柠宝 2024 考研数学辅导讲义（数一二三均适用）

作者：math 也是柠檬精

组织：ElegantLATEX Program

时间：Dec 26, 2022

版本：5.20

ElegantLATEX Program

念念不忘，必有回响

目录

第一部分　高等数学 1

第 1 章　极限、连续与求极限的方法 2

1.1 极限的概念与性质 2
1.1.1 极限的概念 2
1.1.1.1 数列极限 2
1.1.1.2 函数极限 3
1.1.2 极限的性质 4
1.2 数列极限的收敛法则：子列、夹逼定理、单调有界准则与海涅定理 6
1.2.1 补充内容：数列与子列的关系 6
1.2.1.1 子列的概念 6
1.2.1.2 收敛数列属于子列的关系 6
1.2.2 极限的存在准则 6
1.2.2.1 夹逼定理 6
1.2.2.2 单调有界准则 7
1.2.2.3 极限存在的两个充要条件 7
1.2.3 几个重要极限 8
1.2.4 关于 1^∞ 极限的处理 (第一次强调) 8
1.2.5 补充内容：Heine 定理 (函数极限与函数列极限的关系) 8
1.2.6 问到 12 月还有人问的一个习题 8
1.3 极限的四则运算法则、无穷小量与无穷大量 9
1.3.1 极限的四则运算法则 9
1.3.2 无穷小量 9
1.3.3 无穷大量 9
1.3.4 无穷小量的比较（阶）与常见的等价无穷小 10
1.3.5 重点：无穷小相加减到底什么情况可以换？ 10
1.3.6 无穷大量的比较（阶）与常见的等价无穷大 11
1.3.7 无穷小量与无穷大量的关系 11
1.3.8 概念辨析：无穷大与无界变量的区别 11
1.3.9 问到 nm 八十岁还有人问的一个题目（极限的同时性问题） 12
1.3.10 有界和无界变量的四则运算 12
1.4 函数的连续性与间断点 12
1.4.1 函数连续的概念 12
1.4.2 复合函数极限的存在性 13
1.4.3 函数的间断点及其分类 13
1.4.3.1 第一类间断点（左、右极限均存在） 13
1.4.3.2 第二类间断点（左、右极限至少有一个不存在） 13
1.4.3.3 常见的需要讨论的间断点情况 13
1.4.4 闭区间连续函数的性质 14
1.5 求极限的方法（重点）和常考题型 15
1.5.1 补充内容：两个重要极限和无穷小（大）的四则运算 15

1.5.2 两个重要极限 15
1.5.3 无穷小量的四则运算 15
1.5.4 无穷大量的四则运算 15
1.5.5 利用等价无穷小代换 15
1.5.6 分子有理化 (常用于 $\infty - \infty$) 15
1.5.7 利用变量代换（目的是处理成 $x \to 0$ 的形式） 16
1.5.8 利用倒代换处理（目的是构造出分母） 16
1.5.9 关于 1^∞ 极限的处理 16
1.5.10 利用拉格朗日中值定理（或积分中值定理） 16
1.5.11 补充内容：多项式相乘的搜索法（自行补充笔记） 16
1.5.12 利用泰勒展开 16
1.5.12.1 常见的泰勒展开 16
1.5.12.2 泰勒展开阶数的确定（展开到几阶？） 17
1.5.13 利用定积分的定义（重难点） 17
1.5.14 常见题型举例 19

第 2 章 一元函数微分学 20

2.1 导数概念、性质、微分与高阶导数 20
2.1.1 导数的定义 20
2.1.2 微分 21
2.1.2.1 微分的概念 21
2.1.2.2 导数与微分的几何意义 21
2.1.2.3 连续、可导与可微之间的关系 22
2.1.3 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 可导性的关系（选择题常考） 22
2.1.4 含有绝对值函数的可导性 22
2.1.5 常见的求导公式 23
2.1.6 求导法则和常见题型 23
2.1.6.1 导数的四则运算 23
2.1.6.2 复合函数的求导法则 23
2.1.6.3 隐函数求导 23
2.1.6.4 反函数求导 23
2.1.6.5 参数方程求导（仅数一、数二） 24
2.1.6.6 对数求导法 24
2.1.7 高阶导数 24
2.1.7.1 高阶导数的概念和常见的高阶导数 24
2.1.7.2 利用泰勒展开 (级数) 求 $f^{(n)}(0)$ (要求数二也要掌握) 25
2.1.7.3 利用数学归纳法求 $f^{(n)}(x)$ 25
2.1.8 连续可导和可导的区别 (重点) 26
2.1.9 补充内容：导数的性质 26
2.1.9.1 导数无第一类间断点 26
2.1.9.2 导数的介值性：Darboux 定理 26
2.1.10 有关奇偶函数、周期函数的导数结论 26
2.1.11 警钟长鸣：单个点的导数值不能确定邻域的单调性 27
2.1.12 有关判断极值、拐点的一类选择题的秒杀技巧 27
2.2 导数的应用 28

2.2.1 函数的极值和最值 . . . 28
2.2.1.1 极值的概念 . . . 28
2.2.1.2 极值的必要条件 . . . 28
2.2.1.3 极值的充分条件 . . . 28
2.2.1.4 函数的最值 . . . 29
2.2.2 函数的凹凸性与 Jensen 不等式 . . . 29
2.2.2.1 函数凹凸性的两种等价定义 . . . 30
2.2.2.2 补充内容：函数的支撑 . . . 30
2.2.2.3 补充内容：Jensen 不等式 . . . 30
2.2.3 渐近线 . . . 30
2.2.3.1 水平渐近线 . . . 30
2.2.3.2 垂直（铅直）渐近线 . . . 30
2.2.3.3 斜渐近线 . . . 31
2.2.4 弧微分（仅数一、数二） . . . 31
2.2.5 平面曲线的曲率（仅数一、数二） . . . 31
2.3 中值定理证明（一） . . . 32
2.3.1 三大中值定理 (均要求会证明)：罗尔、拉格朗日和柯西中值定理 . . . 32
2.3.1.1 费马引理 . . . 32
2.3.1.2 罗尔定理 . . . 32
2.3.1.3 拉格朗日中值定理 . . . 32
2.3.1.4 柯西中值定理 . . . 33
2.3.2 补充内容：推广的积分中值定理 . . . 33
2.3.3 有关中值定理证明题辅助函数的构造技巧 (无脑版) . . . 33
2.3.3.1 积分因子、注意事项和构造原则 . . . 33
2.3.3.2 几个关键的改写（十星重点） . . . 33
2.3.4 单中值问题 . . . 34
2.3.5 双中值问题 . . . 35
2.3.6 2020 压轴（数一） . . . 35
2.4 中值定理证明（二） . . . 35
2.4.1 万能构造再补充 . . . 35
2.4.2 单个点可导的问题 . . . 36
2.4.3 出现高阶导数的解决办法 . . . 36
2.4.4 题干中出现 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 的情况 . . . 36
2.5 中值定理证明（三） . . . 36
2.5.1 双中值的处理方法 . . . 36
2.5.2 双中值的典型例题 . . . 37
2.6 Taylor 展开的四种形式和证明题 . . . 37
2.6.1 泰勒展开的 Peano 余项和 Lagrange 余项的区别 . . . 37
2.6.2 常见的泰勒展开（级数） . . . 38
2.6.3 泰勒展开的四种形式（Lagrange 余项） . . . 38
2.6.3.1 Taylor 展开的第一种形式（左抽象、右具体） . . . 38
2.6.3.2 Taylor 展开的第二种形式（左具体、右抽象） . . . 38
2.6.3.3 Taylor 展开的第三种形式（左具体、右具体） . . . 39
2.6.3.4 Taylor 展开的第四种形式（左抽象、右抽象） . . . 39
2.6.3.5 处理 Taylor 展开相关证明题的思路 . . . 39

2.6.4 有关 Taylor 展开的典型例题 . . . 39
2.7 洛必达法则的证明、应用和注意事项（待补充） . . . 40
2.7.1 洛必达法则 . . . 40
2.8 函数不等式问题 . . . 41
2.8.1 常见的不等式 . . . 41
2.8.2 利用函数的单调性证明不等式 . . . 42
2.8.3 一类积分题目的放缩技巧 . . . 42
2.8.4 构造变上限积分函数和柯西中值定理来证明简单的积分不等式 . . . 42
2.9 函数零点问题 . . . 42
2.9.1 推广的零点定理 . . . 42
2.9.2 有关中值定理的零点 . . . 43
2.9.3 注意极限的保号性的应用 . . . 43
2.10 数列单调有界大题专题 . . . 43
2.10.1 有关函数的改写 . . . 43
2.10.2 一般大题的流程图 . . . 44
2.10.3 简单例题 . . . 44
2.10.4 “先斩后奏”利用极限的定义 . . . 44
2.10.5 “压缩映像”原理的证明及应用 . . . 44

第 3 章 一元函数积分学 . . . 45
3.1 不定积分的概念和常见积分公式 . . . 45
3.1.1 不定积分的定义 . . . 45
3.1.2 积分与微分的关系——互为逆运算 . . . 45
3.1.3 原函数的存在性 (选择题常考) . . . 45
3.1.4 不定积分的性质 . . . 46
3.1.5 常见的基本积分公式 . . . 46
3.2 三种主要的积分法和常见积分技巧 . . . 47
3.2.1 第一类换元法 (凑微分法) . . . 47
3.2.2 第二类换元法 . . . 47
3.2.3 分部积分法 . . . 47
3.2.4 表格积分法和组合积分法 (听课补充笔记) . . . 48
3.2.5 三角换元 (重点) . . . 48
3.2.6 有关三角有理式的积分 . . . 48
3.2.7 不定积分的重要技巧 (重点) . . . 48
3.2.7.1 技巧一：$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$ . . . 48
3.2.7.2 技巧二：有关三角有理式的积分 (已讲) . . . 48
3.2.7.3 技巧三：对于三角积分没有思路时, 可以考虑同 $\div \cos^2 x$, 目的是凑 $d(\tan x)$ . . . 49
3.2.7.4 技巧四：将分子写成分母的形式 (重点, 与之前讲的 $+A - A$ 相同) . . . 49
3.2.7.5 技巧五：保证“整体性”和“一致性” . . . 49
3.2.7.6 技巧六：没有思路在题干中找条件 (对题干的复杂部分求导) . . . 49
3.2.7.7 技巧七：幂函数的升次 (也是考虑“整体性”和“一致性”) . . . 49
3.2.7.8 技巧八：有理积分中, 分母的次数较高, 优先考虑倒代换 . . . 49
3.3 有理函数的积分和简单无理函数的积分 (待续) . . . 49
3.3.1 补充内容：多项式除法 (听课补充) . . . 49
3.3.2 待定系数法的分解方法 . . . 49

3.3.3 分母是二次函数的一个重点题目 . . . 50
3.3.4 可化为有理函数的简单无理函数的积分 . . . 50
3.3.4.1 万能代换的记忆方法 . . . 50
3.3.4.2 简单无理函数的积分 . . . 51
3.3.5 钓鱼积分 . . . 51
3.3.6 特殊积分技巧 . . . 51
3.4 定积分的概念、性质与可积性 . . . 51
3.4.1 定积分的概念 . . . 51
3.4.2 定积分的性质 . . . 52
3.4.3 积分中值定理 . . . 52
3.4.4 定积分的可积性 . . . 52
3.4.5 定积分可积性的充分条件和必要条件 . . . 54
3.4.6 关于定积分不存在的判别方法 (超纲内容) . . . 54
3.5 积分第一中值定理和积分第二中值定理及其应用 . . . 55
3.5.1 积分第一中值定理 . . . 55
3.5.2 积分第二中值定理 . . . 55
3.6 变上限积分函数及其求导和微积分基本定理 . . . 55
3.6.1 变上限积分函数 . . . 55
3.6.2 变上限积分函数的求导 . . . 56
3.6.3 原函数与变上限积分函数的关系 . . . 56
3.6.4 微积分基本定理 . . . 57
3.7 积分的区间平移、伸缩变换和区间重现公式 . . . 57
3.7.1 平移变换 . . . 57
3.7.2 伸缩变换 . . . 58
3.7.3 定积分的奇偶对称性 . . . 58
3.7.4 定积分的广义对称性 (重点) . . . 58
3.7.5 区间重现公式 . . . 58
3.8 有关周期函数的积分 . . . 59
3.8.1 有关周期函数的重要结论 . . . 59
3.8.2 周期函数的积分均值极限定理 . . . 59
3.8.3 注意有关三角函数加绝对值之后的周期改变 . . . 59
3.9 华里士公式和积分递推式 . . . 60
3.9.1 华里士公式的证明 . . . 60
3.9.2 部分积分递推式的证明 . . . 60
3.10 柯西积分不等式的证明和应用 . . . 60
3.10.1 柯西积分不等式及其证明 . . . 60
3.10.2 典型例题 . . . 60
3.11 积分不等式 (送分绝活) . . . 61
3.11.1 常规操作：构造变上限积分 . . . 61
3.11.2 泰勒展开 + 绝对值不等式 + 两边积分 . . . 61
3.11.3 区间离散化 . . . 62
3.12 定积分的几何应用 . . . 62
3.12.1 平面图形的面积 . . . 62
3.12.2 曲线的弧长 . . . 62
3.12.2.1 直角坐标下的曲线弧长 . . . 62

3.12.2.2 参数方程下的曲线弧长 63
3.12.2.3 极坐标下的曲线弧长 63
3.12.3 旋转体的体积和侧面积 63
3.13 物理应用 (仅数一、数二) 63
3.13.1 柠宝の分析 63
3.13.2 微分方程的物理应用 64
3.13.3 “定积分”的物理应用 64
3.13.3.1 侧压力 64
3.13.3.2 抽水做功 64
3.13.3.3 转动惯量 64
3.13.3.4 求器件质量 65
3.13.3.5 万有引力 65
3.14 有关绝对值、max、min 的积分和摆线问题 65
3.14.1 有关绝对值、max、min 的积分 65
3.14.2 摆线问题 65
3.15 (高阶内容)chebyshev 不等式解决定积分不等式问题 66
3.15.1 chebyshev 不等式及其证明 66
3.15.2 chebyshev 不等式的应用举例 66

第 4 章 反常积分 (广义积分) 67
4.1 反常积分的概念和两个标准函数 67
4.1.1 反常积分的定义 67
4.1.2 两个标准函数 68
4.1.3 反常积分的判别法 68
4.1.4 上下限均为无穷的反常积分和柯西主值 68
4.1.5 重要反例和常见结论 69
4.2 反常积分的判别法 70
4.2.1 比较判别法 70
4.2.2 能算出来就一定收敛——推广的微积分基本定理 71
4.2.3 选择题中的常见结论 71
4.2.4 典型例题与历年真题 72

第 5 章 多元函数微分学 73
5.1 多元函数的概念、极限与连续性 73
5.1.1 多元函数的概念 73
5.1.2 多元函数的极限 73
5.1.3 多元函数的连续性 75
5.1.4 典型例题 75
5.2 多元函数的偏导数与全微分 76
5.2.1 偏导数 76
5.2.1.1 偏导数的概念 76
5.2.1.2 偏导数的意义 76
5.2.2 高阶偏导数 78
5.2.3 全微分 79
5.2.4 有关全微分的经典命题与反例 79

5.2.5 典型例题 . . . 79
5.3 多元函数的微分暨复合抽象函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的偏导数计算公式及其运用 . . . 80
5.3.1 全微分的四则运算法则 . . . 80
5.3.2 多元复合函数的微分法则 . . . 81
5.3.3 一阶全微分形式的不变性 . . . 83
5.3.4 多元函数微分学常见题型总结 (含大题) . . . 83
5.4 复合函数求导法的应用——隐函数微分法 . . . 88
5.4.1 隐函数定理及其注意事项 . . . 88
5.4.2 典型例题 . . . 89
5.5 多元函数的最大值、最小值与极值问题 . . . 91
5.5.1 多元函数的极值 . . . 92
5.5.1.1 极值的定义与相关定理 . . . 92
5.5.1.2 无条件极值 . . . 93
5.5.1.3 条件极值与拉格朗日乘数法 . . . 94
5.5.2 二元函数的最值 . . . 94
5.5.3 典型例题 . . . 95
5.6 (仅数一)多元函数的方向导数、梯度、几何应用与二元函数的泰勒公式 . . . 95
5.6.1 方向导数与梯度 . . . 95
5.6.1.1 梯度 . . . 95
5.6.1.2 方向导数 . . . 96
5.6.2 多元函数微分学在几何中的应用 . . . 98
5.6.2.1 空间曲线的切线与法平面 . . . 98
5.6.2.2 曲面的切平面与法线 . . . 99
5.6.3 二元函数的泰勒公式 . . . 100

第 6 章 常微分方程与差分方程 101
6.1 一阶微分方程 . . . 101
6.1.1 微分方程的相关概念 . . . 101
6.1.2 一阶线性微分方程 . . . 101
6.1.3 变量可分离的微分方程 . . . 102
6.1.4 齐次方程 . . . 102
6.1.4.1 齐次方程的第一种类型——$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ . . . 102
6.1.4.2 齐次方程的第二种类型——$y'=f(ax+by+c)$ 且 $a\cdot b\neq 0$ . . . 102
6.1.4.3 齐次方程的第三种类型——$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ . . . 102
6.2 伯努利方程 (仅数一) . . . 103
6.3 全微分方程 (仅数一) . . . 103
6.4 可降阶的高阶微分方程 (仅数一、二) . . . 104
6.4.1 可降阶的第一种类型——$y^{(n)}=f(x)$ . . . 104
6.4.2 可降阶的第二种类型——不显含 y 的二阶方程 $y''=f(x,y')$ . . . 104
6.4.3 可降阶的第三种类型——不显含 x 的二阶方程 $y''=f(y,y')$ . . . 104
6.5 高阶线性微分方程(上)——基本理论 . . . 104
6.5.1 线性微分方程的有关概念与线性微分算子 . . . 104
6.5.2 齐次线性方程解的结构和性质 . . . 105
6.5.3 非齐次线性方程解的结构 . . . 107
6.6 高阶线性微分方程(下)——具体求解 . . . 108

6.6.1 复值函数与欧拉公式 . . . 108
6.6.2 常系数齐次线性方程 . . . 109
6.6.2.1 特征根是单根的情形 . . . 109
6.6.2.2 特征根是实数单根的情况 . . . 110
6.6.2.3 特征根是复数单根的情况 . . . 110
6.6.2.4 特征根是实数重根的情况 . . . 110
6.6.2.5 特征根是复数重根的情况 . . . 110
6.6.3 常系数齐次线性方程求解总结 . . . 110
6.6.4 线性非齐次常系数方程的待定系数法 . . . 111
6.6.4.1 指数函数 × 多项式 . . . 112
6.6.4.2 多项式 . . . 113
6.6.4.3 指数函数 × 三角函数 . . . 113
6.6.5 典型例题 . . . 114
6.7 欧拉方程 (仅数一) . . . 114
6.8 微分方程的应用 . . . 115
6.8.1 微分方程的几何应用 . . . 115
6.8.2 微分方程的物理应用 (仅数一、数二) . . . 116
6.9 差分方程 (仅数三) . . . 116
6.9.1 差分与差分方程的概念 . . . 116
6.9.2 差分方程的通解与特解 . . . 116
6.9.3 一阶常系数线性差分方程 . . . 116
6.9.4 典型例题 . . . 117

第 7 章 (仅数一) 向量代数与空间解析几何 118
7.1 向量及其运算 . . . 118
7.1.1 向量的方向余弦 . . . 118
7.1.2 向量的外积 (矢积、叉积) 与混合积 . . . 118
7.1.3 向量之间的关系 . . . 119
7.1.4 典型例题 . . . 119
7.2 平面方程与直线方程 . . . 119
7.2.1 自由度 . . . 119
7.2.2 平面方程 . . . 120
7.2.2.1 平面方程的第一种类型——向量式与参数式 . . . 120
7.2.2.2 平面方程的第二种类型——点法式与一般式 . . . 120
7.2.2.3 平面方程的第三种类型——利用线性相关的三点式方程 . . . 121
7.2.2.4 平面方程的第四种类型——截距式方程 . . . 121
7.2.3 直线方程 . . . 121
7.2.3.1 直线方程的第一种类型——一般式 (交面式) . . . 121
7.2.3.2 直线方程的第二种类型——对称式 (标准式) 与参数式 . . . 121
7.2.3.3 直线方程的第三种类型——两点式方程 . . . 121
7.3 平面、直线之间相互关系与距离公式 . . . 122
7.3.1 两个平面之间的关系 . . . 122
7.3.2 两条直线之间的关系 . . . 122
7.3.3 直线与平面之间的关系 . . . 122
7.3.4 平面束方程 . . . 122

7.3.5 距离问题 123
7.3.6 典型例题 123
7.4 旋转曲面与柱面方程，常用二次曲面的方程及其图形 123
7.4.1 球面 123
7.4.2 旋转曲面 123
7.4.3 柱面 124
7.4.4 二次曲面 124
7.5 空间曲线在坐标平面上的投影 124

第 8 章 二重积分及其应用 **125**
8.1 二重积分的概念、性质和对称性 125
8.1.1 二重积分的概念与几何意义 125
8.1.2 二重积分的性质 125
8.1.3 二重积分的对称性 (重点) 126
8.1.3.1 二重积分的奇偶对称性 126
8.1.3.2 二重积分的广义奇偶对称性 127
8.1.3.3 二重积分的轮换对称性 127
8.1.3.4 二重积分关于原点的对称性 127
8.2 二重积分的计算、换序、作图和变上限积分 127
8.2.1 二重积分的计算 127
8.2.1.1 直角坐标下的先 y 后 x 127
8.2.1.2 直角坐标下的先 x 后 y 128
8.2.1.3 极坐标下的二重积分 128
8.2.2 常见曲线作图 (重点) 128
8.2.2.1 上下左右圆 128
8.2.2.2 双纽线、摆线等曲线作图 129
8.2.3 有关摆线的一道积分题目 129
8.2.4 有关概率积分的证明 129
8.2.5 积分交换次序、直角坐标和极坐标的相互转换 129
8.2.5.1 直角坐标交换积分次序 129
8.2.5.2 极坐标交换积分次序 130
8.2.5.3 直角坐标和极坐标的相互转化 (选择题常考) 130
8.2.6 有关二重积分边上积分求导问题 130
8.2.7 有关 min、max、绝对值的积分 130
8.3 二重积分的变量代换 (雅克比) 130
8.3.1 雅克比行列式 130
8.3.1.1 雅克比行列式的定理和使用 130
8.3.1.2 极坐标变换下的雅克比推导 131
8.3.1.3 广义极坐标变换下的雅克比的应用 131
8.3.1.4 在二重积分中利用一元函数的变量替换 131
8.3.2 有关二重积分的中值定理的两个例题 131
8.4 (仅数一、二) 二重积分的几何、物理应用 132
8.4.1 曲面的表面积 (仅数一，本部分内容与曲面积分高度相关) 132
8.4.2 质量 132
8.4.3 质心 132

8.4.4 形心 . . . 133
8.4.5 (仅数一) 转动惯量 . . . 133
8.4.6 侧压力 . . . 133

第 9 章 (仅数一) 三重积分及其应用 134

9.1 三重积分的概念与性质 . . . 134
9.1.1 三重积分的概念 . . . 134
9.1.2 三重积分的性质 . . . 134
9.2 先一后二法与先二后一法 . . . 135
9.2.1 先一后二法 . . . 135
9.2.2 先二后一法 . . . 135
9.2.3 十星重点：如何在不画图的情况下计算 2019 年的一道真题 . . . 136
9.3 奇偶对称、广义奇偶对称和轮换对称 . . . 136
9.3.1 三重积分的奇偶对称性 . . . 136
9.3.2 三重积分的广义奇偶对称性 . . . 136
9.3.3 三重积分的轮换对称性 . . . 136
9.4 (广义) 柱面变换与 (广义) 球面变换 . . . 137
9.4.1 柱面变换 . . . 137
9.4.2 球面变换 . . . 138
9.4.3 旋转抛物面与圆锥面的记忆和画法以及三重积分的定限 . . . 138
9.5 直角坐标系下的积分交换次序 . . . 139

第 10 章 (仅数一) 曲线曲面积分 140

10.1 第一类曲线积分 . . . 140
10.1.1 第一类曲线积分的概念 . . . 140
10.1.2 第一类曲线积分的计算 . . . 140
10.1.3 第一类曲线积分的对称性 . . . 141
10.1.4 典型例题 . . . 141
10.2 第二类曲线积分 . . . 142
10.2.1 标量场与向量场、有向曲线 . . . 142
10.2.1.1 场的概念和分类 . . . 142
10.2.1.2 有向曲线 . . . 142
10.2.2 第二类曲线积分的概念 . . . 142
10.2.3 第二类曲线积分的计算 . . . 143
10.2.4 第二类曲线积分的对称性 (十星重点) . . . 143
10.2.5 两类曲线积分之间的关系 (重点) . . . 143
10.3 Green 公式 . . . 144
10.3.1 平面上的连通区域与正向边界 . . . 144
10.3.2 Green 公式及其证明 . . . 144
10.3.3 Green 公式的简单应用 . . . 144
10.3.4 (重点) 补线用 Green 公式 . . . 144
10.3.5 挖洞补线：一个极为重要的例子 . . . 145
10.3.6 第二类曲线积分与路径无关的判定与求解 . . . 145
10.3.6.1 第二类曲线积分与路径无关的判定 . . . 145
10.3.6.2 求解法之改变路径积分 . . . 145

10.3.6.3 求解法之利用原函数 . . . 146
10.4 第一类曲面积分 . . . 146
10.4.1 光滑和分片光滑曲面的概念 . . . 146
10.4.2 第一类曲面积分的概念与性质 . . . 146
10.4.3 第一类曲面积分的计算 . . . 147
10.4.4 第一类曲面积分的对称性 . . . 147
10.4.5 典型例题 . . . 147
10.5 第二类曲面积分 . . . 147
10.5.1 曲面的侧 . . . 147
10.5.2 第二类曲面积分的物理意义 . . . 148
10.5.3 第二类曲面积分的概念与性质 . . . 148
10.5.4 第二类曲面积分的计算 . . . 149
10.5.5 第二类曲面积分的对称性 . . . 149
10.5.6 两类曲面积分之间的关系 . . . 149
10.5.7 (十星重点) 转换投影法及其推导 . . . 150
10.5.8 典型例题 . . . 150
10.6 Gauss 公式 . . . 150
10.6.1 Guess 公式和注意事项 . . . 150
10.6.2 Guess 公式的简单例题 . . . 151
10.6.3 挖洞补面：一个极为重要的例子 . . . 151
10.7 Stokes 公式 . . . 152
10.7.1 Stokes 公式和注意事项 . . . 152
10.7.2 典型例题 . . . 152
10.8 场论初步 . . . 153
10.8.1 向量场的通量与散度 . . . 153
10.8.2 向量场的环流量与旋度 . . . 153
10.8.3 典型例题 . . . 154

第 11 章 绝活级数（数一） 155

11.1 常数项级数及其选择题秒杀 . . . 155
11.1.1 常数项级数的概念 . . . 155
11.1.2 数项级数的基本性质 . . . 156
11.1.3 两个重要的级数（p 级数与 q 级数） . . . 156
11.1.4 正项级数的的概念和收敛的充要条件 . . . 157
11.1.5 正项级数的判别法之比较判别法 . . . 157
11.1.6 正项级数的判别法之比较判别法的极限形式 . . . 157
11.1.7 正项级数的判别法之比值判别法 . . . 158
11.1.8 正项级数的判别法之根值判别法 . . . 158
11.1.9 正项级数的判别法之确定 u_n 的阶数（可用泰勒展开） . . . 158
11.1.10 交错级数的定义和判别法 . . . 159
11.1.11 级数学习的核心思想 . . . 159
11.1.12 绝对收敛与条件收敛 . . . 159
11.1.13 级数收敛性的 $\pm\times$（重点） . . . 160
11.1.14 绝对收敛与条件收件级数的 $\pm\times$（重点） . . . 160
11.1.15 选择题的秒杀技巧 . . . 160

11.2 幂级数的收敛判别法和展开 . . . 163
11.2.1 收敛点与收敛域的概念 . . . 163
11.2.2 幂级数的定义 . . . 163
11.2.3 函数项级数的重要理解 . . . 163
11.2.4 幂级数的收敛之阿贝尔定理 . . . 163
11.2.5 幂级数的收敛之收敛半径和收敛域的求法 . . . 164
11.2.6 关于非标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法 . . . 164
11.2.7 两个幂级数四则运算的收敛半径 . . . 164
11.2.8 幂级数的分析性质（连续、求导、积分） . . . 165
11.2.9 函数的幂级数展开 . . . 165
11.2.10 常见函数的泰勒级数展开 . . . 166
11.2.11 典型例题——求收敛域 . . . 167
11.2.12 典型例题——求幂级数展开 . . . 167
11.3 幂级数的求和（送分绝活） . . . 169
11.3.1 先看出答案和哪一个函数有关的方法（核心技巧） . . . 169
11.3.2 幂级数的和函数的求法及秒杀技巧（特别注意下标的变化） . . . 170
11.3.3 补充内容：幂级数的下标变化 . . . 170
11.3.4 和函数第一式——n 在分母上 . . . 170
11.3.5 和函数第二式——n 在分子上 . . . 171
11.3.6 和函数第三式——构造微分方程 . . . 173
11.4 $Fourier$ 级数 . . . 174
11.4.1 三角函数的正交性 . . . 174
11.4.2 $Fourier$ 系数与 $Fourier$ 级数 . . . 174
11.4.3 $Fourier$ 级数的收敛性——Dirichlet 收敛定理（充分条件） . . . 175
11.4.4 偶延拓与奇延拓 . . . 175
11.4.5 典型例题 . . . 176

第二部分 降维打击学线代 **177**

第 1 章 行列式 **179**
1.1 行列式的概念、性质、展开式、计算、范德蒙德行列式与克拉默法则 . . . 179
1.1.1 逆序、行列式与余子式的概念 . . . 179
1.1.1.1 逆序、逆序数与对换的概念 . . . 179
1.1.1.2 行列式的概念 . . . 179
1.1.1.3 余子式和代数余子式 . . . 180
1.1.2 行列式的几何意义 . . . 180
1.1.3 几个特殊的高阶行列式 . . . 180
1.1.3.1 范德蒙德行列式 . . . 181
1.1.4 分块行列式 . . . 181
1.1.5 行列式的性质 . . . 181
1.1.6 克拉默法则 . . . 182
1.1.7 典型例题 . . . 182
1.1.8 利用加边法解决缺行范德蒙德行列式 . . . 183

第 2 章 向量 (线性) 空间 184

2.1 方程组的行图像与列图像、线性空间、线性表示、生成子空间与高维空间下方程组的解的解释 . . 184

2.1.1 方程组的行图像与列图像 184

2.1.2 补充内容：线性空间的定义 184

2.1.3 子空间、线性表示与生成子空间 185

2.1.3.1 子空间 185

2.1.3.2 线性组合 186

2.1.3.3 生成子空间 186

2.1.4 高维空间下的方程组的解的解释 186

2.1.4.1 方程租的矩阵形式与向量形式 186

2.1.4.2 高维空间下的方程组解的解释 187

2.2 废物理论：对线性相关与线性无关的理解 188

2.2.1 用废物理论来理解向量组的线性相关性 188

2.2.2 有关线性相关性的典型例题 190

2.2.3 向量组的线性相关性对方程组的刻画 190

2.3 极大线性无关组与向量组的秩 191

2.3.1 极大线性无关组 191

2.3.2 秩 192

2.3.3 求向量组的秩和极大线性无关组的方法 193

2.3.4 典型例题 193

2.4 向量空间、基、维数与过渡矩阵 (仅数一) 195

2.4.1 基、向量与向量的坐标 195

2.4.2 过渡矩阵、坐标表变换公式 195

2.4.3 规范正交基 196

2.4.4 典型例题 196

第 3 章 线性方程组 197

3.1 方程组的判定定理以及解的结构 197

3.1.1 算子的概念 197

3.1.2 线性方程组有解的判定 197

3.1.3 线性方程组解的结构 198

3.1.3.1 齐次线性方程组解的结构、基础解系和解空间 198

3.1.3.2 非齐次方程组解的结构 200

3.1.4 一个重要结论 201

3.1.5 典型题目 202

3.2 方程组的同解、公共解问题和已知基础解系求系数矩阵问题 203

3.2.1 方程组的公共解问题 203

3.2.2 方程组的同解问题 204

3.2.3 已知基础解系求系数矩阵 (或构造方程) 问题 205

3.3 方程组有关的证明题 205

3.4 (仅数一) 矩阵、向量与直线方程、平面方程之间的关系 205

第 4 章 矩阵 207

4.1 矩阵的运算 207

4.1.1 矩阵的概念与运算 207

4.1.1.1 矩阵的概念 . . . 207
4.1.1.2 常见的几种特殊矩阵 . . . 207
4.1.1.3 矩阵的三种关系 . . . 208
4.1.2 矩阵的运算 . . . 208
4.1.3 矩阵乘法的四大审视角度 . . . 209
4.1.3.1 The First Way: Dot Product . . . 209
4.1.3.2 The Second and Third Ways: Rows and Columns . . . 209
4.1.3.3 The Fourth Way: Columns Multiply Rows . . . 209
4.1.4 典型例题 . . . 210
4.2 分块矩阵、初等变换、初等矩阵、逆矩阵 . . . 211
4.2.1 分块矩阵 . . . 211
4.2.2 可逆矩阵 . . . 211
4.2.2.1 可逆矩阵的概念和性质 . . . 211
4.2.2.2 初等变换与初等矩阵 . . . 212
4.2.2.3 利用初等变换求矩阵的逆矩阵 . . . 213
4.2.2.4 分块矩阵的逆矩阵 . . . 215
4.3 伴随矩阵与矩阵的秩 . . . 215
4.3.1 伴随矩阵 . . . 215
4.3.2 矩阵的秩 . . . 216
4.3.3 典型题目 . . . 216
4.4 矩阵的广义初等变换、矩阵习题课 . . . 217
4.4.1 矩阵的广义初等变换 . . . 217
4.4.2 重要题型以及解题方法和技巧 . . . 217
4.4.2.1 证明矩阵的可逆性、求逆矩阵 . . . 217
4.4.2.2 伴随矩阵有关问题 . . . 218
4.4.2.3 计算 n 阶矩阵的高次幂 . . . 218
4.4.2.4 矩阵、分块矩阵的秩相关题目 . . . 218
4.4.2.5 矩阵方程 . . . 220

第 5 章 特征值与特征向量 221
5.1 线性变换、线性变换的矩阵与应用 . . . 221
5.1.1 基、向量、坐标 . . . 221
5.1.2 线性变换和线性变换的矩阵 . . . 221
5.1.3 线性变换的运算 . . . 223
5.2 特征值、特征向量与特征子空间 . . . 223
5.2.1 特征值、特征向量与特征子空间的概念 . . . 223
5.2.2 特征值与特征向量的求解 . . . 224
5.2.3 特征值与特征向量的性质 . . . 225
5.2.4 代数重数与几何重数的关系 . . . 226
5.2.5 重点：$r(A) = 1$ 矩阵的特征值 . . . 227
5.3 相似矩阵、矩阵的相似对角化 . . . 228
5.3.1 相似矩阵的推导、定义和性质 . . . 228
5.3.2 矩阵的相似对角化 . . . 229
5.4 矩阵相似的习题课 . . . 230
5.4.1 对角化实现的步骤 . . . 230

5.4.2 对于“各行元素之和为 c”条件的处理 . . . 231
5.4.3 求可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$ 但 A, B 均为非对角阵 . . . 231
5.4.4 典型题目 . . . 231
5.5 内积、施密特正交化、正交矩阵、实对称矩阵的相似对角化 . . . 233
5.5.1 内积与正交矩阵 . . . 233
5.5.2 施密特正交化 . . . 234
5.5.3 实对称矩阵的相似对角化 . . . 234
5.5.4 典型例题 . . . 234

第 6 章 二次型 **236**
6.1 二次型的概念及其矩阵表示 . . . 236
6.1.1 二次型及二次型矩阵的定义 . . . 236
6.1.2 二次型的几何意义 . . . 236
6.1.3 有关二次型的几个概念 . . . 239
6.2 化二次型为标准形、规范形、矩阵的合同 . . . 240
6.2.1 二次型的标准化——配方法 . . . 240
6.2.2 二次型的标准化——正交变换法 . . . 242
6.2.3 矩阵的合同 . . . 243
6.2.4 典型题目 . . . 244
6.3 正定二次型、正定矩阵 . . . 244
6.3.1 正定二次型和正定矩阵的概念和性质 . . . 244
6.3.2 典型例题 . . . 245

第三部分 概率论与数理统计 **246**

第 1 章 随机事件与概率 **247**
1.1 随机事件及其运算 . . . 247
1.1.1 随机现象与随机试验 . . . 247
1.1.2 样本空间 . . . 247
1.1.3 随机事件 . . . 248
1.1.4 随机变量 . . . 248
1.1.5 事件间的关系 . . . 249
1.1.5.1 包含关系 . . . 249
1.1.5.2 相等关系 . . . 249
1.1.5.3 互不相容 . . . 250
1.1.6 事件运算 . . . 250
1.1.6.1 事件 A 与 B 的并 . . . 250
1.1.6.2 事件 A 与 B 的交 . . . 251
1.1.6.3 事件 A 对 B 的差 . . . 251
1.1.6.4 对立事件 . . . 252
1.1.6.5 事件的运算性质 . . . 252
1.1.7 典型例题 . . . 253
1.2 概率、条件概率、事件独立性和五大公式 . . . 253
1.2.1 概率的定义 . . . 253
1.2.2 扫盲部分：排列与组合公式 . . . 253

1.2.3 条件概率 254
1.2.4 事件的独立性 255
1.2.5 概率的基本性质 255
1.2.6 概率的五大公式（十星重点） 255
1.2.7 事件的独立性 256
1.2.8 典型例题 257
1.3 古典概型、几何概型、伯努利试验 258
1.3.1 古典概型 258
1.3.2 几何概型 258
1.3.3 伯努利试验 258
1.3.4 本章典型例题 258

第 2 章 随机变量及其分布 **260**
2.1 随机变量及其分布函数 260
2.1.1 随机变量与分布函数的概念 260
2.1.2 分布函数的性质 261
2.1.3 分布函数的相关公式 261
2.2 离散型随机变量与连续型随机变量 262
2.2.0.1 离散型随机变量的概念及其概率分布 262
2.2.0.2 离散型随机变量的概率分布的性质（充要条件） 263
2.2.0.3 连续型随机变量及其概率密度 263
2.2.1 连续型随机变量概率密度的性质 263
2.2.2 典型题目 264
2.2.3 既非离散又非连续的分布的处理方法（十星重点） 266
2.3 常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布 266
2.3.1 常见的离散型随机变量及其概率分布 266
2.3.1.1 二项分布与两点分布 266
2.3.1.2 泊松分布 267
2.3.1.3 几何分布 268
2.3.1.4 超几何分布 268
2.3.1.5 超纲内容：负二项分布 269
2.3.2 常见的连续型随机变量及其概率分布 269
2.3.2.1 均匀分布 269
2.3.2.2 指数分布 270
2.3.2.3 一般正态分布 270
2.3.2.4 标准正态分布 271
2.4 常见分布的习题课 272
2.5 随机变量函数的分布 272

第 3 章 多维随机变量及其分布 **273**
3.1 多维随机变量及其联合分布 273
3.1.1 多维随机变量 273
3.1.2 联合分布函数 273
3.1.3 联合分布列 274
3.1.4 联合概率密度 274

3.1.5 二维均匀分布和二维正态分布 275
3.2 边缘分布与随机变量的独立性 277
3.2.1 边缘分布函数与边缘概率密度 277
3.3 多维随机变量函数的分布 278
3.4 多维随机变量的数字特征 278
3.5 条件分布 278
3.6 历年概率大题套路汇总（有手就行） 278

第 4 章 随机变量的数字特征 279

第 5 章 大数定律和中心极限定理 280

第 6 章 数理统计的基本概念 281

第 7 章 参数估计 282

第 8 章 假设检验 (仅数一) 283

第一部分

高等数学

第 1 章 极限、连续与求极限的方法

内容提要

- 第一节　极限的概念与性质
- 第二节　数列极限的收敛法则：子列、夹逼定理、单调有界准则与海涅定理
- 第三节　极限的四则运算法则、无穷小量与无穷大量
- 第四节　函数的连续性和间断点
- 第五节　求极限的方法（重点）和常考题型

1.1 极限的概念与性质

本章作为高等数学的开篇之章，重要程度这里有必要再次强调，很多同学学到后面甚至是末期，连极限的保号性都不会用，请务必引起重视。

本章内容会深入挖掘定义和性质，要求能熟练掌握各种极限的数学定义，且能对极限的性质能够用 $\varepsilon-N$ 或者 $\varepsilon-\delta$ 语言证明

不要觉得无聊和证明无所谓。

不要觉得无聊和证明无所谓。

不要觉得无聊和证明无所谓。

不听劝后果自负

1.1.1 极限的概念

1.1.1.1 数列极限

定义 1.1 (数列极限的定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

也可以简记为 $a_n\to a(n\to\infty)$. 我们也说数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 称极限存在的数列为“收敛数列”；不收敛的数列称为“发散数列”

有一些大部分书上没有写（默认大家知道），但是会造成困扰的东西，这里有必要作一些说明：

- $n\to\infty$ 特指 $n\to+\infty$, 没有 $n\to-\infty$ 或者 $n\to$ 某个具体的正整数
- a_1,a_2 等都是具体的数字, 即不会出现 $a_i=\pm10$ 或 $a_i=\infty$
- $\{a_n\}$ 有无穷多项, 有限项的数列没有讨论的意义

笔记 有关此定义的理解

1. 目标：为了说明 a_n 和 A 无限接近

2. 将 ε 理解为 a_n 和 A 之间的“误差”, 即两者距离的一个上限

3. 在“误差 ε”的标准下, 将 a_n 和 A 视为同一个数字

4.N 的作用是“限制”自变量 n 的范围

结论

1.ε 既是任意的，又是给定的

2. 定义中的 N 是不依赖于 a_n 而只依赖于 ε 的函数, 不一定非得是 ε, 可以是 $2\varepsilon, \varepsilon^2$ 等, 甚至将定义中的 $|a_n - A| < \varepsilon$ 改成 $|a_n - A| \leq \varepsilon$ 都可以

3. 进一步, $N_{\min}$ 是 ε 的函数而 N 不是 ε 的函数 (不满足一对一)

4. 只需要满足 $N \geq N_{\min}$ 即可

5. 用定义证明极限的过程就是求出一个满足条件的 N

例题 1.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

例题 1.2 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

例题 1.3 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(|q| < 1)$

例题 1.4 (1999) "对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正整数 N, 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 (　　)

A. 充分条件但非必要条件

B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非必要也非充分条件

例题 1.5 (* 难度较大) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$$

1.1.1.2 函数极限

柠宝提醒: 要认真体会数列极限和函数极限在定义上的相同点和不同点整个函数极限分为四种情况

定义 1.2 (第一种函数极限)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.3 (第二种函数极限)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.4 (第三种函数极限)

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall |x| > X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.5 (第四种函数极限)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

笔记 在上述的集合函数定义当中, 不管是 X 还是 δ 的作用, 都有与数列极限中 N 的作用相同, 都是为了限制自变量 x(数列极限中是 n) 的变化范围

这里涉及到函数极限中的一个关键问题:

为什么在 "第四种函数极限" 中, 不等式为

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

而不是

$$0 \le |x - x_0| < \delta$$

答：在函数极限原本的定义中，我们只关注这个点“附近”的值，而不关心这个点本身是什么，若允许等号的成立，其实就是连续的定义。注意到这种定义中的 δ 的作用，和数列极限中的 N 、函数极限中 X 相同，都是为了限制自变量的范围，不同于之前定义中的自变量 $\to \infty$，这里的是 $\to x_0$

结论 函数极限的存在情况（是否存在），包括即使存在所对应的极限值，与函数在这一点有无定义，或者即使有定义其值为多少，没有关系！没有关系！没有关系！

有了上面的四种函数极限的定义，这里再补充一下单侧极限的定义

定义 1.6 (左极限 $f(x_0 - 0) = A$)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.7 (右极限 $f(x_0 + 0) = A$)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

1.1.2 极限的性质

下面三个性质均要求能熟练证明，并且要体会“反证法”在证明题中的运用

定理 1.1 (极限的唯一性)

设 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ 存在，则极限值唯一

♡

证明

定理 1.2 (数列极限的保号性 (保序性))

设 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = B$

1. 若 $A > B$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$a_n > b_n$
2. 若 $\exists N >$，当 $n > N$ 时，$a_n \ge b_n$，则 $A \ge B$
3. 若 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$a_n > b_n$，则 $A \ge B$

♡

证明

例题 1.6 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

A.$|a_n| > \frac{|a|}{2}$

B.$|a_n| < \frac{|a|}{2}$

C.$a_n > a - \frac{1}{n}$

D.$a_n < a + \frac{1}{n}$

定理 1.3 (函数极限的保号性（保序性）)

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B$

1. 若 $A > B$, 则 $\exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, f(x) > g(x)$
2. 若 $\exists > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, f(x) > g(x)$, 则 $A \geq B$
3. 若 $\exists > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$

证明

定理 1.4 (数列极限的有界性与函数极限的局部有界性)

1. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则数列 $\{a_n\}$ 有界 (逆命题不真)
2. 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\exists > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta$ 即内有界（逆命题不真）

证明

1.2 数列极限的收敛法则：子列、夹逼定理、单调有界准则与海涅定理

1.2.1 补充内容：数列与子列的关系

1.2.1.1 子列的概念

定义 1.8 (子列的概念)

对于数列 $\{a_n\}$ 来说，按照下标递增的顺序选取某些项构成的新数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的子列

例如，可以选取奇数项来构成一个子列 $\{a_1, a_3, a_5 \ldots\}$

笔记 子列是数列的"子集"，也必须是有无穷多项，且必须满足下标严格递增

1.2.1.2 收敛数列属于子列的关系

定理 1.5 (收敛数列与子列的关系)

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 任意子列均收敛且收敛到同一个数

笔记 柠宝：对于数学当中的"任何"字样，实际上我们不可能穷举到所有的子列，即不可能完成"任何"这一工作，所以对于这类带有"任意、任何"字样的定理，通常的办法是考虑他们的"逆否命题"

结论 [上述定理的逆否命题] 要证明 $\{a_n\}$ 发散：存在某个子列不收敛 or 有两个不同子列收敛到不同的数

例题 1.7 证明 $\{\sin \frac{n\pi}{2}\}$ 发散

例题 1.8 （2015，数三）设 $\{a_n\}$ 是数列，下列命题不正确的是 (　　)

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} = a$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} = a$ 则, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

1.2.2 极限的存在准则

1.2.2.1 夹逼定理

夹逼定理是极限存在准则之一，所以自然的有数列版本和函数版本两种，先来看数列版本

定理 1.6 (夹逼定理的数列版本)

若 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $x_n \le y_n \le z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A$$

笔记

- 夹逼定理中，两侧的极限必须同时存在且相等
- $x_n \le y_n \le z_n$ 中的不等号可以换成 $<$，只要保证大小的相对位置不变即可
- 条件中的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ 不能用 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - z_n) = 0$ 代替

作为补充，这里直接给出夹逼定理的函数版本

定理 1.7 (夹逼定理的函数版本)

设在 x_0 的某去心邻域内满足 $\varphi(x) \le f(x) \le \phi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

例题 1.9 设对任意的 x, 总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（　　）

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

在利用夹逼定理求极限的时候，通常的放缩技巧就是“大于最小值小于最大值”

例题 1.10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)$

例题 1.11（可以直接累加的式子）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

笔记 若类似于上述无限求和的形式用夹逼定理失效，考虑定积分的定义（放在后面讲，此处跳过）

来看一个重要结论：（要求会证明）当 $a_i>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n\ldots+a_k^n}=\max\{a_i\}$, 其中 k 和 n 无必然联系

例题 1.12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$

例题 1.13 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}, (x\ge 0)$

1.2.2.2 单调有界准则

单调有界准则一般以数列的极限来呈现，可以出大题（压轴），这里需要证明两个方面：单调性和有界性

数列的单调性：如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$$

称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的（可以严格单增也可以不严格单增），同理可以定义单调减少的数列

单调增加和单调减少的数列统称为单调数列

定理 1.8 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限（这里不作证明，详细的证明可以参阅《数学分析》相关教材）

说明：市面上各大考研辅导书对应的习题，在第一章会有“单调有界准则”大题，我们这里不会讲，等第二章中期的时候我们在专门花一节时间来讲（因为要用到导数的相关知识），如果碰见相关题目可以先跳过

1.2.2.3 极限存在的两个充要条件

定理 1.9 (函数极限存在的充要条件)

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件为：左右极限同时存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0+} f(x)$$

定理 1.10 (数列极限存在的充要条件)

数列 $\lim_{n\to\infty} a_n=A$ 的充要条件为：$\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项均同时收敛到同一数, 即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A\leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n}=A=\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

笔记

1. 对于函数极限的“单侧极限”，当然就没有“左右极限”这一说了，上述命题只针对普通的可以存在左右极限的情况

2. 对于 $x\to\infty$ 的函数极限，需要同时满足 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 且收敛到同一极限，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

1.2.3 几个重要极限

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ 或 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$
- $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1, \text{当} n=1 \text{ 时}, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$
- $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, n=m\\ 0, n<m\\ \infty, n>m\end{cases}$$

1.2.4 关于 1^∞ 极限的处理 (第一次强调)

形如 $(1+\alpha)^\beta$, 其中 $\alpha\to 0,\beta\to\infty$ 采用“三步走”

1. 找出 α,β（没有就 $+1-1$）
2. 计算 $\lim\alpha\beta=A$
3. 原极限 $=e^A$

1.2.5 补充内容：Heine 定理 (函数极限与函数列极限的关系)

定理 1.11 (Heine 海涅定理)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U_0(x_0,)$ 有定义, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于 $U(x_0,\delta)$ 内任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

例题 1.14 证明 $x\to 0$ 时函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的极限不存在

1.2.6 问到 12 月还有人问的一个习题

例题 1.15 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$

1.3 极限的四则运算法则、无穷小量与无穷大量

1.3.1 极限的四则运算法则

定理 1.12 (极限的四则运算)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \times y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \times \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \times B$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$

笔记

1. 在求极限的过程中, 乘积中的非零因子可以直接提出来
2. 上面的四则运算法则中，使用的前提是极限本身存在，如果不知道极限是否存在，不能用

例题 1.16 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+5)(\cos x - 1)}{e^x x^2 \cos x}$

下面将选择题（概念题）中常考的极限的存在性命题总结如下，要求记忆并且掌握反例的构造方法

1. 存在 $\pm$ 存在 $=$
2. 存在 $\pm$ 不存在 $=$
3. 不存在 $\pm$ 不存在 $=$
4. 存在 $\times$ 存在 $=$
5. 存在 $\times$ 不存在 $=$
6. 不存在 $\times$ 不存在 $=$
7. 存在 $\div$ 存在 $=$
8. 不存在 $\div$ 不存在 $=$
9. 不存在 $\div$ 存在 $=$
10. 存在 $\div$ 不存在 $=$

1.3.2 无穷小量

首先需要说明的是，这里的“无穷小”指的是与“0”的距离非常靠近，且在极限状态下为 0

下面给出函数中无穷小量的严格定义

定义 1.9

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall |x| > X$, 总有

$$|f(x)| < \varepsilon$$

笔记 上述定义只是函数极限中 $x \to \infty$ 的情况，请自行补充函数极限的其他几种情况和数列极限的情况

1.3.3 无穷大量

无穷小指的是“可以任意的小”，无穷大指的是“可以任意的大”

定义 1.10

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \leftrightarrow \forall G > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 总有

$$|f(x)| > G$$

同样的，请自行补充函数极限的其他几种情况的无穷大量和数列的无穷大量的定义

1.3.4 无穷小量的比较（阶）与常见的等价无穷小

设在同一趋近方式中，$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$, 且 $\beta(x)\neq 0$，有如下结论

(1) 高阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$

(2) 低阶：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$

(3) 同阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$, 记为 $\alpha(x)\sim C\beta(x)$

(4) 等价: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

(5) 无穷小的阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小

笔记 $a_n=0$ 也是无穷小，且并非所有的无穷小都有阶数

当 $x\to 0$ 时，有下列等价无穷小（需要全部记忆，类似于九九乘法表）

- $\sin x\sim x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, 特别的当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时候, $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$
- $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
- $a^x-1\sim x\ln a$
- $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$
- $\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3,x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$
- $x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$ (常用在幂指函数求极限中)
- $x^3+2x^2\sim 2x^2$
- $|x|+x^3\sim|x|$

1.3.5 重点：无穷小相加减到底什么情况可以换？

对于一般的乘除关系，我们知道无穷小可以直接代换，对于无穷小的加减运算，有如下命题

定理 1.13 (等价无穷小的代换原则)

乘除关系可以直接换，即

(1) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

加减关系在一定条件下可以换，请做好笔记

(2) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 1$, 则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$

(3) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq -1$, 则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

笔记

1. 学到后面我们知道此处的等价无穷小实际上是泰勒展开取的低阶部分，如果不会丢失精度，那么可以直接换，如果有精度损失，那就不能换

2. 此处有关极限的求解的最重要的技巧就是“强行凑成已知的等价无穷小”，没有就 $+A-A$。例如我们可以对 $\tan x-\sin x$ 处理成 $\tan x-x+x-\sin x$

例题 1.17 试确定 $\tan x-\sin x,\sin x-\arctan x$ 的等价无穷小

例题 1.18 (2015，数一) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

例题 1.19 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$

例题 1.20 (2016，数三) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ____

例题 1.21 (2000，数二) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+xf(x)}{x^2}=$ ____

例题 1.22 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$, 则 $a=$ ____ ,$b=$ ____

例题 1.23 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

1.3.6 无穷大量的比较（阶）与常见的等价无穷大

设在同一趋近方式中, $\lim\alpha(x)=\infty,\lim\beta(x)=\infty$，有如下结论

(1) 高阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$

(2) 低阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$

(3) 同阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$, 记为 $\alpha(x)\sim C\beta(x)$

(4) 等价：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

(5) 无穷大的阶: $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷大

笔记 与无穷小类似，并非所有的无穷小都有阶数，如 e^x

下面介绍常见无穷大的关系

对于多项式的等价无穷大，看高阶（注意符号），例如

$$x^3+2x^2\sim x^3$$

几个常见无穷大量的比较

当 $n\to\infty$ 时, 有下列关系

$$n^n\gg n!\gg a^n\gg e^n\gg n^k\gg\ln^\alpha n\gg\ln n^\beta, \text{其中} a>e,k>0,\alpha>1$$

例题 1.24 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left(1+t^2\right)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}+x^2}$

例题 1.25 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+x^{100}}{2e^x+\ln^{10}x}$

例题 1.26 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left(1+t^2\right)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}+x^2}$

例题 1.27 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

例题 1.28（注意替换后的符号）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

1.3.7 无穷小量与无穷大量的关系

在同一极限的趋近过程中，若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之, 若 $f(x)$ 是无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大 (当 $f(x)\neq 0$)

反例：当 $f(x)\equiv 0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 没有意义

判断正误：任意无穷小量的倒数为无穷大量（×）

1.3.8 概念辨析：无穷大与无界变量的区别

例题 1.29 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在

例题 1.30 当 $x\to 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ 是（　　）

A. 无穷小

B. 无穷大

C. 有界，但不是无穷小

D. 无界，但不是无穷大

1.3.9 问到 nm 八十岁还有人问的一个题目（极限的同时性问题）

例题 1.31 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$

1.3.10 有界和无界变量的四则运算

下面总结选择题的概念题中常考的有关有界变量和无界变量的运算结论

1. 有界 $\pm$ 有界 $=$
2. 有界 $\times$ 有界 $=$
3. 有界 $\div$ 有界 $=$
4. 有界 $\pm$ 无界 $=$
5. 有界 $\times$ 无界 $=$
6. 有界 $\div$ 无界 $=$
7. 无界 $\pm$ 无界 $=$
8. 无界 $\times$ 无界 $=$
9. 无界 $\div$ 无界 $=$

来看一下有关上述结论的相关例题

例题 1.32 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则下列命题正确的是（　　）

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

B. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

例题 1.33 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, 则必有（　　）

A.$a_n<b_n$ 对任意的 n 成立

B.$b_n<c_n$ 对任意的 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在

D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

1.4 函数的连续性与间断点

1.4.1 函数连续的概念

定义 1.11 (函数连续性概念)

设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. 我们称函数 f 在点 $x_0\in(a,b)$ 连续, 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

用极限的语言来描述就是：对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个适当的 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

♣

笔记 1. 注意到此处是“邻域”而不是“去心邻域”

2. 由这一定义可以看出, 若函数 f 在 x_0 处连续, f 在 x_0 这一点必有极限，并且极限值正是 $f(x_0)$. 由此可见, f 必须在点 x_0 处有定义

类似极限我们可以定义左极限和右极限，这里我们同样可以定义左连续和右连续

定义 1.12 (左连续与右连续)

左连续：对于某个 $\delta > 0$, 设 $f(x)$ 在 x_0 的某左邻域 $(x_0 - \delta, x_0]$ 有定义 (注意不是去心邻域), 且

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续

右连续：对于某个 $\delta > 0$, 设 $f(x)$ 在 x_0 的某右邻域 $[x_0, x_0 + \delta)$ 有定义 (注意不是去心邻域), 且

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处右连续

1.4.2 复合函数极限的存在性

定理 1.14 (复合函数极限的存在性)

设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, 且 $u \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

笔记

1. 这里与在第一节讲的是一样的，要求极限在趋近的过程中不能等于趋近值本身，否则会造成很多不必要的麻烦
2. 反例：令 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\quad \varphi(x) = \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$

1.4.3 函数的间断点及其分类

1.4.3.1 第一类间断点（左、右极限均存在）

第一类间断点进一步可以划分为可去间断点和跳跃间断点

可去间断点：左右极限均存在且相等（与函数在这一点是否有定义无关）

跳跃间断点：左右极限均存在但不相等（与函数在这一点时候有定义无关）

1.4.3.2 第二类间断点（左、右极限至少有一个不存在）

第二类间断点进一步可以划分为可去间断点和跳跃间断点

无穷间断点：左、右极限中至少有一个极限值为无穷大。例如 $x = 0$ 为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的无穷间断点

震荡间断点：(进一步可以分为有界震荡和无界震荡)，答题时只需要回答“震荡间断点即可”

笔记

1. 有界震荡的例子：$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处
2. 无界震荡的例子：$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处

1.4.3.3 常见的需要讨论的间断点情况

- 分母为 0 的情况
- (偶次) 根号下为负数
- 看见 e^∞ 必定讨论, 包括 $x \to 0$ 时 $e^{\frac{1}{x}}$
- 对数中的 $\ln 0$, 即真数 $= 0$, 包括底数 > 0
- 看见 x^n 的情况

例题 1.34 设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, 则常数 a, b 应满足（　　）

A.$a<0, b<0$

B.$a>0, b>0$

C.$a\leq 0, b>0$

D.$a\geq 0, b<0$

例题 1.35 讨论函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性

例题 1.36 求函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x+1|}\sin x$ 的间断点并指出其类型

例题 1.37 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 试确定 a, b 的值

例题 1.38 (1998, 数三) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点

1.4.4 闭区间连续函数的性质

下设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$

性质

1. 有界性：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 有界
2. 介值性：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)\neq f(b)$, 则任意介于 $(f(a), f(b))$ 之间的常数 C，至少存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=C$
3. 介值定理的推论：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 可取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值
4. 零点存在定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$

笔记

1. 要尤其注意函数的条件，特别是“有定义”和“连续”这两个条件的区别，定理中“闭区间连续”的条件不能改成“开区间连续”，更不能改成“在闭区间有定义”

2. 零点存在定理只保证了零点的存在性，没有保证唯一性，通常唯一性的姓名需要借助函数的单调性来完成

例题 1.39 (2008, 数一) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是（　　）

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $f(\{x_n\})$ 收敛

B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $f(\{x_n\})$ 收敛

C. 若 $f(\{x_n\})$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

D. 若 $f(\{x_n\})$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

例题 1.40 设函数在 $[a, b]$ 内有定义, 则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(a)f(b)<0$, 则存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$

B.$\forall x\in(a, b)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

C. 若 $f(a)<f(b), \forall C\in(f(a), f(b))$, 存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=C$

例题 1.41 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 试证: 对任意的 $k_i\in R_+, x_i\in[a, b]$, 存在一个 $\xi\in[a, b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}$$

特别的, 当 $k_i=\frac{1}{n}$ 时

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

1.5 求极限的方法（重点）和常考题型

1.5.1 补充内容：两个重要极限和无穷小（大）的四则运算

1.5.2 两个重要极限

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

1.5.3 无穷小量的四则运算

设当 $x \to 0$ 时, 有无穷小量 $o\left(x^n\right)$ 和 $o\left(x^m\right)$, 则

(1)$o\left(x^n\right) \pm o\left(x^m\right) = o\left(x^{\min\{n,m\}}\right)$, 无穷小看低阶, 当 $n \neq m$

(2)$o\left(x^n\right) \times o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$

例题 1.42 证明：无穷小 × 有界 = 无穷小（留作习题）

1.5.4 无穷大量的四则运算

设当 $x \to 0$ 时，有无穷大量 $O\left(x^n\right)$ 和 $O\left(x^m\right)$, 则

(1)$O\left(x^n\right) \pm O\left(x^m\right) = O\left(x^{\max\{n,m\}}\right)$, 无穷大看高阶, 当 $n \neq m$

(2)$O\left(x^n\right) \times O\left(x^m\right) = O\left(x^{n+m}\right)$

1.5.5 利用等价无穷小代换

设在同一趋近方式中，$\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$, 且 $\beta(x) \neq 0$，有如下结论

(1) 高阶: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

(2) 低阶：$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$

(3) 同阶: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 记为 $\alpha(x) \sim C\beta(x)$

(4) 等价: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

(5) 无穷小的阶: $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小

笔记 $a_n = 0$ 也是无穷小，且并非所有的无穷小都有阶数

当 $x \to 0$ 时，有下列等价无穷小（需要全部记忆，类似于九九乘法表）

- $\sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, 特别的当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时候, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $a^x - 1 \sim x\ln a$
- $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$
- $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$
- $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ (常用在幂指函数求极限中)
- $x^3 + 2x^2 \sim 2x^2$
- $|x| + x^3 \sim |x|$

笔记 利用等价无穷大（已讲，这里不再赘述）

1.5.6 分子有理化 (常用于 $\infty - \infty$)

例题 1.43 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x) - x^2}$

1.5.7 利用变量代换（目的是处理成 $x \to 0$ 的形式）

例题 1.44 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{(x+2)(x-1)}$

1.5.8 利用倒代换处理（目的是构造出分母）

例题 1.45 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1.5.9 关于 1^∞ 极限的处理

例题 1.46 求极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

1.5.10 利用拉格朗日中值定理（或积分中值定理）

笔记 什么时候用？

- 函数相减的形式
- 自变量趋近于同一个数（或者是两个变量是等价/同阶无穷小（大）量）
- 最好是 $f'(\xi) \neq 0$

例题 1.47 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

例题 1.48 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$

例题 1.49 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a+1}{n}\right)$

例题 1.50 设 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{2024}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta \neq 0$, 求 α 和 β

例题 1.51 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_{\sqrt{n(n-4)}}^{n} x \sin\frac{1}{x} dx$

1.5.11 补充内容：多项式相乘的搜索法（自行补充笔记）

1.5.12 利用泰勒展开

1.5.12.1 常见的泰勒展开

定理 1.15 (带 Peano 余项的泰勒公式)

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

特别的，当 $x_0 = 0$ 时, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

常见的泰勒展开有

1.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1 < x < 1)$$

2.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$$

3.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n(-1<x<1)\end{aligned}$$

笔记 上述内容严格上是泰勒级数 (数一数三掌握), 求极限时可用写成带 Peano 展开的形式，本课程要求数二也要掌握

1.5.12.2 泰勒展开阶数的确定（展开到几阶 ?）

笔记

1. 有分子分母的情况：分子展开到比分母阶数同阶或能确定的高阶
2. 没有分数的形式: 展开到第一个 x^n 前的系数不为 0 的时候

例题 1.52 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$

例题 1.53 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 a 与 n 的值

1.5.13 利用定积分的定义（重难点）

本部分内容属于难点和重点，我们将花相当的篇幅来讲定义，包括利用定义求极限的几种变体，等到了第三章讲定积分的时候就不用再讲一遍定义了

首先来看严格的数学定义

定义 1.13 (定积分的定义)

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 在 (a,b) 中任意插入若干个分点（这里插入 $n-1$ 个）

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

来划分区间 $[a,b]$, 在每一个部分区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i, 作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 设 λ 为 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最大数, 即

$$\lambda = \max_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}$$

当 $\lambda \to 0$ 时, 如果和式 S 的极限存在, 即

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

且此极限值不依赖于 ξ_i 的选择, 也不依赖于对 $[a,b]$ 的分法, 就称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

数 a 和 b 分别称为积分下限和积分上限. 和式 σ 称为 $f(x)$ 的积分和，因为在历史上是黎曼（Riemann）首先以一般形式给出这一定义，所以也称为黎曼和。上述意义下的定积分，也称为黎曼积分

我们再用 $\varepsilon-\delta$ 的语言表述如下：
设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, I 是一定数. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n-1}=b$, 不管 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何选取，只要

$$\lambda = \max_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\} < \delta$$

便有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

则称 I 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分

对于求极限的题目来说，通常是将某个和式转化为在区间 $[0,1]$ 上的积分。为此，若将，通常的形式有如下两种，这里我们称其为“标准形式”：

1. 取左端点：$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$
2. 取右端点：$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right)$
3. 取中点（2021 选择题）：$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{2i+1}{2n}\right)$

例题 1.54 证明：对于区间均分成 n 等分的情况，成立

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

其中 k 是任意正整数

例题 1.55 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

例题 1.56 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}}{n+1}$

笔记 对于不是上述的“标准情况”，一律采用“夹逼准则”的放缩，通常是放缩成两个端点处的形式，举例如下

例题 1.57 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}$

例题 1.58 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$

1.5.14 常见题型举例

例题 1.59 确定极限中的参数：若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}dt}{bx-\sin x}=1$, 求 a,b, 其中 a,b, 为正数

例题 1.60 确定极限中的参数：当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\text{sinax}$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则（　　）

A.$a=1,b=-\frac{1}{6}$

B.$a=1,b=\frac{1}{6}$

C.$a=-1,b=-\frac{1}{6}$

D.$a=-1,b=\frac{1}{6}$

例题 1.61 “能换就换!”：当 $x\to 0^+$ 时, 将以下等价无穷小按照阶数递增的顺序排序

A.$\alpha=\int_0^x \cos t dt$

B.$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt$

C.$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$

例题 1.62 (2020，数一二三) 当 $x\to 0^+$ 时, 下列无穷小量最高阶的是（　　）

A.$\int_0^x\left(e^t-1\right)dt$

B.$\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$

C.$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$

D.$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt$

例题 1.63 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）

A.$\lim_{x\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在

B.$\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在

C.$\lim_{x\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\text{sinh})$ 存在

D.$\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

最后，有关介值定理、最值定理的讨论往往和“中值定理”相结合，我们放到第二章再深入了解

第 2 章 一元函数微分学

内容提要

- 第一节 导数概念、性质、微分与高阶导数
- 第二节 导数的应用
- 第三节 中值定理证明（一）
- 第四节 中值定理证明（二）
- 第五节 中值定理证明（三）
- 第六节 Taylor 展开的四种形式和证明题
- 第七节 洛必达法则的证明、应用和注意事项
- 第八节 函数不等式问题
- 第九节 函数零点问题
- 第十节 数列单调有界大题专题

2.1 导数概念、性质、微分与高阶导数

2.1.1 导数的定义

柠宝：导数作为一种利用极限来定义的概念，可以把导数理解为极限的一个“子集”，当然满足极限的唯一性、左右极限（左右导数）等概念和性质

定义 2.1

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域（不是去心邻域）内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'\left(x_0\right)$，或 $\left.y'\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导

左导数：

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

右导数：

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

笔记

1. 可导的充要条件为：左右导数存在且相等（类比极限存在的充要条件，本质是一样的，因为导数是用极限来定义的）

2. 定义中的 Δx 不能随意替换成无穷小，关键在于符号（方向、侧）的问题，例如显然不能替换成 $x\sin\frac{1}{x}$

3. 定义中的 $f\left(x_0\right)$ 必须严格出现，除非题干说明在 $x=x_0$ 处可导。例如题干只告知极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

存在，不能得到在 x 处可导！

4. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可导的含义：在 (a,b) 可导且在 $x=a$ 和 $x=b$ 分别右导数和左导数存在

定理 2.1 (本结论及其证明要求会默写)

(重要结论，十星重点) 若已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，则 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=A$

证明

例题 2.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

例题 2.2 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 (　　)

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在

D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

例题 2.3 (2020) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x\to0}f(x)=0$, 则 (　　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

例题 2.4 (利用导数定义求导数) 设函数 $f(x)=(e^x-1)\left(e^{2x}-2\right)\ldots(e^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$ ____

2.1.2 微分

2.1.2.1 微分的概念

柠宝：微分的核心思想是“以直代曲”

定义 2.2 (微分)

若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, 其中 A 为不依赖于 Δx 的常数, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记为 $dy=A\Delta x$, 也称为函数增量的“线性主部”, 将 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 看做是关于 Δx 的线性函数 ♣

定理 2.2 (可微与可导的关系)

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且有

$$dy=A\Delta x=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$$

♡

dy　Δy　Δx　dx 之间的关系和总结如下

笔记

1.Δ 指的是“末-初”, Δx 本身可正可负

2.$dydx$ 分别对应 $\Delta y,\Delta x$ 的近似值, 当且仅当 $\Delta x\to0$ 时 $dx=\Delta x$

3. 通常情况下, dy 与 Δy 差了一个关于 Δx 的高阶无穷小, 即 $\Delta y-dy=o(\Delta x)$

4. 一般考题会给出 $f(x)$ 的一阶导数和二阶导数的正负 (或值) 以此给出单调性和凹凸性, 进而判断 $dy\Delta y\Delta x$ 三者的大小关系

2.1.2.2 导数与微分的几何意义

1. 导数专注某一点的切线（斜率）

2. 微分专注于这一点附近函数的增量，微分的核心思想是近似计算和“以直代曲”

笔记

1. 导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率
2. 可导一定有切线；有切线不一定可导，反例：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在原点处
3. 微分 $dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 切线上的增量
4.$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 实际上的增量

2.1.2.3 连续、可导与可微之间的关系

定理 2.3

在一元函数中，可导必定可微，可微必定可导

笔记 上述结论对多元函数不适用

例题 2.5 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 在 $x_0=-1$ 处取得增量 $\Delta x=0.05$ 时，函数增量 Δy 的线性部分为 0.15，则 $f'(1)=$____

2.1.3 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 可导性的关系（选择题常考）

做图理解：（自己找空位记笔记）

笔记

1.$f(x)$ 可导与 $|f(x)|$ 可导无任何联系
2. 在 $f(x)$ 连续的前提下（不要忘了这个条件），有如下结论
（1）若 $f(x_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\leftrightarrow|f(x)|$ 在 x_0 处可导
（2）若 $f(x_0)=0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导且导数值为 0

2.1.4 含有绝对值函数的可导性

定理 2.4

设函数 $f(x)=\varphi(x)|x-a|$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$（本质上是用 $0\cdot\pm1=0$）

例题 2.6 设函数 $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（　　）

A.3

B.2

C.1

D.0

2.1.5 常见的求导公式

(1) $(C)' = 0$	(2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
(3) $(a^x) = a^x \ln a$	(4) $(e^x)' = e^x$
(5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	(6)$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$
(7)$(\sin x)' = \cos x$	(8)$(\cos x)' = -\sin x$
(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$	(10)$(\cot x)' = -\csc^2 x$
(11)$(\sec x)' = \sec x \tan x$	(12)$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
(13)$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(14)$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(15)$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	(16)$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

补充一个: $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' =$

2.1.6 求导法则和常见题型

2.1.6.1 导数的四则运算

定理 2.5

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导, 则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

例题 2.7 (2015, 数一) 证明: $(uv)' = u'v + uv'$ 提示: 利用 $+A - A$

2.1.6.2 复合函数的求导法则

定理 2.6

设 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导, $y = f(u)$ 在对应点处可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导, 并且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

2.1.6.3 隐函数求导

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数, 为求得 y', 对 $F(x, y) = 0$ 两边关于 x 求导, 得到一个含有 y' 的方程, 从中解出 y'

笔记

1. 一般情况下, 题干是一个隐函数的形式, 则最后解出来的 y' 也是一个隐函数的形式
2. 在隐函数求导中, 常常会出现分母, 注意定义域的确定

例题 2.8 求椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在 (x, y) 处的导数

例题 2.9 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y = \tan(x + y)$ 所确定, 试求 y', y''

例题 2.10 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 试求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

2.1.6.4 反函数求导

柠宝: 重点掌握反函数的二阶导数的推导过程

在绝大多数题目中,不管是不是反函数,最终的自变量其实都是 x

反函数的一阶导数：若函数 $y=f(x)$ 在某区间内严格单调可导，即存在反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导,则有如下关系

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

或

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

笔记 记忆方法: 反函数的导数等于“正函数”的导数的倒数

反函数的二阶导数，这里作为例题讲解，要求会证明

例题 2.11 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内存在反函数 $x=\varphi(y)$ 且二阶可导，则 $\varphi''(y)=$ ____

2.1.6.5 参数方程求导（仅数一、数二）

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数, 则

(1) 若 $x(t)$ 和 $x(t)$ 都可导, 且 $x'(t)\neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

(2) 若 $x(t)$ 和 $x(t)$ 都二阶可导, 且 $x'(t)\neq 0$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=$$

例题 2.12 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$

2.1.6.6 对数求导法

适用情况: $f(x)$ 的表达式是若干因式的乘除、乘幂或为幂指函数的形式, 可以先取对数, 再两边关于 x 求导

例题 2.13 设 $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$, 求 y'

例题 2.14 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y'

2.1.7 高阶导数

2.1.7.1 高阶导数的概念和常见的高阶导数

定义 2.3

$$f^{(n)}\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}\left(x_0+\Delta x\right)-f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

常见的高阶导数的公式:

1.

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

3.
$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

4. 莱布尼茨公式:
$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-1)}$$

例题 2.15 设 $f(x)=\left(x^3+2x+1\right)e^x$, 求 $f'(x)$

例题 2.16 设 $f(x)=\left(x^3+2x+1\right)e^x$, 求 $f^{(n)}(x)$

2.1.7.2 利用泰勒展开 (级数) 求 $f^{(n)}(0)$ (要求数二也要掌握)

这里对常见的泰勒展开（级数）进行回顾

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n(-1<x<1)\end{aligned}$$

例题 2.17 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n>2)$ 阶导数

例题 2.18 求函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}-\sin x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数

2.1.7.3 利用数学归纳法求 $f^{(n)}(x)$

例题 2.19 设 $f(x)=\ln x$, 求 $f^{(n)}(x)$

例题 2.20 设 $f(x)=\frac{x}{2x^2-7x+6}$, 求 $f^{(n)}(x)$

2.1.8 连续可导和可导的区别 (重点)

对于下列条件的辨析

1. “$f(x)$ 在区间 (a,b) 上 n 阶可导”
2. “$f(x)$ 在区间 (a,b) 上 n 阶连续可导（导数连续）”
3. “$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导”

笔记

a. 上述条件 2 最强，因为“可导必定连续”，所以从 $f(x)$ 到 $f^{(n)(x)}$ 在区间 (a,b) 都是连续的

b. 条件 1 只能表明从 $f(x)$ 到 $f^{(n-1)}(x)$ 在区间 (a,b) 都是连续的，$f^{(n)}(x)$ 存在但是不一定连续，即不能利用函数的连续性式子，即不能用

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$$

c. 条件 3 只能表明 $f(x)$ 到 $f^{(n-1)}(x)$ 在某个 δ 的邻域内有定义（得不到邻域连续），在 $x=x_0$ 连续，$f^{(n)}(x_0)$ 存在，但是不能得出 $f^{(n)}(x)$ 在某个 $\delta>0$ 的邻域内存在

例题 2.21 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 $n+1$ 阶导数, 满足

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n,(0<\theta<1),\text{且}f^{(n+1)}(x)\neq 0$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

2.1.9 补充内容：导数的性质

2.1.9.1 导数无第一类间断点

本结论作为证明题给出

例题 2.22 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处有导数 (区间内可导), 证明：(a,b) 中的点要么为 $f'(x)$ 的连续点, 要么为 $f'(x)$ 的第二类间断点

2.1.9.2 导数的介值性：Darboux 定理

定理 2.7 (达布定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导（端点处为单侧导数），且 $f'(a)<f'(b)$，则 $\forall c\in(f'(a),f'(b)),\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=c$ ♡

笔记 本结论通常用在中值定理相关中命题中（极难题目中出现），但是属于超纲内容，不能直接用，要用的话必须先证明

证明 （本定理的证明要求掌握）

2.1.10 有关奇偶函数、周期函数的导数结论

设函数 $f(x)$ 可导，有如下结论（要求会举反例和证明）

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数

(4) 若 $f(x)$ 是周期函数, 且存在常数 c, 使得 $\int_0^c f(x)dx=0$, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为周期函数

(5) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int f(x)dx$ 是偶函数

(6) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int f(x)dx$ 有可能是奇函数

2.1.11 警钟长鸣：单个点的导数值不能确定邻域的单调性

例题 2.23 设函数 $f(x)$ 连续, $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得（　　）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

C. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$

D. 对任意的 $x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$

2.1.12 有关判断极值、拐点的一类选择题的秒杀技巧

前情提要:

定理 2.8

若已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, 则 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=A$

柠宝独家技巧：不用刻意去用局部保号性, 将分子进行改写, 注意分母的等价无穷小, 考虑两侧的符号

$$+\cdot+=+;-\cdot-=+;+-=-$$

例题 2.24 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-2$, 则（　　）

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

B. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)\neq 0$

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

例题 2.25 设 $f(x)$ 二阶连续可导, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{\sin^3\pi x}=2$, 则（　　）

A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $(1,f(1))$ 为 $f(x)$ 的拐点

D. $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极大值点, $(1,f(1))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

例题 2.26 设 $f(x)$ 二阶连续可导, $f'(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|+x^3}=-1$, 则（　　）

A. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $(0,f(0))$ 为 $f(x)$ 的拐点

D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点, $(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

例题 2.27 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 不可导

B. 可导但 $f'(0)\neq 0$

C. 取极大值

D. 取极小值

例题 2.28 设 $f''(x)$ 连续, $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$, 则（　　）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 为 $f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 非极值, $(0,f(0))$ 也非 $y=f(x)$ 的拐点

2.2 导数的应用

2.2.1 函数的极值和最值

2.2.1.1 极值的概念

定义 2.4

设 $f(x)$ 在 x_0 的某 δ 邻域（非去心邻域）内有定义，且对于 $\forall x \in U(x_0,\delta)$,$f(x_0) \geq (\leq) f(x)$, 称 $f(x_0)$ 为函数的一个极大 (小) 值, $(x_0, f(x_0))$ 称为一个极值点

笔记

1. 由极值点的定义立即得到 $\Rightarrow$ 极值只能在区间内部取得, 永远在端点处取不到（因为要求在此点邻域内有定义）

2. 若函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值（或最小值）在开区间 (a,b) 上取得，则函数在该点处必取得极大值（或极小值）。(不一定可导，若可导则导数值为 0)

2.2.1.2 极值的必要条件

定理 2.9 (费马引理)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

证明

对于“驻点”，这里统一作解释：驻点就是导数为 0 的点

柠宝：对于可导函数而言，极值只可能在驻点上取得，极值点必为驻点，但驻点不一定是极值点。反例: $f(x)=x^3$ 在 $(0,0)$ 处。对于一般的函数而言，极值点只可能在驻点和导数不存在的地方取得

笔记

1. 对于可导函数：极值点一定是驻点; 驻点不一定极值点

2. 对于一般函数：极值点只可能在驻点和导数不存在的地方取得

3. 极值点是一个局部性质（类比极限存在则函数局部有界），而最值点是一个整体性质，最值有可能在端点取得，所以极值点不一定是最值点，最值点也不一定是极值点

2.2.1.3 极值的充分条件

定理 2.10 (第一充分条件)

设 $f'(x_0)=0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续), 且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导

1. 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时, $f'(x)>0$, 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2. 若 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时, $f'(x)<0$, 而 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

3. 若 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变 (可以为 0), 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值

笔记

1. 一阶导在 $x=x_0$ 两侧变号，则 $f(x_0)$ 为极值

2. 第一充分条件对 $x=x_0$ 处是否可导没有要求，只看两侧符号

定理 2.11 (第二充分条件（重点）)

若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 则当 $f''(x_0)>0$ 时取得极小值, $f''(x_0)<0$ 时取得极大值

笔记 在一阶导等于零的前提下，二阶导大于零极小值，小于零极大值，等于零不知道

定理 2.12 (第三充分条件)

若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

1. 当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 x_0 处有极值, $f^{(n)}(x_0)>0$ 时取得极小值，$f^{(n)}(x_0)<0$ 时取得极大值
2. 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 处无极值

笔记 记忆方法：同第二充分条件的 “奇偶性”

柠宝：对于题干中给出较为复杂的条件, 例如微分方程或隐函数的形式, 求极值时往往采用第二、第三充分条件而不会利用函数的单调性

例题 2.29 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$, 且 $f'(0)=0$, 则（　　）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $=f(x)$ 的拐点

例题 2.30 设 $f(x)$ 满足 $f'(0)=0, f'(x)+[f(x)]^3=x^2$, 则（　　）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

例题 2.31 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 所确定, 求 $f(x)$ 的极值

例题 2.32 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-xf'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$, 试讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值

例题 2.33 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且 $(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-\mathrm{e}^{1-x}$, 求:

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a(a\neq 1)$ 取得极值，是极小值还是极大值?

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极值，是极小值还是极大值?

2.2.1.4 函数的最值

求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最值的步骤:

1. 求出 $f(x)$ 的驻点, 即使 $f'(x)=0$ 的点和不可导点
2. 算出第一步中所有点的函数值
3. 求出 $f(a)$ 和 $f(b)$
4. 比较上述各函数值, 最大值为 M, 最小值为 m

柠宝：求函数最值内容为高中数学范畴，这里不再赘述

2.2.2 函数的凹凸性与 Jensen 不等式

下面介绍两种凹凸性的定义

定义 2.5 (一般《高等数学》教材中的定义)

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1,x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 的图像是 (严格) 凹的, 称 $f(x)$ 是凹函数, 反之称为凸函数

定义 2.6 (《数学分析》中的定义)

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 且对于 $\lambda \in [0,1]$ 恒有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda x_2)\right) \leq \lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

则称 $f(x)$ 的图像是凹的, 称 $f(x)$ 是凹函数, 反之称为凸函数

可以证明: 上述两种定义等价, 取 $\lambda=\frac{1}{2}$ 可得到第一种定义

笔记

1. 函数的凹凸性是函数本身的性质，即函数具有凹凸性是否可导（更别提二阶导数了）

2. 国内不同的教科书上对于函数凹凸性的定义不同, 甚至按照教材 A 所定义的是凹函数在 B 教材中是凸函数, 此处统一成《考试大纲》中规定的情况, 即函数的凹凸性对应函数的形状

3. 函数凹凸性判定的一般方法：若在区间 I 上 $f''(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 I 上是凹 (凸) 的

2.2.2.1 函数凹凸性的两种等价定义

2.2.2.2 补充内容：函数的支撑

2.2.2.3 补充内容：Jensen 不等式

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上为凹函数 (或 $f''(x) \geq 0$), 对于 $\forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i=1, x_i \in I$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f\left(x_i\right)$$

若为凸函数, 则不等号反向, 若为严格的凹（凸）函数，且 $i \geq 2$, 则不等号中无等号

记忆方法：同

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$$

例题 2.34 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶连续导数, 则正确的是（　　）

A. 若 $f''(x)>0$, 则 $\int_0^1 f(x) d x>f\left(\frac{1}{2}\right)$

B. 若 $f''(x)>0$, 则 $\int_0^1 f(x) d x<f\left(\frac{1}{2}\right)$

C. 若 $f''(x)<0$, 则 $\int_0^1 f(x) d x>f\left(\frac{1}{2}\right)$

D. 若 $f''(x)<0$, 则 $\int_0^1 f(x) d x<f\left(\frac{1}{2}\right)$

柠宝：本节要求只需要会求函数的单调区间、极值、最值、拐点即可，函数的支撑和 Jensen 不等式均为超纲内容，了解即可

2.2.3 渐近线

2.2.3.1 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=A$ (或 $\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} f(x)=A$, 或 $\left.\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=A\right)$, 那么 $y=A$ 是 $y=f(x)$ 的水平渐近线

注意：水平渐近线最多有 2 条, $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别考虑

2.2.3.2 垂直（铅直）渐近线

若 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0^-} f(x)=\infty$, 或 $\left.\lim\limits_{x \rightarrow x_0^+} f(x)=\infty\right)$, 那么 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的垂直渐近线

注意：只要某点 x_0 有一侧的函数值 $\to\infty$, 则 $x=x_0$ 为垂直渐近线。垂直渐近线可能有多条，甚至有无数条（如 $f(x)=\tan x$）。一般考虑分母为 $0,\ln 0,e^{\infty},e^{\frac{1}{x}}$ 等情况

2.2.3.3 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b($ 或 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty)$, 那么 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的斜渐近线

笔记

1. 斜渐近线最多有两条, $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别考虑

2. 有可能出现 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 极限存在而 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 极限不存在, 即“能算出来斜率, 算不出来 b”, 做题的时候不要算完 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 就默认斜渐近线存在就不算 b 了

例题 2.35 求函数 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线

例题 2.36 函数 $y=e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}$ 渐近线的条数为____

例题 2.37 求 $f(x)=x\arctan x$ 的斜渐近线

2.2.4 弧微分（仅数一、数二）

这里我们给出较为通俗的数学推导，严格的论证请自行参阅教材

首先，我们借助“微分”这一工具，利用线性主部来代替函数的实际增量，即

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x$$

考虑斜边为弧长（利用切线段代替）的直角三角形，由勾股定理得到

$$(ds)^2=(\Delta x)^2+\left(f'(x)\Delta x\right)^2$$

令 $\Delta x\to 0$，即此时 $\Delta x=dx$，两边开方，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

对于参数方程，公式如下

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

作图理解如下：(自己找空位因为我不会用 LaTeX 画图)

笔记

1. 本质上, 弧微分就是用来计算光滑曲线 (处处可导) 的弧长
2. 数一的“第 I 类曲线积分”与这里的“弧微分”有密切联系, 请务必注意
3. 旋转体的侧面积（仅数一、数二）与“弧微分”有密切联系, 请务必注意

2.2.5 平面曲线的曲率（仅数一、数二）

有了弧微分的概念，我们可以定义曲率，所谓曲率，描述的是“转过的角度对弧长的变化率”。这里可以类比速度是“位移对时间的变化率”，初中学习速度的时候是“相同时间比位移”，这里弧微分也是一样，对应过来就是“相同弧长比角度”

定义 2.7 (曲率和曲率半径)

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

其中，$\Delta\alpha$ 是角度，Δs 是对应的弧长

注意：曲率永远非负（可以为 0）

对应的曲率半径为:

$$R = \frac{1}{K}$$

思考: 直线的曲率和曲率半径为多少?

