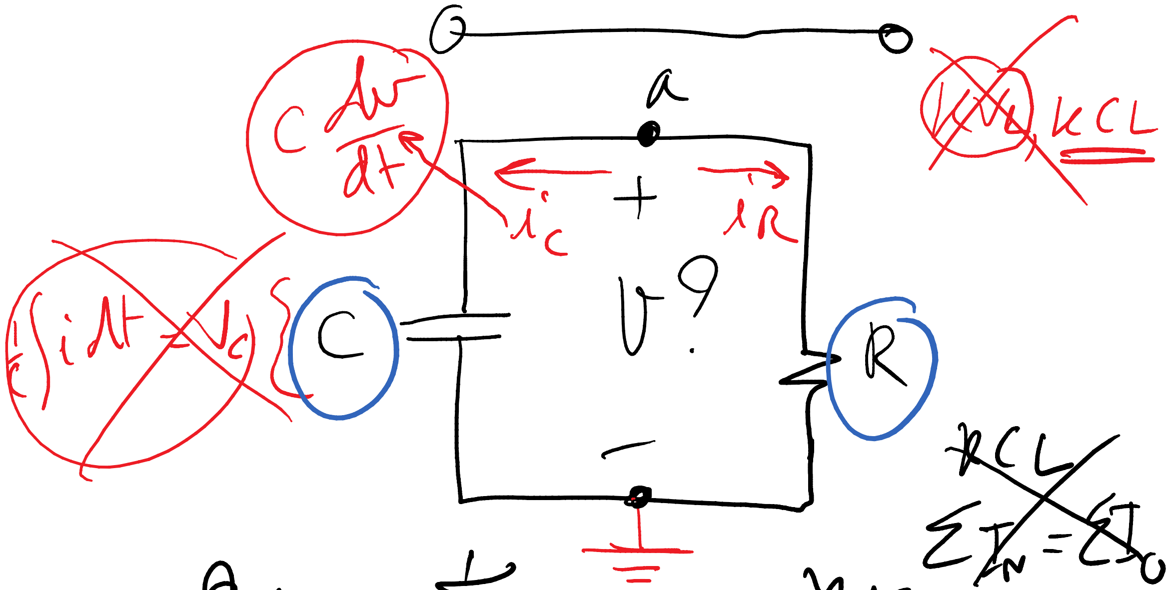


$\boxed{\text{กรณี } t=0 \longrightarrow v(0) = V_0}$ (initial voltage)

* พลังงานที่เก็บในตัวเก็บประจุ

* พลังงานที่เก็บในตัวเก็บประจุ

$$\boxed{W_c(0) = \frac{1}{2} C V_0^2 \text{ J}}$$



ใช้ KCL ที่โหนด a จะได้

$$i_C + i_R = 0 \quad \text{——— (1)}$$

แทนค่า i_C และ i_R

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = \boxed{0} \quad \text{——— (2)}$$

(2) → 1^{st} order differential Eq.

(2) → homogeneous eq.

} บอก เฉพาะ

นำ C หารใน (2) ตลอด

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad \text{——— (3)}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int \frac{1}{RC} dt$$

$$\int \frac{1}{v}\,dv = \int -\frac{1}{RC}\,dt$$

constant

$$\ln(v) = -\frac{t}{RC} + \ln(A)$$

$$\ln\left(\frac{v}{A}\right) = -t/_{RC}$$

☆ $\boxed{v(t) = Ae^{-t/RC}}$ ☆☆☆

??