曲率与曲率半径的关系：弯曲的越厉害 ⇒ 曲率越大 ⇒ 曲率半径越小

这里，将曲率的两种表达式（直角坐标下和参数方程下）的推导过程作为习题给出，先说结论：

(1) 直角坐标系：

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

(2) 参数方程：

$$K = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}}$$

例题 2.38 对曲率的两个公式进行推导

2.3 中值定理证明（一）

本节内容重点掌握三大中值定理的证明和积分因子的构造方法，以及常规的双中值问题的处理步骤

2.3.1 三大中值定理 (均要求会证明)：罗尔、拉格朗日和柯西中值定理

2.3.1.1 费马引理

定理 2.13 (费马引理)

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0) = 0$

证明

2.3.1.2 罗尔定理

定理 2.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则至少存在一个 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

证明

2.3.1.3 拉格朗日中值定理

定理 2.15

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一个 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

证明

2.3.1.4 柯西中值定理

定理 2.16

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 内可导, 且对任意的 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$ 则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明

2.3.2 补充内容：推广的积分中值定理

定理 2.17

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

笔记 注意到这里的 ξ 在开区间中，本来的积分中值定理应该是闭区间

2.3.3 有关中值定理证明题辅助函数的构造技巧 (无脑版)

2.3.3.1 积分因子、注意事项和构造原则

先来讲一下“积分因子”的概念

对于一阶线性微分方程的一般形式

$$y'+p(x)y=q(x)$$

我们称

$$e^{\int p(x)dx}$$

为积分因子

当 $q(x)=0$, 此时辅助函数令为

$$\varphi(x)=e^{\int p(x)dx}f(x)$$

对于上述的无脑方法，我们有如下注意事项

- 将所有的表达式写成相减的形式
- y' 前面的系数必须为数字 1 , 将 y' 和 y 视为导函数和原函数的关系。例如 $f(x)$ 和 $\int_0^x f(t)dt$. y'' 和 y'
- $\varphi(x)$ 中的指数部分积分时不加 C

构造原则（战略角度）:

- 联系 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的桥梁有且仅有拉格朗日中值定理 (除非出现除法或能构造出除法才考虑柯西中值定理)
- 注意“1”的改写
- 注意闭区间可导时的边界条件（通常是单侧导数或者利用极限的保号性）
- 若出现“跨阶”，一般考虑利用中间阶来弥补 (± 均有可能)

2.3.3.2 几个关键的改写（十星重点）

有关“1”的改写:

$$1=e^0=\cos 0=\tan\frac{\pi}{4}=\int_0^1 1dx=\int_2^3 1dx=\ln e=\sin^2 x+\cos^2 x$$

有关“0”的改写：

$$0=\tan 0=\sin 0=\ln(0+1)=\arcsin 0=\arctan 0$$

有关区间的改写：

如题干中说的是 $(0,\frac{\pi}{2})$，待证明的式子中出现 $\frac{\pi}{2}f'(\xi)$，需要改写成

$$\left(\frac{\pi}{2}-0\right)f'(\xi)$$

2.3.4 单中值问题

例题 2.39 (注意边界条件的写法) 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2, f(1)=2$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得

$$f''(\xi)=0$$

例题 2.40 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)+2f(\xi)=0$$

例题 2.41 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^{\xi} f(t)dt+(\xi-1)f(\xi)=0$$

例题 2.42 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\eta f'(\eta)+f(\eta)=0$

例题 2.43 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续，在 $(1,2)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$$

例题 2.44 (改写成相减的形式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

例题 2.45 (推广的积分中值定理的应用) 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续，在在 $(0,3)$ 内二阶可导，且 $2f(0)=\int_0^2 f(t)dt=f(2)+f(3)$，证明：

(1) 存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

(2) 存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

例题 2.46 (积分因子) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $f(0)=0$. 若 $f'(x)>-f(x),\forall x\in(0,+\infty)$，求证：

$$f(x)>0, x\in(0,+\infty)$$

例题 2.47 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $\int_0^1 f(x)dx=0, \int_0^1 xf(x)dx=0$，求证：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个零点

例题 2.48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，又 $b>a>0$，求证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\eta f'(\eta)\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$$

笔记 某些情况下构造出来的辅助函数存在间断点（一般是可去间断点），此时需要补充定义，使得辅助函数在闭区间上连续、开区间上可导，进而方便使用中值定理或闭区间连续函数的性质

例题 2.49 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，试证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{(\xi-1)^2}f'(\xi)$$

2.3.5 双中值问题

双中值问题的总体思路：

(1) 一般考虑以特殊点（比如中点、驻点、零点）作为区间的为分界点，两边分别使用拉格朗日中值定理（拉个朗日 + 拉格朗日）

(2) 如果出现分数（即除法）的情况，一般考虑柯西中值定理或者先拉格朗日再柯西中值

(3) 有关单中值的技巧，如“写成相减的形式”，在这里同样适用

(4) 对于题干中出现“两个不同的 ξ 和 η”，一定是分区间，没有任何例外

(5) 有些分界点的选取是“算出来的”

例题 2.50 (2010, 数二) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

例题 2.51 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明：

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

例题 2.52 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 试证：对于任意给定的正数 a, b, 在 $(0,1)$ 内一定存在互不相同的 ξ, η, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

例题 2.53 (考虑“将分子换成分母”) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使得

$$abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$$

2.3.6 2020 压轴（数一）

例题 2.54 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明：

(1) $\exists \xi \in (0,2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$

(2) 若对任意的 $x \in (0,2), |f'(x)| \leq M$, 则 $M=0$.

2.4 中值定理证明（二）

2.4.1 万能构造再补充

在上一节，我们讲了“积分因子”构造方法和“写成相减的形式”两种技巧，这里再进行深入，补充一下万能套路

对于单中值问题，解决步骤如下：

（1）将欲证结论中的 ξ 或 x_0 改写成 x, 移项, 使等式一端为零, 另一端记作 $F^*(x)$

（2）令 $F(x)=F^*(x)$, 验证 $F(x)$ 是否满足零点定理, 若不满足, 则令

$$F'(x)=F^*(x) \Rightarrow F(x)=\int F^*(x)\mathrm{d}x+C(\text{ 令} C=0)$$

或者

$$F'(x)=k(x)F^*(x) \Rightarrow F(x)=\int k(x)F^*(x)\mathrm{d}x$$

其中, $k(x)$ 是某个已知函数

（4）验证 $F(x)$ 是否满足罗尔定理, 若满足, 则定理得证; 若不满足, 则改令 $F''(x)=F^*(x) \Rightarrow F(x)$, 即两次积分

笔记

1. 将待证明的式子移项, ξ 或 x_0 改写成 x, 令为新函数, 使用零点定理, 若不满足就向上积分构造新函数（可能会积分多次一般最多两次且不 $+C$）

2. 对于上面第（4）中提到的 F'', 我们需要利用两次不定积分解出来

例题 2.55 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

例题 2.56 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 证明: 存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\xi f(\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

例题 2.57 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{2},\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得

$$f(\xi)+\xi=0$$

例题 2.58 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. 证明: 存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

例题 2.59 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$

2.4.2 单个点可导的问题

柠宝: 题干中出现单个点的导数, 直接写出该点的导数定义，然后再考虑保号性或者可能存在的单调性

例题 2.60 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$

2.4.3 出现高阶导数的解决办法

题干出现二阶及以上阶的导数, 立马想到泰勒展开, 至于怎么在哪一点展开, 怎么展开，放在后面的“Taylor 展开的四种形式和证明题”小节讲

2.4.4 题干中出现 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 的情况

设题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a)=0$ 或 $f(b)=$, 或 $f(a)=f(b)=0$, 立即想到先用拉格朗日中值定理 (强调过无数次的 0 的改写)

例题 2.61 (2010, 数二) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

2.5 中值定理证明（三）

2.5.1 双中值的处理方法

这类问题的一般出题形式为找到两个中值点如 ξ 和 η, 求证这两个中值点满足某个等式 (常考) 或不等式 (不常考，较难)。要特别注意题干中的条件是否有 $\xi\neq\eta$ (或不同的两个中值点) 这类的字样。对于中值定理来说, 定理仅仅保证了存在性, 没有给出对应的中值点具体在什么地方 (只在此山中, 云深不知处), 要想得到两个不同的中

值点 $\xi \neq \eta$, 唯一的办法就是将两个中值点放在两个不相交的区间里，也就是说："一旦题目中明确了 $\xi \neq \eta$, 解题方法一定是划分区间"

解题方法：中值定理有罗尔、拉格朗日和柯西中值定理, 对于双中值而言, 罗尔定理用的不太多, 主要是后面两个, 一般而言方法为 "用两次中值定理"。具体情况可能为

- 拉格朗日 + 拉格朗日
- 拉格朗日 + 柯西
- 柯西 + 拉格朗日
- 柯西 + 柯西

2.5.2 双中值的典型例题

例题 2.62 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a)=f(b)=1$, 证明：存在 $\xi,\eta \in (a,b)$, 使得

$$\mathrm{e}^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$$

例题 2.63 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq 0, b>a>0$. 证明: 存在 $\xi,\eta \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

例题 2.64 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$

具体到操作上, 柯西中值有个很明显的特征, 即 "商的形式或者能转化成商的形式" , 并且题目会告知或者能通过已知条件推出某些项不为 0 (即可以当作分母), 这种题干要引起条件反射, 立马想到可以作为分母

柠宝：通常采用分离变量的策略（类似于微分方程中的变量可分离类型), 使得分离变量后等号两端分别只含有 ξ 和 η. 另外，注意不要忘了之前小节提到过的："将所有的式子写成相减的形式"

2.6 Taylor 展开的四种形式和证明题

2.6.1 泰勒展开的 Peano 余项和 Lagrange 余项的区别

定理 2.18 (泰勒展开)

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数, $x_0 \in I$, 则成立

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$$

其中 $o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ 称为 Peano 余项 $\Rightarrow$ 局部性质（常用在求极限中，因为极限是局部性质）

如果是下面的这种情况：

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(x-x_0\right)^n\ (\xi\text{ 在}x_0\text{ 和}x\text{ 之间})$$

其中 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ 称为 Lagrange 余项 $\Rightarrow$ 整体性质（常用在证明函数的有界性等整体性描述中）

这里除非知晓 x_0 和 x 的大小关系, 否则一律写成 "ξ 在 x_0 和 x 之间"

柠宝：基本上在有关泰勒展开的证明题中, 用到的都是 Lagrange 余项

特别的, 当 $x_0=0$ 时, 有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

称为 Maclaurin 展开

2.6.2 常见的泰勒展开（级数）

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n(-1<x<1)\end{aligned}$$

笔记

1. 上述展开到 n 阶的 Peano 余项和 Lagrange 余项请自行补充

2. 要注意 n 阶可导和 n 阶闭区间上的连续可导的区别 (见例 2.21)。只有 n 阶闭区间上的连续可导才可以方便地使用介值定理 (闭区间连续函数的性质)。例如: 设已证明在区间 $[a,b]$ 上存在 ξ_1,ξ_2 使得 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\geq 48$, 则由连续函数的介值性可知存在 ξ 使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\geq 24$

3. 对于 Taylor 展开的审视角度, 应该是将 x 看做一个整体（类似等价无穷小替换）

例题 2.65 求 $f(x)=e^{-x^2}$ 的 Taylor 展开

2.6.3 泰勒展开的四种形式（Lagrange 余项）

2.6.3.1 Taylor 展开的第一种形式（左抽象、右具体）

$f(x)$ 在 x_0 处展开，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

2.6.3.2 Taylor 展开的第二种形式（左具体、右抽象）

$f(x_0)$ 在 x 处展开, 即

$$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x_0-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x_0-x)^n$$

2.6.3.3 Taylor 展开的第三种形式（左具体、右具体）

$f(x_0)$ 在 x_1 处展开, 即

$$f(x_0)=f(x_1)+f'(x_1)(x_0-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2!}(x_0-x_1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x_0-x_1)^n$$

2.6.3.4 Taylor 展开的第四种形式（左抽象、右抽象）

$f(x+1)$ 和 $f(x-1)$ 在 x 处展开, (左抽象, 右抽象) 适用于没有给出具体点的信息的函数，即

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(-1)+\frac{f''(x)}{2!}(-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(-1)^n$$

2.6.3.5 处理 Taylor 展开相关证明题的思路

“保留要证明的式子，消除掉无关式子”，步骤如下

- 确定展开形式（四选一）
- 确定在哪一点展开
- 对展开的两个式子如何处理, 一般情况下只需考虑两式相加还是相减
- (可能出现) 对最后结果在区间上的讨论或利用闭区间连续可导的界值性
- 当精度不够 (例如算出来的是 $\frac{1}{2}$ 题目却要求 $\frac{1}{4}$ 时) 或没有思路时考虑对区间中点进行处理

笔记 极值点不可能出现在区间端点 $\Rightarrow$ 内部的可导极值点 $\Rightarrow f'(x_0)=0\Rightarrow$ 可以消除一项

2.6.4 有关 Taylor 展开的典型例题

例题 2.66 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $|f(0)|\leqslant a,|f(1)|\leqslant a,|f''(x)|\leqslant b,a,b$ 为非负数, 求证: $\forall x\in(0,1)$, 有

$$|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{1}{2}b$$

例题 2.67 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三次可微, 证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi)$$

例题 2.68 (经典放送：可导与连续可导的区别) 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 $n+1$ 阶导数, 满足

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n,(0<\theta<1),\text{且}f^{(n+1)}(x)\neq 0$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

例题 2.69 (与上题的类似题目) 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 n 阶连续导数, 且 $f^{(k)}(x_0)=0,k=2,3,\cdots,n-1$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 当 $0<|h|<\delta$ 时, $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),(0<\theta<1)$, 求证:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

例题 2.70 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0,f(1)=1$. 求证：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant 4$$

2.7 洛必达法则的证明、应用和注意事项（待补充）

本节内容主要掌握洛必达法则的适用情况，对于学有余力的同学，可以学习洛必达法则的证明（进阶内容，根据自身情况量力而行）

2.7.1 洛必达法则

定理 2.19

设 f, g 在 (a, b) 上可导. 并且 $g(x) \neq 0$ 对 $x \in (a, b)$ 成立. 又设

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

在这些条件下, 如果极限

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞), 那么便有

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♡

证明 补充定义

$$f(a) = g(a) = 0$$

以保持 f, g 在 $[a, b)$ 上的连续性. 利用 Cauchy 中值定理, 对 $x \in (a, b)$, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

这里 $a < \xi < x$. 由此可见, 当 $x \to a^+$ 时, 有 $\xi \to a^+$. 因此

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

如果上式中的最后一个极限仍是 $\frac{0}{0}$ 型的, 那么在确定 f', g' 仍满足定理的条件之后, 便可得出

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

在需要的时候, 这一过程可以再继续下去

定理 2.20

设函数 f 与 g 在 (a, b) 上可导, $g(x) \neq 0$, 且

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$$

如果极限 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞), 那么

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♡

证明

笔记

1. 上述两种中的洛必达法则, 第一种是必须要求是 $\frac{0}{0}$ 型, 而第二种只需要要求 $\frac{*}{\infty}$, 即分母是 ∞ 即可, 至于分子是不是无穷大、0 或者确定的数, 都可以使用 (推广的洛必达法则)

2. 洛必达法则是前 $\Leftarrow$ 后, 即使用洛后极限存在, 则原极限存在; 原极限存在, 洛之后不一定存在

3. 洛必达法则的使用条件有一条是去心邻域内可导 (当然非去心邻域内可导 $\to$ 相当于加强条件后更加满足条件), 需要强调的是只告知某一个点 n 阶可导则洛必达使用到 $n-1$ 阶, 最后一次不能使用洛必达 (一定考虑导数定义)

4. 若不清楚 3 中描述的内容, 以后在做题的时候最后一次（下一步就能得到结果）均采用导数定义

5. 数列极限不能直接使用洛必达（选填题可以使用 $stolz$ 定理), 应当转化成函数极限后使用, 通常的转化方式有两种: 令 $n=x$, 然后令 $x\to+\infty$; 或令 $\frac{1}{n}=x$, 然后令 $x\to 0^+$

6. 使用洛必达法则之后的极限不存在, 不能断定原极限不存在, 应该选择其他方法

7. 如果不是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 总能通过简单变换变成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

补充一个洛必达法则失效的例子

例题 2.71 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

例题 2.72 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$

例题 2.73 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2\cos^2 x}\right)$

2.8 函数不等式问题

本节内容的基础题目属于高中难度，基本上都是构造函数然后利用函数的单调性、凹凸性等性质来证明不等式

需要注意的是，在后续的证明题中，会大量运用常见的不等式，这里简单总结一下

2.8.1 常见的不等式

(1) 基本不等式

$$a>0,b>0,a+b\geq 2\sqrt{ab},\text{当}a=b\text{ 时等号成立}$$

(2) 当 $x>0$ 时有

$$x>\sin x$$

$$\ln(1+x)<x$$

$$e^x-1>x$$

(3) 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$$

(4) 柯西不等式的积分形式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

特别注意当 $f(x)=1$ 时的形式（“凑 1”）

笔记 这里的不等式不仅会在函数不等式会用到，还会在后面第三章的积分不等式、数列的单调有界、级数的敛散性等问题中（选填题、大题均有）出现，请务必引起重视

2.8.2 利用函数的单调性证明不等式

柠宝：属于高中题目，稍微利用一下常见不等式的放缩即可

例题 2.74 设 $x \in (0,1)$, 证明 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

例题 2.75 证明当 $x \geq 0$ 时, 证明 $\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ 其中 n 为自然数

2.8.3 一类积分题目的放缩技巧

柠宝：保留含有 n 的式子不动, 有界量放到最大, 分母放小 (整体变大), 分子利用常见的不等式进行放缩, 如果不行考虑分部积分将 n 凑在分母上, 利用 "无穷小 × 有界 = 无穷小"

本类题目的特征：积分区间通常是 $0 \to 1$, 最后的极限值一般为 0

例题 2.76 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\ln^n(1+x)}{1+x}dx$

例题 2.77 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \arctan x \frac{\ln^n(1+x)}{1+x}dx$

例题 2.78 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\cos nx \,\mathrm{d}x = 0$

2.8.4 构造变上限积分函数和柯西中值定理来证明简单的积分不等式

常见做法: 若待证明的积分限为 $0 \to 1$, 修改为 $0 \to x$, 进而研究新函数的单调性（22 高数压轴大题）

例题 2.79 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1(x \in (0,1))$, 求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

柠宝：本题有三个方法，分别是

(1) 构造变上限积分函数

(2) 利用柯西中值定理 (关键是出现分式的形式)

(3) 利用区间平移（第三章再讲）

2.9 函数零点问题

本节重点掌握推广的零点定理和无穷区间上保号性的写法

2.9.1 推广的零点定理

定理 2.21 (推广的零点定理)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$, 且 $A \cdot B < 0$, 则函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一个零点, 即 $\exists c \in (-\infty,+\infty)$ 使得 $f(c) = 0$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, 则函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一个零点, 即 $\exists c \in (-\infty,+\infty)$ 使得 $f(c) = 0$

3. 将上述定理中的区间修改为 $(a,+\infty), (-\infty,b)$ 或 (a,b) 均有类似的结论

♡

证明

例题 2.80 设函数 $f(x)$ 满足, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, 且存在 x_0 满足 $f(x_0)<0$, 证明函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少有两个零点

2.9.2 有关中值定理的零点

前面已经讲过，略

2.9.3 注意极限的保号性的应用

例题 2.81 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$, $\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{x-a}=\alpha>0$, 求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内至少有一个零点

例题 2.82 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导, 且 $f'(a)f'(b)<0$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

2.10 数列单调有界大题专题

柠宝：近几年很少出单调有界大题，往年一般作为压轴题的形式出现，考虑到可能区分度不是很高（此类题目对于大部分同学来说难度较大），有淡化的迹象

掌握常见题型的求解即可，对于难题的放缩了解即可，不要走火入魔

有关常见不等式、1 的改写和 0 的改写请自行复习

2.10.1 有关函数的改写

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上可导, 且 $f(x_0)=0$, 则有如下改写

$$f(x)=f(x)-0=f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\quad \xi\text{ 在}x\text{ 和}x_0\text{ 之间}$$

特别的，当 $x_0=0$ 时, 有

$$f(x)=f(x)-0=f(x)-f(0)=f'(\xi)x\quad \xi\text{ 在}x\text{ 和}0\text{ 之间}$$

在积分中，有

$$f(x)=f(x)-0=f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

特别的, 当 $x_0=0$ 时, 有

$$f(x)=f(x)-0=f(x)-f(0)=\int_{0}^{x} f'(t)dt$$

在级数中, 有

$$S(x)-S(x_0)=\int_{x_0}^{x} S'(t)dt$$

特别的, 当 $x_0=0$ 时, 有

$$S(x)-S(0)=\int_{0}^{x} S'(t)dt$$

笔记

1. 证明的总体思路：(1) 能先证哪个就证明哪个, 无论是先证明单调还是先证明有界 (2) 如过证明了单增 → 马上想办法证明有上界

2. 有界性的证明有一般采用数学归纳法

2.10.2 一般大题的流程图

2.10.3 简单例题

例题 2.83 (2018 压轴)$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$, 证明 x_n 收敛，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

例题 2.84 设 $a_1=4, a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 并求此极限

例题 2.85 设 $a_1>0, a_{n+1}=\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}(n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2.10.4 "先斩后奏"利用极限的定义

这里的本质是利用了马上要讲的"压缩映像"原理

定理 2.22

对任意数列 $\{a_n\}$, 若满足 $|a_n-A| \leqslant k|a_{n-1}-A|(n=1,2,\cdots)$, 其中 $0<k<1$, 则 $|a_n-A| \leqslant k|a_{n-1}-A| \leqslant \cdots \leqslant k^{n-1}|a_1-A|$, 令 $n\to\infty$ 可得极限

笔记 上述中的 k 是一个具体的数字，不能与 n 有关，反例: 若 $k=1-\frac{1}{n}$

例题 2.86 设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}, n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2.10.5 "压缩映像"原理的证明及应用

柠宝：本部分涉及"级数"(数二不考)，没学过级数的同学可以在听完级数讲解后再来回看。对于数二的同学只需要了解怎么应用在具体的题目上即可，方法和刚刚讲过的"先斩后奏"是一样的

定理 2.23

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义, $f([a,b])\subset[a,b]$, 并且存在一个常数 k 满足 $0<k<1$, 使得对一切 $x,y\in[a,b]$ 成立不等式

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

则一定有:

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi=f(\xi)$

(2) 由任何初始值 $a_0\in[a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1}=f(a_n), n\in\mathbb{N}_+$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ

例题 2.87 (2016 压轴) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$, 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$, 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$

第 3 章 一元函数积分学

内容提要

- 第一节 不定积分的概念和常见积分公式
- 第二节 三种主要的积分法和常见积分技巧
- 第三节 有理函数的积分和简单无理函数的积分
- 第四节 定积分的概念和性质
- 第五节 变上限积分函数机器求导和微积分基本定理
- 第六节 积分的区间平移、伸缩变换和区间重现公式
- 第七节 有关周期函数的积分
- 第八节 华里士公式和一些积分递推式的证明
- 第九节 柯西积分不等式的证明和应用
- 第十节 积分不等式的证明 (送分绝活)
- 第十一节 定积分的几何应用
- 第十二节 定积分的物理应用
- 第十三节 有关绝对值、max、min 的积分和摆线问题
- 第十四节 (高阶内容)chebyshev 不等式的应用举例

3.1 不定积分的概念和常见积分公式

3.1.1 不定积分的定义

定义 3.1 (原函数)

对于函数 $f(x)$, 若存在函数 $F(x)$, 在区间 I 上: $F'(x)=f(x)$, 或 $dF(x)=f(x)dx$ 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 由定义立即得到: $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.$f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 即

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

笔记

1. 在学习本节"不定积分"时要舍去"定积分"的概念，实际上两者暂时没有联系，不定积分只是求一个原函数，至于"定积分"中的可积性留在本章第四节"定积分的概念与性质"中进行讨论. 类似在学习函数的时候，只关注函数表达式本身，暂时不关心单调性、奇偶性等

2. "变上限积分函数"与"不定积分"有本质区别，在第五节之前不会涉及"变上限积分"的概念，请务必甄别

3.1.2 积分与微分的关系——互为逆运算

这个小知识点的题目主要考察最后是否 $+C$, 主要看最后是求导还是积分，即

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x) \text{ 或} \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C \text{ 或} \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$$

3.1.3 原函数的存在性 (选择题常考)

这里直接给出结论

(1) 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数

(2) 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数

(3) 补充: 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第二类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上可能有原函数

笔记 柠宝：通常情况下，书本上没有写得情况最后的结论都是不确定的. 例如 $F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

3.1.4 不定积分的性质

性质

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x), \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$
2. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C, \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$
3. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x(k$ 为常数 $)$
4. $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

3.1.5 常见的基本积分公式

(1) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$

(2) $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(3) $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$

(4) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

(5) $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(6) $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int\sec^2 x dx=\tan x+C$

(8) $\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$

(9) $\int\sec x\tan x dx=\sec x+C$

(10) $\int\csc x\cot x\,\mathrm{d}x=-\csc x+C$

(11) $\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(12) $\int\csc x\,\mathrm{d}x=-\ln|\csc x+\cot x|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$

(13) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(14) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

(15) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

(16) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

(17) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

笔记 背诵方法: 同导数一样, 有关 $\tan x,\sec x$ 为正; 有关 $\cot x,\csc x$ 为负

3.2 三种主要的积分法和常见积分技巧

柠宝：本节内容熟练掌握，可以解决除了有理函数积分之外的 9 成以上的积分题目

3.2.1 第一类换元法 (凑微分法)

又称“凑微分法”. 若 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$, 且 $\varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)=F(\varphi(x))+C$$

笔记 柠宝重点：$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}\rightarrow$ 以后看见分母有根号, 先利用此式子

例题 3.1 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$

3.2.2 第二类换元法

又称“变量代换”. 设 $x=\varphi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 又设 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C$$

笔记

1. 注意在变量代换的过程中，要满足被代换的部分具有严格的单调性 (保证反函数要存在)
2. 看不懂就令
3. 看不懂就令
4. 看不懂就令

例题 3.2 (2018 年大题) $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

例题 3.3 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$

例题 3.4 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

3.2.3 分部积分法

分部积分法的原理是利用了公式 $(uv)'=u'v+v'u$

设 $u(x),v(x)$ 有连续一阶导数, 则

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

笔记 要注意 uv 的选取, 想要在等号右边的 $\int v\,\mathrm{d}u$ 积分部分得到谁的导数 (此处是 u 的导数), 就把另一个函数 (此处是 v) 凑进去

下设 $P_n(x)$ 是 n 次多项式. 常见的需要利用分部积分的情况如下

(1) $\int P_n(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ （多项式 × 指数），把指数部分拿进去

例题 3.5 $\int xe^x dx$

例题 3.6 (注意“1”的拼凑 $1dx=dx$) $\int\arcsin x dx$

(2) $\int P_n(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arctan x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x$, 把多项式部分拿进去

例题 3.7 $\int x\arctan x dx$

(3) $\int e^{ax}\sin\beta x dx$, $\int e^{ax}\cos\beta x dx$, 利用两次分部积分, 每次都是将指数部分拿进去

例题 3.8 $\int \mathrm{e}^{x}\sin x dx$

3.2.4 表格积分法和组合积分法 (听课补充笔记)

3.2.5 三角换元 (重点)

三角换元的目的是将含有根号的式子 (一般根号里面既有常数又有变量 x), 通过三个等式转换为只含一个变量 t 的式子, 其中原理为

$$
* \begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=1 \\ 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \\ 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \end{cases}
$$

笔记

1. 被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时, 令 $x=a\sin t$, 或 $x=a\cos t$
2. 被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时, 令 $x=a\tan t$
3. 被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, 令 $x=a\sec t$
4. 三角换元的时候不需要考虑定义域和单调性问题
5. 本质上, 这三种情况中的三角代换的选取都是为了凑成 * 中的形式

例题 3.9 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

例题 3.10 请自行推导 $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ 和 $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$ 的积分

例题 3.11 (有关三角代换中 "换回来" 的方法) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

3.2.6 有关三角有理式的积分

形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的积分称为三角有理式的积分, 方法除了常规的利用凑微分、分部积分和换元法, 还有一个方法就是考察 $R(\sin x,\cos x)$ 的 "偏奇偶性"

i) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则令 $u=\cos x$, 即凑 $d\cos x$

ii) 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则令 $u=\sin x$, 即凑 $d\sin x$

iii) 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则令 $u=\tan x$, 即凑 $d\tan x$

笔记 关于谁的奇函数, 就把谁拿进去, 即将另外一个三角变量设为 t

例题 3.12 $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$

3.2.7 不定积分的重要技巧 (重点)

3.2.7.1 技巧一: $\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$

例题 3.13 $\int \dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

例题 3.14 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4x-1)}}$

3.2.7.2 技巧二: 有关三角有理式的积分 (已讲)

例题 3.15 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}dx$

3.2.7.3 技巧三：对于三角积分没有思路时，可以考虑同 $\div \cos^2 x$，目的是凑 $d(\tan x)$

例题 3.16 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$

3.2.7.4 技巧四：将分子写成分母的形式 (重点，与之前讲的 $+A-A$ 相同)

例题 3.17 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$

3.2.7.5 技巧五：保证“整体性”和“一致性”

例题 3.18 $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1} dx$

例题 3.19 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \mathrm{d}x$

3.2.7.6 技巧六：没有思路在题干中找条件 (对题干的复杂部分求导)

例题 3.20 $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2 e^x\left(1+x e^x\right)} dx$

例题 3.21 $\displaystyle\int \frac{1+2\ln x}{x \ln x} \mathrm{d}x$

3.2.7.7 技巧七：幂函数的升次 (也是考虑“整体性”和“一致性”)

例题 3.22 $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^9} dx$

例题 3.23 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4+1}} dx$

3.2.7.8 技巧八：有理积分中，分母的次数较高，优先考虑倒代换

例题 3.24 $\displaystyle\int \frac{1}{x^8\left(1+x^2\right)} dx$

3.3 有理函数的积分和简单无理函数的积分 (待续)

本节的内容重点掌握“待定系数法”，对于理论部分可以不用太过深究

3.3.1 补充内容：多项式除法 (听课补充)

3.3.2 待定系数法的分解方法

定理 3.1

设 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 是一个真分式，其分母 $Q(x)$ 有分解式：

$$Q(x)=(x-a)^a \cdots(x-b)^\beta\left(x^2+px+q\right)^\mu \cdots\left(x^2+rx+s\right)^\nu$$

其中 $a,\cdots,b,p,q,\cdots,r,s$ 为实数; $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$; $\alpha,\cdots,\beta,\mu,\cdots,\nu$ 为正整数, 我们有

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^a}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{a^{-1}}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots\\&+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}\\&+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots\\&+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+rx+s)^\nu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s}\end{aligned}$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,K_i,L_i,\cdots,M_i,N_i$ 都是实数, 并且此分解式的所有系数都是唯一确定的 ♡

结论 上述定理表明, 真分式总可以转化为下列两类分式的和:

$$\frac{A}{(x-a)^k},\quad\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\quad(p^2-4q<0)$$

注意到这里 k 是正整数

再来看具体的分解方法

在应用待定系数法时, 首先要把分母的形式写正确, 设有真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x)$ 已被饮食费解。若分母有有一个因子 $(x-a)^n$, 则分解式有对应项

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

同样的, 若分母中有一个因子 $\left(x^2+px+q\right)^n$ $(p^2-4q<0)$, 则分解式就有对应项

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

笔记 本质上, 分子的假设形式为: 比分母的次数少一次, 且各项系数独立

3.3.3 分母是二次函数的一个重点题目

这里讲两个方法: 一个是待定系数法, 一个是更为简单的求导法

例题 3.25 计算 $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

例题 3.26 (练习) 计算 $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}dx$

例题 3.27 计算 $\displaystyle\int\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}dx$

3.3.4 可化为有理函数的简单无理函数的积分

3.3.4.1 万能代换的记忆方法

对于

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

可通过万能代换

$$t=\tan\frac{x}{2}(|x|<\pi)$$

得到关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的表达式

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

因为 $x=2\arctan t$, 所以 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$, 即 $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

笔记 记忆方法：(听课补充)

3.3.4.2 简单无理函数的积分

五字真诀：看不懂就令

这里指的无理函数积分，特征为被积函数中有形如

$$\sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{或} \sqrt{ax^2+bx+c}$$

的表达式，方法直接令为新变量 t 即可, 例如第一个式子中, 令

$$\sqrt[n]{ax+b}=t, \text{即} x=\varphi(t)=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right)$$

其余的两个同理, 不再赘述

3.3.5 钓鱼积分

存在着一些在各种领域有重要作用的不定积分, 他们都不是初等函数, 即“不可积分类型”, 某些函数在特定区间上的定积分是可以求的, 这里总结如下

3.3.6 特殊积分技巧

例题 3.28 计算 $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, \mathrm{d}x (a<x<b)$

例题 3.29 (组合积分法) 计算 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

例题 3.30 计算 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

3.4 定积分的概念、性质与可积性

定积分的概念在第一章讲用定积分求极限的时候讲过了，这里为了怕大家遗忘，再次简略讲一遍

3.4.1 定积分的概念

定理 3.2 (定积分)

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 如果实数 I 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 的分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$, 而不管 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 如何选择, 都有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i\right|<\varepsilon$$

成立, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分

函数 f 的积分通常用符号

$$\int_a^b f(x) dx$$

来表示. 其中, b 与 a 分别称为积分的上限和下限, f 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫作被积表达式. 字母 x 没有什么特殊的作用, 可用其他任何字母来代替. 例如, 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 表示的是同一个实数

笔记 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的选取是任意的

3.4.2 定积分的性质

性质

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积且非负, 那么
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$
2. 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $f \geqslant g$ 在 $[a,b]$ 上成立, 那么
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
3. 如果 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $f \pm g$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
4. 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么对任意的常数 c, cf 在 $[a,b]$ 上也可积, 且
$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
5. $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$
6. 绝对值不等式
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$
7. 连续非负函数的积分性质：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x) \geqslant 0$ 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$$
进一步，设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $m \leq f(x) \leq M$, 其中 m, M 是常数, 则
$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < M(b-a)$$
8. 定积分的几何意义为曲边梯形的面积 (x 轴上方为正, 下方为负)

3.4.3 积分中值定理

定理 3.3

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

笔记 在满足 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的前提下, ξ 可以在 (a,b) 中, 也可以在 $[a,b]$ 中

3.4.4 定积分的可积性

本节内容较难, 甚至对于数学系同学学的《数学分析》来说, 也属于难点, 所以在学习的时候可以只记结论. 听不懂理论推导的话可以不用管

例题 3.31 证明: $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$

证明 分割 π 指的是 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 其长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$

此时 $f(x)=1(a\leqslant x\leqslant b)$. 对分割 π 作积分和, 有

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=x_n-x_0=b-a$$

因此, 对任何分割 π 以及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的任何取法, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=b-a$$

由定积分定义可以得到

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=b-a$$

进一步, 对于任何常数 c, 成立

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c\int_a^b \mathrm{d}x=c(b-a)$$

例题 3.32 证明 $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\dfrac{b^2-a^2}{2}$

证明 对分割 π 作积分和:

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 是任取的. 这种任意性使得我们很难控制它, 所以先用此子区间的中点 $\eta_i=\left(x_{i-1}+x_i\right)/2$ 来代替 ξ_i, 然后估计这种代替所引起的误差

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\eta_i\right)\Delta x_i$$

上面式子右边的第一个和是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i-1}+x_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\end{aligned}$$

这是一个常数. 由于 ξ_i,η_i 是第 i 个子区间上的两点, 所以

$$\left|\xi_i-\eta_i\right|\leqslant\Delta x_i\leqslant\|\pi\|\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

进而有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\eta_i\right)\Delta x_i\right|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\eta_i\right|\Delta x_i\\&\leqslant\|\pi\|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\|\pi\|(b-a)\end{aligned}$$

再由式子 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\eta_i\right)\Delta x_i$ 可以得到

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i-\frac{b^2-a^2}{2}\right|\leqslant\|\pi\|(b-a)$$

由此可以看出, 对任给的 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\varepsilon/(b-a)$. 当分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时, 不论 ξ_i 在第 i 个子区间如何选择, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i-\frac{b^2-a^2}{2}\right|<\varepsilon$$

由定积分定义, 正是

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{b^2-a^2}{2}$$

有了上面的两个例题作为铺垫, 我们引入三个命题

命题 3.1

设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在（等价描述为在 $[a,b]$ 上可积）

(1) 个别点的函数值不影响整个积分的值

(2) 对于定积分来说, 直线的面积为 0

(3) 对于二重积分来说, 直线的体积, 面的体积为 0

(4) 对于三重积分来说，直线的体积，面的体积为 0

例题 3.33 下列选项正确的是 (　　)

A. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$f(x)\geq 0$ 但不恒等于 0 , 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$

B. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(x)\geq 0$ 但不恒等于 0 ，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$

3.4.5 定积分可积性的充分条件和必要条件

必要条件：若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

充分条件：

- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定存在
- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定存在
- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定存在
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调（闭区间有定义当然闭区间有界）, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定存在

笔记 之前的课程中说过, 凡是没有明确提到的, 要么那个命题是错的, 要么是不确定的

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且有无穷多个第一类间断点, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可能存在, 当然也可能不存在

(2) 对于 $f(x)$ 有第二类间断点的情况，不属于“定积分”的讨论范畴, 在“反常积分”章节中详细讨论

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定存在; 反之, 若仅在闭区间有界, 定积分不一定存在. 反例为 Dirichlet Function:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}\quad \text{在}[0,1]\ \text{上是有界函数}$$

3.4.6 关于定积分不存在的判别方法 (超纲内容)

根据定积分的定义, 用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{x-1}<x_\pi=b$ 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间, 第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 记 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$. 如果有下列情况之一出现, 就说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积

- 如果对 $[a,b]$ 的某种分法, 得到的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在
- 如果对 $[a,b]$ 的某两种分法, 得到的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在但是不相等
- 如果对 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的一种取法, 得到的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在

- 如果对 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的两种取法, 得到的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在但是不相等

3.5 积分第一中值定理和积分第二中值定理及其应用

3.5.1 积分第一中值定理

定理 3.4 (积分第一中值定理)

设 $f,g \in R[a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b], g$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in [m,M]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

如果 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别是, 如果 $f \in C[a,b]$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

♡

笔记 上述的 $\xi \in [a,b]$ 均能改进为 $\xi \in (a,b)$

证明

3.5.2 积分第二中值定理

定理 3.5 (积分第二中值定理)

设 $f \in R[a,b], g$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

特别是, 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调增加且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果 g 在 $[a,b]$ 上单调减少且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

♡

3.6 变上限积分函数及其求导和微积分基本定理

3.6.1 变上限积分函数

定理 3.6

设 $x_0 \in [a,b]$ 为任意固定的一点, 则有如下结论:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则变上限积分 $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则变上限积分 $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数, 且

$$\Phi'(x) = f(x), x \in [a,b]$$

♡

笔记

1. 要看 $\Phi(x)$ 是否连续, 就看 $\Phi(x)$ 所表示的面积是否连续变化, 因为"线"的面积为 0, 所以"面积连续变化", 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Rightarrow \Phi(x)$ 连续

2. 要确定 $\Phi(x)$ 是否可导, 就看此点在 $f(x)$ 处是否连续, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow \Phi(x)$ 可导且 $\Phi'(x)=f(x)$

3. 对于第 2 种情况, 有 $\Phi'(x_0)$ 存在但是不等于 $f(x_0)$ 的情况 ($f(x)$ 在此处有可去间断点, $\Phi'(x_0)$ 的值为"空点")

例题 3.34 设 $f(x)=\begin{cases} x, x\neq 1 \\ 5, x=1 \end{cases}$, 讨论 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的连续性和可导性

3.6.2 变上限积分函数的求导

设 $f(x), g(x)$ 连续, 有

1.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=-f(x)$$

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 可导函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 且其值域不超出区间 $[a,b]$, 则 $\Phi(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[g(x)]g'(x)$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可导, 当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时, $a\leq\varphi(x),\psi(x)\leq b$, 则 $y=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

3.6.3 原函数与变上限积分函数的关系

笔记

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 特别注意: 若 $f(x)$ 在区间内有第一类间断点, 则不存在原函数 (但是存在变上限积分函数, 但是此时的变上限积分函数仅仅是一个连续函数不是 $f(x)$ 的原函数)

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t+C$$

其中 C 是任意常数. $x_0, x\in[a,b]$, 且 x_0 为某定值

3. 初等函数的原函数: 由于初等函数在定义域内连续, 故一定有原函数, 但是他们的原函数不一定是初等函数 (说人话: "不可不定积分", 他们的原函数不能通过初等函数表达)

此处说的不可积分指的是原函数不是初等函数, 换句话说原函数用现有的初等函数不能表示, 他们的表示形式可能是更高级别的形式, 比如无穷级数. 以下是常见的"不可积分函数"

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x, \int \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x, \int \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

3.6.4 微积分基本定理

定理 3.7 (微积分基本定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

笔记 此公式的应用自然不必多说，懂的都懂，需要注意的是要满足被积函数在闭区间上连续才可以使用，否则要划分区间

证明

例题 3.35 (以下做法错误)

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

正解:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \arctan\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{0-} + \arctan\frac{1}{x}\bigg|_{0+}^1 \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

上面的结果利用了牛顿—莱布尼茨公式的推论，如下

定理 3.8

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数, $F(a+0)=\lim_{x\to a+0}F(x), F(b-0)=\lim_{x\to b-0}F(x)$ 都存在, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_{a+0}^{b-0} = F(b-0) - F(a+0)$$

证明 证明方法同“中值定理”中“补充定义函数”的方法类似

$$\text{引入辅助函数}G(x) = \begin{cases} F(a+0), & x = a \\ F(x), & a < x < b, \\ F(b-0), & x = b, \end{cases} \text{则}G(x)\text{ 在}[a,b]\text{ 连续, 且}G'(x) = F'(x) = f(x)(x \in (a,b))$$

3.7 积分的区间平移、伸缩变换和区间重现公式

3.7.1 平移变换

很多时候为了求解、证明某个积分表达式，需要将区间进行平移，例如

- 满足区间重点为原点

$$\int_0^2 \to \int_{-1}^1$$

- 积分下限为 0

$$\int_2^5 \to \int_0^3$$

这种保持区间长度不变的变换，称为“平移变换”. 操作方法：左减右加

1. 向左平移 a 个单位 → 令 $x-a=t$
2. 向右平移 a 个单位 → 令 $x+a=t$
3. 一般辅导书上会将上述两种变换写成 $x=t+a$ 和 $x=t-a$

3.7.2 伸缩变换

另外一种，需要将区间进行伸缩，使得两个积分的区间长度一致，例如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \to \int_0^{\pi} g(x)dx$$

操作方法：扩乘缩除

1. 扩大 a 倍 → 令 $ax=t$
2. 缩小 a 倍 → 令 $\frac{x}{a}=t$ (理解为扩大到 $\frac{1}{a}$ 倍)

例题 3.36 (重点题目，核心思想为“形式统一”) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且严格单减, 证明: $\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$\int_0^{\lambda} f(x)dx > \lambda\int_0^1 f(x)dx$$

3.7.3 定积分的奇偶对称性

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当} f(x) \text{ 为奇函数时} \\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

3.7.4 定积分的广义对称性 (重点)

此定理在二重积分、三重积分、曲线曲面积分还会有不同形式的体现

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当} f(x) \text{ 关于直线} x=\frac{a+b}{2} \text{ 奇对称时} \\ 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{ 关于直线} x=\frac{a+b}{2} \text{ 偶对称时} \end{cases}$$

3.7.5 区间重现公式

区间重现公式为：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

常见推论：

1.
$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

2.
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

证明

笔记 区间重现公式的使用情况

1. 出现三角函数积分, 尤其是积分限为 $0\to\pi$ 或 $0\to\frac{\pi}{2}$
2. 出现有关 $\ln e^x$ 的积分时
3. 没有思路的时候

例题 3.37 求 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

例题 3.38 当 $p>0$ 时, 求下列定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^p x}dx$$

例题 3.39 求 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x dx$

3.8 有关周期函数的积分

3.8.1 有关周期函数的重要结论

定理 3.9

设函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 对于任意的实数 x 有 $f(x+T)=f(x)$, 在 $[0,T]$ 上可积 (或连续), 有

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$

定理 3.10

设连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$$

定理 3.11

设连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

证明

3.8.2 周期函数的积分均值极限定理

柠宝：本定理要求会证明

定理 3.12

设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数, 周期为 T(T > 0), 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

证明

3.8.3 注意有关三角函数加绝对值之后的周期改变

例题 3.40 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=A$, 求 $I=\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x$ 的值

例题 3.41 证明:

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

3.9 华里士公式和积分递推式

3.9.1 华里士公式的证明

定理 3.13

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3}, & n \geqslant 3 \text{ 为奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \geqslant 2 \text{ 为偶数} \end{cases}$$

证明

3.9.2 部分积分递推式的证明

例题 3.42 (2019, 数一,10 分) 设 $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=0,1,2,\cdots)$

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\cdots)$

(2) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

例题 3.43 求 $\displaystyle\int \tan^n x dx$ 的递推式

3.10 柯西积分不等式的证明和应用

柠宝：柯西积分不等式本身属于数一专属内容, 但是从培养数学思维的角度, 建议数二数三均学习

3.10.1 柯西积分不等式及其证明

这里以例题的形式呈现

例题 3.44 证明：

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

笔记 注意"1" 的拼凑

3.10.2 典型例题

笔记 需要用到柯西积分不等式的显著条件为：待证明的不等式中出现了平方、或能写成平方的形式。

几个改写：

$$1 = \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad \sqrt{f(x)} \sqrt{f(x)} = f(x)$$

例题 3.45 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$, 求证:

$$\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x \mid\leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x) \mathrm{d}x$$

例题 3.46 设 $f(a)=f(b)=0, \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x = 1, f'(x) \in C[a,b]$

(1) 求 $\displaystyle\int_a^b x f(x) f'(x) \mathrm{d}x$

(2) 证明:

$$\int_a^b f'^2(x) \mathrm{d}x \int_a^b x^2 f^2(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}$$

3.11 积分不等式 (送分绝活)

3.11.1 常规操作：构造变上限积分

本部分内容与第二章第八小节中2.8.4(这个红色是超链接可以直接点击) 完全一致

方法: 若待证明的积分限为 $0 \to 1$, 修改为 $0 \to x$, 进而研究新函数的单调性. 如果积分限为 $a \to b$, 修改为 $a \to x$

注：本方法成功押中 2022 考研数学压轴大题

例题 3.47 (2022 压轴, 数一、数二) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geqslant 0$ 的充分必要条件是对任意不同的实数 a, b, 都成立

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

例题 3.48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

例题 3.49 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$$

3.11.2 泰勒展开 + 绝对值不等式 + 两边积分

柠宝：本方法适用于出现诸如 max $|f'(x)| \leq M$, 或者 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导 (连续可导可以留用闭区间连续函数的最值、介值定理), 即告知 n 阶导数的界或者要证明 n 阶导数的界 (一般不超过三阶) 的题目

解题步骤：

- 泰勒展开
- 加绝对值不等式，通常情况会利用三角不等式
- 两边积分

笔记 唯一需要注意的地方是泰勒展开的 4 种形式的选取，另外不要忘了有关积分中的重要改写:

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上可导, 且 $f(x_0) = 0$, 则有

$$f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt$$

特别的, 当 $x_0 = 0$ 时, 有

$$f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

例题 3.50 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, $f(a) = 0$, 求证:

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

例题 3.51 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数, $M = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}M$$

笔记

特别注意 特别注意 特别注意

1. 对于出现区间两边“同等地位”的条件 (例如 $f(a) = f(b) = 0$), 考虑对区间中点进行处理, 此处与2.6.3.5(可点击) 的方法一致：“当精度不够 (例如算出来的是 $\frac{1}{2}$ 题目却要求 $\frac{1}{4}$ 时) 或没有思路时考虑对区间中点进行处理”

例题 3.52 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零, 且其导数 $f'(x)$ 连续。并且有 $f(a)=f(b)=0$. 试证: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

上面讲的"对区间中点的操作"可以解决一个各大考研讨论群里会被问到的问题, 如下

例题 3.53 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$, 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$$

3.11.3 区间离散化

本部分内容先看 B 站视频 (可直接点击跳转): 定积分证明重难点——区间的离散化

例题 3.54 (2019 数一、数二、数三压轴大题) 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积

例题 3.55 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $|f'(x)|<M$, 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

3.12 定积分的几何应用

3.12.1 平面图形的面积

- 根据定积分的几何意义, 可以计算与 x 轴围成的面积, 需要注意的是若图像在 x 轴下方, 需要加绝对值
- 建议使用二重积分求面积
- 极坐标的面积为: 若平面域 D 由曲线 $r=r(\theta),\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$, 其面积为

$$S=\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_a^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

笔记 直角坐标、极坐标和二重积分下的"dS (面积微元)": (听课做笔记)

3.12.2 曲线的弧长

需要掌握以下三种情况弧长的推导过程

3.12.2.1 直角坐标下的曲线弧长

笔记

1. 本部分内容与数学一的第 1 型曲线积分高度重合, 请数学一的同学引起重视
2. 第 1 型曲线积分只是在求曲线弧长的基础上, 多了一个被积函数, 类似于求面积中的

$$\iint_D 1\ \mathrm{d}x dy \text{ 和 } \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x dy$$

设曲线段 C 由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出, 其中 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数, 则该曲线段的弧长为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

3.12.2.2 参数方程下的曲线弧长

设曲线段 C 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 给出，其中其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数，则该曲线段的弧长为

$$s = \int_a^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

3.12.2.3 极坐标下的曲线弧长

设曲线段 C 由极坐标坐标方程 $r = r(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数，则该曲线段的弧长为

$$s = \int_a^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

3.12.3 旋转体的体积和侧面积

本部分强烈建议用二重积分来做

本部分强烈建议用二重积分来做

本部分强烈建议用二重积分来做

可以直接点击超链接：再也不背公式啦！一个式子搞定旋转体的表面积和体积

3.13 物理应用 (仅数一、数二)

本部分强烈建议用二重、三重（数一）积分来做

本部分强烈建议用二重、三重（数一）积分来做

本部分强烈建议用二重、三重（数一）积分来做

对于考研数学的物理应用来说，近几年有淡化的趋势，究其原因是因为大家的物理水平普遍不高，基本停留在初中的“阿基米德原理”的水平上

物理应用的几个常见问题：微分方程问题、液体的侧压力、抽水做功、转动惯量、求器件质量、万有引力

3.13.1 柠宝の分析

对于考研数学来说，此处的物理应用是“单变量物理应用”,，重度使用“微分运算”，将任何变量都写成一个变量的函数，此时的“单变量”通常情况下，变量都是时间 t，或者“位置”（可以是一维的 x 也可以是二维的 (x, y)）

一般而言，题干中经常会给出“XX 对时间 t 的变化率”，变化率就是一阶微分

积分就是求和，求和就是积分 对于微分运算，可以直接对物理公式进行微分运算，以下是一些例子：

- 做功的原始公式为 $W = Fx$，$dW = F(x)dx$，注意此时一定要把 F 写成 x 的函数，即 $F = F(x)$ 那么整个的做功（运动轨迹是直线段）可以写成

  $$W = \int_a^b F(x)dx$$

  若运动轨迹是平面曲线，则可以采用第二类曲线积分
- 动能公式为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$，通常情况下 $v = v(t)$，两遍微分得到

  $$dE = mvdv$$

而 $dv=v'tdt$，所以 $dE=mv(t)v'(t)dt$，从而得到动能的计算公式

$$\int_{t_0}^{t_1} mv(t)v'(t)dt$$

当然上述的动能公式是把 v 看作是时间 t 的函数，若 v 是位移 x 的函数，上下标和被积函数作相应改动

对于可以直接列出积分式子的物理应用来说，通常不会考虑定积分，而是考虑二重积分、三重积分、曲线曲面积分，对于"旋转体的表面积和体积"，可以直接点击超链接一个公式搞定旋转体的表面积和体积

这个视频用到的一个核心技巧就是：先考虑被积元素对应的物理量（或者是几何量），再对整个被积区域进行积分即可（可能是定积分，也可能是二重积分或者三重积分甚至曲线曲面积分）

3.13.2 微分方程的物理应用

例题 3.56 一质量为 m 的船以速度 v_0 行驶，在 $t=0$ 时，动力关闭，假设水的阻力正比 v^n，其中 n 为一常数，v 为瞬时速度，求速度与运行距离的函数关系

例题 3.57 设水瓶内热水温度为 T, 室内温度为 T_0, t（以小时为单位）。根据牛顿冷却定律知：热水温度下降的速率与 $T-T_0$ 成正比。又设 $T_0=20°\mathrm{C}$, 当 $t=0$ 时, $T=100°\mathrm{C}$, 并知 24 小时后水平内温度为 $50°\mathrm{C}$，问几小时后瓶内温度为 $95°\mathrm{C}$?

3.13.3 "定积分"的物理应用

3.13.3.1 侧压力

基础公式: $P=\frac{F}{S}; F=PS$

基于所有物理量都用 x 表示的中心思想，只需要将 P（压强）和 S (受力面积）用 x 表示即可

例题 3.58 有一椭圆形薄板, 长半轴为 a, 短半轴为 b, 薄板垂直立于水中, 而其短半轴与水面向齐，求水对薄板的侧压力

例题 3.59 半圆形闸门半径为 R，将其垂直放入水中，且直径与水面齐，设水的密度 $\rho=1$，若坐标原点取在圆心，x 轴正向朝下，则闸门所受压力 p 为（ ）

A. $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

B. $\displaystyle\int_0^R 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}dx$

D. $\displaystyle\int_2^R (R-x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

3.13.3.2 抽水做功

基础公式: $W=Fx$

例题 3.60 由抛物线 $y=x^2$ 及 $y=4x^2$ 绕 y 轴旋转一周构成一旋转抛物面的容器，高为 H，现于其中盛水，水高 $\frac{H}{2}$，问要将水全部抽出, 外力需做多少功?

例题 3.61 设半径为 R 的半球形容器装满水, 水面与地面平行，将其抽出至离水面距离为 H 的地方, 需要做功多少?

3.13.3.3 转动惯量

基础公式: $J=\sum m_i r_i^2$, 其中 r 为质量微元到转轴的垂直距离

例题 3.62 求体密度分布为 ρ 的实心球对其过球心的转轴的转动惯量

3.13.3.4 求器件质量

基础公式: $m=\rho V$

笔记

此处的体积 V 在不同维度下是不一样的

1. 在一维线器件下, v 指的是长度即 $dV=dx$
2. 在二维薄片 (面) 器件下, v 指的是面积即 $dV=d\delta=dxdy$
3. 在三维体器件下, v 指的是体积即 $dV=dxdydz$

例题 3.63 推导出密度分布分别为 $\rho=\rho(x);\rho=\rho(x,y);\rho=\rho(x,y,z)$ 的器件的质量，其中器件分别为一维线器件、二维面器件、三维体器件

3.13.3.5 万有引力

基础公式: $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$

例题 3.64 设有一质量均匀的细直杆 AB，其长为 l，质量为 M

(1) 在 AB 的延长线上与端点 B 的距离 a 处有一质量为 m 的质点 N_1, 试求细杆对点 N_1 的引力

(2) 在 AB 的中垂线上到杆的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_2, 试求细杆对点 N_2 的引力

例题 3.65 有一个半球碗的碗面方程为 $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$，其面密度处处为 $3\,\mathrm{kg/m^2}$，有一质量为 $1\,\mathrm{kg}$ 的质点 O 位于球心 $(0,0,0)$ 处，已知半圆球碗对质点的引力为 $a\cdot G\pi$（单位 N），其中 G 为万有引力常数，求 a

3.14 有关绝对值、max、min 的积分和摆线问题

3.14.1 有关绝对值、max、min 的积分

笔记 1. 一句话搞定：找到相等的时候, 以去掉绝对值、max、min 为最终目标

2. 本方法适用于后续出现二重积分、三重积分的相关绝对值、max、min 的题目

例题 3.66 求

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$$

例题 3.67 求

$$\int_0^3\max\left\{x,x^2\right\}xdx$$

3.14.2 摆线问题

设 $L=\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 求其长度和与 x 轴围成的面积

笔记 重点掌握“非显函数形式的参数方程的二重积分计算方法”

3.15 (高阶内容)chebyshev 不等式解决定积分不等式问题

3.15.1 chebyshev 不等式及其证明

命题 3.2

若函数 $f(x), g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 则有

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$$

证明 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 对于 $\forall x, y \in [a,b]$

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geq 0$$

从而

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geq f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

两边对矩形区域 $[a,b]\times[a,b]$ 二重积分, 有

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

笔记

- 如果 $f(x), g(x)$ 单调性相反, 不等号反向 (证明类似)
- 本质上是排序不等式的积分表达, 即 “顺序 $\geq$ 乱序 $\geq$ 逆序”, 单调性同取极大值, 单调性相反取极小值
- 当题干中明确知道被积函数单调性的时候, 利用此等式可以快速得到答案

3.15.2 chebyshev 不等式的应用举例

例题 3.68 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调递增, 证明

$$\int_a^b xf(x)dx > \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

例题 3.69 证明: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$

例题 3.70 比较 $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{\sin x}dx$和$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{\cos x}dx$ 的大小关系

例题 3.71 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且递增, 证明:

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n f(x)dx \leq \frac{1}{n+1}\int_a^b f(x)dx$$

例题 3.72 设函数 $f(x)>0$ 且在 $[0,2018]$ 上连续, 又有 $\displaystyle\int_0^{2018} f(x)dx = 1$, 证明:

$$\int_0^{2018} f(x)e^{f(x)}dx \int_0^{2018} \frac{1}{f(x)}dx \geq 2019\times 2018$$

例题 3.73 设函数 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 证明不等式:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \geq \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}$$

第 4 章 反常积分 (广义积分)

内容提要

- 第一节　反常积分的概念和两个标准函数
- 第二节　反常积分的判别法

柠宝：终于结束了前三章的折磨，从本章开始一直到整个考研数学复习结束，难度远远低于前三章。可以松口气了

4.1 反常积分的概念和两个标准函数

4.1.1 反常积分的定义

定义 4.1 (无界区间上的反常积分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，且在任意有限区间 $(a,A]\subset[a,+\infty)$ 可积，若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 (或称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积)，其积分值为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

♣

定义 4.2 (暇点)

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的暇点 (也称为无界点). 无界函数的反常积分也称为瑕积分

♣

定义 4.3 (有界区间上的反常积分：瑕积分)

设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果上述极限不存在，则称反常积分发散

类似可以定义 $[a,b)$ 上连续，点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点的反常积分，不作赘述

♣

定义 4.4

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，点 c 为函数 $f(x)$ 的暇点，如果反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

♣

笔记

对于反常积分来说，有且仅有两种情况

(1) 无界区间上的反常积分 (在区间内没有瑕点)

(2) 有界区间上的反常积分 (在区间内有且仅有一个瑕点)

(3) 对于其余的任何情况 (例如有界区间有两个暇点或者既是无界区间又有暇点),一律考虑划分区间

4.1.2 两个标准函数

对于考研数学来说，这两个标准函数可以称为“反常积分敛散性判断的基石”

(1)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \begin{cases} p>1, & \text{收敛} \\ p\le 1, & \text{发散} \end{cases}$$

(2)

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \begin{cases} p<1, & \text{收敛} \\ p\ge 1, & \text{发散} \end{cases}$$

笔记

1. 第 (1) 种情况是“无界区间上的反常积分”, 区间内没有任何暇点
2. 第 (2) 种情况是“有界区间上的反常积分”, 区间内有且仅有一个暇点
3. 记忆方法和推论：(上课补充，十星重点)

4.1.3 反常积分的判别法

笔记

1. 敛散性与有界值无关 (包括被积函数有界和积分区间有界)
2. 瑕点的积分分母 (等价无穷小) 的次数 <1 and 无穷区间的积分分母 (等价无穷大) 的次数 >1
3. 区间内部有暇点，拆

例题 4.1 判断下列反常积分的敛散性

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \sin x}{\sqrt{x^3+a^2}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

例题 4.2 讨论反常积分 $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 的敛散性，若收敛计算其值

4.1.4 上下限均为无穷的反常积分和柯西主值

定义 4.5

设函数 $f(x)$ 在 R 上连续，对于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 当且仅当

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \text{ 都收敛时}$$

才认为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

定义 4.6

对于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 若

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}[F(A)-F(-A)]$$

收敛，则称该极限值为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauthy 主值，记为

$$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

♣

笔记

1. 反常积分收敛，则 Cauchy 主值一定存在且等于其收敛值. 反之不一定成立
2. 对于 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 的无穷限，考虑成“两个独立的无穷限”

4.1.5 重要反例和常见结论

例题 4.3 若 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 下列说法正确的是 (　　)

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

B. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

柠宝：上面两个选项都是错误的，这里对于数一数三考级数的同学来说要务必引起重视，结论与级数对应的结论大相径庭.

反例如下：若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上按照如下方式定义

$$f(x)=\begin{cases} n+1, & x\in\left[n,n+\frac{1}{n(n+1)^2}\right] \\ 0, & x\in\left(n+\frac{1}{n(n+1)^2},n+1\right)\end{cases}{}^{n}\quad n=1,2,\cdots$$

可以证明，$\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但是很明显 $f(+\infty)$ 无界

例题 4.4 证明: 积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛

证明 因为被积函数是非负的, 故只要证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛即可. 因为 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数, 故当 $n\geqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^6\sin^2 x}&\leqslant(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\sin^2 x}\\&=2(n+1)\pi\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+n^6\sin^2 x}\\&\leqslant 2(n+1)\pi\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{\cos^2 x+n^6\sin^2 x}\\&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\left(n^3\tan x\right)}{1+\left(n^3\tan x\right)^2}\\&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\\&\leqslant\frac{2\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

笔记

从无穷级数收敛的定义，立刻可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 自然联想到，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是不是 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 显然这个反例就说明此结论错误. 对于

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x}$$

显然当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 不仅不趋于 0，而且是无界的，因为当 $x = n\pi$ 时，$f(n\pi) = n\pi$

例题 4.5 (2016 数一选择题第一题) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛，则（　　）

A.$a < 1$ 且 $b > 1$

B.$a > 1$ 且 $b > 1$

C.$a < 1$ 且 $a + b > 1$

D.$a > 1$ 且 a $+ b > 1$

例题 4.6 计算 $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$

例题 4.7 计算 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

例题 4.8 计算 $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \,\mathrm{d}x$

例题 4.9 设 $a > 0$. 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$$

4.2 反常积分的判别法

实际上在考研数学 (统考) 的范围内，反常积分只需要掌握最为简单的比较判别法和根据标准函数来判别即可. 在《数学分析》中还有 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法 (统称为 “A-D 判别法”) 属于超纲内容, 有兴趣的可以参阅相关资料

4.2.1 比较判别法

在介绍比较判别法之前，我们利用 “单调有界准则” 对 “无穷区间上的非负函数” 的收敛性给出对应的充分条件

在后续的讨论中，总假定 f 在任意有限区间 $[a, A](A > a)$ 上可积, 不再一一说明

设 $f \geqslant 0$, 则积分 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 是上限 A 的增函数 (这相当于正项级数中的部分和), 因而 $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 对 A 而言有界, 从而得到

定理 4.1

若 f 是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界

根据上述定理，我们可以得到此定理的推论形式，即 “比较判别法”

定理 4.2

设对充分大的 x, 函数 f 和 g 满足不等式 (考虑为什么仅需满足 "充分大的 x"？)

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

那么:

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散

笔记 "大的收敛，小的收敛；小的发散，大的发散"

例题 4.10 证明 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ 收敛

对于上面的比较判别法，有其对应的极限形式，即"比较判别法的极限形式"

定理 4.3

设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

那么:

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散

(2) 当 $l=0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散

笔记 (十星重点) 因为本质上比较判别法以及比较叛判别法的极限形式，都是利用了"单调有界准则"，所以仅针对 $[a,+\infty)$ 上的非负函数有效, 或者是当函数的自变量充分大时函数非负有效，其余情况无效

柠宝：注意到无穷区间的"区间离散化"处理:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

4.2.2 能算出来就一定收敛——推广的微积分基本定理

例题 4.11 计算下列积分:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}dx$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\mathrm{d}x$

4.2.3 选择题中的常见结论

1. 当 $a>1$ 时

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x} \begin{cases} 收敛, p>1, \\ 发散, p<1, \\ 收敛, p=1, q>1 \end{cases}$$

2.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\begin{cases} 收敛, p<1, \\ 发散, p \geqslant 1. \end{cases}$$

3. 当 $p<1$ 时

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}收敛$$

4. 当 $k \geqslant 0$ 时

$$\int_a^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \begin{cases} 收敛, \lambda>0, \\ 发散, \lambda \leqslant 0, \end{cases}$$

5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx=\sqrt{\pi}$$

4.2.4 典型例题与历年真题

例题 4.12 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} x^p\left(\mathrm{e}^{1-\cos \frac{1}{x}}-1\right) \mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是（ ）

A.$(-\infty, 2)$

B.$(-\infty, 1)$

C.$(-1,+\infty)$

D.$(1,+\infty)$

例题 4.13 下列反常积分发散的是（ ）

A. $\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

B. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x}$

D. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1) \ln^2(1+x)}$

例题 4.14 （2010 真题）设 m, n 为正整数，证明反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，且敛散性与 m, n 的取值无关

例题 4.15 （2016 真题）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) \mathrm{d}x$ 收敛

（2）若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) \mathrm{d}x$ 的值

注：在级数中有绝对收敛和条件收敛的概念，同样的，反常积分中亦是如此. 但是参阅各大辅导书以及考纲，并未对反常积分的绝对收敛与条件收敛有所规定，所以这里跳过

第 5 章 多元函数微分学

内容提要

- 第一节 多元函数的概念、极限与连续性
- 第二节 多元函数的偏导数与全微分
- 第三节 多元函数的微分暨复合抽象函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的偏导数计算公式及其运用
- 第四节 复合函数求导法的应用——隐函数微分法
- 第五节 多元函数的最大值、最小值与极值问题
- 第六节 (仅数一) 多元函数的方向导数、梯度、几何应用与二元函数的泰勒公式

5.1 多元函数的概念、极限与连续性

5.1.1 多元函数的概念

定义 5.1

设 D 为 xOy 平面上一个平面点集。如果对 D 中任意一点 (x,y) 按照确定的规则 f, 变量 z 总有唯一的值与点 (x,y) 对应, 则称变量 z 是变量 x 和 y 的二元函数, 记为 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 。其中 x 和 y 称为自变量,z 称为因变量, 平面点集 D 称为 $z=f(x,y)$ 的定义域, 函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记为 $f(D)$

几何意义: 通常情况下, 二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的几何图形为空间直角坐标系下的一张曲面, 该曲面在 xOy 平面上的投影区域就是该函数的定义域 D

笔记

1. 一元函数到二元函数是质的变化，二元函数到三元、多元函数只有量的变化

2. 与一元函数一样，二元和二元以上的函数本身，只和定义域和对应关系有关，与用什么字母表示自变量活因变量没有关系。例如只要 (u,v) 和 (x,y) 属于同一个定义域 D, 则 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 与 $z=f(u,v)=u^2+v^2$ 表示同一个函数

例题 5.1 已知 $z=f(x,y)=x+y+\varphi(x+y)$, 当 $y=0$ 时, $z=x^2$, 求 $f(x,y)$ 的表达式

例题 5.2 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$, 并且已知 $y=1$ 时, $z=x$, 求 $f(x)$ 和 z 的表达式

例题 5.3 设 $f\left(x-y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x,y)$ 的表达式

笔记 无论是多元函数还是一元函数，最关键的是区别函数的自变量。对于任何函数 $f(*)$ 其表示的含义是以 $*$ 整体为变量的函数，如上述例 5.3 中，虽然该函数右边的等式是 x,y 的表达式，但其自变量是 $x-y$ 和 $\frac{y}{x}$，而不是 x 和 y，要求以 x 和 y 为自变量的表达式，必须通过变量代换，这一点在后面复合函数的求导过程中尤为重要。

5.1.2 多元函数的极限

定义 5.2 (二元函数的极限)

设函数 $f(x,y)$ 在开区域或闭区域 D 有定义, $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 是 D 的内点或边界点, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 正数 δ, 使得当 $(x,y)\in D$, 且 $0<\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

♣

笔记

1. 注意到定义中的不等式为 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 而不是 $0\leq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, 此处的原因与一元函数中的极限是一样的，我们只关心这个点 $P(x_0,y_0)$ 附近的函数值, 至于 f 在 P 有无定义，或者即使有定义，对应的值 $f(P)$ 也不会被考虑.

例如对于函数 $f(p)=f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\quad p=(x,y)\neq(0,0)$, 显然 f 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 上有定义, 但这无碍于我们来考虑极限 $\lim\limits_{p\to 0} f(\boldsymbol{p})$

由于

$$0\leqslant f(p)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant x^2+y^2=\|p\|^2$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\|p-0\|=\|p\|<\delta$ 时, 有

$$0\leqslant f(p)\leqslant\|p\|^2<\delta^2=\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{p\to 0} f(p)=0$$

2.(重点) 对于单变量函数的极限的时候，我们考虑了左右两侧的极限，是因为此时自变量的空间是一维的 (直线), 但是对于多变量函数而言 (以二元为例), 他们的函数定义域在这一点附近是一个二维平面，所以考虑极限的时候，自变量的趋近方式可以沿着种种不同的直线方向，也可以沿着某条曲线路径去趋近的，只有当任何方式趋近的时候极限都一样，我们才称其极限 (重极限) 存在

与一元函数中的海涅定理1.2.5一样，多元函数中也有对应的形式

定理 5.1 (多元函数的 Heine 定理)

设 $D\subset\mathbf{R}^n, f:D\to\mathbf{R}$, 点 $\boldsymbol{a}\in D'$. 函数极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

的充分必要条件是对任何点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset D, \boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{a}(i=1,2,3,\cdots)$ 且 $\boldsymbol{x_i}\to\boldsymbol{a}(i\to\infty)$ 数列极限，都有

$$\lim_{i\to\infty} f\left(\boldsymbol{x_i}\right)=l$$

♡

重点：多元函数极限存在的条件是对于任意的趋近方式，极限均存在且相等。考虑此命题的逆否命题就能得到极限不存在的判定条件：若点 $P(x,y)$ 沿两条不同路径趋近于点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 得到的值不相等, 则可断言 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 不存在。换句话说，二元函数或者多元函数的极限没有一元函数中的“左右极限”的区分

在对多元函数极限的求解中，能够用到的方法只有“选择特殊路径证明极限不存在”、“等价无穷小”、“不等式放缩”。注意到洛必达法则在多元函数中是没有的

例题 5.4 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在

笔记

1. 在极限中，要注意区别以下三种情况：二重极限存在是累次极限存在的既非充分又非必要条件

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

第一种显然是我们这里所讲的二元函数极限, 其求解必须遵循二元函数极限的规则; 后面两种实际上是一元函数的极限, 只不过是求累次极限。二元极限和一元极限是两个不同的求解范畴, 因此两者没有必然的关联。

2. 如果两个累次极限的值不相等，则此二重极限不存在

例题 5.5 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

5.1.3 多元函数的连续性

定义 5.3

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某实心领域内有定义，若

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)-f\left(x_0,y_0\right)\right]=0$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续

♣

笔记

1. 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某实心领域内有定义，也就是不仅这个点要存在，附近的点也要存在
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right)$

性质

1. 多元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍为连续函数
2. 多元连续函数的复合函数仍为连续函数
3. 多元初等函数在其定义区域内连续函数
4. 有界闭区域 D 上连续函数 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值
5. 有界闭区域 D 上连续函数 $f(x,y)$ 可以取到它在 D 上最大值和最小值之间的一切值

5.1.4 典型例题

例题 5.6 说明一下二重极限是否存在

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\left(x^2+y^2\right)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

例题 5.7 求以下二重极限

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin(xy)+xy^2\cos x-2x^2y}{x}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy^2\sin x}{x^2+y^4}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

5.2 多元函数的偏导数与全微分

5.2.1 偏导数

5.2.1.1 偏导数的概念

定义 5.4

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的实心领域内有定义，则在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处对 x 和 y 的偏导数分别定义为：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f_y'\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}$$

函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处均存在偏导数，则偏导数仍然是 x 和 y 的二元函数，并记为：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f_x'(x,y)=z_x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f_y'(x,y)=z_y'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

♣

5.2.1.2 偏导数的意义

我们可以从以下三个角度来理解偏导数的定义：

角度一：偏导数的计算方法

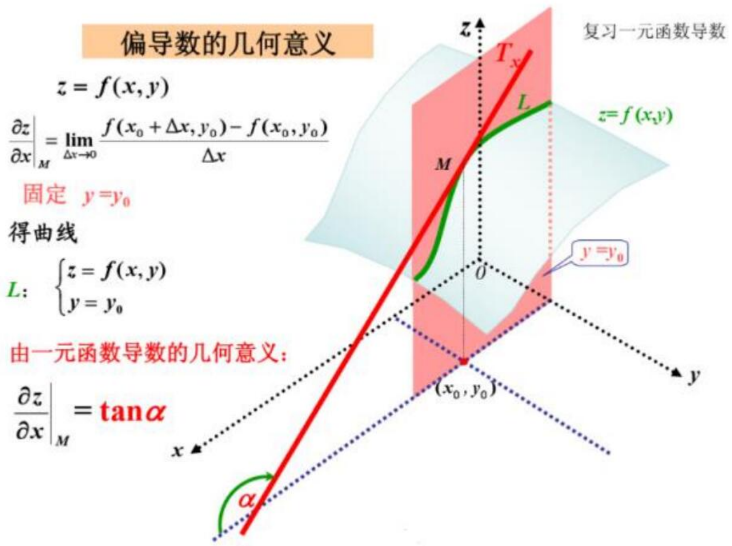
1. 从偏导数的定义可以看出，我们在对某个变量求偏导数时，其他的自变量是固定不变的，即求偏导数的过程中，只有所求偏导数的那个自变量改变，其他的自变量视为常数处理。因此，一元函数求导公式和运算法则适用于偏导数的计算。
2. 与一元函数类似地，分段函数在其分界点处的偏导数必须使用定义来求解。
3. 求函数在某一点处的偏导数，一般应先求偏导 (函) 数，再求偏导 (函) 数在该点处的值。当然，对于初等函数而言，从定义可以看出，二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数与一元函数 $f\left(x_0,y\right)$ 在点 y_0 处的导数是一样的。同理，在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数与一元函数 $f\left(x,y_0\right)$ 在点 x_0 处的导数也是相同的。因此，在求初等函数 $f(x,y)$ 在具体点 (x_0,y_0) 处的偏导数，不必求出该函数的导数，可以先代入其他自变量的值 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$，然后求一元函数的导数，这样会简化计算过程。

角度二：二元函数偏导数的几何意义

(图见下页) 设 $P\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过点 P 做平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交，其交线为平面 $y=y_0$ 上的曲线 $z=f\left(x,y_0\right)$，即 $\begin{cases}z=f\left(x,y_0\right)\\y=y_0\end{cases}$ (绿色切线)，则 $f_x'\left(x_0,y_0\right)$，表示上述交线在点 P 处的切线对 x 轴的斜率。同样，过点 P 做平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交，其交线为平面 $x=x_0$ 上的曲线 $z=f\left(x_0,y\right)$，即 $\begin{cases}z=f\left(x_0,y\right)\\x=x_0\end{cases}$ (红色切线)，则 $f_y'\left(x_0,y_0\right)$，表示上述交线在点 P 处的切线对 y 轴的斜率

角度三：偏导数与函数连续性之间的关系

- 函数连续通俗一点说，就是一元函数在曲线上没有空心点，二元函数在曲平面上任何一个方向上没有空洞 (指这个空洞不一定是一个圆形！！)



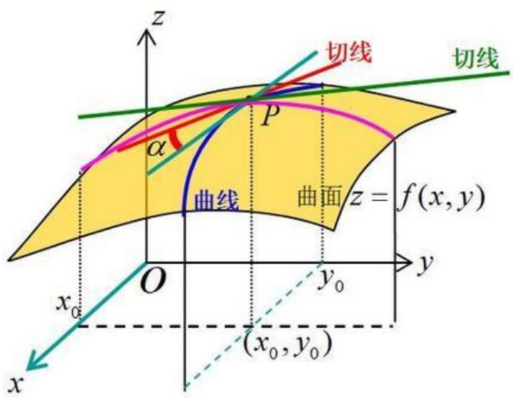


图 5.1: 偏导数的几何意义

- 一元函数有函数连续不一定可导的结论，在二元函数中也有相同的结论。但二元函数不连续时，其偏导数也可能存在，这一点要与一元函数相区别。因为二元函数是三维空间上的曲面，如果曲面上的点在其周围 360° 的邻域内仅仅在某一个方向上存在空心，则该点是不连续的，但在其他方向上的点的切线仍然有可能存在，可偏导只要求该点存在一条平行于 x 和一条平行于 y 的切线即可 (即保证了至少有两条切线是存在的)。因此，二元函数不连续，其偏导数也可能存在。反过来说，二元函数的偏导数若存在，也不一定能推出这个二元函数是连续的。因此二元函数的连续性和可导之间没有必然的确定关系。

例题 5.8 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$，并探究在 $(0,0)$ 处函数是否连续

例题 5.9 下列结论正确的是 (　　)

A. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

B. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

C. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在且有界，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

D. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在且有界

笔记

1. 对于这类考察基本概念的题型，一定要从基本定义着手分析，不要妄自臆断

2. $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$ 这种变形处理在微分学中经常用到，要熟练掌握此方法的使用（一元和多远均常见）

3. 若偏导数存在, 则一定可以在该点的邻域用到中值定理, 要形成条件反射, 例如本题中的转换:

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|=\left|f_y'(x,y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\right|+\left|f_x'(x+\theta_2\cdot\Delta x,y_0)\cdot\Delta x\right|$$

例题 5.10 设 $f(x+y,x-y)=2\left(x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2}$, 求 $f_x'-f_y'$

例题 5.11 已知 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x}(x>0)$, 且当 $x=e$ 时, $z=f(x,y)=y^2$, 求 $f(x,y)$

例题 5.12 若函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$, 且 $f(x,1)=x+2$, 又 $f_y'(x,1)=x+1$, 求 $f(x,y)$

5.2.2 高阶偏导数

定义 5.5

如果函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 关于 x 和 y 的偏导数仍然存在, 则称一阶偏导数的偏导数为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数, 记为:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)=z_{xx}''\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)=z_{xy}''$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)=z_{yy}''\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)=z_{yx}''$$

其中, $f_{xy}''(x,y),f_{yx}''(x,y)$ 称为二阶混合偏导数

本质上, 高阶导数就是把求出的导数当作一个新函数, 继续求偏导

♣

定理 5.2

若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $f_{xy}''(x,y),f_{yx}''(x,y)$ 在区域 D 上连续, 则在区域 D 上

$$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$$

♡

笔记 定理说明当高阶混合导数连续时, 混合偏导数与求导次序无关, 但如果没有连续的条件限制, 则定理失效。

例题 5.13 设函数 $z=f(x,y)=x^{y^2}$, 则下面的结论正确的是 (　　)

(A) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}>0$

(B) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}<0$

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\neq 0$

(D) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$

例题 5.14 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个二阶偏导数 $f_{xy}''(x_0,y_0),f_{yx}''(x_0,y_0)$ 相等是 $f_x'(x,y)$ 在该点连续的 (　　)

(A) 充分必要条件

(B) 充分条件

(C) 必要条件

(D) 即非充分也不必要条件

笔记 柠宝: 经典反例, 二阶混合偏导相等但是在其定义域内二阶偏导数并不连续

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(x^2\sin\frac{1}{x}+1\right)\left(y^2\sin\frac{1}{y}+1\right), & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}x^3y^3\sin\frac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

5.2.3 全微分

定义 5.6

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某实心领域内有定义，若 $z=f(x,y)$ 在该点的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A, B 仅与点 (x,y) 有关，而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，且当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$o(\rho)$ 为 ρ 的高阶无穷小量，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

笔记 注意对函数可微性的判定，用定义永远是不会错的，尤其是分段函数在间断点处的可微性讨论。

定理 5.3

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数在该点处的偏导数必定存在，且 $A=\frac{\partial z}{\partial x}, B=\frac{\partial z}{\partial y}$

由次定理不难得知：若函数函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则全微分可记为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ 结合定义，我们得到全微分存在的充要条件为：$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\Delta z-f'_x(x,y)\mathrm{d}x-f'_y(x,y)\mathrm{d}y$ 是 ρ 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f'_x(x,y)\mathrm{d}x-f'_y(x,y)\mathrm{d}y}{\rho}=0$$

定理 5.4

注意：两个偏导数同时连续才有此结论，仅有一个偏导数连续此结论不一定成立

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在且连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微

连续、偏导数存在以及偏导数存在且连续和可微之间的关系归纳

- 连续、偏导数存在与函数可微三个条件中，可微限制件最强。函数可微则必连续，偏导数一定存在。反之，若函数不连续或偏导数不存在，则函数一定不可微。
- 偏导数存在且连续与可微的关系定理是函数可微的充分条件，不是必要条件。因为函数偏导数存在但不连续时，函数也可能可微，但这之间没有必然的联系。
- 二元函数的可导与函数连续没有必然的关系

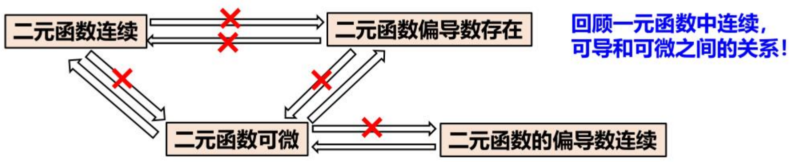


图 5.2: 连续、偏导与可微之间的关系

5.2.4 有关全微分的经典命题与反例

判断下列命题是否正确，如果正确请给出证明，否则举出反例

1. 仅有一个偏导数连续，仍能推出全微分存在
2. 有一个偏导数连续，另一个偏导数存在，此时全微分必定存在
3. 两个偏导数都存在，并且在某一个方向上连续，此时全微分必定存在

5.2.5 典型例题

例题 5.15 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 (　　)

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to0}\left[f_x'(x,y)-f_x'(0,0)=0\right]$ 且 $\lim_{y\to0}\left[f_y'(x,y)-f_y'(0,0)=0\right]$

例题 5.16 设 $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}((x,y)\neq(0,0)),f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 (　　)

(A) 偏导数不存在

(B) 偏导数存在但不可微

(C) 可微但偏导数不连续

(D) 偏导数连续

例题 5.17 已知 $\left(axy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$ 为某函数 $f(x,y)$ 的全微分, 求 a,b 的值

例题 5.18 若已知 $\mathrm{d}f(x,y)=\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}y$, 求 $f(x,y)$

例题 5.19 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=$____

例题 5.20 证明下列四个经典反例

1. $f(x,y)=|x|+|y|$, 在点 $(0,0)$ 连续, 但不可导 (当然也不可微)
2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可导, 但是不连续
3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可导，但是不可微分
4. $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 但是偏导数不连续

例题 5.21 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x'\left(x_0,y_0\right),f_x'\left(x_0,y_0\right)$ 存在, 是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的 (　　)

(A) 充分而非必要条件

(B) 必要而非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分又非必要条件

例题 5.22 试说明函数 $z=f(x,y)$ 对 x 偏导数存在时可能会出现对 y 偏导数不存在的情况存在吗? 更一般的, 函数在 x 和 y 方向的偏导数一定同时存在或同时不存在吗?