ถ้าให้ $t=0$

$$V_0 = v(0) = Ae^{-0} = A \qquad e^{-0}=1$$

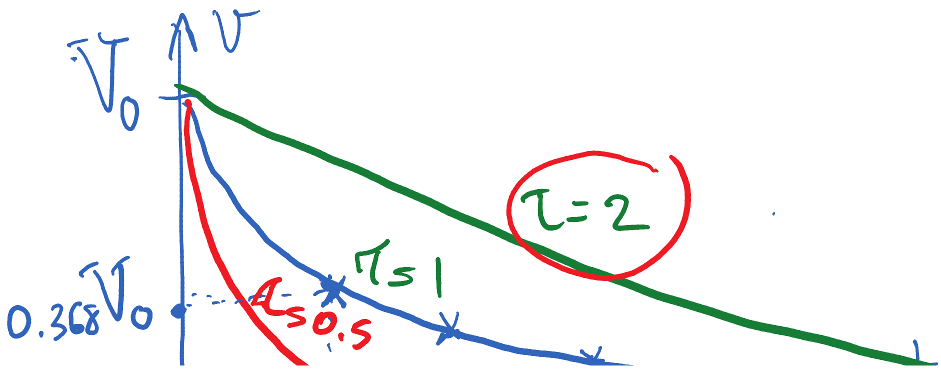
$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

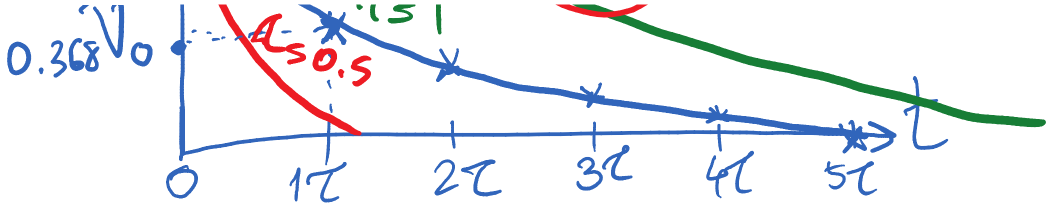
initial voltage

∴ ให้ $\tau = RC$

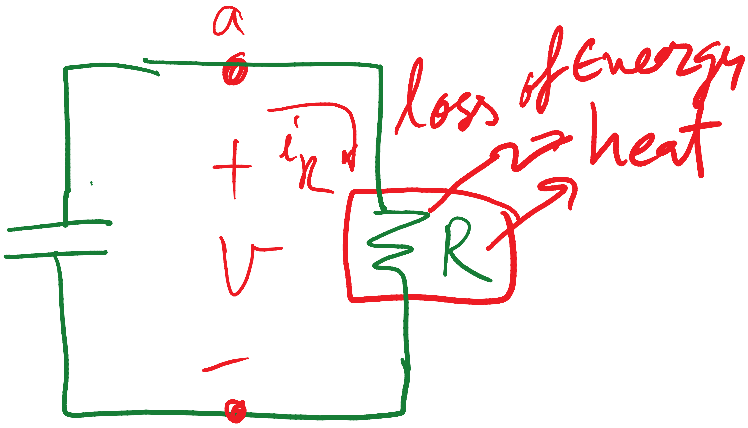
∴ $\boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau}}$ ☆☆☆

กราฟ ของ $v(t)$





พลังงานของ R และกระแสของ R



กระแสของ R

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0 e^{-t/RC}}{R} \quad **$$

พลังงานของ R

$$w_R(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,dt$$

$$\therefore w(t) = \int_0^t \boxed{\frac{V_0^2}{R}} e^{-2t/\tau}\,dt$$

$$= -\frac{\tau V_0^2}{2R} e^{-2t/\tau}\Big|_0^t$$

RC

$$= -\frac{\tau V_0^2}{2R} e^{-2t/\tau} + \frac{\tau V_0^2}{2R}$$

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}CV_0^2\left(1-e^{-2t/\tau}\right)} \quad ***$$

Energy of R.

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}$$ ★★★

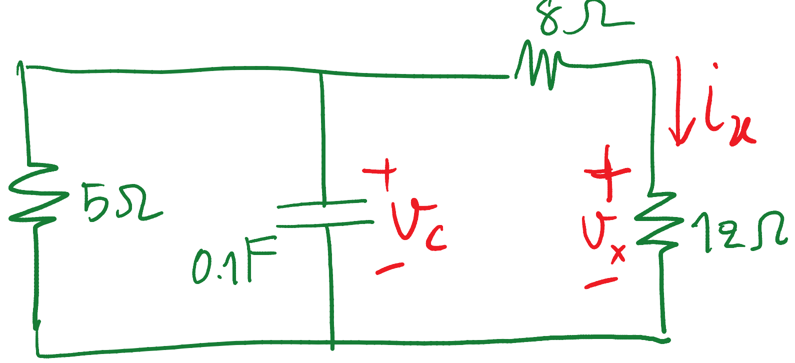
ถ้าให้ $t \to \infty$

$$w(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - \cancel{e^{-\infty}}\right)$$