解 $z=(x+1)|y|$ 在点 $(0,0)$ 处, 对 x 方向的偏导数存在但对 y 方向的偏导数不存在.

$$\left.z_x'\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to0}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0;\ \left.z_y'\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to0}\frac{z(0,y)-z(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{|y|}{y}=\text{ Not Exist!}$$

从而说明了偏导数存在这种说法的不严谨性，以后指出若偏导数存在一定要说明对谁的偏导数存在！若题目出现偏导数存在或连续，一般情况下默认对 x,y 的偏导数同时存在或同时连续。

5.3 多元函数的微分暨复合抽象函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的偏导数计算公式及其运用

本节内容往往作为大题出现，没有任何思维上的难度，画好树状图，细心即可

5.3.1 全微分的四则运算法则

全微分的运算法则与一元函数中的微分法则是类似的。

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在 (x,y) 可微, 则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v;\quad \mathrm{d}(cu)=c\,\mathrm{d}u, c\text{ 为常数};$$
$$\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v;\quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v)\quad(v\neq0).$$

对 $n(n>2)$ 元函数有类似结论

5.3.2 多元复合函数的微分法则

这里分为两种情况:

1. 两个（或多个）中间变量、两个自变量的情形
2. 两个（或多个）中间变量、一个自变量的情形

一、两个（或多个）中间变量、两个自变量的情形

设 $u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y),w=\tau(x,y)$ 在点 (x,y) 处均有连续偏导数, 而 $z=f(u,v,w)$ 在相应的点 (u,v,w) 处有连续的偏导数, 则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y),\tau(x,y)]$ 在点 (x,y) 处有连续的偏导数, 即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

二、两个（或多个）中间变量、一个自变量的情形

设 $u=\varphi(x),v=\phi(x),w=\tau(x)$ 在点 x 处均有连续导数, 而 $z=f(u,v,w)$ 在相应的点 (u,v,w) 处有连续的偏导数, 则复合函数 $Z=f[\varphi(x),\phi(x),\tau(x)]$ 在点 x 处有连续的偏导数, 即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

此时称 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 为 z 对 x 的全导数

笔记

1. 导数符号 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 与偏导数符号 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 的区别。前者是函数在单变量情况下的导数, 后者是函数在两个或两个以上变量的情况下的导数, 称为偏导数。

2. 复合函数公式实质上就是函数对中间变量求导，然后乘以中间变量对自变量的导数，最后再求和。这一原则适合于所有引入中间变量的求导过程。

3. 在求多元抽象函数(没有给出具体函数表达式的复合函数)的高阶偏导数时,我们通常采用如下记号较为方便且不容易出错。记号 $f_1',f_2',\dots,f_n'$ 分别表示函数 f 对其第 1, 第 $2,\cdots$, 第 n 个中间变量的偏导数; $f_{11}'',f_{12}'',\dots,f_{1n}''$ 分别表示 f_1' 继续对第 1, 第 2. $\cdots$. 第 n 个中间变量的求导所得的二阶混合偏导数。以此类推。于是前面的公式可以改写为:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+f_2'\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+f_3'\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

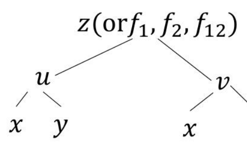
4. 一般而言，函数 z 对中间变量 (u,v,w) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ (或 f_1'), $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ (或 f_2'), $\dfrac{\partial z}{\partial w}$ (或 f_3') 依然是以 (u,v,w) 为中间变量, (x,y) 为自变量的复合函数, 他们再对 (x,y) 求偏导数时需要重复使用复合函数求导法则

重点（易错点）：对于此类求偏导的大题，我们只需要注意一个问题，一个多元函数的偏导数仍然是一个多元函数，接下来我们用例子来对这句话进行说明

例题 5.23 设 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+3y\end{cases}$,将方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为仅有 z 对 (u,v) 的偏导数形式, 其中 z 具有连续二阶偏导数

解 首先画出树状图如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+3\frac{\partial z}{\partial v}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$\because z$ 具有连续二阶偏导数

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$ (二阶混合偏导数相等)

同理

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

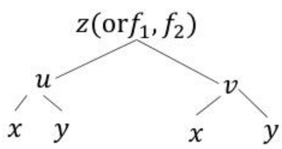
将 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 代入方程式 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 中，得到 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

符号说明：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f_1'=f_1$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=f_2'=f_2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=f_{12}''=f_{12}$$

例题 5.24 已知 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, 且具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 首先画出树状图：令 $u=xy,v=\dfrac{y}{x}$, 则



$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=yf_1-\frac{y}{x^2}f_2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(yf_1-\frac{y}{x^2}f_2\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(yf_1\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{y}{x^2}f_2\right)}{\partial y}=f_1+y\frac{\partial f_1}{\partial y}-\left(\frac{1}{x^2}f_2+\frac{y}{x^2}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$$
$$=f_1+y\left(f_{11}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left[\frac{1}{x^2}f_2+\frac{y}{x^2}\left(xf_{21}+\frac{1}{x}f_{22}\right)\right]$$
$$=f_1+y\left(xf_{11}+\frac{1}{x}f_{12}\right)-\left[\frac{1}{x^2}f_2+\frac{y}{x^2}\left(xf_{21}+\frac{1}{x}f_{22}\right)\right]$$
$$=f_1+xyf_{11}-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^3}f_{22}$$

笔记 这里, 因为 f_1 仍然是关于 $\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$ 的复合函数, 于是在求 f_1 对 y 的偏导数时, 仍然要遵循复合函数的求导法

则, 这就是之前说的一个多元函数的偏导数仍然是一个多元函数

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=f_{11}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}\frac{\partial v}{\partial y}$$

对于这一点很容易被同学们忽视, 希望同学们能够引起足够的重视不要犯经典错误, 得标准零分。

5.3.3 一阶全微分形式的不变性

为了解决有关多元复合函数一阶偏导数的求解，做到不重不漏，这里介绍一阶全微分形式的不变性。

5.3.4 多元函数微分学常见题型总结 (含大题)

设 $z=f(u,v,w)$, 当 (u,v,w) 为自变量时, 或当 (u,v,w) 为中间变量时, 且涉及到的函数都具有连续一阶偏导数时，均有全微分公式:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v+\frac{\partial z}{\partial w}\,\mathrm{d}w=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial z}{\partial z}\mathrm{d}z$$

这里假设 u,v,w 是中间变量, x,y,z 是自变量。因为在求一阶导数时不用区分中间变量和自变量，因此全微分形式的不变性再一阶导数中有广泛的应用

直接看这个定理不太能看出其精妙之处，我们直接来看例子

例题 5.25 若 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, 其中 f 可微, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$

解 利用全微分形式的不变性, 我们将 $x,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}$ 视为三个变量, 两边取全微分得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+f_3\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\left(\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}\right)+f_3\left(\frac{z\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}z}{z^2}\right)\\&=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\frac{\mathrm{d}x}{y}-f_2\frac{x\,\mathrm{d}y}{y^2}+f_3\frac{\mathrm{d}y}{z}-f_3\frac{y\,\mathrm{d}z}{z^2}=\left(f_1+\frac{1}{y}f_2\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{z}f_3-\frac{x}{y^2}f_2\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}f_3\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+\frac{1}{y}f_2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}f_3-\frac{x}{y^2}f_2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_3$$

笔记

1. 这里有些同学可能不明白为什么 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$ 。因为 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$ 实质就是求一个 $f(x,y)=\frac{x}{y}$ 的全微分。对于 $f(x,y)=\frac{x}{y}$, 有 $f_x(x,y)=\frac{1}{y}, f_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}$ 于是

$$df(x,y)=d\left(\frac{x}{y}\right)=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

对于全微分运算公式有一个简单的通用法则, 即我们只需要将导数运算法则中的导数换成微分即可。如本题中, 关于商的导数运算法则是 $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, 那么导数换成微分则有 $\left(\frac{u}{v}\right)'$ 换成 $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)$,$u'$ 换成 $\mathrm{d}u$, v' 换成 $\mathrm{d}v$, 于是全微分公式就变为 $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ 。于是 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$

2. 上例属于复合函数的求导，也可以直接用复合函数的求导法则:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot(x)_x'+f_2'\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=f_1'+\frac{1}{y}f_2'\quad\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'+f_3'\cdot\left(\frac{y}{z}\right)_y'=-\frac{x}{y^2}f_2'+\frac{1}{z}f_3'\quad\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\left(\frac{y}{z}\right)_z'=-\frac{y}{z^2}f_3'$$

3. 全微分形式的不变性因为不用区分自变量、中间变量直接的关系，因此非常适合用于由多个关系式确定的函数的一阶导数或全微分，基本解题思路如下:

1. 对已知条件中所给的所有关系式都求全微分，建立一个方程组
2. 根据所求结论解方程组即可

例题 5.26 设 $z=f(x,y),x=g(y,z)$, 其中 f 和 g 均可微, 设解题过程中所出现的所有分母均不为零, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

【分析】从题目给出的两个函数来看, 本题中, x 在 $z=f(x,y)$ 中充当的是自变量, 在 $x=g(y,z)$ 中充当的是因变量，对于这种复杂的变量情况，我们采用全微分形式的不变性解题。

解

对 $z=f(x,y)$ 求全微分, 可得 $\mathrm{d}z=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\,\mathrm{d}y$
对 $x=g(y,z)$ 求全微分, 可得 $\mathrm{d}x=g_1\,\mathrm{d}y+g_2\mathrm{d}z$
将上述两个所求的的全微分等式联立可得:

$$\begin{cases}\mathrm{d}z=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\,\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}x=g_1\,\mathrm{d}y+g_2\mathrm{d}z\end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$, 得

$$\mathrm{d}z=f_1\,\mathrm{d}x+f_2\left(\frac{\mathrm{d}x-g_2\,\mathrm{d}z}{g_1}\right)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{g_1f_1+f_2}{g_1+g_2f_2}$$

例题 5.27 设 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数, 即 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 证明:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

【分析】待证明的等式右边是 $kf(x,y,z)$, 因为要保留 $f(x,y,z)$ 的形式, 显然不能对 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 两边采用对 (x,y,z) 变量的微分, 那么只能选择对 t 求导

解

令 $u=tx,v=ty,w=tz$, 则 $f(u,v,w)=t^kf(x,y,z)$ 两边对 t 求导, 得

$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}=kt^{k-1}f(x,y,z)$$

两边同时乘以 t 可得

$$xt\frac{\partial f}{\partial u}+yt\frac{\partial f}{\partial v}+zt\frac{\partial f}{\partial w}=kt^kf(x,y,z)\Rightarrow u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+w\frac{\partial f}{\partial w}=kf(u,v,w)$$

整体变量替换可得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

笔记 对 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 两边采用对 (x,y,z) 变量的微分可得

$$tf_1'(tx,ty,tz)=t^kf_1'(x,y,z)\quad tf_2'(tx,ty,tz)=t^kf_2'(x,y,z)\quad tf_3'(tx,ty,tz)=t^kf_3'(x,y,z)$$

与所证式子大相径庭, 说明思路有问题

例题 5.28 设在直角坐标系下, 二元函数 $F(x,y)=f(x)g(y)\neq0$, 而在极坐标系下, 二元函数 $F(x,y)=\varphi(r)$, 试求满足条件的一个二元函数表达式 $F(x,y)$

【分析】这种求具体函数的表达式一般的思路是建立微分方程然后进行求解

解 由直角坐标系与极坐标系之间的转换公式 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 得

$$F(x,y)=F(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(r\cos\theta)g(r\sin\theta)=\varphi(r)$$

两边同时对 θ 求偏导, 可得

$$f'(x)\cdot(-r\sin\theta)g(r\sin\theta)+f(r\cos\theta)g'(y)\cdot(r\cos\theta)=0$$
$$\Rightarrow f'(x)\cdot(-y)g(y)+xf(x)g'(y)=0\Rightarrow xf(x)g'(y)=yg(y)f'(x)\Rightarrow\frac{g'(y)}{yg(y)}=\frac{f'(x)}{xf(x)}$$

令

$$\frac{g'(y)}{yg(y)}=\frac{f'(x)}{xf(x)}=2\lambda$$

于是

$$\frac{f'(x)}{xf(x)}=2\lambda\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2\lambda x\Rightarrow f(x)=C_1e^{\lambda x^2}$$

同理可得 $g(y)=C_2e^{\lambda y^2}$
于是

$$F(x,y)=f(x)g(y)=C_1e^{\lambda x^2}\cdot C_2e^{\lambda y^2}=Ce^{\lambda\left(x^2+y^2\right)}$$

其中 $C=C_1\cdot C_2$, 为任意常数

例题 5.29 设函数 $f(x,y)$ 可微, 又 $f(0,0)=0, f_x'(0,0)=a, f_y'(0,0)=b$, 且 $\varphi(t)=f\left[t,f\left(t,t^2\right)\right]$, 求 $\varphi'(0)$

【分析】这是一个多层复合抽象函数，为了在计算过程中不至于出现混淆，我们设出中间变量，一步一步求导。

解 令 $u=t, v=f\left(t,t^2\right)$, 于是 $\varphi(t)=f\left[t,f\left(t,t^2\right)\right]=f(u,v)$, 两边对 t 求导, 得

$$\varphi'(t)=f_u(u,v)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+f_v(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

又 $u=t\Rightarrow\dfrac{du}{dt}=1, v=f\left(t,t^2\right)\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial t}=f_1\left(t,t^2\right)+f_2\left(t,t^2\right)\cdot 2t$, 将其带入 $\varphi'(t)$ 中，得

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f_1(u,v)\cdot 1+f_2(u,v)\cdot\left[f_1\left(t,t^2\right)+f_2\left(t,t^2\right)\cdot 2t\right]\\&=f_1\left(t,t^2\right)+f_2\left(t,t^2\right)\cdot\left[f_1\left(t,t^2\right)+f_2\left(t,t^2\right)\cdot 2t\right]\\\Rightarrow\varphi'(0)&=f_1(0,0)+f_2(0,0)\cdot[f_1(0,0)+f_2(0,0)\cdot 0]=a+b(a+0)=a(1+b)\end{aligned}$$

例题 5.30 设 $u=u(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 证明: 在极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下有

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

解 利用复合函数求导公式，有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\\&\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},\\&\frac{\partial^2u}{\partial r^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\cos^2\theta\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2u}{\partial y^2},\\&\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

再对 $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 及 $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 用复合函数求导法及综合上面的式子可得

$$\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=(-r\sin\theta)^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+(r\cos\theta)^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-r\frac{\partial u}{\partial r}$$

于是

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

即

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

结论 在极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下, 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\quad\text{化成}\quad\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$$

例题 5.31 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, 其中 f 和 φ 可微, 求 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$

【分析】对于初等函数, 均满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x}$, 因此在求混合偏导数时, 两种求导顺序均可得到答案, 但不同的求导顺序可能会导致计算量的不同。通常是选择首次求导较容易计算的变量求导。对于本例来说, 变量 x 因为存在分式 $\dfrac{1}{x}$, 计算量显然大于 y, 于是我们选择从变量 y 开始求导

解

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)\cdot x+\varphi(x+y)+y\cdot\varphi'(x+y)=f'(xy)+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=f''(xy)\cdot y+\varphi'(x+y)\cdot 1+y\varphi''(x+y)\cdot 1=yf''(xy)++\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

注：本题若先对 x 求导，然后再对 y 求导，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+y\cdot\varphi'(x+y)=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\left(\frac{y}{x}\right)'_y f'(xy)+\frac{y}{x}\left[f'(xy)\right]'_y+\varphi'(x+y)+y\left[\varphi'(x+y)\right]'_y\\
&= -\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}\left[f''(xy)\cdot x\right]+\varphi'(x+y)+y\left[\varphi''(x+y)\cdot 1\right]\\
&= yf''(xy)++\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)
\end{aligned}
$$

笔记

1. 从上述两种计算顺序来看，后者的计算复杂成都稍稍高于前一种计算顺序。因此，在计算这类混合偏导数时，可以适当考虑调整计算顺序。

2.(2) 关于偏导数标记方法的说明。$f'(xy)$ 表示函数 $z=f(xy)$ 对整体变量 xy 求导，或者说当我们引入中间变量 $u=xy$ 时，$f'(xy)=f'(u)$ 就表示对中间变量 u 求导的结果。而对于函数 $z=f(xy)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x(xy)$ 则是对自变量 x 求导的结果，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x(xy)=f'(xy)\cdot(xy)'_x=yf'(xy)$，注意区别。

例题 5.32 设二元函数 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数，并满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x,u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x)$

例题 5.33 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a,b 的值，使等式在变换 $\varepsilon=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}=0$

解

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=a\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+a\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=a\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}
$$

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 代入 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 中，得

$$
\left(5a^2+12a+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon^2}+\left(5b^2+12b+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\left[12(a+b)+10b+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\partial\eta}=0
$$

由题意，满足式子

$$
\begin{cases}
5a^2+12a+4=0\\
5b^2+12b+4=0\\
12(a+b)+10b+8\neq 0
\end{cases}
$$

最终解得 $a=-\frac{2}{5},b=-2$ 或 $b=-\frac{2}{5},a=-2$

例题 5.34 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:

$$
e^{xy}-xy=2\quad 和\quad e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t
$$

求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

【本题有两个解法，分别是直接法和全微分法】

解

【方法一】

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导可得:

$$e^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \text{ 即 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$$

又由 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导, 得:

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{(x-z)}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \text{ 即 } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$$

带入可得:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}$$

【方法二】

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边微分可得:

$$e^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)-(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0 \text{ 即}\mathrm{d}y=-\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x$$

又由 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 两边微分, 得

$$e^x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(x-z)}{(x-z)}\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}z) \text{ 即}\mathrm{d}z=\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\mathrm{d}x$$

例题 5.35 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=$ ____

解

【方法一】

将 $x=0,y=0$ 带入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3x}=1$, 则 $z=0$.

方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两端分别微分可得 $e^{x+2y+3z}(\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z)+yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=1$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式可得 $\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z=0$

则

$$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y)$$

【方法二】

将 $x=0,y=0$ 带入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3x}=1$, 则 $z=0$.

$$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=z_x'(0,0)\mathrm{d}x+z_y'(0,0)\mathrm{d}y$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $y=0$ 得, $e^{x+3z}=1$, 两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}\left(1+3z_x'\right)=0\Rightarrow z_x'(0,0)=-\frac{1}{3}$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $x=0$ 得, $e^{2y+3z}=1$, 两边对 y 求导得

$$e^{2y+3z}\left(2+3z_y'\right)=0\Rightarrow z_y'(0,0)=-\frac{2}{3}$$

则

$$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y)$$

5.4 复合函数求导法的应用——隐函数微分法

5.4.1 隐函数定理及其注意事项

定理 5.5 (隐函数存在定理)

如果三元方程 $F(x,y,z)=0$ 满足如下三个条件:

1. 函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 某邻域有连续偏导数
2. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
3. $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则此方程在点 (x_0,y_0,z_0) 某邻域恒能唯一确定一个连续函数 $z=z(x,y)$, 它满足 $z_0=z(x_0,y_0)$, 并有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

对于二元的情况如下：由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$, 当 $F_y'(x,y)\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

证明

对 $F(x,y)=0$ 两边分别对 x 求导, 得

$$F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

对 $F(x,y,z)=0$ 两边分别对 x 求导, 得

$$F_x'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$$

对 $F(x,y,z)=0$ 两边分别对 y 求导, 得

$$F_y'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$$

笔记

1. 从上面的推导过程可以看出, 利用隐函数公式求导时, 公式中的偏导数 $F_x'(x,y)$ 或 $F_x'(x,y,z)$ 的求解过程不再区分自变量和因变量, 而是将 $F(x,y)$ 或 $F(x,y,z)$ 中的变量一视同仁, 看作互不相干的独立变量求偏导数。$F_y'(x,y,z)F_z'(x,y,z)$ 等满足同样的性质。

2. 一旦题目给定函数是 z $=f(x,y)$, 则 (x,y) 为自变量, z 为因变量, 不存在 x 或者 y 是其他两个变量的函数, 否则就会永无休止的循环下去。

3. 区别 $F(x,y,z)=0$ 和 $u=f(x,y,z)$ 两种情况下的求导。前者表示函数 z $=f(x,y)$ 的隐函数形式; 后者表示以 (x,y,z) 为自变量的函数, 如果没有明确说明 x,y 和 z 三者之间有函数关系, 三者就是毫不相干的独立变量。

【例如】$F(x,y,z)=xy+xz+yz=0$ 与 $u=f(x,y,z)=xy^2z^3$, 前者确定的是两个自变量 (x,y) 的函数，后者是三个自变量 (x,y,z) 的函数。也就是方程本身就是一个约束条件，使得变量之间产生一种联系, 因此互相独立的变量个数就会减少一个。

4. 注意细节:

- 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 若函数 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内可唯一确定一个有连续导数的函数 $y=f(x)$, 并有

$$y'=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

上述条件中的 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$ 能得到 $z=F(x,y)$ 在该点某领域内一定单调吗? 进一步，若将条件改为

$F_y'(x,y)\neq 0$，则 $z=F(x,y)$ 在该定义域内单调吗？

- 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 若函数 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_o)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $\mathbf{z}=f(x,y)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$$

- （仅数一掌握）由方程组 $\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 所确定的隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 欲求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，可以将每个方程分别对 x 求偏导数，得出以 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 为变量的方程组，可解得 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 同样，将每个方程分别对 y 求偏导数，可得到以 $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 为变量的方程组，从而可解得 $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$　（柠宝提醒：注意克拉默法则的应用）

5.4.2 典型例题

例题 5.36 由隐函数 $F(x,y,z)=xy+xz+yz=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\dfrac{y+z}{x+y}$

例题 5.37 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 所确定的隐函数，求 $f_x'(1,1,1)$

解

$$f_x'(x,y,z)=f_1'(x,y,z)+f_3'(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x}$$

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}=\frac{3yz-2x}{2z-3xy}$$

$$f_x'(x,y,z)=y^2z^3+3xy^2z^2\frac{3yz-2x}{2z-3xy}\Rightarrow f_x'(1,1,1)=1-3=-2$$

笔记 这里尤其要注意的是 $f_1'(x,y,z)$ 的计算。$f_1'(x,y,z)$ 是函数 $f(x,y,z)$ 对第一个变量 (x) 求偏导数，此时第二个变量 (y)，第三个变量 (z) 都应该视为常数，即 $f_1'(x,y,z)=y^2z^3$。而 $f_x'(x,y,z)$ 是指函数 $f(x,y,z)$ 对表达式中所有 x 求偏导，特别留意题目中的 z 本质上是关于 x 和 y 的函数，而不是互相独立的变量。

例题 5.38 设 $z=z(x,y)$ 是由 $z+e^{xz}=xy$ 所确定的二元函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 将方程 $z+e^{xz}=xy$ 改写成为隐函数的形式 $F(x,y,z)=z+e^{xz}-xy=0$

根据隐函数求导公式，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{ze^{zx}-y}{1+xe^{xz}}=\frac{y-ze^{xz}}{1+xe^{xz}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-ze^{xz}}{1+xe^{xz}}\right)&=\frac{(y-ze^{xz})_y'(1+xe^{xz})-(1+xe^{xz})_z'(y-ze^{xz})}{(1+xe^{xz})^2}\\&=\frac{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial y}e^{xz}+zx\frac{\partial z}{\partial y}e^{xz}\right)\right](1+xe^{xz})-\left(xe^{xz}x\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y-ze^{xz})}{(1+xe^{xz})^2}\end{aligned}$$

又

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-x}{1+xe^{xz}}=\frac{x}{1+xe^{xz}}$$

将其带入上式可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-zx^2e^{xz}+xe^{xz}-yx^2e^{xz}}{(1+xe^{xz})^3}$$

例题 5.39 设 $y=f(x)$ 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，且 $F(x,y)$ 存在二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\dfrac{F_x'}{F_y'}\right)=\dfrac{2F_{xy}''F_x'F_y'-F_{yy}''\left(F_x'\right)^2-F_{xx}''\left(F_y'\right)^2}{\left(F_y'\right)^3}$

例题 5.40 设 $F\left(x,y,x-z,y^2-w\right)=0$, 其中 F 具有二阶连续偏导数, 且 $F_4'\neq 0$, 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

解 由所求 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 可知, w 为因变量, 其他为自变量

同时对 $F\left(x,y,x-z,y^2-w\right)=0$ 两边对 y 求偏导, 有

$$F_2'+F_4'\left(2y-\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{F_2'+2yF_4'}{F_4'}\tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_2'+2yF_4'}{F_4'}\right)=\frac{\left(F_2'+2yF_4'\right)_y'F_4'-\left(F_4'\right)_y'\left(F_2'+2yF_4'\right)}{\left(F_4'\right)^2}\tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F_2'+2yF_4'\right)=F_{22}''+F_{24}''\left(2y-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2F_4'+2y\left[F_{42}''+F_{44}''\left(2y-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F_4'\right)=F_{42}''+F_{44}''\left(2y-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\tag{4}$$

将 (1)(3)(4) 式代入 (2) 式中, 可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_2'+2yF_4'}{F_4'}\right)=2+\frac{F_{22}''\left(F_4'\right)^2-2F_{24}''F_4'F_2'+F_{44}''\left(F_2'\right)^2}{\left(F_4'\right)^3}$$

例题 5.41 设 $y=f(x,z)$, 其中 z 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的 x,y 的函数, 且 F 与 f 具有连续的一阶偏导数, 证明: 当 $F_3'+f_2'\cdot F_2'\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f_1'\cdot F_3'-f_2'\cdot F_1'}{F_3'+f_2'\cdot F_2'}$$

解

$$\begin{cases}y=f(x,z)\\F(x,y,z)=0\end{cases}$$

两个方程两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\F_1'+F_2'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_3'\frac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}$$

将方程中 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 视为未知数, 其他视为已知, 解该二元方程, 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_1'\cdot F_3'-f_2'\cdot F_1'}{F_3'+f_2'\cdot F_2'}$$

例题 5.42 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定, 其中 F 可微, 并设出现的分母不为 0, 求 $\mathrm{d}z$

【提示】利用全微分形式的不变性来求一阶全微分

解 $\mathrm{d}z=\dfrac{zyF_2'-x^2yF_1'}{x^2F_1'+xyF_2'}\mathrm{d}x+\dfrac{zxF_1'-xy^2F_2'}{y^2F_2'+xyF_1'}\mathrm{d}y$

例题 5.43 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有二阶导数, 且 $\varphi'\neq -1$

(1) 求 $\mathrm{d}z$

(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

解 (1) 对方程两边取全微分, 得

$$2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\mathrm{d}(x+y+z)=\varphi'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

$$(\varphi'+1)\,\mathrm{d}z=(-\varphi'+2x)\,\mathrm{d}x+(-\varphi'+2y)\,\mathrm{d}y\Rightarrow\mathrm{d}z=\frac{(-\varphi'+2x)\,\mathrm{d}x+(-\varphi'+2y)\,\mathrm{d}y}{\varphi'+1}\ (\varphi'\neq-1)$$

(2) 由 (1) 可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}$$

所以

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}\right)=\frac{2}{\varphi'+1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''\left(1+\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2(1+2x)\varphi''}{(\varphi'+1)^3}$$

例题 5.44 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(\quad)$

(A)x

(B)z

(C)$-x$

(D)$-Z$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_2'},\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}F_1'}{\frac{1}{x}F_2'}\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

例题 5.45 设 $y=f(x,t)$, 且方程 $F(x,y,t)=0$ 确定了函数 $t=t(x,y)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解 【方法一】

等式 $y=f(x,t(x,y))$ 两端对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

而 $t=t(x,y)$ 由 $F(x,y,t)=0$ 所确定, 则

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}},\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}+\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}}$$

这里设左式中的分母 $\neq 0$

【方法二】

由 $y=f(x,t)$ 知 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$

由 $F(x,y,t)=0$ 知 $\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=0$

解得

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial t}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

将 $\mathrm{d}t$ 的表达式代入 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$ 并整理可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}}$$

例题 5.46 设函数 $f(x,y)$ 可微, $\frac{\partial f}{\partial x}=-f,f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$, 求 $f(x,y)$

5.5 多元函数的最大值、最小值与极值问题

与一元函数类似, 极值是**局部性质**, 最值是**整体性质**

5.5.1 多元函数的极值

5.5.1.1 极值的定义与相关定理

定义 5.7 (极值的定义)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某实心邻域内有定义，若对该邻域内异于 P_0 的任意点 $P(x,y)$，总有：

$$f\left(x_0,y_0\right)\geq f(x,y)\,(\text{ 或} f\left(x_0,y_0\right)\leq f(x,y))$$

成立，则称 $f\left(x_0,y_0\right)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处取得的极大值 (或极小值)，并称 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极大值点 (或极小值点)。极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点。♣

笔记

1.$f\left(x_0,y_0\right)\geq f(x,y)\,($ 或 $f\left(x_0,y_0\right)\leq f(x,y))$ 是极值的充要条件

2. 从定义可以看出，二元函数的极值和一元函数的极值类似，用通俗一点的话来说，所谓的极大值点 (或极小值点) 就是就该点函数值大于 (或小于) 周边邻近任何一点的函数值。这在抽象函数极值的判断中重要的理解作用。

例题 5.47 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$ 则 (　　)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据条件无法判断 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解 首先通过极限与无穷小量的关系建立 $f(x,y)$ 的关系式：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1\Leftrightarrow f(x,y)=xy+\left(x^2+y^2\right)^2+o\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)$$

由于 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，于是有 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ 设在点 $(0,0)$ 的领域内有点 $(x,y),|x|\neq0$ 且充分小，又设 $y=kx$ (因为 (x,y) 是在点 $(0,0)$ 的邻域内的点，于是两点总可以构成一条直线用 $y=kx$ 表示，所以设为 $y=kx$)，于是函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 点邻域的值可以表示为：

$$f(x,y)=f(x,kx)=kx^2+\left(1+k^2\right)^2x^4+o\left(\left(1+k^2\right)^2x^4\right)$$

从上式可以看出，当 $x\to0$ 时，$\left(1+k^2\right)^2x^4+o\left(\left(1+k^2\right)^2x^4\right)$ 是 x^2 的高阶无穷小，因此，当 $k>0$ 时，$f(x,y)=f(x,kx)>0=f(0,0)$；当 $k<0$ 时，$f(x,y)=f(x,kx)<0=f(0,0)$；由于 $f(0,0)$ 既可能大于点 $(0,0)$ 邻域中的某些值，又存在小于点 $(0,0)$ 点邻域中的某些值，由定义可知点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

下面给出驻点的概念

定义 5.8 (驻点)

方程组的 $\begin{cases}f_x'(x,y)=0\\f_y'(x,y)=0\end{cases}$ 解，称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点 ♣

定理 5.6 (极值存在的必要条件和充分条件)

【极值存在的必要条件】

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处的一阶偏导数存在，且 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值点，则有

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=0,f_y'\left(x_0,y_0\right)=0$$

【注意】本定理是极值存在的必要条件，只有当在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处的一阶偏导数存在时极值点才会有

此结论。而在某些场合，极值点可能是一阶导数不存在的点。

【极值存在的充分条件】

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的某实心邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$ 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

- 若 $B^2-AC<0$，则点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点

$$\begin{cases} 若A<0(或C<0),则P_0(x_0,y_0)\ 为极大值点 \\ 若A>0(或C>0),则P_0(x_0,y_0)\ 为极大值点 \end{cases}$$

- 若 $B^2-AC=0$，无法确定点 $P_0(x_0,y_0)$ 是否是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点。(此时一般需用定义判断，常见的是利用不等式放缩)
- 若 $B^2-AC>0$，则点 $P_0(x_0,y_0)$ 不是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点

【补充说明】

- 上述第二条定理是极值存在的充分条件，而不是必要条件，所以满足情况 (1) 的必然是极值点，但不能反推。即我们不能断言，函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值就一定有 (1) 的结论，因为条件 (2) 也可能存在极值
- 二元函数极值存在的充分条件看似比较复杂，这里给出它简单的记忆方法：在一元函数中我们得到，二阶导数小于零时才会有极大值。这里有类似的结论，二阶偏导数小于零总是对应极大值，那么二阶偏导数大于零必然对应的是极小值了。

♡

例题 5.48 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 及 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq 0$，则 (　　)

(A) $f(x,y)$ 在区域 D 的内部取得最值

(B) $f(x,y)$ 必定在区域 D 的边界取得最大值和最小值

(C) $f(x,y)$ 必定在区域 D 的内部取得最大值在区域 D 的边界取得最小值

(D) $f(x,y)$ 必定在区域 D 的内部取得最小值在区域 D 的边界取得最大值

5.5.1.2 无条件极值

在函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 内求极值，这是无条件极值。分三部曲，分别如下

1. 求出函数的所有驻点 (疑似极值点)，即求解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$ 的一切实数解，并求出偏导数不存在的点，得到函数全部可能的极值点。
2. 利用极值存在的充分条件判定所求点是否为极值点。注：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值但非驻点这种点是否取得极值一般用极值定义判断
3. 看清题意是求极值还是极值点还是两者都要求，然后根据上述分析求出极值或极值点。

【注意】1. 偏导数不存在的点可能为极值，同时并非所有驻点都是极值点。2. 与一元函数类似，**极值只能在区间内部取得，不能在边界取得（要求邻域有定义）**

例题 5.49 求函数 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 的极值【极大值为 e^{-1}，极小值为 0】

例题 5.50 证明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极值点并求极大值，而没有任何极小值点

解 由 $\begin{cases} z'_x(x,y)=-(1+e^y)\sin x=0 \\ z'_y(x,y)=(\cos x-y-1)e^y=0 \end{cases}$ 得无穷多个驻点 $(n\pi,(-1)^n-1)$，其中 $n\in\mathbb{N}$

(1) 当 $n=2k$ 时，对应的驻点为 $(2k\pi,0)$，此时有

$$A=(1+e^y)(-\cos x)|_{(2k\pi,0)}=-2 \quad B=-e^y\sin x|_{(2k\pi,0)}=0 \quad C=e^y(\cos x-y-2)|_{(2k\pi,0)}=-1$$

判别式 $B^2-AC<0, A<0$，因此函数在 $(2k\pi,0)$ 处有极大值，且极大值为 2

(2) 当 $n=2k+1$ 时，对应的驻点为 $((2k+1)\pi,0)$。此时有 $B^2-AC>0$，故函数在此点无极值，从而没有任何极小值

5.5.1.3 条件极值与拉格朗日乘数法

求解函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值问题,称为条件极值问题。求解条件极值一般有如下两种方法:

- 利用所给约束条件把极值问题转化为无条件极值问题。若从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中可解出 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$,把它代入 $z=f(x,y)$,则可化为相应一元函数的最值问题.
- 拉格朗日乘数法(可以推广到多元函数在多个约束条件下的极值问题的解决方法)

【拉格朗日乘数法】

拉格朗日乘数法针对的是条件极值的问题,具体来说,约束条件可能是一个或者多个,这里分别作介绍。

【单个约束条件的情况】

求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的最大值或最小值

拉格朗日乘数法的步骤为:

1. 作辅助函数 (称为拉格朗日函数): $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,其中 λ 称为拉格朗日乘数
2. 求解方程组
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$
得出的 (x,y) 就是可能的极值点
3. 判断该点是否是极值 (对于实际应用问题来说,一般无需检验就可以直接确定该点为最值点,并通过题意可以确定是最大值点或最小值点,因此实际解题中可以省略这一步骤)。

笔记

1. 解这个方程组一般是通过不需要确定数值的 λ 来建立起 x,y 的等式关系,也就是尽可能的利用 λ 来建立 x,y 的方程。

2. 不要犯病,把无条件极值的方法用在条件极值的求解上

【多个约束条件的情况】

求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下的最大值或最小值

拉格朗日乘数法的步骤为:

1. 首先构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$
2. 求解方程组
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y,z)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \mu}=\psi(x,y,z)=0.\end{cases}$$
所有满足此方程组的解 (x,y,z,λ,μ) 中 (x,y,z) 是 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 与 $\psi(x,y,z)=0$ 下的可能的极值点
3. 最后由可能的极值点中 (若曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 含端点,还需考察其端点.) 求得最大值点或最小值点

5.5.2 二元函数的最值

定理 5.7 (最值定理)

在有界闭区域上连续的二元函数在区域内的驻点、偏导数不存在的点以及边界点上一定取得最大值与最小值

笔记 这一定理限定了有界闭区域上连续二元函数的最值点的全部可能范围：驻点、偏导数不存在的点以及边界点，为我们求函数的最值提供了依据。

5.5.3 典型例题

例题 5.51 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值。【最大值为 $f(2,1)=4$, 最小值 $f(4,2)=-64$】

例题 5.52 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的连续函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。【极小值点为 $(9,3,3)$, 对应极小值为 $z=3$; 极大值点为 $(-9,-3,-3)$, 对应极大值为 $z=-3$】

例题 5.53 可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极小值, 则下列结论正确的是 (　　)

(A)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零

(B)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(C)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零

(D)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在

例题 5.54 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$, 则在点 $(0,0)$ 处 (　　)

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点

(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(A) 是 $f(x,y)$ 的极小值点

例题 5.55 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极大值点是 (　　)

(A)$(0,0)$

(B)$(0,3)$

(C)$(3,0)$

(D)$(1,1)$

例题 5.56 求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值

例题 5.57 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值

例题 5.58 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$, 并且 $f(1,1)=2$ 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值

5.6 （仅数一）多元函数的方向导数、梯度、几何应用与二元函数的泰勒公式

5.6.1 方向导数与梯度

5.6.1.1 梯度

定义 5.9

设 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则对于任意一点 $P(x,y)\in D$, 向量 $f_x'(x,y)\boldsymbol{i}+f_y'(x,y)\boldsymbol{j}$ 称为 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度, 记为 $\operatorname{grad} f(x,y)$ 或 $\nabla f(x,y)$, 即 $\nabla f(x,y)=\operatorname{grad} f(x,y)=f_x'(x,y)\boldsymbol{i}+f_y'(x,y)\boldsymbol{j}$。 $\left(\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}\right.$, 称为二维向量微分算子或 *Nabla* 算子)

类似的，可以定义三元甚至多元函数的梯度 (以三元函数为例)，$u=f(x,y,z)$ 在其定义区域内的每一个点 $P(x,y,z)$ 的梯度为

$$\nabla f(x,y,z)=\operatorname{grad} f(x,y,z)=f_x'(x,y,z)\boldsymbol{i}+f_y'(x,y,z)\boldsymbol{j}+f_z'(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

注:$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$, 称为三维向量微分算子或 Nabla 算子

例题 5.59 计算函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度 (先代后算)

例题 5.60 计算 $\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ____

5.6.1.2 方向导数

柠宝：方向导数是偏导数的推广。

我们知道，偏导数是沿着坐标轴的导数，对于非坐标轴方向上的导数即为方向导数

【方向导数的概念】

定义 5.10

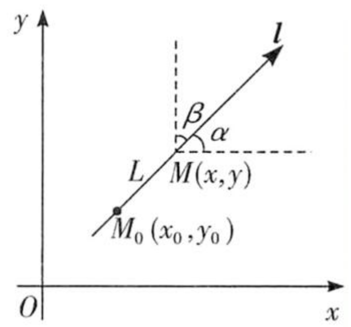
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, $\boldsymbol{l}=\{m,n\}$ 是一个给定的向量, 过 P_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 作射线 L, 在点 P_0 的邻域内取一点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, 点 P 在射线 L 上, 当点 P 沿射线 L 趋向于点 P_0 时, 如果极限

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{|PP_0|}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{P_0}$ ♣

通俗的理解就是，沿着某一向量方向，没去线上一点单位距离的改变引起的函数值数量的变化值

方向导数有如下等价定义：



定义 5.11

平面上过点 $M_0(x_0,y_0)$ 以 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为方向向量的直线 L 的参数方程:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta$$

$z=f(x,y)$ 限制在直线 L 上 (如图) 变化时就变成了一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$$

若存在极限

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

称它为 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿方向 l 的方向导数, 记为 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$ ♣

【方向导数的存在定理】

定理 5.8 (方向导数存在定理)

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处 textcolor[rgb]1,0,0 可微, 则函数在该点沿 textcolor[rgb]1,0,0 任何方向 l 的方向导数存在。

此定理可以推广到多元函数

笔记

1. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向的方向导数都存在, 也不能保证 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微, 但沿任何一个方向的方向导数都存在却不可微并不是普遍现象, 而是特殊情况。一般的初等函数若在某点任何一个方向导数都存在, 在某点的可微性由初等函数性质得到保证的。

2. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向的方向导数都存在, 也不能保证 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在偏导数。

3. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在偏导数, 也不能得到函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向的方向导数都存在的结论。

【方向导数的计算公式】

设 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 M_0 点沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 存在方向导数且

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{2}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{2}\cos\beta$$

在平面上 l 除了用方向角表示外也可用极角表示: $l=(\cos\theta,\sin\theta)$, θ 是 l 的极角, $\theta\in[0,2\pi)$, 此时相应的方向导数的计算公式是

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\theta$$

三元函数的情况是类似的:

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微, 则 $f(x,y,z)$ 在 M_0 点沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 存在方向导数且有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

【梯度 (向量) 与方向导数的最大值】

函数 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 的方向导数计算公式可改写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}&=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\\&=\operatorname{grad}f(x_0,y_0)\cdot l=|\operatorname{grad}f(x_0,y_0)|\cos\langle\operatorname{grad}f(x_0,y_0),l\rangle\end{aligned}$$

这里向量 $\operatorname{grad}f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 的**梯度 (向量)**

$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$ 随 $\boldsymbol{l}$ 而变化, 当 $\boldsymbol{l}=\frac{\operatorname{grad}f(x_0,y_0)}{|\operatorname{grad}f(x_0,y_0)|}$ 即沿梯度方向时, 方向导数取最大值 $|\operatorname{grad}f(x_0,y_0)|$. 由此可见, 函数在某点的梯度是这样一个向量, 它的方向是函数在该点的方向导数最大的方向, 它的模是最大方向导数的值

笔记

1. 梯度方向是方向导数最大的方向 (常常作为大题第一问考察)

2. 利用梯度与方向向量的内积求方向导数的时候，注意要将方向向量单位化

例题 5.61 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数

解 先求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦: $\overrightarrow{AB}=(3-1,-2-0,2-1)=(2,-2,1)$

$l=\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{3}(2,-2,1)$

再求

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} u|_{(1,0,1)} &= \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,0,1)} \\ &= \left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(1, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\right|_{(1,0,1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,0,1)} &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)} \cos\gamma \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.6.2 多元函数微分学在几何中的应用

5.6.2.1 空间曲线的切线与法平面

空间曲线于空间直线一样，都有两种形式的方程，第一种是类似于显函数的参数形式的方程，第二种是通过两个相交曲面的交线给出

【曲线 Γ 的方程为参数方程时】

设空间曲线 Γ 的方程为参数方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases}$ 在点 $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in \Gamma, x_0 \in x\left(t_0\right), y_0 \in y\left(t_0\right), z_0 \in z\left(t_0\right)$ 若 x, y, z 在 t_0 处有连续导数，且三个导数不全为零，则曲线 Γ 在点 $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 处的切向量为:

$$\boldsymbol{\tau}=\left\{x'\left(t_0\right), y'\left(t_0\right), z'\left(t_0\right)\right\}$$

从而有切线方程为:

$$T: \frac{x-x_0}{x'\left(t_0\right)}=\frac{y-y_0}{y'\left(t_0\right)}=\frac{z-z_0}{z'\left(t_0\right)}$$

法平面方程为:

$$\pi: x'\left(t_0\right)\left(x-x_0\right)+y'\left(t_0\right)\left(y-y_0\right)+z'\left(t_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$

【曲线 Γ 的方程为一般式方程时】

设 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 点 $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in \Gamma$, 则 Γ 在点 M_0 处的切线可视为曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 M_0 处的切平面与曲面 $G(x,y,z)=0$ 在点 M_0 处的切平面的交线, 从而曲线 Γ 在点 M_0 处的切向量可取为

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix}$$

有了切向量，剩下的切线方程和法平面方程就迎刃而解了

例题 5.62 求曲线 $C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 在点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ 处的切线方程及法平面方程

解 曲线 C 在点 P 处的切向量可取为:

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix}=\left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|_P=\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$$

所以切线方程为:

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-1}=\frac{z-2}{-2}$$

法平面方程为：

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2(z-2)=0,\text{即}x-y-2z+4=0$$

例题 5.63 求下列曲线在指定点处的切线与法平面：

(1)$x=\cos t+\sin^2 t, y=\sin t(1-\cos t), z=\cos t$, 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 的对应点 $textcolor[rgb]1,0,0\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}, x-y+z=0$

(2)$x=y^2, z=x^2$, 在点 $(1,1,1)$ 【textcolor[rgb]1,0,0$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-z}{4}, 2x+y+4z-7=0$

5.6.2.2 曲面的切平面与法线

对于曲面来说，同样也有两种形式，分别是显函数的 $z=f(x,y)$ 与隐函数的 $F(x,y,z)=0$ 形式

【隐函数的 $F(x,y,z)=0$ 形式】 设曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0, M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 Σ 上一点, $F(x,y,z)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处 textcolor[rgb]1,0,0 可微且函数的 textcolor[rgb]1,0,0 三个偏导数不同时为零, 则曲面 Σ : $F(x,y,z)=0$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量可取为

$$n=\left\{F_x'(x_0,y_0,z_0), F_y'(x_0,y_0,z_0), F_z'(x_0,y_0,z_0)\right\}$$

从而切平面方程为：

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

【显函数的 $z=f(x,y)$ 形式】

若曲面方程 $Z=f(x,y)$, 且 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数, 则在曲面上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处：

切平面方程为：

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

【推导】 实际上，对于曲面 $z=f(x,y)$, 可以简单转化为 $F=f(x,y)-z=0$ 从而看成是隐函数的形式。此时，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\pm\{f_x'(x_0,y_0)\ f_y'(x_0,y_0), -1$$

柠宝：实质上，这部分内容可以从直线方程和平面方程出发，结合曲面的法向量与曲线的切向量来理解他们之间的关系。例如，曲面的切平面垂直于曲面的法向量，而曲面的法线平行于曲面的法向量。如何拿捏好切向量与法向量之间的位置关系就是做题的切入点。

例题 5.64 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义且, $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1$, 则 (　　)

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$, 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$, 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$

例题 5.65 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为____ 【textcolor[rgb]1,0,0$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$】

例题 5.66 求曲线 $\begin{cases} x^2+2z^2=3 \\ y=0 \end{cases}$, 绕 x 轴旋转一周, 所得旋转曲面在点 $(1,0,-1)$ 处指向外侧的单位法向量。

解 已知曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $x^2+2y^2+2z^2=3$, 在此去面上点 $(1,0,-1)$ 处的法向量为:

$$n=\pm\left.\{2x,4y,4z\}\right|_{(1,0,-1)}=\pm\{2,0,4\}$$

所以指向外侧的法向量为 $\{2,0,4\}$, 从而得到旋转曲面在点 $(1,0,-1)$ 处指向外侧的单位法向量为:

$$\boldsymbol{n}^0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+0^2+(-4)^2}}\{2,0,4\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{1,0,-2\}$$

5.6.3 二元函数的泰勒公式

本部分内容虽然明确写在了数一的大纲中，但是鲜有涉及，此处了解即可

定理 5.9

设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(M_0)$ 有直到 3 阶连续偏导数, $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in U(M_0)$ 为任一点, 则有二阶泰勒公式

$$\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=&f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0,y_0)+R_2\\
=&f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2\right.\\
&\left.+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+R_2,
\end{aligned}$$

其中

$$R_2=\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\quad(0<\theta<1)\ \text{称为拉格朗日余项}$$

$$R_2=o\left(\rho^2\right)\quad\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\rightarrow 0\right)\ \text{称为皮亚诺余项}$$

这里

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\Delta x^k\Delta y^{n-k}$$

其中，$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

第 6 章 常微分方程与差分方程

内容提要

- 第一节 一阶微分方程
- 第二节 伯努利方程 (仅数一)
- 第三节 全微分方程 (仅数一)
- 第四节 可降阶的高阶微分方程 (仅数一、二)
- 第五节 高阶线性微分方程
- 第六节 欧拉方程 (仅数一)
- 第七节 微分方程的应用
- 第八节 差分方程 (仅数三)

上述小节中，没有特殊说明的第一、二、三、七节要求数一二三都要掌握，其余小节看括号有说明

微分方程可以看作是对现实世界的某些问题的建模，这类似于简单的变量与变量之间的关系我们可以通过某个函数来进行表示。具体的问题可能会非常复杂，比如一般的 PDE 方程组 (偏微分方程组) 没有解析解，也就是说说没有初等函数来精确表达方程的解。

例如要进行风洞实验是因为相关的微分方程 (更确切的说应该是偏微分方程组) 没有解析解，只能在某些条件下有数值解 (近似解)

总之，浩如烟海的微分方程世界中，只有极其小部分的微分方程可以直接通过数学手段得到精确解，而这些类型的方程的解法是固定的，所以本章的学习重点放在 "识别方程类型" 上，一旦知道了方程类型，对应的解法只需要直接按部就班写就完事了

再次强调，本章的重点是 "识别方程类型"，知道了类型，并且知道对应的解法，这是固定的套路

6.1 一阶微分方程

6.1.1 微分方程的相关概念

定义 6.1

有关概念如下：

- 微分方程：含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程，简称方程
- 微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶
- 微分方程的解：满足微分方程的函数，称为该方程的解
- 微分方程的通解：如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称之为微分方程的通解
- 微分方程的特解：微分方程的不含任意常数的解，称之为特解
- 初始条件：确定特解的一组常数称为初始条件
- 积分曲线：方程的一个解在平面上对应一条曲线，称为该微分方程的积分曲线

♣

6.1.2 一阶线性微分方程

形如

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的方程称为一阶线性微分方程

当 $q(x) \neq 0$ 时，对应的方程为非齐次方程，通解公式为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C]$$

当 $q(x)=0$ 时，对应的方程为齐次方程，通解公式为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

有关此方程的解法一般有两个，分别是“积分因子法”和“常数变易法”，本课程只介绍积分因子法，因为你只需要会求解即可，考试也不会指明让你用常数变易法进行求解，有关积分因子的概念在“第二章　一元函数微分学——第三节——中值定理的证明 (一)” 2.3.3.1中已有介绍

6.1.3 变量可分离的微分方程

形如

$$y'=f(x)g(y)$$

的方程称为变量可分离的方程

解决方法采用“分离变量法”，两边同除 $g(y)(g(y)\neq 0)$, 把变量分离, 并求积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

6.1.4 齐次方程

齐次方程一共有三种变体

6.1.4.1 齐次方程的第一种类型——$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y'=u+xu'$

原方程可化为

$$xu'=f(u)-u$$

这是一个变量可分离的方程，通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C=\ln|x|+C$$

6.1.4.2 齐次方程的第二种类型——$y'=f(ax+by+c)$ 且 $a\cdot b\neq 0$

令 $u=ax+by+c$, 则原方程可化为

$$u'=a+bf(u)$$

这是一个变量可分离的方程

6.1.4.3 齐次方程的第三种类型——$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

根据 x 和 y 前面的系数组成的向量的线性相关性，进一步分成两个子类，即考虑 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 的线性相关性

第一种情况：线性无关，$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$

解线性方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$

设其解为 (α,β)

令 $u=x-\alpha, v=y-\beta$

原方程可以化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$$

这是齐次方程 (类型一)

第二种情况：线性相关，$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, 即 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$

则

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda\left(a_1x+b_1y\right)+c_2}\right)$$

令 $z=a_1x+b_1y$, 则原方程化为

$$z'=a_1+b_1f\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right)$$

这是变量可分离的方程

6.2 伯努利方程 (仅数一)

形如

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$$

称为伯努利方程

注意到当 $\alpha=0,1$ 时，方程退化为一阶线性方程

令 $z=y^{1-\alpha}$, 则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$$

这是一阶线性方程

柠宝：要注意到有时候我们会将 x 看成因变量，y 看成自变量

对于方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(y)}{p(y)x+q(y)x^{\alpha}}(\alpha\neq 0,1)$$

分别是一阶线性方程和伯努利方程

6.3 全微分方程 (仅数一)

如果方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的左端是某个函数 $F(x,y)$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}F(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

则称该方程为全微分方程

此方程的通解为:

$$F(x,y)=C$$

求解方法有三种:

- 偏积分
- 凑微分
- 线积分

全微分方程的判定：(同第二类曲线积分与路径无关)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

例题 6.1 求方程 $xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=0$ 的通解

6.4 可降阶的高阶微分方程 (仅数一、二)

同齐次方程一样，可降阶的微分方程也是有三种类型

6.4.1 可降阶的第一种类型——$y^{(n)}=f(x)$

显然，经过 n 次积分，得

$$y=\int\cdots\int f(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n$$

6.4.2 可降阶的第二种类型——不显含 y 的二阶方程 $y''=f\left(x,y'\right)$

令 $p=y'$, 原方程化为 p 的一阶方程:

$$p'=f(x,p)$$

具体的求解得看这个一阶方程的类型

6.4.3 可降阶的第三种类型——不显含 x 的二阶方程 $y''=f\left(y,y'\right)$

令 $p=y'$, 原方程可化为以 p 为末知函数, y 为自变量的一阶方程:

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)\quad\left(y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)$$

6.5 高阶线性微分方程（上）——基本理论

本节内容，特别是涉及到方程的解的结构，与线性代数中“线性方程组解的结构”高度重合，包括解空间、线性组合、特解等概念可以平移到本章中来

柠宝：本章的学习脉络类似于线性代数中的线性方程组的章节，首先会介绍方程的分类以及解的性质和解的结构，此时我们并不会探讨具体方程的解 (类似于我们只关心 $Ax=b$ 的解的性质包括齐次方程解的叠加以及线性组合等)，在探讨完解的性质之后才会对具体的方程进行求解

6.5.1 线性微分方程的有关概念与线性微分算子

定义 6.2

将未知函数 x 及其各阶导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}$ 均为一次的 n 阶微分方程称为 n 阶线性微分方程. 它的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t)\tag{6.1}$$

其中, $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a<t<b$ 上的连续函数

如果 $f(t)\equiv 0$, 则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0\tag{6.2}$$

称方程 (6.2) 为 n 阶线性齐次微分方程, 简称齐次线性方程. 而与此相应, 称方程 (6.1) 为 n 阶线性非

齐次微分方程, 简称非齐次线性方程, 并且通常把方程 (6.2) 叫做对应于方程 (6.1) 的齐次线性方程

在本章如无特别的声明, 总假设方程 (6.1) 的系数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及右端函数 $f(t)$ 连续

定义 6.3 (线性微分算子)

引入如下记号：

$$L[x] \equiv \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x \tag{6.3}$$

并把 L 称为线性微分算子. 以后当把算子作用于函数 x 上时, 就是指对 x 施行如 (6.3) 右端的运算。例如, 取 $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$, 则

$$L\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right]=\left[\lambda^n+a_1(t)\lambda^{n-1}+a_2(t)\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda+a_n(t)\right]\mathrm{e}^{\lambda t}$$

根据 $L[x]$ 的意义, 可以把非齐次方程 (6.1) 和齐次方程 (6.2) 分别写成

$$L[x]=f(t), \quad L[x]=0$$

性质

1. $L[cx]=cL[x], c$ 是常数
2. $L\left[x_1+x_2\right]=L\left[x_1\right]+L\left[x_2\right]$

笔记 显然，线性微分算子 L(本质上是一种运算) 可以看成是一种线性变换，根据线性代数中的知识，我们可以将 $L[x]=f(t)$ 类比为 $Ax=b$，由此，所有有关解空间包括解的性质和结构都是完全等效的，只是在本章中主角由向量变成了函数

例题 6.2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的特解, 又 $py_1(x)+2qy_2(x)$ 为 $y'+P(x)y=0$ 的解, $py_1(x)-qy_2(x)$ 为 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解, 则 $p=$____, $q=$____

6.5.2 齐次线性方程解的结构和性质

柠宝：回顾一下线性代数中齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的结构和性质，解满足线性可加性，解空间的维数由 $n-r(A)$ 确定，学习本章的过程中应该时刻注意将本章的内容与线性代数中的内容作比较

首先假设齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0 \tag{6.4}$$

的系数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $a<t<b$ 上连续

定理 6.1 (解的叠加原理)

如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 是方程 (6.4) 的 k 个解, 则它的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是方程 (6.4) 的解, 其中, $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是常数

在线性代数中我们有“解空间”的概念，对应的有“基础解系”的概念，同样在这里变成了“基本解组”

定义 6.4

在定理6.1中若 $k=n$, 即 n 阶方程 (6.4) 有 n 个解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$, 则由定理6.1可知, $\sum_{i=1}^n c_ix_i(t)$ 也是方程 (6.4) 的解, 它含有 n 个任意常数. 反过来, 如果方程 (3.2.4) 的任意一个解 $\varphi(t)$ 都可以表示为 $\varphi(t)=\sum_{i=1}^n c_ix_i(t)$, 则称 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程 (6.4) 的基本解组. 自然, 关心的是 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程 (6.4) 的基本解组

现在的问题是 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 什么条件下能成为基本解组？换句话说，$\varphi(t)=\sum\limits_{i=1}^n c_ix_i(t)$ 在什么条件下能称为方程 (6.4) 的通解？

下面介绍的线性相关和线性无关的概念与线性代数中的形式是一样的

定义 6.5

对定义在区间 (a,b) 上的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$, 如果存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$, 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)=0$$

在 (a,b) 上恒成立, 则称这些函数是在所给区间上线性相关的; 否则, 就称这些函数线性无关

例如，函数 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 在任何区间上都是线性无关的. 因为恒等式

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n=0$$

只有当所有的 $c_i=0(i=0,1,\cdots,n)$ 时才成立

下面来建立线性相关和线性无关的判别法则. 为此, 先引进 Wronskian 行列式. 由定义在区间 (a,b) 上的 k 个可微 $k-1$ 次的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 所得到的行列式

$$W\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\right]\equiv\begin{vmatrix}x_1(t)&x_2(t)&\cdots&x_k(t)\\x_1'(t)&x_2'(t)&\cdots&x_k'(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{(k-1)}(t)&x_2^{(k-1)}(t)&\cdots&x_k^{(k-1)}(t)\end{vmatrix}$$

称为这些函数的 Wronskian 行列式, 也写作 $W(t)$

定理 6.2

如果函数组 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 在区间 (a,b) 上线性相关, 则在 (a,b) 上它们的 Wronskian 行列式恒等于零

推论 6.1

如果函数组 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 的 Wronskian 行列式在区间 (a,b) 上某点 t_0 处不等于零, 即 $W(t_0)\neq 0$, 则该函数组在区间 (a,b) 上线性无关

定理 6.3

如果函数组 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程 (6.4) 在区间 (a,b) 上 n 个线性无关的解, 则它们的 Wronskian 行列式 $W\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right]$ 在该区间上任何点都不等于零, 即 $W\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right]\neq 0(t\in(a,b))$

定理 6.4

n 阶齐次线性方程 (6.4) 一定存在 n 个线性无关的解

定理 6.5

如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶齐次方程 (6.4) 的 n 个线性无关的解, 则它一定是该方程的基本解组, 即方程 (6.4) 的任一解 $x(t)$ 都可表达为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$$

定理 6.6 (通解的结构定理)

如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程 (6.4) 的 n 个线性无关解, 则方程 (6.4) 的通解可表示为 $x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$, 其中, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数

综上所述，饿哦们可以得到如下等价结论

定理 6.7

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程 $L[x]=0$ 的 n 个解, 则下列命题是等价的:

- 方程 $L[x]=0$ 的通解为 $x(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$
- $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程 $L[x]=0$ 的基本解组
- $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在 (a, b) 上是线性无关的
- 在 (a, b) 上有一点 t_0, Wronskian 行列式 $W\left(t_0\right) \neq 0$
- 在 (a, b) 上任一点 t, Wronskian 行列式 $W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right] \neq 0$

♡

本部分内容还涉及到刘维尔 (Liouville) 公式，有兴趣的可以查阅相关资料 (考研不要求)，这里不再叙述了

6.5.3 非齐次线性方程解的结构

上面我们介绍了齐次线性方程通解的结构，接下来介绍非齐次方程通解的结构，简单概括就是 “特解 × 齐次通解”

对于非齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d} t^n}+a_1(t) \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d} t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t) \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}+a_n(t) x=f(t) \tag{6.5}$$

我们有如下定理

定理 6.8

n 阶线性非齐次方程 (6.5) 的通解等于它所对应齐次方程 (6.4) 的通解与它本身的一个特解之和 ♡

证明

设 x^* 是方程 (6.5) 的一个特解, $\widetilde{x}$ 是 (6.4) 的通解. 首先, 证明 $x=x^*+\tilde{x}$ 是方程 (6.5) 的解. 事实上, 因为

$$L[x]=L\left[x^*+\widetilde{x}\right]=L[\tilde{x}]+L\left[x^*\right]$$

而

$$L[\tilde{x}]=f(t), \quad L\left[x^*\right]=0$$

所以 $L[x]=L\left[x^*+\tilde{x}\right]=f(t)$, 即 $x=x^*+\tilde{x}$ 是方程 (6.5) 的解

其次，证明 $x=x^*+\widetilde{x}$ 是方程 (6.5) 的通解, 即证对于 (6.5) 的任意一解 $\bar{x}$, 总可以表示成 $\bar{x}=x^*+\widetilde{x}_0$, 其中, $\widetilde{x}_0$ 是由 $\widetilde{x}$ 中的任意常数取某一特定值而得到的。事实上，因为

$$L\left[\bar{x}-x^*\right]=L[\bar{x}]-L\left[x^*\right]=f(t)-f(t)=0$$

所以 $\bar{x}-x^*=\widetilde{x}_0$ 是方程 (6.5) 的解, 其中, $\widetilde{x}_0$ 可由 $\widetilde{x}$ 的任意常数取某一特定值得到。于是 $\bar{x}=\widetilde{x}_0+x^*$

定理 6.9 (解的叠加原理)

设 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是非齐次线性方程 $L[x]=f_1(t)$ 和 $L[x]=f_2(t)$ 的解, 则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程 $L[x]=f_1(t)+f_2(t)$ 的解 ♡

例题 6.3 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是方程 $y''+p(x) y'+q(x) y=f(x)$ 的解, C_1, C_2 为任意常数, 则该非齐次方程通解是 (　　)

(A) $C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3$

(B) $C_1 y_1+C_2 y_2-\left(C_1+C_2\right) y_3$

(C) $C_1 y_1+C_2 y_2+\left(1-C_1-C_2\right) y_3$

(D) $C_1 y_1+C_2 y_2-\left(1-C_1-C_2\right) y_3$

6.6 高阶线性微分方程（下）——具体求解

6.6.1 复值函数与欧拉公式

复值函数本身属于超纲内容，但其实很简单，这里首先介绍复值函数的目的是为了方便大家对后续特解的假设形式的记忆

首先介绍复值函数的定义和性质

定义 6.6 (复值函数)

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是区间 (a,b) 上定义的实函数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位, 称 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 为该区间上的复值函数

如果实函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a,b) 连续, 就称 $z(t)$ 在区间 (a,b) 连续; 如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a,b) 内是可微的, 就称 $z(t)$ 在区间 (a,b) 可微, 并且定义 $z(t)$ 的导数如下:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

♣

性质

1. $\dfrac{\mathrm{d}\left[z_1(t)+z_2(t)\right]}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}\left[cz_1(t)\right]}{\mathrm{d}t}=c\dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}\left[z_1(t)z_2(t)\right]}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}z_2(t)+z_1(t)\dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}$

在讨论常系数线性方程组时，复指数函数 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 起着重要作用, 其中, $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是复指数函数. 利用指数函数的级数展开得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}&=1+\mathrm{i}\beta t+\frac{(\mathrm{i}\beta t)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}\beta t)^3}{3!}+\cdots\\&=\left[1-\frac{(\beta t)^2}{2!}+\frac{(\beta t)^4}{4!}+\cdots\right]+\mathrm{i}\left[\beta t-\frac{(\beta t)^3}{3!}+\frac{(\beta t)^5}{5!}+\cdots\right]\\&=\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}=\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t,\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}=\cos\beta t-\mathrm{i}\sin\beta t$$

由上式可得这两个式子统称为欧拉 (Euler) 公式

欧拉公式也可以简记为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

可以验证如下结论:

- $\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)t}=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\cdot\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\right)=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$

下面给出线性方程复值解的概念，考虑下面的方程

$$L[x]=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t)\tag{6.6}$$

其中, $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n), f(t)$ 是定义区间 (a,b) 上的实函数. 若有定义在区间 (a,b) 上的实变量复值函数 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 满足上述方程, 则称 $x=z(t)$ 为方程 (3.3.5) 的复值解. 齐次方程的复值解有下面的结论:

定理 6.10

设方程 (6.6) 中所有系数 $a_i(t)$ 都是实值函数且 $f(t)=0$, 若 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 是方程的复值解, 则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$ 和虚部 $\psi(t)$ 以及 $z(t)$ 的共轭 $\overline{z(t)}$ 也都是方程 (6.6) 的解

♡

证明

由已知条件及 $L[x]$ 的性质可得

$$L[\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)]=L[\varphi(t)]+\mathrm{i}L[\psi(t)]=0$$

由此得到

$$L[\varphi(t)]=L[\psi(t)]=0$$

这表明 $\varphi(t),\psi(t)$ 都是方程 (3.3.5) 当 $f(t)=0$ 时的解. 因为

$$L[\overline{z(t)}]=L[\varphi(t)]-\mathrm{i}L[\psi(t)]$$

由 $L[\varphi(t)]=L[\psi(t)]=0$ 可得 $L[\overline{z(t)}]=0$, 即 $\overline{z(t)}$ 也是方程 (6.6) 的解

6.6.2 常系数齐次线性方程

从本小姐开始，正式介绍具体的常系数方程的解法

现在来讨论系数是常数的齐次线性方程的求解问题

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0 \tag{6.7}$$

其中, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 称方程 (6.7) 为 $\boldsymbol{n}$ 阶常系数齐次线性方程. 根据解的结构理论, 为了求方程 (6.7) 的通解, 只需求出它的基本解组. 下面介绍求方程 (6.7) 的基本解组的待定指数函数法

我们从最简单的入手，逐步深入。我们已经知道一阶常系数齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x$ 有通解 $x=c\mathrm{e}^{\lambda t}$. 因此, 对方程 (6.7) 也城市求指数函数形式的解

$$x=\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{6.8}$$

将 (6.8) 带入方程 (6.7) 得到

$$L\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right]=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

因此，$\mathrm{e}^{\lambda t}$ 成为方程 (6.7) 的解的充要条件为 λ 是代数方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{6.9}$$

的根。方程 (6.9) 称为方程 (6.7) 的特征方程, 它的根称为方程 (6.7) 的特征根

这样求方程 (6.7) 解的问题便归结为求方程 (6.7) 的特征根问题了

在求解之前，首先回顾一下代数学基本定理

定理 6.11

n 次多项式函数 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ ，在复平面内有 n 个零点

笔记

1.n 阶常系数齐次线性方程一定有 n 个线性无关的解

2. 在复数域上，根据 n 阶常系数齐次线性方程的特征方程跟的重数可以分为单根和复根

3. 复特征根一定是成对出现的，即若 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是特征根, 则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根

6.6.2.1 特征根是单根的情形

这里的特征根为单根的情况具体分为两种，一种是实数单根，一种是复数单根，首先来看实数单根。

设方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0 \tag{6.10}$$

的特征方程为

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{6.11}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程 (6.11) 的 n 个彼此不相等的根, 则相应地, 方程 (6.10) 有如下 n 个解:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t} \tag{6.12}$$

可以利用范德蒙德行列式证明这 n 个解线性无关

下面根据特征根的情况进行分类讨论

6.6.2.2 特征根是实数单根的情况

若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数, 则 (6.12) 是方程的 n 个线性无关的实值解，则方程 (6.10) 的通解为

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

6.6.2.3 特征根是复数单根的情况

若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中有复数, 则因方程的系数是实常数, 复根将成对共轭出现. 设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是特征根, 则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根, 方程对应的两个复值解为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}&=\mathrm{e}^{at}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\\ \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t}&=\mathrm{e}^{at}(\cos\beta t-\mathrm{i}\sin\beta t)\end{aligned}$$

由定理6.10知道它们的实部和虚部也是方程的解，这样一来，对应于特征方程的一对共轭复根为 $\lambda=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, 由此求得方程 (6.10) 的两个实值解为

$$\mathrm{e}^{at}\cos\beta t,\quad \mathrm{e}^{at}\sin\beta t$$

6.6.2.4 特征根是实数重根的情况

设 λ_1 是特征方程的 k_1 重根，且 λ_1 是实数，对应的方程 (6.10) 有 k_1 个线性无关的解：

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t},t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\quad t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

类似地，假设方程 (6.11) 的其他根 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m$ 的重数依次为 $k_2,k_3,\cdots,k_m;k_i\geqslant 1$, 而且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n,\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, 则方程 (6.10) 相应有解

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, & t\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, & t^2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, & \cdots, & t^{k_2-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_m t}, & t\mathrm{e}^{\lambda_m t}, & t^2\mathrm{e}^{\lambda_m t}, & \cdots, & t^{k_m-1}\mathrm{e}^{\lambda_m t}\end{cases}$$

笔记 注意 $\lambda=0$ 的情况

6.6.2.5 特征根是复数重根的情况

对于特征方程有复重根的情形, 如有 k 重复根 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$, 则 $\lambda=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 也是 k 重复根, 如同单复根时那样, 也可以把方程 (6.10) 的 $2k$ 个复值解换成 $2k$ 个实值解

$$\begin{array}{lllll}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\beta t, & t\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\beta t, & \cdots, & t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\beta t\\ \mathrm{e}^{\lambda t}\sin\beta t, & t\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\beta t, & \cdots, & t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\beta t\end{array}$$

笔记 注意 $\lambda=0$ 的情况

6.6.3 常系数齐次线性方程求解总结

设

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0$$

求解步骤如下:

1. 写出方程的特征方程 $F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 并求出特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
2. 计算方程的相应解
   - 对每一个实单根 λ_k, 方程有解 e^{λ_k}
   - 对每一个 $m > 1$ 重实根 λ_k, 方程有 m 个解
   $$\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \quad t\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \quad t^2\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \quad \cdots, \quad t^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda_k t}$$
   - 对每一个重数是 1 的共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 方程有两个如下形式的解:
   $$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \quad \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$$
   - 对每一个重数是 $m > 1$ 的共轭的复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 方程有 $2m$ 个如下形式的解:
   $$\mathrm{e}^{at}\cos\beta t, \quad t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \quad t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \cdots, \quad t^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$$
   $$\mathrm{e}^{at}\sin\beta t, \quad t\mathrm{e}^{at}\sin\beta t, \quad t^2\mathrm{e}^{at}\sin\beta t, \quad \cdots, \quad t^{m-1}\mathrm{e}^{at}\sin\beta t$$
3. 根据根的情况写出通解

例题 6.4 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} - 3\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 0$ 的通解

解 特征方程 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0$ 有根 $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2.\lambda_1$ 是单根, $\lambda_{2,3} = 2$ 是二重根. 因此有解 $\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$. 其通解为

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t} + c_3t\mathrm{e}^{2t}$$

其中, c_1, c_2, c_3 是任意常数

例题 6.5 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4} - x = 0$ 的通解

解 特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \mathrm{i}, \lambda_4 = -\mathrm{i}$, 有两个实根和两个复根, 均是单根, 故方程的通解为

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数

例题 6.6 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4} - 3\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + 3\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ 的通解

解 特征方程 $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)^3 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, 其中, $\lambda_1 = 0$ 是单根, $\lambda_2 = 1$ 是三重根, 故方程的通解为

$$x(t) = c_1 + \left(c_2 + c_3t + c_4t^2\right)\mathrm{e}^{t}$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数

例题 6.7 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4} + 2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$ 的通解

解 特征方程 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2+1\right)^2 = 0$, 即特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ 是二重根. 因此, 方程有 4 个实值解

$$\cos t, \quad t\cos t, \quad \sin t, \quad t\sin t$$

故方程的通解为

$$x(t) = (c_1 + c_2t)\cos t + (c_3 + c_4t)\sin t$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数

6.6.4 线性非齐次常系数方程的待定系数法

考虑常系数非齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_nx = f(x) \tag{6.13}$$

其中, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数, 而 $f(t)$ 是连续函数. 当 $f(t)$ 是一些特殊的函数时, 如指数函数、正弦函数、余弦函数以及多项式等, 通常利用待定系数法来求解. 为了叙述上的方便，这里以二阶为例，对应的结论可以方便推广到高阶方程上

设二阶非齐次常系数微分方程为

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{6.14}$$

其中 p 和 q 均为常数

对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{6.15}$$

考研范围内，只考察非齐次项 $f(x)$ 的三种形式，分别是

- 多项式
- 指数函数 × 多项式
- 指数函数 × 三角函数

先说结论，所有的特解的假设形式都可以用一个统一的表达式来完成, 即特解的形式可以假设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x) \tag{6.16}$$

6.6.4.1 指数函数 × 多项式

当

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的非齐次项 $f(x)$ 为指数函数 × 多项式时，即

$$f(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

接下来我们确定特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中的各个参数

直接上结论:

1. 特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中的 $\lambda = \alpha$
2. 特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中的 $P_n(x)$ 是与非齐次项的多项式部分次数相同的多项式的一般形式，比如当 $f(x) = 6x^4 + 2x - 1$ 时，$P_n(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$
3. 特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中 x^k 的指数部分的 k ="α 是特征方程的根的重数，如果不是方程的根按照“零重根”来计算，此时 $k = 0 \to x^0 = 1$"，即
   - 当 α 不是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根时, 原方程的特戒形式为
   $$y^* = e^{\lambda x} P_n(x)$$
   - 当 α 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的单根时, 原方程的特戒形式为
   $$y^* = xe^{\lambda x} P_n(x)$$
   - 当 α 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的二重根时, 原方程的特戒形式为
   $$y^* = x^2 e^{\lambda x} P_n(x)$$
   - 当 α 是特征方程的 k 重根时, 原方程的特戒形式为
   $$y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$$

   其中，$P_n(x)$ 是与非齐次项的多项式部分次数相同的多项式的一般形式

6.6.4.2 多项式

当

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的非齐次项 $f(x)$ 为多项式时，即

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

接下来我们确定特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中的各个参数

注意到 $P_n(x) = e^{0x} P_n(x)$

说人话就是：非齐次为多项式的情况，仅仅是上述“指数函数 × 多项式”的特殊情况，只需要令指数函数部分 $e^{\alpha x}$ 中的 $\alpha = 0$ 即可，即

- 当 0 不是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根时，原方程的特戒形式为
$$y^* = P_n(x)$$
- 当 0 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的单根时，原方程的特戒形式为
$$y^* = xP_n(x)$$
- 当 0 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的二重根时，原方程的特戒形式为
$$y^* = x^2 P_n(x)$$
- 当 0 是特征方程的 k 重根时，原方程的特解形式为
$$y^* = x^k P_n(x)$$

其中，$P_n(x)$ 是与非齐次项的多项式部分次数相同的多项式的一般形式

6.6.4.3 指数函数 × 三角函数

当

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的非齐次项 $f(x)$ 为多项式时，即

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[A_{n_1}(x)\cos\beta x + B_{n_2}(x)\sin\beta x]$$

其中，$A_{n_1}(x)$ 和 $B_{n_2}(x)$ 分别是次数为 n_1 和 n_2 的多项式

接下来我们确定特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中的各个参数

首先，特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中 $P_n(x)$ 的次数 $n = \max\{n_1, n_2\}$

由于三角函数的解本质上是来源于复值解：对对于重数为 1 的共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$，方程有两个如下形式的解

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta x, \quad \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta x$$

由于复值解的实部和虚部都是方程的解，所以特解的假设形式应该将 sin

特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} P_n(x)$ 中 x^k 的指数部分的 $k =$”$\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根的重数，如果不是方程的根按照“零重根”来计算，此时 $k = 0 \to x^0 = 1$”，即

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根时，原方程的特解形式为
$$y^* = P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的单根时，原方程的特解形式为
$$y^* = x[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的二重根时，原方程的特解形式为
$$y^* = x^2[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的 k 重根时, 原方程的特解形式为

$$y^* = x^k[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$$

其中，$P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 和是与非齐次项的多项式部分最高次数相同的多项式的一般形式, 且系数独立，次数 $n = \max\{n_1, n_2\}$

6.6.5 典型例题

例题 6.8 方程 $y'' - y = \mathrm{e}^x + 1$ 的特解形式可设为 (　　)

(A) $a\mathrm{e}^x + b$.

(B) $ax\mathrm{e}^x + b$.

(C) $a\mathrm{e}^x + bx$.

(D) $ax\mathrm{e}^x + bx$.

例题 6.9 方程 $y''' - y'' = 3x^2$ 的特解形式可设为 (　　)

(A) $ax^2 + bx + c$

(B) $x^2\left(ax^2 + b\right)$

(C) $x^2\left(ax^2 + bx + c\right)$

(D) $x\left(ax^2 + bx + c\right)$

例题 6.10 方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为 (　　)

(A) $ax^2 + bx + c + A\sin x$

(B) $ax^2 + bx + c + B\cos x$

(C) $ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x$

(D) $ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

例题 6.11 已知 $y_1 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}, y_2 = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}, y_3 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次方程的特解，求次方程

例题 6.12 若 $y = \mathrm{e}^{2x} + (x+1)\mathrm{e}^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的解, 求 a, b, c 及该方程通解

例题 6.13 已知 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + \mathrm{e}^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解, 求该微分方程及通解

例题 6.14 已知二阶常系数非齐次线性方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y^* = e^{-x}\left(1 + xe^{2x}\right)$，求通解

6.7 欧拉方程 (仅数一)

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

的方程称为欧拉 (Euler) 方程

令 $x = \mathrm{e}^t$, 即将自变量由 x 换成 t, 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right), \cdots$$

将这些关系代回, 则原方程就化成了 n 阶常系数线性微分方程

进一步，用 D 表示对 t 求导的运算，即 D 表示 $\frac{d}{dt}$, 可以得到

$$xy' = Dy, x^2y'' = D(D-1)y, x^3y''' = D(D-1)(D-2)y$$

用数学归纳法可以总结出

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y$$

例题 6.15 求欧拉方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解

解

$x=e^t$ ，那么原式就变为

$$D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=3e^{2t}$$

方程化简后有

$$D^3y-2D^2y-3Dy=3e^{2t}$$

此时对应的齐次方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=0$$

特征方程为

$$r^3-2r^2-3r=0$$

易求它有三个解 $r_1=0,r_2=-1,r_3=3$, 所以齐次通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}$$

进一步将特解求出来，代回得原方程的通解为

$$y=C_1+C_2x^{-1}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2$$

6.8 微分方程的应用

柠宝：物理应用很多年没考过了，我只有一个问题，今年不考，但是考纲有，你学不学?

本节的重点在于根据已知条件列出微分方程，至于方程的求解，根据方程的类型进行求解即可

6.8.1 微分方程的几何应用

几何应用主要是利用“切线的斜率是导数”这一结论来进行出题

曲线 $y=y(x)$ 在任意点 $(x,y(x))$ 处的切线方程是 $Y=y(x)+y'(x)(X-x)$, 其中 (X,Y) 为切线上点的坐标, 分别令 $Y=0,X=0$ 得切线在 x 轴与 y 轴上的截距 $X=x-\frac{y}{y'},Y=y-xy'$. 若切线的截距满足一定的关系, 就得到相应的微分方程. 关于曲线的法线也有类似的问题

例题 6.16 已知曲线过 $(1,1)$ 点, 如果把曲线上任一点 P 处的切线与 y 轴的交点记作 Q, 则以 PQ 为直径所做的圆都经过点 $F(1,0)$, 求此曲线方程

解 所求曲线设为 $y=f(x)$, 于是切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$, 切线 PQ 与 y 轴的交点 Q 的坐标为 $Q\left(0,y-xy'\right)$

设 M 点为切线段 PQ 的中点, 坐标为 $\left(\frac{x}{2},y-\frac{xy'}{2}\right)$

因为圆经过点 $F(1,0)$, 所以 $|MQ|=|MF|$, 于是得方程

$$\begin{cases} yy'=\frac{1}{x}y^2-1+\frac{1}{x} \\ y|_{x=1}=1 \end{cases}.$$

上式中令 $y^2=Z$, 则上式化为

$$\frac{1}{2}\left(y^2\right)'=\frac{1}{x}y^2-1+\frac{1}{x}$$

即

$$Z'=\frac{2}{x}Z-2+\frac{2}{x}$$

1.$Z'=\dfrac{2}{x}Z\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}Z}{Z}=\dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\ln Z=2\ln x+\ln C,Z=Cx^2.$

2. 令 $Z=C(x)x^2$ 为原方程的解, 代人并整理, 得

$$C'(x)x^2=-2+\frac{2}{x}\Rightarrow C'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\Rightarrow C(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\widetilde{C}$$

故通解为

$$Z=\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\widetilde{C}\right)x^2=2x-1+\widetilde{C}x^2$$

即方程的通解为 $y^2=2x-1+\widetilde{C}x^2$, 代人初值 $y|_{x=1}=1$, 得 $\widetilde{C}=0$

所求曲线为

$$y^2=2x-1$$

6.8.2 微分方程的物理应用 (仅数一、数二)

有关物理应用主要是涉及三个方面的命题

- 有关速度、时间、位移
- 牛顿第二定律
- 变化率方面 (温度随时间等)

见3.13(可直接点击跳转)

6.9 差分方程 (仅数三)

本节内容属于数三专属内容，考纲要求较低。考试大纲要求如下：

- 差分与差分方程的概念
- 差分方程的通解与特解
- 一阶常系数线性差分方程

在 2019 年数三考试中，曾出现了让二阶差分 (超纲内容)，当年被认定为事故

6.9.1 差分与差分方程的概念

柠宝：微分方程是差分方程的极限形式 (回想一下导数的定义！)

定义 6.7 (差分的概念)

给定函数 $y_t=f(t)$, 其自变量 t 取值为等间隔整数值, 即 $t=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$, 则 $f(t)$ 在 t 时刻的一阶差分定义为 $\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t)$, 一阶差分 Δy_t 的差分称为 $f(t)$ 的二阶差分, 记为 $\Delta^2 y_t$, 即 $\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$

一般地, $f(t)$ 的 $k-1$ 阶差分 $\Delta^{k-1}y_t$ 的差分称为 $f(t)$ 在 t 时刻的 k 阶差分, 即

$$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1}y_{t+1}-\Delta^{k-1}y_t=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\mathrm{C}_k^i y_{t+k-i}, k=1,2,\cdots$$

其中 $\mathrm{C}_k^i=\frac{k!}{i!(k-i)!}$

♣

6.9.2 差分方程的通解与特解

这部分内容的理论与之前有关特解、通解、线性性质、解的累加是一致的，不再赘述

6.9.3 一阶常系数线性差分方程

形如

$$y_{t+1}-py_t=f(t)(t=0,1,2,\cdots)$$

的方程，称为一阶常系数线性差分方程，其中 p 为非零常数，$f(t)$ 为已知函数. $y_{t+1}-py_t=0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程

通解为:

$$y_t = kp^t + y_t^*$$

其中，y_i^* 为特解

若 $f(t) = \left(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n\right)b^t$，则特解 y_i^* 有如下形式:

$$y_i^* = t^s\left(B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n\right)b^t$$

其中, 当 $p \neq b$ 时, $s = 0$; 当 $p = b$ 时, $s = 1$

6.9.4 典型例题

例题 6.17 求差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解

解 $y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right)$

例题 6.18 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解

解 $y_t = \tilde{y}_t + y_t^* = c + 2^t(t-2)$

例题 6.19 求差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解

解 通解为 $y_t = C2^t + t2^{t-1}$

第 7 章 (仅数一) 向量代数与空间解析几何

7.1 向量及其运算

向量的简单计算，包括加减法、内积以及两点之间的距离公式，这里不再赘述，重点介绍一下方向余弦、外积（向量积）和混合积

7.1.1 向量的方向余弦

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\triangleq \cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

显然 $a^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点, 则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

7.1.2 向量的外积 (矢积、叉积) 与混合积

设 $\boldsymbol{a}_j=x_j\boldsymbol{i}+y_j\boldsymbol{j}+z_j\boldsymbol{k}=\{x_j,y_j,z_j\}$， $j=1,2,3$

向量积定义如下:$a_1\times a_2$ 是一个向量, 其模 $|a_1\times a_2|=|a_1||a_2|\sin\theta$, 其中 θ 是 a_1,a_2 的夹角, 其方向规定为与 a_1,a_2 都垂直且 $a_1,a_2,a_1\times a_2$ 符合右手系. 用坐标作运算为

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

混合积定义如下：三个向量 a_1,a_2,a_3 的混合积 (a_1,a_2,a_3) 是一个数, 规定为 $(a_1,a_2,a_3)=(a_1\times a_2)\cdot a_3$. 用坐标作运算就是

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

笔记

1. 内积和混合积的结果是一个实数，向量积的结果是一个向量
2. 可以利用外积分，来构造垂直于两个向量的向量（联想二次型中的相关内容）
3. 向量积的运算法则：

$$\begin{aligned}&a\times b=-b\times a, && (\lambda a)\times b=\lambda(a\times b),\\&a\times(b+c)=a\times b+a\times c, && a\times a=0.\end{aligned}$$

4. 混合积的运算法则：

$$
\begin{aligned}
&(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b), && (a,a,b)=(a,b,a)=(a,b,b)=0\\
&(a,b,c)=-(b,a,c), && (\lambda a,b,c)=\lambda(a,b,c)\\
&(a_1+a_2,b,c)=(a_1,b,c)+(a_2,b,c)
\end{aligned}
$$

7.1.3 向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
2. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$, 其中 x_2,y_2,z_2 之中有一个为 “0” , 如 $x_2=0$, 应理解为 $x_1=0$
3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ, 使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
4. 向量 a 与 b 的夹角公式：
$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$
5. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ,v, 使
$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\text{ 或者}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$$

7.1.4 典型例题

例题 7.1 设 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\},\boldsymbol{b}=\left\{2,\frac{4}{3},k\right\}$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $k=$ ____; 若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 则 $k=$ ____

例题 7.2 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$ ____

例题 7.3 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\},\boldsymbol{b}=\{1,-2,5\},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$, 则 $\boldsymbol{c}=$ ____

例题 7.4 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 则 $[(a+b)\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ____

例题 7.5 与 $a_1=\{1,2,3\},a_2=\{1,-3,-2\}$ 都垂直的单位向量为 ____

7.2 平面方程与直线方程

7.2.1 自由度

自由度的概念可以简单理解为一个系统中真正自由变化的量的个数，比如两个变量 a 和 b ，而 $a+b=6$ 那么他的自由度为 1 。因为其实只有 a 才能真正的自由变化，b 会被 a 选值的不同所限制

线是一维的，面是二维的。这里的线包括了直线和空间曲线，面包括了空间平面和空间曲面。结论是：几何体是几维的，对应的自由度就是几个，或者说对应方程的参数就有几个。

举个例子，空间曲线的参数方程的一般形式为：

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

显然这个方程只有一个参数 t，原因是线的维度是 1

柠宝：不管是平面方程还是直线方程，我们首先应该想清楚，确定一个平面或者确定一个直线需要哪些要素？比如确定一个圆需要两个要素：圆心和半径，由此给定了圆心坐标和半径大小我们就能写出对应的方程。

对于直线方程的确定，我们可以从以下角度来确定：

1. 两个不重合的点确定一条直线
2. 定点 + 给定方向
3. 两个相交平面的交线

对于平面方程，我们可以从以下角度来确定：

1. 三个不重合的点确定一条直线
2. 定点 + 给定法方向

7.2.2 平面方程

回顾一下高中学的平面向量的基本定理

定理 7.1

如果 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$ 是同一个平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任何一个向量 $\vec{a}$，有且仅有一对实数 λ_1, λ_2，使

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

站在线性代数的角度，就是线性表示是唯一的

有了上述定理的支撑，我们可以通过以下两个条件来确定三维空间中的某个平面

- 某个定点
- 两个不共线的向量

由此我们可以得到平面方程的第一种类型

7.2.2.1 平面方程的第一种类型——向量式与参数式

设定点 $M(x_0, y_0, z_0)$，两个不同线的向量分别是 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$，平面上任意一点的坐标是 $r_0 = (x, y, z)$，则平面的向量式为

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t_1 \boldsymbol{U}_1 + t_2 \boldsymbol{U}_2$$

将向量的分量展开，得到平面方程的参数式

$$\begin{cases} x = X_1 t_1 + X_2 t_2 + x_0 \\ y = Y_1 t_1 + Y_2 t_2 + y_0 \\ z = Z_1 t_1 + Z_2 t_2 + z_0 \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{U}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \boldsymbol{U}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$

7.2.2.2 平面方程的第二种类型——点法式与一般式

之前说到确定平面的方式可以由定点和法向量一起确定，回顾一下高中数学立体几何关于“直线垂直于平面”的相关定义：如果一条直线与平面内任意一条直线都垂直，那么这条直线与这个平面垂直。