$0 \quad \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

$$\boxed{w(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2}$$

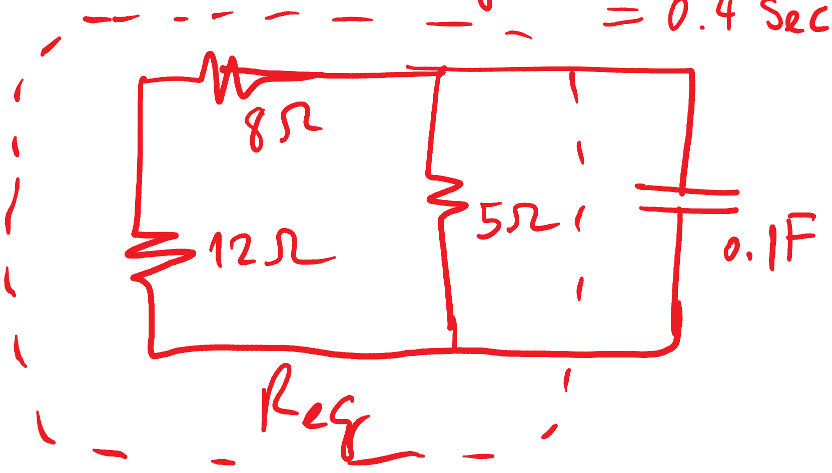
Ex ถ้าให้ $v_c(0) = 15V$ จงหา $v_c(t)$ $v_x(t)$ และ $i_x(t)$ จากรูปต่อไปนี้