已知平面 Π 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 以及平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$，则平面 Π 被完全确定，即对应的点法式方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

笔记 考虑向量 (A, B, C) 和 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 的内积为 0（垂直）

将上面的点法式展开得到平面方程的一般式为

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C \text{ 不全为零})$$

显然，$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

笔记 平面方程一般式前面的系数为对应法向量的坐标

7.2.2.3 平面方程的第三种类型——利用线性相关的三点式方程

如已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 以及与平面 Π 平行的两个不共线的向量 $\boldsymbol{U}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$,$\boldsymbol{U}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, 则平面 Π 被完全确定, 它的方程是

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$$

7.2.2.4 平面方程的第四种类型——截距式方程

设平面与三个坐标轴的截距分别为 a,b,c，即平面通过三点 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$，则对应的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

笔记 如果某项的分母 (截距) 为 0，则分子为零，例如当 $a=0$ 时，方程退化为

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

此时该平面平行于 x 轴

7.2.3 直线方程

7.2.3.1 直线方程的第一种类型——一般式 (交面式)

通过两个相交平面，我们可以得到直线，所以一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

其中 $\{A_1,B_1,C_1\}$ 与 $\{A_2,B_2,C_2\}$ 不平行

7.2.3.2 直线方程的第二种类型——对称式 (标准式) 与参数式

已知定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 和方向向量 (l,m,n), 则直线的对称式子方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

进一步，令 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$，展开后得到参数式

$$\begin{cases} x=x_0+tl, \\ y=y_0+tm, \\ z=z_0+tn; \end{cases}$$

7.2.3.3 直线方程的第三种类型——两点式方程

虽然这里的标题是两个点，实际上是三个点

设已知两点的坐标分别为 $M_1\{x_1,y_1,z_1\}$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$，直线上任意一点的坐标为 (x,y,z), 则两点式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

笔记

1. 直线才有“方向向量”和某个定点的“法平面”

2. 曲面才有某个定点的“切平面”和“法向量”

3. 平面才有“法向量”，此时“切平面”退化到这个平面本身

4. 对平面方程求偏导的结果是法向量，对直线方程求偏导的结果是方向向量

5. 直线方程的一般方程到标准式方程的转化是通过先求直线的方向向量 (两个平面方程的法向量的叉积) 得到的

由于大部分的相关题目需要涉及到直线与平面间的位置关系，所以例题放在下一节讲完关系之后

7.3 平面、直线之间相互关系与距离公式

柠宝：把握相互关系的时候，将平面与直线之间的关系转化为平面的法向量与直线的方向向量的关系

7.3.1 两个平面之间的关系

两个平面的关系平行、相交、重合、垂直（特殊的相交）

设 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则

1. $\Pi_1//\Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$; (法向量共线但两平面不重合)
2. $\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;
3. Π_1 与 Π_2 的夹角 θ (法向量间夹角, 指不大于 90° 的)

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}$$

7.3.2 两条直线之间的关系

设 $L_1: \quad \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1},\quad L_2: \quad \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$, 则

1. $L_1//L_2 \Leftrightarrow S_1//S_2$ 即 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ 且 (x_1,y_1,z_1) 不满足 L_2 的方程
2. $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow S_1\perp S_2$ 即 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
3. L_1 与 L_2 间的夹角 θ (方向向量间夹角, 指不大于 90° 的)

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2|}{|\boldsymbol{S}_1|\,|\boldsymbol{S}_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

7.3.3 直线与平面之间的关系

设 $L: \quad \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}, \Pi: Ax+By+Cz+D=0$, 则

1. $L//\Pi \Leftrightarrow S\perp n$ 即 $Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$
2. $L\perp\Pi \Leftrightarrow S//n$ 即 $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$
3. L 与 Π 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}-(S$ 与 n 的夹角 $)$:

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

7.3.4 平面束方程

通过直线 $L: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的平面束方程是

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

其中 λ,μ 是不同时为零的任意常数

7.3.5 距离问题

1. 两点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离为
$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
2. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为
$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\sin\left\langle\overrightarrow{P_0P_1},S\right\rangle=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times S\right|}{|S|}$$
其中，$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 S 分别是直线 L 上的定点与方向向量. 按向量叉积与模的运算可以得到
$$d=\frac{|\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}\times\{l,m,n\}|}{|\{l,m,n\}|}=\frac{\left\|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\end{array}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$
3. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7.3.6 典型例题

例题 7.6 (I) 经过点 $P(1,2,-1)$ 并且与直线 $L:\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面 Π_1 的方程是 ____ ; (II) 经过点 P 及直线 L 的平面 Π_2 的方程是 ____

例题 7.7 (I) 经过点 $P(2,-3,1)$ 且与平面 $\Pi:3x+y+5z+6=0$ 垂直的直线 L_1 的方程是 ____ ; (II) 经过点 P 且与直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+2}{5}$ 垂直相交的直线 L_2 的方程是 ____

例题 7.8 两个平行平面 $\Pi_1:2x-y-3z+2=0,\quad \Pi_2:2x-y-3z-5=0$ 之间的距离是 ____

例题 7.9 经过点 $A(-1,0,4)$, 与直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 及 $L_2:\quad\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线 L 的方程是 ____

例题 7.10 经过点 $A(-1,2,3)$, 垂直于直线 $L:\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且与平面 $\Pi:7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程是 ____

例题 7.11 求经过直线 $L:\frac{x+1}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-3}$, 而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面方程

7.4 旋转曲面与柱面方程，常用二次曲面的方程及其图形

7.4.1 球面

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球心, R 是半径, $P(x,y,z)$ 是球面上任意一点, 则 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=R$, 即
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

7.4.2 旋转曲面

设 L 是 xOz 平面上一条曲线, 其方程是 $\begin{cases}f(x,z)=0,\\ y=0.\end{cases}$ L 绕 z 轴旋转得到旋转曲面, 设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点, 由点 $P_0(x_0,0,z_0)$ 旋转而来 (点 $M(0,0,z)$ 是圆心)

由 $|x_0|=\left|\overrightarrow{MP_0}\right|=|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{x^2+y^2}, z_0=z$ 得旋转面方程是
$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

或由参数方程 $x=f(t),y=g(t),z=h(t)(t\in(\alpha,\beta))$，得旋转面的参数方程

$$\begin{cases} x=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\cos\theta, \\ y=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\sin\theta, \quad \alpha<t<\beta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z=h(t), \end{cases}$$

7.4.3 柱面

Γ 是一条空间曲线，直线 L 沿 Γ 平行移动所产生的曲面叫柱面，Γ 称为柱面的准线，L 叫柱面的母线

第一种情况：若准线方程是 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

1. 当母线平行于 z 轴时，柱面方程是 $f(x,y)=0$
2. 当母线的方向向量是 $S=\{l,m,n\}$ 时，柱面方程是 $f\left(x-\frac{l}{n}z, y-\frac{m}{n}z\right)=0$

第二种情况：若准线方程是 $\Gamma:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), t\in(\alpha,\beta) \\ z=h(t) \end{cases}$，母线的方向向量是 $S=\{l,m,n\}$，柱面方程是

$$\begin{cases} x=f(t)+lu \\ y=g(t)+mu, \quad (\alpha<t<\beta, -\infty<u<+\infty) \\ z=h(t)+nu \end{cases}$$

7.4.4 二次曲面

1. 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2. 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q>0)$
3. 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4. 二次锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
5. 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
6. 旋转抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$
7. 双曲抛物面：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q>0)$
8. 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
9. 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
10. 抛物柱面：$\frac{x^2}{2p}=y \quad (p>0)$

例题 7.12 圆柱面的轴线是 $L:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$，点 $P_0(1,-1,0)$ 是圆柱面上一点，求圆柱面方程

7.5 空间曲线在坐标平面上的投影

求投影一共有两种情况

1. 如 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$ 消去 z 得到 $\varphi(x,y)=0$，这是以 Γ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程。而 $\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 是 Γ 在 xOy 平面的投影曲线方程
2. 如 $\Gamma:\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=h(t), \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=0 \end{cases}$ 是 Γ 在 xOy 平面的投影曲线方程

例题 7.13 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程

第 8 章 二重积分及其应用

内容提要

- 第一节 二重积分的概念、性质和对称性
- 第二节 二重积分的计算、换序、作图和变上限积分
- 第三节 二重积分的变量代换 (雅克比)
- 第四节 二重积分的几何、物理应用

8.1 二重积分的概念、性质和对称性

柠宝：本章内容属于简单内容，除了常规的计算之外，要充分学会利用对称性解决问题，重点放在极坐标的代换和换序 (包括积分交换次序以及从极坐标换回 xy 的积分)

8.1.1 二重积分的概念与几何意义

无论是二重积分还是三重积分 (数一)，本质上都是定积分，二重积分是定积分的二维形式，三重积分是定积分的三维形式。重积分可以看成是"累次积分"

- 定积分的积分区域是一维的，对一维进行切片就是对 x 轴的某个区间长度进行"切片"，切片的结果是长度微元，即 $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$
- 二重积分的积分区域是二维的，对二维平面进行切片就是对 D_xy 区域进行"切片"，切片的结果是面积微元，即 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- 三重积分的积分区域是三维的，对三维维立体空间进行切片就是对 Ω_xy，切片的结果是体积微元，即 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

定义 8.1 (二重积分的概念)

设函数 $z = f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界，将 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，也表示它的面积。

在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，再求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 中的最大直径，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 极限存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

♣

二重积分的几何意义：

1. 与定积分相同，二重积分也是一个数字
2. 几何意义为曲顶柱体的体积 (类比定积分中曲边梯形的面积)，唯一有的差异就是维度上的差异，同样的有正有负，只是分界线由定积分中的 x 轴"升维"到了 xoy 面 (上方为正，下方为负)

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = Oxy\text{ 平面上方的曲顶柱体体积} - Oxy\text{ 平面下方的曲顶柱体体积}$$

作图理解：(上课补充)

8.1.2 二重积分的性质

性质

1. 常数可以提出来，即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

2. 线性性质，即

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3. 区间累加性

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

其中,D_i 为 D 的构成子域且任两个子域没有重叠部分 $(i=1,2,\cdots,m)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{m} D_i = D$

柠宝：对于考概率论的数一、数三的同学, 此性质要和“全概率公式”相结合进行理解

4. 计算平面图形的面积

$$\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = S_D$$

5. (比较定理) 若在 D 上恒有 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

6. (中值定理, 大纲新增) 若 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, A 为 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η), 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

此定理有明确的几何意义：表示曲顶柱体的平均高度（类比定积分的中值定理，平均高度可以为负）

柠宝：二重积分的中值定理的出题形式一般为某些有关二重积分的极限题目

问：若条件改为 $f(x,y)$ 在闭域 D 上可积, 结论如何修改?

7. 绝对值不等式

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

本节内容暂时不会涉及到二重积分的计算 (X 型、Y 型)，这里直接把对称性讲透彻

8.1.3 二重积分的对称性 (重点)

8.1.3.1 二重积分的奇偶对称性

使用奇偶对称的必要条件：积分区域 D 关于坐标轴对称。换句话说，如果连积分区域都没有关于坐标轴对称，那么一定不能使用奇偶对称性

命题 8.1

如果积分域 D 关于 x 轴对称, $f(x,y)$ 为 y 的奇偶函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & f \text{ 关于} y \text{ 为奇函数, 即} f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f \text{ 关于} y \text{ 为偶函数, 即} f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

其中, D_1 为 D 在 x 轴的上 (下) 半平面部分

如果积分域 D 关于 y 轴对称, $f(x,y)$ 为 x 的奇偶函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & f \text{ 关于} x \text{ 为奇函数, 即} f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f \text{ 关于} x \text{ 为偶函数, 即} f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

其中, D_1 为 D 在在 y 轴的左 (右) 半平面部分

笔记

1. 关于 x 轴对称，看 y 的奇偶性；关于 y 轴对称，看 x 的奇偶性
2. 其实我们可以将定积分中的积分区间 $[-a,a]$ 看作关于 y 对称，同样得到看 x 的奇偶性
3. 关于 x 轴对称, 看 y 的奇偶性要理解为区域关于直线 $y=0$ 对称, 看 $(y-0)$ 的 “奇偶性”

8.1.3.2 二重积分的广义奇偶对称性

与定积分中的广义对称性一样，这里首先满足积分区域关于直线 $x=a$ 或直线 $y=a$ 对称

$$\begin{cases} \text{积分区域关于直线}x=\text{几, 看}(x-\text{几})\text{ 的奇偶性} \\ \text{积分区域关于直线}y=\text{几, 看}(y-\text{几})\text{ 的奇偶性} \end{cases}$$

柠宝：若表达式中没有, 就强行凑

例题 8.1 计算 $\iint_D (x+y)dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1\right\}$

例题 8.2 计算 $\iint_D xyf\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由其中 D 是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 围成的区域,$f(u)$ 为连续函数

8.1.3.3 二重积分的轮换对称性

设积分区域为 D_{xy}, 将积分区域中的变量 x,y 互换后所成的区域为 D_{yx}, 则

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

柠宝：上述公式无条件成立，本质上是利用积分变量与用什么字母表示无关。所以要使用轮换对称性只需要满足 $D_{xy}=D_{xy}$

判定方法：只要满足积分区域关于直线 $y=x$ 对称，此时不需要看被积函数如何, 均成立

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} f(y,x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

具体来说：将积分区域中 xy 对换, 表达式不变, 则积分区域关于直线 $y=x$ 对称

笔记 二重积分的轮换对称性的使用类似于定积分中的区间重现公式 $2I=I_1+I_2$

例题 8.3 设区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$, $f(x)$ 为 D 上正值连续函数,a,b 为常数, 求

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$$

8.1.3.4 二重积分关于原点的对称性

设积分区域 D 关于原点对称, $f(x,y)$ 同时为 x,y 的奇函数或偶函数, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases} 0 & f\text{ 关于}x,y\text{ 的奇函数, 即}f(-x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & f\text{ 关于}x,y\text{ 的偶函数, 即}f(-x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的某个半平面

8.2 二重积分的计算、换序、作图和变上限积分

8.2.1 二重积分的计算

8.2.1.1 直角坐标下的先 y 后 x

适用条件：积分区域能够被表示成 $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b$, 称此区域为 X 型区域

作图理解：

补充内容：先 y 后 x 的几何意义（先 x 后 y 类似）

笔记

1. 如果 y 的边界曲线是分段函数或者区域不是 X 型区域 $\to$ 立即划分区间
2. 先对 y 积分时是对 y “偏积分”

例题 8.4 计算 $\iint_D \left[|xy|+\sin\left(xy^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $|x|+|y|=1$ 围成

8.2.1.2 直角坐标下的先 x 后 y

适用条件：积分区域能够被表示成 $x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), c\leqslant y\leqslant d$, 称此区域为 Y 型区域

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

笔记

1. 如果 x 的边界曲线是分段函数或者区域不是 Y 型区域 $\to$ 立即划分区间
2. 先对 x 积分时是对 x “偏积分”

例题 8.5 计算积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x$ 围成

例题 8.6 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$, 求 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$

8.2.1.3 极坐标下的二重积分

引入极坐标变换：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, \quad dxdy\to rdrd\theta$

柠宝：为什么多了一个系数 r 留在本章第三节进行说明, 此处先背下来

适用条件：积分域 D 可以用不等式 $r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

笔记 作图理解：

1. 适合用极坐标的被积函数：

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$$

2. 适合极坐标的积分区域：

$$x^2+y^2\leqslant R^2; r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2; x^2+y^2\leqslant 2ax; x^2+y^2\leqslant 2by$$

2.$dxdy\to rdrd\theta$ 不要忘了系数 r

3. 如果 r 的边界曲线是分段函数 $\to$ 立即划分区间

4. 先对 r 积分时是对 r “偏积分”(实际中几乎不会用到先对 θ 进行积分的情况，除了在选择题中积分交换次序的时候会碰见)

5. 在所有的定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线曲面积分的计算中，下限永远小于上限。若题干不满足下限小于上限, 则立即添负号进行转化

8.2.2 常见曲线作图 (重点)

8.2.2.1 上下左右圆

设 $a>0$

1. 上圆：$x^2+y^2\leqslant 2ay$

2. 下圆：$x^2+y^2\leqslant 2ay$
3. 左圆：$x^2+y^2\leqslant -2ax$
4. 右圆：$x^2+y^2\leqslant 2ax$

例题 8.7 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $x^2+y^2=2ay(a>0)$ 围成

例题 8.8 计算 $\iint_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 所确定

8.2.2.2 双纽线、摆线等曲线作图

(2021 数二压轴题目就考了双纽线)

双纽线：

(1)$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$

(2)$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$

摆线：

$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$

玫瑰线：

$\rho=a\sin 3\theta$

8.2.3 有关摆线的一道积分题目

例题 8.9 计算 $\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 $y=0$ 围成

8.2.4 有关概率积分的证明

本证明要求掌握

例题 8.10 证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

8.2.5 积分交换次序、直角坐标和极坐标的相互转换

柠宝：一般的二重积分的计算题, 通常情况下都需要先进行交换次序, 原因是出题老头不会出的这么简单, 如果不限换序，会出现”积不出来”的积分

8.2.5.1 直角坐标交换积分次序

例题 8.11 对下列二重积分交换积分次序

(1)$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(2)$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

例题 8.12 计算

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

8.2.5.2 极坐标交换积分次序

柠宝：一般而言, 极坐标的换序比直角坐标麻烦, 要尤其注意积分限不是看出来的, 是算出来的（看完常见曲线的作图应该有所体会）

例题 8.13 (十星重点，本体有两个方法) 交换累次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

8.2.5.3 直角坐标和极坐标的相互转化 (选择题常考)

例题 8.14 将累次积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$ 转化为直角坐标下的积分

8.2.6 有关二重积分边上积分求导问题

核心思想:

- 除了积分变量, 其余都是常数（此方法会在三重积分换序、概率论中多元连续随机变量的积分中再次使用）
- 二重积分本质上也是属于定积分, 只是被积函数是积分的形式罢了

例题 8.15 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_{1}^{t} \mathrm{d}y \int_{y}^{t} f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于 (　　)

(A) $2f(2)$

(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$

(D) 0

8.2.7 有关 min、max、绝对值的积分

例题 8.16 (2008) 计算 $\iint_{D} \max\{xy, 1\} dxdy$, 其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$

8.3 二重积分的变量代换 (雅克比)

本小节虽然不属于考试范围，但是强烈建议四掌握，会简化很多计算

前情提要：我们知道在直角坐标变换到极坐标时为

$$dxdy \to rdrd\theta$$

本节内容解决 r 的几何意义

在学习完本节之后，可以方便的计算形式上较为复杂的二重积分，可以运用在一切二重积分的相关计算中 (物理应用和几何应用在3.12和3.13讲过)

8.3.1 雅克比行列式

8.3.1.1 雅克比行列式的定理和使用

定理 8.1

设 R^2 中的有界闭区域 D 有面积, 函数 $F: D \to \mathrm{R}$ 连续, 映射

$$\varphi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad ((u,v) \in \Delta)$$

是从 Δ 到 D 上的正则映射, 即 φ 将 Δ 一对一地映射成 $D, \varphi \in C^1(\Delta)$, 并且在 Δ 上, 有

$$\det J\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么

$$\iint_D \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\varphi}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

也可以写成

$$\iint_{\varphi(\Delta)} F(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta F(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

♡

笔记

1.det $J\varphi$ （即雅克比行列式）表示坐标变换前后面积微元的“面积比”，即“伸缩程度”。不需要掌握证明，有兴趣的的可以参阅《数学分析》相关内容

2. 本内容不仅适用于二重积分的变量代换、也适用于三重积分的变量代换, 甚至是概率论中的多元随机变量

3.det $J\phi$ 仅用于多元的情况, 对于一元的情况不再适用, 例如 $x=f(u), y=g(v)$

4. 常见的需要用到 det $J\varphi$ 的情况大多数只是在原有的比例系数前多了乘积, 例如极坐标下的 r 变为 abr

8.3.1.2 极坐标变换下的雅克比推导

例题 8.17 证明：在二重积分的极坐标变换下 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad dxdy \to rdrd\theta$

8.3.1.3 广义极坐标变换下的雅克比的应用

例题 8.18 求椭圆的面积 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

8.3.1.4 在二重积分中利用一元函数的变量替换

例题 8.19 计算 $I=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 及 x 轴和 y 轴围成, 其中 $a>0, b>0$

8.3.2 有关二重积分的中值定理的两个例题

柠宝：本部分的二重积分的中值定理的内容是 2021 大纲的新增考点。一般来说，此部分适用于有关抽象箱数、变量代换、重积分有关的极限，常用于极坐标变换、球面变换 (仅数一) 的相关题目中

例题 8.20 设 $f(u)$ 连续, $f(0)=0, f'(0)=1$, 且 $D=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant t^2\right\}$, 求

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\tan t - t}$$

例题 8.21 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且 $f(0,0)=2$, 求

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{t^2}$$

8.4 (仅数一、二) 二重积分的几何、物理应用

本节内容作为3.12和3.13的补充内容，除了在第三章讲过的几何应用之外，这里补充另外两个几何应用

本节内容涉及到仅数一的内容为

- 曲面的表面积、器件的转动惯量
- 三维器件的质量、质心、形心

其余内容为数一数二的公共内容

8.4.1 曲面的表面积 (仅数一，本部分内容与曲面积分高度相关)

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$ 给出, D 为 S 在 xy 平面上的投影区域,$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的偏导数 f'_x,f'_y,S 上任意点处的单位法向量

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}(-f'_x,-f'_y,1)$$

则 S 的面积为

$$A=\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{|\cos\gamma|}=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中是曲面 S 的法向量与 z 轴正向的夹角

同样的，有

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,A=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

推导过程: 设空间某平面图形的面积为 A, 改平面图形在 xy 平面上的投影的面积为 σ, 则

$$A=\frac{\sigma}{|\cos\gamma|}$$

其中 γ 是曲面 S 的法向量与 z 轴正向的夹角

例题 8.22 求柱面 $x^2+y^2=ax$ 含于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的曲面面积 S, 其中 $a>0$ 为常数

柠宝：本节内容在第三章已经讲过，这里仅给出部分共识和一个简单的例子，剩下的无非是计算层面的问题

8.4.2 质量

设平面薄片的面密度为 $\mu=\rho(x,y)$, 薄片在 xOy 坐标面上的投影为 D, 则

$$M=\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注意到这里的平面的薄片，提问数一的同学：如果改成空间中的薄片，公式应该作何修改?

8.4.3 质心

质心公式:

$$\text{质心}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\sum_{i=1}^n x_im_i,\sum_{i=1}^n y_im_i,\sum_{i=1}^n z_im_i\right)/\sum_{i=1}^n m_i$$

在二重积分下，质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\bar{y}=\frac{\iint y\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

在三重积分下，质心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},\bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},\bar{z}=\frac{\iint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

8.4.4 形心

柠宝：质量分布均匀 (即面密度或体密度为常数) 的质心 = 形心, 即

$$\bar{x}=\frac{\iint_{D} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\bar{y}=\frac{\iint y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

笔记 对于不经过计算就能知道某些对称图形的形心时（比如圆和椭圆），注意形心公式的逆用，即

$$\iint_{D} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\bar{x}\iint_{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\bar{y}$ 的逆用公式以及三重积分的形式同理, 不再赘述

例题 8.23 计算 $\iint_{D} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由圆心在 $(1,1)$ 半径为 2 所围成的闭区域

8.4.5 (仅数一) 转动惯量

空间形体 Ω 关于 x,y,z 轴及原点的转动惯量分别为 (三重积分)

$$J_x=\iiint_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$J_y=\iiint_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$J_z=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$J_0=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

对于薄片对于 x,y,z 轴及原点的转动惯量, 请自行补充

8.4.6 侧压力

例题 8.24 有一椭圆形薄板, 长半轴为 a，短半轴为 b，薄板垂直立于水中，而其短半轴与水面相齐, 求水对薄板的侧压力

第 9 章 (仅数一) 三重积分及其应用

内容提要

- 第一节　三重积分的概念与性质
- 第二节　先一后二法与先二后一法
- 第三节　(广义) 柱面变换与 (广义) 球面变换
- 第四节　奇偶对称、广义奇偶对称和轮换对称
- 第五节　直角坐标系下的积分交换次序

9.1 三重积分的概念与性质

9.1.1 三重积分的概念

定积分、二重积分和三重积分本质上都是定积分，区别只有维度上的不同

定义 9.1

空间中有界闭区域 Ω 上三元函数 $W=f(x,y,z)$ 的三重积分定义为

$$J=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta V_i$$

其中 $d=\max_i\left\{d_i\right\},d_i$ 是小区域 ΔV_i 的直径, ΔV_i 为第 i 个小闭区域, 同时也表示 ΔV_i 的体积，在直角坐标下

$$\Delta V_i=dxdydz$$

如果三重积分 $\iiint_0 f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 存在时, 称 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积。若 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域上连续，则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 一定存在，反之不一定成立

♣

9.1.2 三重积分的性质

这里的性质几乎就是二重积分相关性质的翻版

性质

1. 常数可以提出来
$$\iiint_{\Omega} kf(x,y,z)\mathrm{d}V=k\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$
2. 线性性质
$$\iiint_{\Omega}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V+\iiint_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}V$$
3. 区域累加性
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^{m}\iiint_{\Omega_i} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$
其中，D_i 为 D 的构成子域且任两个子域没有重叠部分 $(i=1,2,\cdots,m)$ 且 $\sum_{i=1}^{m} D_i=D$
柠宝：对于考概率论的数一、数三的同学, 此性质, 要和“全概率公式”相结合
4. 计算空间区域 Ω 的体积
$$\iiint_{\Omega} 1\mathrm{d}V=V$$
5. (比较定理) 若在 D 上恒有 $f(x,y,z)\leqslant g(x,y,z)$, 则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V\leqslant\iiint_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}V$$

6. (估值定理)M, m 分别为 $f(x,y,z)$ 在闭域 Ω 上的最大值与最小值, A 为 Ω 的体积, 则

$$mA \leqslant \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V \leqslant MA$$

7. (中值定理, 大纲新增) 若 $f(x,y,z)$ 在闭域 Ω 上连续, A 为 Ω 的体积, 则在 Ω 上至少存在一点 (ξ,η,γ), 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = f(\xi,\eta,\gamma)A$$

柠宝：若条件改为 $f(x,y,z)$ 在闭域 Ω 上可积, 结论如何修改?

8.

$$\left|\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V\right| \leqslant \iiint_{\Omega} |f(x,y,z)|\mathrm{d}V$$

9.2 先一后二法与先二后一法

此节内容默认读者认真听完了8.2

首先需要明确的是，三重积分的意义同二重积分类似，是将作用量 $f(x,y,z)$ 作用在空间区域 Ω 的累积效应。为了计算三重积分，我们所做的工作同二重积分一样，也是降维处理，计算三个定积分 $(2+1=1+2=3)$

另外再次强调，定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分中，下限永远小于上限

柠宝：本节内容暂时不涉及三重积分的对称性，留在下一节进行讲解

9.2.1 先一后二法

无论是先一后二法还是先二后一法，本质上是对 Ω 的切片方式不同

设 Ω 是 $Oxyz$ 空间中的有界闭区域, $f(x,y,z)$ 在 Ω 连续, 若 Ω 能表示成

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

其中 D 是 Oxy 平面上的有界闭区域, $z_i(x,y)$ 在 D 连续, $i=1,2$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

作图理解:

例题 9.1 求 $I = \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}V$, Ω 由三个坐标面及平面 $x+y+2z=2$ 围成

例题 9.2 计算 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成的几何体

9.2.2 先二后一法

柠宝：先二后一法仅适用于截面已知的情况

设 Ω 是 $Oxyz$ 空间中的有界闭区域, $f(x,y,z)$ 在 Ω 连续, 若 Ω 能表示成

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid z_1 \leqslant z \leqslant z_2, (x,y) \in D(z)\}$$

其中 $D(z)$ 为竖坐标为 Z 的平面上的有界闭区域, 也即是垂直于 Z 轴的平面截闭区域 Ω 所得到的，有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

作图理解:

例题 9.3 求 $I = \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}V$, Ω 由三个坐标面及平面 $x+y+2z=2$ 围成

例题 9.4 计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz(R>0)$ 所围成的闭区域

例题 9.5 计算 $\iint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成的几何体

笔记

1. 在实际的计算中,用到先二后一法与先一后二法的情况要少于柱面变换和球面变换
2. 在选择先二后一还是先一后二主要是看积分区域 Ω 的截面积能否方便的表示，能的话就用先二后一法

9.2.3 十星重点：如何在不画图的情况下计算 2019 年的一道真题

例题 9.6 (2019,10') 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的椎体, 求 Ω 的形心坐标

9.3 奇偶对称、广义奇偶对称和轮换对称

说在前面：三重积分的奇偶对称、广义对称和轮换对称与二重积分的完全一致, 请注意对比

9.3.1 三重积分的奇偶对称性

有了二重积分的对称性的知识，这里直接给出相关结论

与二重积分中的对称性一样, 积分区域的对称性本质上是点的对称性

使用奇偶对称的必要条件：积分区域 Ω 关于坐标平面对称

如果积分区域 Ω 关于 xy 平面对称, 看 z 的奇偶性（缺什么看什么）, 即有

$$(x,y,z)\in\Omega\Leftrightarrow(x,y,-z)\in\Omega$$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_z\geqslant 0} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,-z)=f(x,y,-z)\\ 0, & -f(x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

如果积分区域 Ω 关于 yz 平面对称，看 x 的奇偶性 (缺什么看什么)

如果积分区域 Ω 关于 xz 平面对称, 看 y 的奇偶性 (缺什么看什么)

例题 9.7 设空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, 则下列等式成立的是 (　　)

(A)
$$\iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}V=4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}V$$

(B)
$$\iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}V=4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}V$$

(c)
$$\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}V=4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}V$$

(D)
$$\iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}V=4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}V$$

9.3.2 三重积分的广义奇偶对称性

同二重类似, 在三重积分中, 积分区域 Ω 关于平面 $z=$ 几对称, 就看 $(z-\ )$ 的奇偶性

例题 9.8 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega$ 是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 所围成的闭区域

9.3.3 三重积分的轮换对称性

同二重积分一样，本质上是积分变量与用什么字母表示无关

方法：直接看积分区域的表达式若将积分区域中的 (x,y,z) 分别替换成 (z,x,y) 后积分区域的表达式不变，则有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(z,x,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega f(z,x,y)dxdydz$$

第二个等号成立的原因是

$$dxdydz=dydzdx=dzdxdy$$

进一步，若三个变量任意调换后积分区域保持不变，则有（以下六个相等）

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(x,z,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_\Omega f(y,z,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(z,y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

常见的可以任意调换的积分区域

1. 球心在原点的球所围成的闭区域
2. $x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$

笔记 在利用轮换对称性的时候，要注意到“每一份”相等的量和题干中一共要求“几份”

例题 9.9 计算三重积分 $\iiint_\Omega (mx+ly+nz)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$

例题 9.10 计算三重积分 $\iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, 其中 Ω 为球心在原点的单位球的内部

9.4 (广义) 柱面变换与 (广义) 球面变换

三重积分除了基本的先一后二法与先二后一法之外，常见的方法就是本节所要讲的两种变量代换

注意到雅克比行列式的使用

9.4.1 柱面变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, & 0\leqslant r<+\infty \\ y=r\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z=z, & -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

变换前后的体积微元为 $\mathrm{d}V=r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 即 $\det J=r$

关于此变换的理解：对平面上的坐标进行极坐标变换，坚坐标 z 保持不变，类似于“在平面 xoy 面上加一维 z 轴变成空间直角坐标系 $\to$ 在极轴 $r\theta$ 上加了一维 z 轴”

笔记

1. 常见的适用情况为被积函数中有:x^2+y^2 、$\sqrt{x^2+y^2}$ 等积分项或者积分区域是柱面所围成的区域例如 $x^2+y^2=4$、$z=0z=4$ 所围成

2. 类似于上下左右圆，这里也有前后左右柱

3. 在考虑使用变量代换时，积分区域的优先级 > 被积函数的优先级

例题 9.11 计算 $I=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \Omega: x^2+y^2\leqslant z, x^2+y^2+z^2\leqslant 2$

例题 9.12 设 $f(t)$ 连续, $F(t)=\iiint_\Omega\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}v$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2\leqslant t^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 所确定，求

$$\frac{dF}{dt},\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2}$$

9.4.2 球面变换

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ z = r\cos\varphi, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

变换前后的体积微元

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

即 $\det J = r^2\sin\varphi$

$\det J$ 的推导以及球面变换的推导和有关 r, φ、θ 限的理解 (上课补充):

笔记

1. 适用条件:

1. 被积函数中有: $x^2+y^2+z^2$、$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 等积分项
2. 积分区域是球心在原点的球、大球中间挖了个小球 (类似二重积分的环带)
3. 前后左右上下球 (多了两个)

2. 积分区域的优先级 > 被积函数的优先级

例题 9.13 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 (a>0, b>0, c>0)$ 的体积

例题 9.14 求三重积分

$$I = \iiint_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5 \,\mathrm{d}V, \text{其中}\Omega : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z$$

例题 9.15 求三重积分

$$I = \iiint_{\Omega}(x+y+z)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \text{其中}\Omega : x^2+y^2 \leqslant 1, |z| \leqslant 1$$

9.4.3 旋转抛物面与圆锥面的记忆和画法以及三重积分的定限

(本小节内容上课全程手画补充, 讲义留白)

例题 9.16 求 $I=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 由 $z=16\left(x^2+y^2\right), z=4\left(x^2+y^2\right), z=16$ 围成

9.5 直角坐标系下的积分交换次序

对于一般能够直接画出空间区域的来说，换序是容易的，这里不再讲述

由于三重积分的积分区域并不是每次都能顺利画出来，这里采用“曲线救国”的方式，利用“两次二重积分换序”来做

同二重积分讲的一样，除了积分变量，其余都是常数

例题 9.17 计算

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z$$

例题 9.18 将下列积分改成先 x 最后 y 的顺序

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例题 9.19 计算

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,\mathrm{d}z$$

笔记

1. 三重积分的换序通常只会考直角坐标的换序，对于柱面变换和球面变换不会考察

2. 一般而言，在确定对谁积分的时候，被积函数中的复杂部分放到最后积分（如上述的最后一个例子对 z 最后积分）

第 10 章 (仅数一) 曲线曲面积分

内容提要

- 第一节　第一类曲线积分
- 第二节　第二类曲线积分
- 第三节　Green 公式
- 第四节　第一类曲面积分
- 第五节　第二类曲面积分
- 第六节　Gauss 公式
- 第七节　Stokes 公式
- 第八节　场论初步

10.1 第一类曲线积分

有关曲线曲面积分的学习方法和注意事项:

- 区分不同积分类型的物理意义, 对谁积分 (线还是面？有向还是无向？), 累积效应如何?
- 第一类积分和第二类积分的对称性 (包括奇偶对称性)，特别是第二类积分的奇偶性如何判断?
- 什么时候能够将积分区域带入被积函数中，什么不时候不能带?
- 两类积分之间的联系
- 熟练使用格林公式、高斯公式和斯托克斯公式, 注意它们的使用条件和可能存在的陷阱

10.1.1 第一类曲线积分的概念

定义 10.1

Oxy 平面上光滑或分段光滑曲线 L 上函数 $f(x,y)$ 的第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta s_i$$

其中 Δs_i 表示第 i 个小段的弧长, $\lambda=\max\left\{\Delta s_i\right\}$. 第一类曲线积分也称对弧长的曲线积分，$f(x,y)$ 称作被积函数, L 称作积分弧段

若 $f(x,y)$ 在分段光滑曲线 L 上连续, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 一定存在

对于空间光滑或分段光滑曲线 L, 被积函数 $f(x,y,z)$, 对应的第一类曲线积分为

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta s_i$$

如果积分曲线 L 是封闭曲线, 对应的曲线积分分别记作

$$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s\left(\text{或}\oint_L f(x,y,z)\mathrm{d}s\right)$$

♣

笔记

1. 再次强调，定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲线积分的下限永远小于上限
2. 第一类曲线积分也称为“对弧长的线积分”
3. 本质上这里的第一类曲线积分就是定积分，所以有关定积分的线性性质、区间可加性这里也满足，不做赘述

10.1.2 第一类曲线积分的计算

第一类曲线积分的计算，通常采用直接法

造成不同情况下对第一类曲线积分计算过程不同的原因是被积元素 ds 的不同

平面曲线的方程一般有三种形式：参数方程、显函数、极坐标方程

定理 10.1

设 $f(x,y)$ 在平面曲线 L 上连续, 设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $,\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

其中，$x(t),y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续的导数且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$

这里计算的重点理解为“一元积分的变量代换”

特别的，若曲线 L 能被显式的表示成 $y=y(x),a\leqslant x\leqslant b$ 的形式，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

进一步，若平面光滑曲线 L 由极坐标方程给出 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

笔记

1. 理解第一类曲线积分的关键是理解被积元素 ds, 本质上就是弧微分, 也即上三个式子中的 $\mathrm{d}s$ 分别等于

- $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$
- $\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$
- $\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

2. 按照之前的理解，这里的“累计效应”是对“不考虑直径的线器件的质量”，线密度为 $f(x,y)$

3. 空间上的第一类曲线积分的“累积效应”同 2

4. 第一类曲线积分的被积元素 $\mathrm{d}s$ ，这里的 $\mathrm{d}s$ 是一小段弧长, 只有长度，理解为标量; 第二类曲线积分的被积元素换成了矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

10.1.3 第一类曲线积分的对称性

(上课补充)

10.1.4 典型例题

例题 10.1 计算 $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中, L 是圆周 $x^2+y^2=4x$

例题 10.2 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 其周长为 a, 则 $\oint_L\left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s$

例题 10.3 计算 $I=\oint_L x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

例题 10.4 设 $L:x^2+y^2=4$, 则 $\oint_L\left(x^2+xy^2\right)\mathrm{d}s$

10.2 第二类曲线积分

10.2.1 标量场与向量场、有向曲线

10.2.1.1 场的概念和分类

这里直接引用诺贝尔得主物理学家 Feynman 关于场的解读：场本身也是物质存在的基本形式，场是位置的函数

换个角度来看，场就是映射

- 如果是 $R^n \to R$(输出端一个数字也就是说标量), 那就是标量场，例如密度场、温度场、浓度场
- 如果是 $R^m \to R^n$(输出端是一个矢量), 那就是向量场，例如力场、电磁场、风场

无论是向量场还是标量场，自变量也就是说输入端都是一个位置，只是输出端有区别

10.2.1.2 有向曲线

所谓有向曲线是指, 它是通常的一条曲线，但还带有前进的方向。例如有向曲线 AB 和有向曲线 BA 理解为两条不同的曲线（因为起点和终点不同）

有向曲线（或有向曲面）适用于向量场，因为不可能将一个标量场作用在一个有向曲线上（因为没有什么意义）

10.2.2 第二类曲线积分的概念

首先需要注意的是，第二类曲线曲面积分的被积函数和和被积元素都是向量，目的是求它们的内积

定义 10.2

$F=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 在定向分段光滑曲线 L 上的第二类曲线积分

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta x_i+Q\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta y_i\right]$$

其中 λ 仍是各小弧段长度的最大值, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta y=y_i-y_{i-1}, (x_i,y_i)$ 是分点 M_i 的坐标，第二类曲线积分也称为对坐标的曲线积分，可以记为

$$\int_L F\cdot \mathrm{d}s$$

注意此处 ds 表示的是曲线上一点的单位切向量，方向与曲线的定向保持一致

存在性：若 $P(x,y),Q(x,y)$ 在定向分段光滑曲线 L 上连续, 则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在

推广到空间区域为：

$$\begin{aligned}\int_L F\cdot \mathrm{d}s&=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta x_i+Q\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta y_i+R\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta z_i\right]\end{aligned}$$

♣

笔记

1. 被积函数和被积元素 (均是向量) 的正交分解得到其展开式

2. 将被积函数理解为力 F, 定向的积分曲线理解为单位质点在此力 F 下的运动轨迹, 则上述积分的物理意义是做功

3.$\mathrm{d}s=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds$, 其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与曲线定向相同的单位切向量

4. 第二型曲线积分的性质：方向相反的两个定向曲线的积分值相差一个负号

10.2.3 第二类曲线积分的计算

重点理解微分的运算

定理 10.2

设有光滑曲线 $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$，其起点和重点分别对应参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$,$P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_a^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$

笔记 注意到显函数可以看成是特殊的参数方程

例题 10.5 $\int_\Gamma \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$\Gamma$ 表示逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$ (注意什么时候能带进去)

例题 10.6 $\int_\Gamma xz^2\,\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}y+zy^2\,\mathrm{d}z,\Gamma:x=t,y=t^2,z=t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$

10.2.4 第二类曲线积分的对称性 (十星重点)

柠宝：第 II 型曲线 (曲面) 积分的对称性要综合考虑被积函数和被积元素的符号 (与定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线曲面积分不同)，简单来说就是同号为正、异号为负

先说基本结论：

$$\int_L P\,\mathrm{d}x=0\,(\text{若}L\text{ 在垂直于}x\text{ 轴的平面上})$$

$$\int_L Q\,\mathrm{d}y=0\,(\text{若}L\text{ 在垂直于}y\text{ 轴的平面上})$$

$$\int_L R\,\mathrm{d}z=0\,(\text{若}L\text{ 在垂直于}z\text{ 轴的平面上})$$

作图理解：(上课补充)

10.2.5 两类曲线积分之间的关系 (重点)

定理 10.3

设 L 某定向分段光滑曲线起点为 A 终点为 B，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在曲线上连续，则有

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

其中 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是曲线弧 L 沿着从 A 到 B 方向的切线的方向余弦，推广到空间为

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

写成点积形式为

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{\mathrm{L}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{\mathrm{L}}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$$

其中：$\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\},\mathrm{d}\mathbf{s}=\{\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z\},\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

笔记

1. 注意用曲线的参数方程求其单位切向量的做法 (注意单位化)

2. 第一类曲线积分 ds 是弧长，第二类曲线积分的 $d\boldsymbol{s}$ 是与曲线定向相同的单位切向量

3. 在计算第二类线积分的时候，本节内容所讲的直接法并不多见，大多数题目都是利用下节课讲的格林公式（平面曲线）或者斯托克斯公式（空间曲线）或者补线利用上式，或者采用积分与路径无关

10.3 Green 公式

10.3.1 平面上的连通区域与正向边界

10.3.2 Green 公式及其证明

定理 10.4

设闭区域 D 由分段光滑的简单曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

也可以写成

$$\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中，L^+ 是 D 的取正向的边界曲线

笔记

1. 上面讲了单连通区域的积分形式。对于复连通区域，要想使用格林公式，积分曲线应该是复联通区域 D 的全部正向边界曲线，即

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中，C 取逆时针,C_k 取顺时针

作图理解 (上课补充):

2. 注意 Green 公式的条件，被积函数是具有“一阶连续偏导数”，如果题干只告知在闭区域 D 上连续（通常是抽象函数），则立即放弃使用 Green 公式，转而使用两类曲线积分的关系或者直接法

3. 采用“补线用 Green 公式”的时候，考虑补的一段线上是否满足“一阶偏导数连续”

4. 对于第 3 点，考虑先带入边界（通常是消去分母），再补线，注意补的线的方向

5. 平面上分段光滑闭曲线 L 围成平面区域 D, 则

$$D\text{ 的面积} = \frac{1}{2}\oint_{L^+} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \text{其中}L^+\text{为正向边界}$$