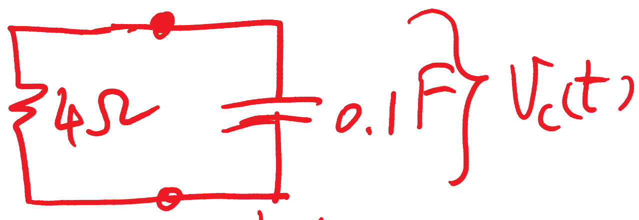


Sol^n ① $v_c(0) \to V_0 = 15V$

② หาค่า $\tau = R_{eq} C = 4\Omega \times 0.1F$

$= 0.4$ Sec



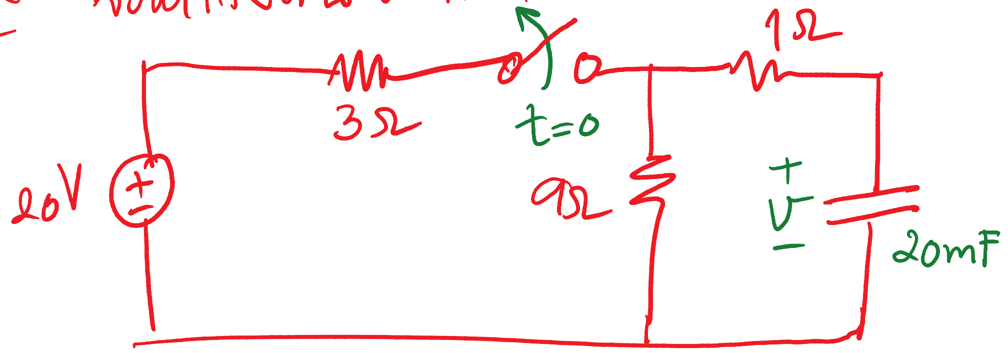


จาก $v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}$

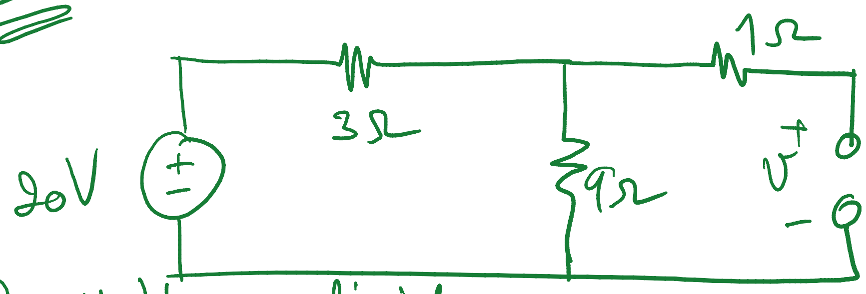
$\tau = 0.4$ sec.

$v_c(t) = 15 e^{-2.5t}$ V ※

Ex จงหาแรงดัน $v(t)$ เมื่อ $t > 0$



Sol^n ที่เวลา $t < 0$



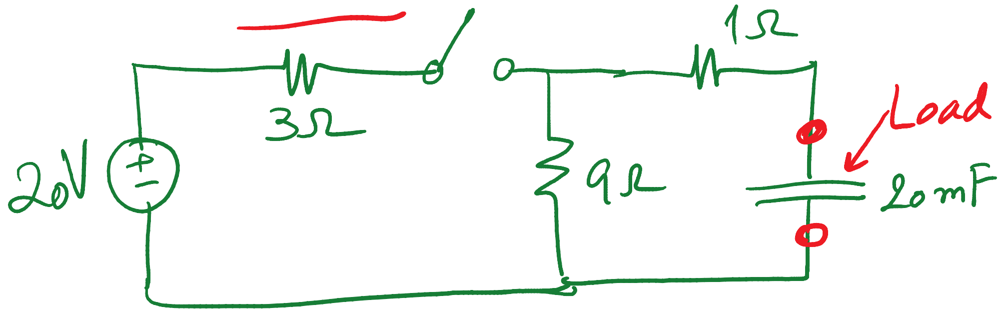
กฎ voltage divider

จากรูป $v = \dfrac{9\Omega \times 20}{3\Omega + 9\Omega} = \dfrac{180}{12} = 15$ V

เนื่องจาก แรงดัน 15 V เกิดขึ้น ณ ที่เวลา $t < 0$

$\therefore V_0 = 15$ V ※

หาค่าของ $\tau = RC$ ที่เวลา $t \doteq 0$



$\therefore R = 9\Omega + 1\Omega = 10\Omega$

$\tau = 10\Omega \times 20\,mF = 0.2\ sec$

$$\therefore \boxed{v(t) = 15e^{-5t}\ V} \ ※$$

หาพลังงานของ C

จาก $w_c(t) = \frac{1}{2} C v(t)^2$

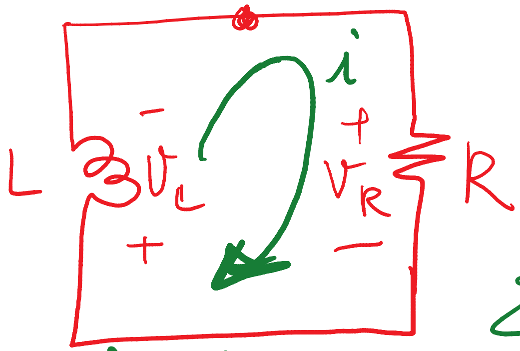
ถ้า $t=0$

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C V_{(0)}^2$$

$$= \frac{1}{2}(20\,mF)(15^2)$$

$$w_c(0) = 2.25\ J \ ※$$

Source-free RL circuit



$\Sigma V = 0$

ใช้ KVL จะได้ว่า

$$v_L + v_R = 0 \quad \text{——} \quad ①$$

จาก $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ แทนใน ①

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0 \quad \text{——} \quad ②$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}t$$

$$\boxed{i(t) = I_o e^{-t R/L}}$$

และ $\tau = \dfrac{L}{R}$

$$\boxed{\therefore\ i(t) = I_o e^{-t/\tau}}$$