证明

10.3.3 Green 公式的简单应用

例题 10.7 设 $I = \oint_L \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是椭圆 $4x^2 + y^2 = 1, L$ 为逆时针方向

例题 10.8 求 $I = \oint_{C^+} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$, 其中 C^+ 是以 $A(1,1), B(2,2)$ 和 $E(1,3)$ 为顶点的三角形的正向边界线 $(ans: \frac{25}{6})$

10.3.4 (重点) 补线用 Green 公式

这种类型以及有关第二类曲面中的“补面用 Gauss 公式”是类似的，都是有关曲线曲面积分大题的常见出题形式

柠宝：由于并非所有的曲线都是闭曲线，而对 Green 公式的使用必须要求是闭曲线才可以，这里我们采用 $+A-A$ 的操作，将一个曲线“补成闭曲线”，再减去这一段的积分即可

另外要时刻注意被积函数在你所补的曲线上是否满足一阶偏导连续，例如分母若可能为零，那么补的曲线就不能经过原点

直接看例子

例题 10.9 计算 $I=\oint_L (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$, 其中 a,b 为正常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧段

10.3.5 挖洞补线：一个极为重要的例子

定理 10.5

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在复连通域 D 内有一阶连续的偏导数, 且恒有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, L_1 与 L_2 为 D 内任意两条通项闭曲线, 且各自所围的区域中有相同的不属于 D 的点 (不连通的点), 则有

$$\oint_{L_1} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_{L_2} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

例题 10.10 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心, R 为半径的圆周 $(R\neq 0)$, 取逆时针方向

柠宝核心技巧：补分母的曲线，用极限逼近

例题 10.11 计算曲线积分 $\oint \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$, 其中 L 为不经过原点的逆时针光滑曲线

10.3.6 第二类曲线积分与路径无关的判定与求解

10.3.6.1 第二类曲线积分与路径无关的判定

对于第二类曲线积分，我们知道物理意义是做功。根据高中物理知识，重力做功只和高度差有关，与路径无关。这种“积分与路径无关”的性质，原因和场的类型有关

有源无旋场的第二类曲线积分与路径无关，比如静电场、重力场

下面给出第二类线积分与路径无关的判定定理

定理 10.6

设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数, 则以下四条命题等价，即满足这四个条件之一即可

1. 积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关
2. $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线 (理解为起点和终点重合)
3. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y)\in D$
4. $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x,y)$, 注意到此处的 F 不唯一, 彼此相差一个常数

10.3.6.2 求解法之改变路径积分

如果经过上面的判定定理已经得到积分与路径无关，对于某个具体的第二类曲线积分, 我们就可以自由的选择积分路径，一般来说就是“沿着坐标轴前进”，即

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{x_1}^{x_2} P\left(x,y_1\right)\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{y_2} Q\left(x_2,y\right)\mathrm{d}y$$

或者

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2} Q\left(x_1,y\right)\mathrm{d}y+\int_{x_1}^{x_2} P\left(x,y_2\right)\mathrm{d}x$$

作图理解：(上课补充)

注意到路径的选择以“方便积分”为标准, 主要采用“试错”的方法

例题 10.12 计算线积分 $I=\oint_L ye^{y^2}\,\mathrm{d}x+\left(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2}\right)\mathrm{d}y$, 其中 L 为 $y=\sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段

例题 10.13 计算 $I=\int_L\left(x^2+2xy\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+y^4\right)\mathrm{d}y$, 其中 L 为方程 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 由点 $(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线段

10.3.6.3 求解法之利用原函数

柠宝：请注意

- 本部分同微分方程中的“全微分方程”，采用偏积分法
- 注意对 y 偏积分的时候要加上 $\varphi(x)$
- 注意对 x 偏积分的时候要加上 $\varphi(y)$

目的：我们希望找到类似于定积分中类似于牛顿——莱布尼茨一样的公式

定理 10.7

若积分与路径无关，则

$$\int_A^B P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=u(x,y)|_A^B=u(B)-u(A)$$

此处的 AB 分别为起点、终点的坐标

例题 10.14 设 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x+\dfrac{e^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$, 求 $u(x,y)$, 使 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

柠宝：本题有两个方法，分别是“偏积分法”和“特殊路径积分法”

10.4 第一类曲面积分

本节内容与曲面的表面积8.4.1高度重合，请自行翻笔记复习，默认已掌握曲面面积的计算

- 将 $f(x,y)$ 作用在曲线 L 上 $\Rightarrow$ 第一类曲线积分, 物理意义是线器件（没有直径）的质量,f 是线密度
- 将 $f(x,y)$ 作用在曲面 Σ 上 $\Rightarrow$ 第一类曲面积分, 物理意义是薄片 (没有厚度) 的质量, f 是面密度

柠宝：类比二重积分是定积分的“升维版本”，这里第一类曲面积分就是第一类曲线积分的升维版本

10.4.1 光滑和分片光滑曲面的概念

光滑曲线的定义为具有曲线上的各点有连续变动的切线

对于曲面来说，光滑曲面指的是曲面上的各点有连续变动的切平面，由于切平面与曲面上这一点的法向量一一对应，若曲面 Σ 由 $z=z(x,y)((x,y)\in D)$ 所确定，Σ 是光滑的 $\to z(x,y)$ 在 D 上有连续的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

所谓分片光滑，是有限块光滑曲面组成的新曲面, 允许两个光滑曲面的交线处不光滑

10.4.2 第一类曲面积分的概念与性质

定义 10.3

$f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 Σ 上的第一类曲面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta S_i$$

其中, λ 是各小块曲面的直径的最大值, ΔS_i 为第 i 个小块曲面, 同时也代表 ΔS_i 的面积,$f(x,y,z)$ 是被积函数 Σ 是积分曲面。第一类曲面积分也称为对面积的曲面积分　再次提醒，这里“下限永远小于上限”

性质

1. 积分值与曲面 Σ 的侧面选择无关,即
$$\iint_{\Sigma}=\iint_{-\Sigma}$$
其中，$-\Sigma$ 为曲面 Σ 的另一侧
2. 可加性
$$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\cdots+\iint_{\Sigma_k}$$
其中,Σ 由 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_k$ 组成,并且任意两块子曲面没有重叠部分
3. 曲面的面积为
$$\iint_{\Sigma}1\mathrm{d}S$$

10.4.3 第一类曲面积分的计算

对于曲线曲面的计算来说，可以直接将对应的曲线曲面方程带入到被积函数中，所以唯一的问题就是有关 $\mathrm{d}S$ 的表示

根据我们学的有关曲面的面积 (类比第一类曲线积分中需要用到弧微分)，假设曲面 $z=z(x,y)$，则
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
所以第一类曲面积分的计算实际上是二重积分的计算

10.4.4 第一类曲面积分的对称性

柠宝：奇偶对称、轮换对称、广义对称性与定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分保持一致

10.4.5 典型例题

柠宝：曲线曲面积分在转化为定积分和重积分之前可以把表达式带进去

例题 10.15 计算曲面积分
$$I=\iint_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\,\mathrm{d}S$$
其中，Σ 是球面 : $x^2+y^2+z^2=R^2$

例题 10.16 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 计算 $\iint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$

例题 10.17 计算 $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截下的部分 $(a>0)$

例题 10.18 计算 $\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$

10.5 第二类曲面积分

10.5.1 曲面的侧

简单来说，能明确区分正反两次的曲面称为双侧曲面

不可定向的曲面的例子：莫比乌斯带

柠宝：

- 第二类曲面积分是定义在双侧曲面上的
- 第二类曲线曲面积分有事是对向量进行积分，所以必须指定方向

10.5.2 第二类曲面积分的物理意义

简单来说，物理意义就是“流量”，这里的流量可以是水流或者其他液体的流量，也可以是磁通量等物理量，这里以水流为例进行介绍

我们知道，第二类曲面积分的被积函数与被积元素都是向量

考虑三维空间中的一个流速场，向量值函数 $\vec{V}$ 表示的是空间中任意一点的液体的流速，由于速度是一个矢量，显然可以作正交分解，从而有

$$\begin{aligned}\vec{V} &= P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\\ &= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\end{aligned}$$

考虑这个流速场中的某个曲面 Ω，我们希望计算“单位时间内流过这个曲面的流量”是多少

作图理解：(上课补充)

10.5.3 第二类曲面积分的概念与性质

从数学的角度考虑，我们有如下定义

定义 10.4

设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中定向的光滑曲面，Σ 上确定其方向的单位法向量记为 $\vec{n}$，$\vec{F}$ 是定义在 Σ 上的向量值函数，记 $\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{\sigma}} = \boldsymbol{\vec{n}}\mathrm{d}\sigma$，$\mathrm{d}\sigma$ 是 Σ 上的面积元素. 称

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma$$

为 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲面 Σ 上的第二型曲面积分

如果记 $\vec{F} = (P, Q, R)$，$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，其中 α, β, γ 是 n 的方向角，即分别是 n 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角，那么有

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$$

再令

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}\sigma,$$

第二类曲面积分又可以改写为

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

最后这种形式是人们普遍使用的第二类曲面积分的记法

♣

性质

1. 若 Σ 由 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_k$ 组成，并且任意两块子曲面没有重叠部分，则
$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \cdots + \iint_{\Sigma_k}$$
2. 积分值与曲面的侧有关，即
$$\iint_{\Sigma} = -\iint_{-\Sigma}$$
其中，$-\Sigma$ 表示曲面 Σ 的另一侧

笔记

1. 从第二类曲面积分的定义来看，直接就给除了两类曲面积分之间的关系 (利用每个小曲面的单位法向量来联系两类曲面积分)

2. 考虑第二类曲面积分的物理意义，由于流体有“流出”和“流入”之分，所以曲面就有“正负”之分

3. 第二类曲面积分也称为“对坐标的面积分”

10.5.4 第二类曲面积分的计算

柠宝：简单来说，对于直接法的计算，一句话可以搞定，那就是“先算投影，再算二重积分”

定理 10.8

若定向曲面 $\Sigma :: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}, z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有连续的偏导数,$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若 Σ 的法向量 n 与 z 轴正方向的夹角为锐角, 即取上侧, 则右端积分前取“+”号否则取 $-$ 号

笔记

1. 将第二类曲面积分转化为二重积分的时候，二重积分前面的正负号是由曲面的侧唯一确定的。

2. 简单来说，三维空间中的曲面可以有六个面 (想象正方体有六个面)，分别是上下左右前后，其中沿着坐标轴的“上前右”侧取 $+$，对应的“下后左”侧取 $-$ 号

10.5.5 第二类曲面积分的对称性

柠宝：对于第二类曲面积分，对称性的判定和第二类曲线积分已知，需要同事考虑被积函数与被积元素的乘积的符号

作图理解:(上课补充)

10.5.6 两类曲面积分之间的关系

这里直接给出公式，设 Σ 上确定其方向的单位法向量记为 $\vec{n}$，则 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 其中 α,β,γ 是 n 的方向角, 即分别是 n 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角, 曲面上的面积微元记为 $\mathrm{d}S$ 那么有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}&=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_{\Sigma}\left(P\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}+Q\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S}+R\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

考虑积分元素之间的关系，有

$$\mathrm{d}\vec{S}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos r)\,\mathrm{d}S$$

即

$$\cos\alpha\,\mathrm{d}S=\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\cos\beta\,\mathrm{d}S=\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\cos r\,\mathrm{d}S=\ \mathrm{d}x d\,\mathrm{d}$$

等价于

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{dS},\cos\beta=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S},\cos\gamma=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

10.5.7 (十星重点) 转换投影法及其推导

定理 10.9

若定向曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 、给出, Σ 在 Oxy 平面上的投影区域为 D_{xy}, 且 $z(x,y)$ 在 D_{xy} 有连续的偏导数, $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 连续, 则有

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

♡

证明 (本证明要求掌握，能自行推导) 证明的思路为：第二类曲面积分 $\Rightarrow$ 第一类曲面积分 $\Rightarrow$ 二重积分

10.5.8 典型例题

再次强调：曲线曲面积分在转化为定积分、二重积分、三重积分之前可以“带进去”

例题 10.19 (2020 压轴大题) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例题 10.20 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$

其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及平面 $z=R, z=-R(R>0)$ 所围成立体表面外侧

10.6 Gauss 公式

10.6.1 Guess 公式和注意事项

对 Gauss 公式的推导过程不需要掌握，有兴趣的可以自行查阅相关资料

定理 10.10

设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭域 Ω 上具有连续的一阶偏导数，则

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

♡

笔记

1.Green 公式完成了平面上的第二类曲线积分到二重积分的转换，这里的 Gauss 公式完成了第二类曲面积分到三重积分上的转换

2.Σ 是闭区域 Ω 的外侧

3.P,Q,R 需满足一阶连续偏导，如果题干中只说了连续，考虑直接法或者两类曲面积分之间的关系，例如 2020 压轴大题10.19

4. 补面用高斯公式时，需要被积函数在补的面上也满足一阶连续偏导（与补线用 Green 公式一样）

5. 补面时注意和原来曲面的侧构成“整体为内侧或整体为外侧”

6. 充分利用转换为三重积分之后的奇偶对称、广义奇偶对称

7. 对于三维空间中的复连通区域，如果 Ω 的边界不止一张曲面，高斯公式中的右端积分应包括沿区域 Ω 全

部边界上的曲面积分，即

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{n}\iint_{\Sigma_k}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

外侧向外，内侧向内

8. 空间体的体积

$$\Omega\text{ 的体积}=\frac{1}{3}\iint_{S^+}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\text{，其中}S^+\text{为}\Omega\text{的外侧}$$

10.6.2 Guess 公式的简单例题

例题 10.21 求曲面积分 $I=\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是长方体 Ω: $0\leqslant x,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c$ 的表面外侧

例题 10.22 计算 $I=\iint_{\Sigma}-y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中, Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧

例题 10.23 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中，Σ : 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1,z=2$ 所截部分的外侧

10.6.3 挖洞补面：一个极为重要的例子

柠宝：这里的挖洞补面与第二类曲线积分中的“挖洞补线：一个极为重要的例子”10.3.5类似，都是为了避免补的线或者面要在这里满足偏导连续所做的妥协

若包含的区域使得分母等于 0 →→ 同 Green 公式中中补分母的曲线，用极限逼近” “一样，此处为补分母的曲面，用极限逼近

另外要注意什么时候能直接将表达式带入被积函数中

例题 10.24 计算

$$I=\iint_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 取外侧

10.7 Stokes 公式

10.7.1 Stokes 公式和注意事项

有关三大曲线曲面积分公式的说明

- Green 公式完成了从平面上的第二类曲线积分到其投影区域的二重积分的转换
- Gauss 公式完成了空间中的第二类曲面积分到三重积分的转换
- Stokes 公式完成了空间中的第二类曲线积分到曲面积分的转换

定理 10.11

设 Γ 为分段光滑的有向闭曲线, S 是以 Γ 为边界的分块光滑有向曲面, Γ 的正向与 S 的侧 (即法向量的指向) 符合右手法则, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数, 则有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

♡

笔记

1. 用 Stokes 的最好情况是空间曲线刚好在一个平面上

2. 注意综合性问题，2022 的大题就是先进行 Stokes 把曲线积分转换为曲面积分，再利用 Gauss 公式补面把曲面积分转化为三种积分来做

3. 尤其注意在使用 Stokes 的时候曲面方向的问题 (满足右手法则)

10.7.2 典型例题

例题 10.25 求曲线积分 $I = \int_L \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x + \left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z \geqslant 0)$.L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正向往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

例题 10.26 (2014,14 分) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，求曲线积分 $\int_L zdx + ydz$

例题 10.27 (2022,12 分) 已知 Σ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 的上侧,L 为 Σ 的边界曲线, 其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分

$$I = \int_L \left(yz^2 - \cos z\right)dx + 2xz^2dy + (2xyz + x\sin z)dz$$

10.8 场论初步

本节内容可以简单理解为背公式，考试能直接带入即可，一般的出题形式就是填空题，要想深入了解背后的物理意义，可以观看 $3B1B$ 的视频：散度与旋度：麦克斯韦方程组、流体等所用到的语言

10.8.1 向量场的通量与散度

定义 10.5 (向量场的通量)

设有向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, 则 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿分块光滑定向曲面 S 的通量为

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

其中，$\vec{\boldsymbol{n}}$ 是 S 上任意点 (x,y,z) 处的单位法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ ♣

定义 10.6 (向量场的散度)

设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数, 则 $\forall M(x,y,z)\in\Omega, F$ 在点 M 的散度是如下的数量:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\triangleq\nabla\cdot\boldsymbol{F},\text{其中}\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\text{ 为梯度算符}$$

♣

定理 10.12 (通量与散度的关系)

高斯公式表述了向量场的散度与通量的关系：设 Ω 是空间中有界闭区域, 边界是分块光滑的有向闭曲面 S, 取外法向, $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数, 则

$$\iiint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

♡

10.8.2 向量场的环流量与旋度

定义 10.7 (向量场的环流量)

设有向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, 则 $\boldsymbol{F}$ 沿分段光滑定向闭曲线 Γ 的环流量 (或环量) 为

$$\oint_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s=\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\oint_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中，$\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Γ 上任意点 (x,y,z) 处单位切向量 (指向曲线方向) ♣

定义 10.8 (旋度及其计算公式)

设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 Ω 有连续的一阶偏导数, 则 $\forall M(x,y,z)\in\Omega, F$ 在点 M 的旋度是如下的向量:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}F&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\&=\begin{vmatrix}i&j&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}\\&=\nabla\times\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

♣

定理 10.13 (环流量与旋度的关系)

斯托克斯公式表述了向量场的旋度与环流量的关系，即

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是曲线 Γ 沿它的方向的单位切向量

10.8.3 典型例题

例题 10.28 设 $\boldsymbol{r} = (x, y, z), r = |\boldsymbol{r}|, r \neq 0$ 时 $f(r)$ 有连续的导数, 求下列各量

(1) $\operatorname{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$;

(2) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$($r \neq 0$ 时 $f(r)$ 有二阶连续导数)

第 11 章 绝活级数（数一）

内容提要

- 第一节　常数项级数及其选择题秒杀
- 第二节　幂级数的收敛判别法和展开
- 第三节　幂级数的求和（送分绝活）
- 第四节　Fourier 级数

本章学习的注意事项：

- 注意条件的充分性和必要性
- 联系反常积分相互对比，注意两者的异同，21 大纲新增“级数的积分判别法”
- 时刻注意“形式上的统一”，即“整体性”和“一致性”

11.1 常数项级数及其选择题秒杀

11.1.1 常数项级数的概念

同反常积分一样，级数作为极限的一种，也是“用有限定义无限”，当然在第一章讲的“存在 ± 不存在 = 不存在”对于级数来说同样适用（级数收敛理解为极限存在）

定义 11.1 (数项级数)

定义无穷多个数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 依次相加所得到的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数）u_n 称为级数的一般项或通项

级数部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, (n = 1, 2, \cdots)$$

注意到此时 n 是一个具体的数字，若数列 S_n 的极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，称极限值 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为此级数的和，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S$$

当级数收敛时，$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 称为级数的余项（或余和）

显然收敛时 $r_n \to 0$

命题 11.1

有限项不会影响级数的敛散性，但是可能会影响收敛级数的收敛值

11.1.2 数项级数的基本性质

定理 11.1 (收敛级数的必要条件)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

笔记

- 此条件是必要非充分条件
- （任何定理均可考虑其逆否命题来加深理解和应用）其否命题为：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 原级数发散

定理 11.2 (收敛级数的线性运算)

若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

其中 λ,μ 为常数

定理 11.3 (收敛级数的结合律)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，在不改变其项的次序的前提下，任意加括号，并把每个括号内的各项的和作为一项，这样所得到的新级数仍收敛，且和不变

特别的，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{3n-2}+u_{3n-1}+u_{3n}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

笔记

- 只是原级数收敛 $\to$ 加括号收敛，反之不成立
- 考虑其逆否题，若加括号发散 $\to$ 原级数发散

命题 11.2

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 又其相继两项加括号所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

11.1.3 两个重要的级数（p 级数与 q 级数）

注意 p 级数与 q 级数和反常积分的两个标准函数的联系

定理 11.4 (几何级数（q 级数）)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} |q|<1 & \text{收敛} \\ |q|\geqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$$

定理 11.5 (p 级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\leqslant 1 & 发散 \end{cases}$$

定理 11.6 (补充一个常考的)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}\begin{cases} p>1,\forall q \\ p=1 \text{ 且} q>1 \end{cases} \quad 收敛, 其余均发散$$

笔记 以下结论仅针对正项级数适用，也就是说若题干只谈“级数”没有明确说明“正项级数”或者讨论其“绝对收敛”的情况，一律不适用，常出现在选择题中。

11.1.4 正项级数的的概念和收敛的充要条件

定理 11.7

若 $u_n\geqslant 0$ 则，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，正项级数的特点是部分和数列 $\{S_n\}$ 单调非减，利用极限的“单调有界准则可知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件为 $\rightarrow$ 部分和数列有（上）界

11.1.5 正项级数的判别法之比较判别法

定理 11.8

设 $u_n\leq kv_n, u_n\geq 0, v_n\geq 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{ 收敛} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{ 发散}$$

笔记 同反常积分的比较判别法一样：大的收敛 $\rightarrow$ 小的收敛；小的发散 $\rightarrow$ 大的发散

11.1.6 正项级数的判别法之比较判别法的极限形式

定理 11.9

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0\leqslant l\leqslant +\infty)$

1. 若 $0<l<+\infty,$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散
2. 若 $l=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散
3. 若 $l=+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

笔记

1. 站在“无穷小的阶”的高度来理解比较判别法的极限形式

2. 与反常积分中“找分母的等价无穷大”形式相同

3.p 级数与 q 级数常常用作比较的基准级数

11.1.7 正项级数的判别法之比值判别法

定理 11.10

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}收敛, \rho<1\\ 发散, \rho>1\\ 不一定, \rho=1\end{cases}$$

笔记

1. 通项越小，收敛的“概率”就越高
2. 这 $\rho<1$ 理解为当 $n>N$ 整个通项的公比 $q<1$
3. 收敛和发散以“1”为界限

11.1.8 正项级数的判别法之根值判别法

定理 11.11

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}收敛, & \rho<1\\ 发散, & \rho>1\\ 不一定, & \rho=1\end{cases}$$

11.1.9 正项级数的判别法之确定 u_n 的阶数（可用泰勒展开）

笔记 泰勒展开的目的是找等价无穷小（用于确定 u_n 的阶）

定理 11.12

设 $u_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^p}}=A$

1. 若 $0\leqslant A<+\infty, p>1$（即当 $n\to\infty$ 时 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, $p>1$）则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

2. 若 $0<A\leqslant+\infty, p\leqslant 1$（即当 $n\to\infty$ 时 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的 p 阶或低于 p 阶的无穷小, $p\leqslant 1$）则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

笔记 若 $u_n\geq 0$ 且当 $n\to\infty$ 时, $u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

11.1.10 交错级数的定义和判别法

定义 11.2 (交错级数)

若 $u_n>0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$

笔记

1. 对于交错级数，第一项是 $+$ 还是 $-$ 不是重点，重点一定是 $+-$ 交替的

2.$u_n>0$

定理 11.13 (莱布尼茨交级数判别法)

设上述交错级数满足

1.$u_n\geqslant u_{n+1},n\geqslant N\geqslant 1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

11.1.11 级数学习的核心思想

命题 11.3

上述所讲的判别法，只是充分条件，而非必要条件，即

满足条件 $\rightarrow$ 收敛

级数收敛不能推出满足条件

11.1.12 绝对收敛与条件收敛

上面给出了若干正项级数的判别法和交错级数的判别法，对于一般的通项符号不规律不安华的级数，可以优先考虑其绝对敛散性

定义 11.3 (绝对收敛和条件收敛)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

笔记 正项级数因为加了绝对值之后是其本身，所以正项级数收敛 $\leftrightarrow$ 正项级数绝对收敛

定理 11.14 (绝对收敛和条件收敛的性质)

1. 绝对收敛的级数一定收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 收敛 } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 必收敛}$$

即加了绝对值收敛 $\leftarrow$ 原级数（去掉绝对值）收敛

2. 条件收敛的级数所有的正项（或负项）构成的级数一定发散，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2} \text{ 和} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2} \text{ 发散}$$

11.1.13 级数收敛性的 $\pm\times$（重点）

注意到这里的乘法指的是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$

1.

$$\text{收敛} \pm \text{收敛} =$$

2.

$$\text{收敛} \times \text{收敛} =$$

11.1.14 绝对收敛与条件收件级数的 $\pm\times$（重点）

笔记 注意到“收敛数列必定有界”

1.

$$\text{绝对} \pm \text{绝对}$$

2.

$$\text{绝对} \pm \text{条件}$$

3.

$$\text{条件} \pm \text{条件}$$

4.

$$\text{绝对} \times \text{绝对}$$

5.

$$\text{绝对} \times \text{条件}$$

上述反例需要掌握

11.1.15 选择题的秒杀技巧

笔记

- 没见过的都是错的
- 注意条件的充分性和必要性
- 看见乘法，利用不等式

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

  注意除法也是乘法
- 先考虑其绝对收敛性（先加绝对值再说）
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的敛散性与 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 的敛散性相同

例题 11.1 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$(　)

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 敛散性不确定

例题 11.2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $(a_n > 0)$，令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}\right)$ (   )

A. 发散

B. 收敛于 $-\frac{1}{a_1}$

C. 收敛于 0

D. 敛散性不确定

例题 11.3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)(a>0)$(   )

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 敛散性与 a 有关

例题 11.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $(u_n > 0)$, 则下列结论正确的是 (   )

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho < 1$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 一定收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 收敛

例题 11.5 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列正确的是 (   )

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

例题 11.6 设常数 $k>0$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$(   )

A. 发散

B. 绝对收敛

C. 条件收敛

D. 敛散性与 k 有关

例题 11.7 设 $u_n = (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则 (   )

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

D.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

例题 11.8 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的是 ( )

A.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{u_n}{n}$

B.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

D.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

例题 11.9 下列说法正确的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛

B 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 一定收敛

C. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收收, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

D. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 一定收敛

11.2 幂级数的收敛判别法和展开

下设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的基本要求是 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 有共同的定义域

11.2.1 收敛点与收敛域的概念

定义 11.4

若 $x_0 \in I$, 对应的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点

收敛点的集合 $\to$ 收敛域

发散点的集合 $\to$ 发散域 ♣

11.2.2 幂级数的定义

首先要说明的是，幂级数是函数项级数的一种特殊形式

定义 11.5 (幂级数)

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 级数称为 $x-x_0$ 的幂级数，其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为常数，称为幂级数的系数。当 $x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 称为 x 的幂级数 ♣

11.2.3 函数项级数的重要理解

函数项级数只是将数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的 u_n “函数化” 为 $u_n(x)$，本质上 $u_n(x)$ 最终还是（关于 x 的）一个数，所以数项级数中的判别法仍然适用

例题 11.10 求下列函数项级数的收敛域

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

笔记 在理解下列有关定理的时候，要特别注意：同反常积分讲的一样，通项的值越小，收敛的“概率”就越高，注意到此处的“小”仅和 0 作比较（想想看为什么？）

11.2.4 幂级数的收敛之阿贝尔定理

定理 11.15

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0\,(x_0\neq 0)$ 时收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ 时发散, 则当 $|x|>|x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散 ♡

笔记 注意到上述两条定义对于端点处是无法判断的，只能单独讨论。即使是单独讨论，通常出现的形式也是莱布尼茨交错级数，调和级数等简单的判定，请勿担心

由上述的阿贝尔定理，我们可以得到如下关于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛性的可能情况如下

- 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均收敛
- 仅在 $x = 0$ 初收敛
- 存在一个正数 R，当 $|x| < R$ 时绝对收敛，$|x| > R$ 时发散，至于 $x = \pm R$ 时的敛散性，需要单独讨论（具体如何讨论后面会讲）

11.2.5 幂级数的收敛之收敛半径和收敛域的求法

在上述定理中, 正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间$(-R, R)$ 称为它的收敛区间, 再考察 $x = \pm R$ 的时候的敛散性, 就可以得出该级数收敛点的全体, 称为收敛域

笔记 要注意收敛半径、收敛区间、收敛域三者的区别。其中收敛半径是一个非负实数，收敛区间是开区间，收敛域是整个收敛点的集合（可能是开区间、闭区间、半开半闭区间）

定理 11.16 (收敛半径的根值判别法)

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \text{则} R = \frac{1}{\rho}$$

♡

定理 11.17 (收敛半径的比值判别法)

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \text{则} R = \frac{1}{\rho}$$

♡

笔记 上述两个判别法仅仅是充分非必要条件！还要注意到是加了绝对值的

11.2.6 关于非标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法

在求收敛半径的时候, 若并非标准的 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 而是诸如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的形式, 作如下处理: 将整个 $a_n x^{2n+1}$ 看作一个整体进行根值判别或比值判别，注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} \text{ 的敛散性和} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}、\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1} \text{ 的敛散性相同}$$

例如：对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$，为了求其收敛半径，可以考虑极限（假设极限存在）

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right|$$

同理可以考虑比值判别法的形式（不再赘述）

11.2.7 两个幂级数四则运算的收敛半径

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，令 $R = \min\{R_1, R_2\}$

1. 加法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, x \in (-R, R)$

2. 减法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, x \in (-R, R)$

3. 乘法：$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right), x \in (-R, R)$

4. 除法：$\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}, x \in (-R, R)$

笔记 上述是无条件成立的，但是如果考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

的收敛半径时，需要考虑 $R_1 = R_1$ 的情况

11.2.8 幂级数的分析性质（连续、求导、积分）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，则

定理 11.18

1. 连续性：$S(x)$ 在收敛域上连续
2. 可导性（也称逐项可导性）$S(x)$ 在收敛区间$(-R, R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3. 可积性（也称逐项可积性）$S(x)$ 在收敛区间$(-R, R)$ 内可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

笔记 特别注意：在求导或积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，但是不一定有相同的收敛域，仅仅针对区间的边界点

11.2.9 函数的幂级数展开

定义 11.6

设函数在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有定义，若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

对任意的 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立，称函数 $f(x)$ 在 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数，进一步，展开后在区间 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$任意阶可导

定理 11.19 (幂级数展开的唯一性)

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

则 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导，且其展开式是唯一的，其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$$

笔记 唯一性定理保证了我们无论使用何种展开方式（直接展开或间接展开），最后的幂级数的结果是一样的

定义 11.7

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数

特别的，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数

定理 11.20

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛于 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

中的余项 $R_n(x)$

11.2.10 常见函数的泰勒级数展开

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum(-1)^nx^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n (-1 < x < 1)$$

笔记 幂级数的展开方法：

1. 直接法（基本不用）
2. 间接展开法（常用）

11.2.11 典型例题——求收敛域

例题 11.11 求下列幂级数的收敛域

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^{2n+1}}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$

例题 11.12 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处 (　)

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 必发散

D. 敛散性由 a 决定

重要技巧：将括号看做一个整体

例题 11.13 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=2$ 发散，则该幂级数的收敛域为________

11.2.12 典型例题——求幂级数展开

笔记 核心技巧：

1. 有限项与敛散性无关，强行凑成已知函数的幂级数展开
2. 看见复杂的形式（非标准形式）可以考虑“先积分再求导”或者“先求导再积分”
3. 注意基本公式的应用（如立方和、立方差、$1-x^n$ 等）

例题 11.14

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

例题 11.15

$$f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$$

例题 11.16

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x$$

例题 11.17

$$f(x) = \ln\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

在指定点展开

笔记 这里采用和不定积分一样的做法：看不懂就令

例题 11.18

$$f(x) = \ln x, \text{在} x = 1 \text{ 处}$$

例题 11.19

$$f(x) = \sin x,\ \text{在} x = \frac{\pi}{4} \text{ 处}$$

11.3 幂级数的求和（送分绝活）

11.3.1 先看出答案和哪一个函数有关的方法（核心技巧）

首先来回忆一下上节内容：常见的幂级数展开

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum(-1)^n x^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n(-1<x<1)\end{aligned}$$

笔记 记忆方法：

例题 11.20 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解
$$S(x)=\begin{cases}(\sin x-x\cos x)/\left(2x^3\right), & x\neq 0\\ 1/6, & x=0\end{cases}$$

例题 11.21（2002 真题）

（1）验证函数
$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$
满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$

（2）利用（1）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数

例题 11.22（2018 选择题）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\_\_\_\_\_\_$$

例题 11.23（2019 真题） 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{n}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=\_\_\_\_\_\_$

11.3.2 幂级数的和函数的求法及秒杀技巧（特别注意下标的变化）

笔记 首先需要明确的是：

1. 在级数中，“有限项不影响级数的敛散性和收敛域”
2. 在需要单独讨论的时候，将$0^0=1$来处理，原因是因为连续性
3. 函数的重要改写在之前的章节中讲过，这里重复一下

$$S(x)-S\left(x_{0}\right)=\int_{x_{0}}^{x}S'(t)dt$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$S(x)-S(0)=\int_{0}^{x}S'(t)dt$$

当然还有在微分学和积分学的形式，这里不再赘述（自己翻之前的笔记）

4.尤其注意“整体性”、“一致性”

11.3.3 补充内容：幂级数的下标变化

核心思想是通过适当的下标变化，将待求级数处理成我们熟悉的那几个级数（下标也处理成一致），差项就强行凑

笔记（听课时补充）

考研数学范围内的和函数，大致可以分为如下三类

- 系数 a_n 中的 n 在分母上
- 系数 a_n 中的 n 在分子上 $(n=\frac{n}{1})$
- 通过题干中的条件 (通常是 a_n 和 a_{n+1} 的递推式) 来构造微分方程（大题常考，已多次出现在真题中）

11.3.4 和函数第一式——n 在分母上

形如 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^{2}-1)\,2^{n}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)3^{n}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n}$ 的形式

这是典型的送分题，操作方法如下

笔记

1. 形式统一（和 n 有关的尽量保持一致）
2. “先求导后积分”：注意为了方便求导，需要将 x 的指数部分与分母转化为一致，例如求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$

应该处理成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

对于 $x=0$ 的情况单独讨论

3. 注意裂项（将原级数分成几个单独的级数分别求和函数）
4. “核心技巧：保证分母的 n 和 x 的次数相等”

例题 11.24（2010 真题，10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 11.25（2012 真题，10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 11.26 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域与和函数（此题结果作与"常见函数的幂级数展开"的补充，当作结论记忆）

11.3.5 和函数第二式——n 在分子上

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$$

这是典型的送分题，操作方法如下

笔记

1. 形式统一（和 n 有关的尽量保持一致）

2. "先积分后求导"：注意为了方便积分，需要将 x 的指数部分指数部分比系数少 1，例如求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$ 应该处理成

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

这样做的目的是为了在"先积分"时刚好消去，因为

$$\int(n+1)x^n dx=x^{n+1}$$

3. 注意裂项（将原级数分成几个单独的级数分别求和函数）

4. “核心技巧：指数部分比系数少 1”

例题 11.27 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛域与和函数

例题 11.28（2012 真题，10 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 11.29 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域与和函数

例题 11.30 补充习题：求某些类似于幂级数的数项级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

11.3.6 和函数第三式——构造微分方程

首先说，微分方程与级数结合是最简单的题目，没有之一。要熟练运用刚刚讲的下标变换

我们只有一个目的：通过已知条件构造微分方程

笔记 通过“逐项求导”，强行凑出题干中的递推式，主要是凑系数和重复出现 $S(x)$

例题 11.31（2013 真题，10 分） 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

（1）证明 $S''(x)-S(x)=0$

（2）求 $S(x)$ 的表达式

例题 11.32（2020 真题，10 分） 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, (n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$

证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 并求其和函数

例题 11.33 已知 $a_0=1, a_1=\frac{1}{2}$, 且当 $n\geqslant 2$, 有 $na_n=\left[\frac{1}{2}+(n-1)\right]a_{n-1}$

证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数

11.4 *Fourier* 级数

11.4.1 三角函数的正交性

三角函数系 $\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots\}$ 任意两个不同的函数在区间 $[-l,l]$ 上的积分等于 0

即

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0, n=1,2\cdots$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0, m,n=1,2,\cdots$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0, m,n=1,2,\cdots,m\neq n$$

11.4.2 *Fourier* 系数与 *Fourier* 级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期或只定义在 $[-l,l]$ 上, 在 $[-l,l]$，且在 $[-l,l]$ 上可积（通常 $l=\pi$）

在三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

中，令

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots$$

则称之为函数 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数（以 $2l$ 为周期），记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

对应的系数 a_n, b_n 称为 $f(x)$ 的 *Fourier* 系数

特别地，若 $l=\pi$，则有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

对应的系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots$$

11.4.3 *Fourier* 级数的收敛性——Dirichlet 收敛定理（充分条件）

定理 11.21

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的分段单调函数，除有限个第一类间断点外都是连续的，则 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases}f(x), & 若x\in(-l,l)\ 为\ f(x)\ 的连续点,\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & 若x\in(-l,l)\ 为\ f(x)\ 的第一类间断点,\\ \frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)], & 若x=\pm l.\end{cases}$$

笔记 上述定理也可以等价记忆为：

1.$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，或只有有限个间断点，且均为第一类间断点

2.$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上只有有限个极值点

11.4.4 偶延拓与奇延拓

笔记 偶延拓与偶延拓与奇延拓，就是利用构造新函数，将原本的非周期函数强行转化为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数或奇函数，且进一步拓展成整个实数域上的周期函数

定理 11.22 (偶延拓)

设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的非周期函数, 令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ f(-x), & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数, 有

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx(\text{余弦级数})$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$$

定理 11.23 (奇延拓)

设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的非周期函数, 令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),0\leqslant x\leqslant\pi\\ -f(-x),-\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在 $[-\pi,\pi]$ 上为奇函数, 有

$$F(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx(\text{余弦级数})$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$$

11.4.5 典型例题

例题 11.34 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1,1]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在$x=1$ 处收敛于________

例题 11.35 设函数 $f(x)=x^2, x\in[0,\pi]$，将 $f(x)$ 展开为 2π 为周期的 $Fourier$ 级数，并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

第二部分

降维打击学线代

文档说明：本讲义是 B 站 up 主”math 也是柠檬精”全程制作。作为全程班的线代部分的课程讲义，需要配套视频来进行学习，能够达到的效果为：

1. 充分理解线代在干什么，避免“空中楼阁”，只知道怎么算，不知道为什么，更不知道有什么用
2. 几乎不用死记硬背任何一个公式，包括但不限于有关向量组、方程组、秩的公式及结论，例如“为什么增广矩阵的秩和系数矩阵的秩相等就能保证方程组有解?”、“为什么矩阵可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量?”
3. 计算不出错的前提下 (这个只能靠自己)，线代部分可以拿满分

课程试听 (有合集，超链接可点击)：

- 三节导学课程 (有基础可以跳过导学部分)
- 正式课程

本课程将站在高等代数的高度来审视线性代数，当然为了适应考研数学的难度，对涉及到的超纲且对考试无用的知识点会省略

绝大多数同学，哪怕是线代的高分同学，对线性代数的认识也只是停留在“计算”层面上，知道怎么算，但是不知道为什么可以这样算以及这些东西有何用处。本课程（讲义）的目标就是建立线性代数的几何直觉，讲述顺序将不会按照一般辅导书的逻辑：行列式、矩阵、方程组、向量、特征值、二次型。而是会从向量空间（线性空间）的角度出发，通过建立各个章节与向量空间之间的联系，从而最后建立起整个线性代数的知识大厦。

由于不是按照一般的顺序，所以听课和一般辅导书上的习题顺序不一致，所以我会在课程中说明什么时候能做什么题。课程学完能保证覆盖百分之百的知识点和习题的内容。

强烈建议从《向量（线性）空间》章节开始学习。

强烈建议从《向量（线性）空间》章节开始学习。

强烈建议从《向量（线性）空间》章节开始学习。

由于后续章节的一些判定定理会用到行列式的概念（例如可逆等），所以这里 (针对零基础同学) 还是会先介绍行列式的计算。对于知晓行列式的概念，或者能够计算简单行列式的同学，强烈建议从《向量（线性）空间》章节开始学习

线性代数中的语言是空间的语言，所以线性代数的研究对象是空间。

对于空间来说，首先是这个空间的样子，比如空间是由什么构成的? (由向量构成), 更确切的说，应该是由基向量的所有线性表示构成。更进一步，什么是基向量? 哪些向量可以是基向量 (n 维空间中 n 个线性无关的向量可以构成基向量) 对于一部分向量组，它们构成的空间如何 (生成子空间的概念)

说人话就是，对于空间，我们从两个视角来看：

1. 将空间看成是“静态”的，研究它的构成
2. 将空间看成的“动态”的，研究它可以进行哪些操作，例如线性变换、降维、投影

对于上述两种视角，我们产生了对应的概念

1. 静态时对应的概念：向量、基、维数、生成子空间、方程组的解的存在性判定、线性无关、线性相关、极大线性无关组、秩、向量组的等价、解空间等概念
2. 动态时对应的概念：线性映射和线性变换、特征值和特征向量、特征子空间、相似对角化、二次型及合同等概念

研究空间的“静态”和“动态”就是线性代数的两条主线，但我们发现上述概念中没有“行列式”，原因是在于行列式本身就是 by-product, 对于行列式来说，我们不会特别深究其几何意义 (会讲最基本的)，会计算即可

第 1 章 行列式

1.1 行列式的概念、性质、展开式、计算、范德蒙德行列式与克拉默法则

1.1.1 逆序、行列式与余子式的概念

首先说明，行列式的在代数上是一个多项式，本质是一个数字

1.1.1.1 逆序、逆序数与对换的概念

首先解介绍逆序数相关概念

定义 1.1 (逆序、逆序数与对换的概念)

1. 逆序：设 i, j 是一对不等的正整数, 若 $i > j$, 则称 (i, j) 为一对逆序
2. 逆序数：设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 该排列所含的逆序总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列
3. 对换：对排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中任意两个数的位置进行对调, 称为对该排列的一次对换，对换概念排列的奇偶性

♣

笔记

1. 所谓“顺序”，就是从小到大，例如“12”是“顺序”，“21”就是逆序

2. 一次对换改变排列的奇偶性，两次对换不改变奇偶性。进一步，奇数次对换改变原排列的奇偶性，偶数次对换不改变原排列的奇偶性

1.1.1.2 行列式的概念

定义 1.2 (行列式的概念)

n 阶行列式即 n 级矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的行列式规定为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中连加号是对所有 n 元排列求和 (也就是让列指标构成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有的 n 元排列)。即，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，把这 n 个元素按照行指标成自然顺序排好位置, 当列指标构成的排列是偶排列时, 该项带正号; 是奇排列时, 该项带负号

♣

笔记

1.n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可以简记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或者 $\det \boldsymbol{A}$

2.1 阶行列式 $|a| = a$

3.2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4. 三阶行列式的记忆 (上课补充):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

命题 1.1

n 阶上三角形行列式的值等于它的主对角线上 n 个元素的乘积

例题 1.1 (本题当做结论来记忆) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.1.1.3 余子式和代数余子式

定义 1.3

把行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 所在的 i 行元素和 j 列元素去掉, 剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列元素按照元素原来的排列次序构成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}, 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式

1.1.2 行列式的几何意义

二阶行列式的几何意义是平行四边形的有向面积，三阶行列式的几何意义是平行六面体的有向体积

作图理解：(上课补充)

1.1.3 几个特殊的高阶行列式

1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.1.3.1 范德蒙德行列式

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j)$$

笔记 范德蒙德行列式 $V(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$ 的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不相等

1.1.4 分块行列式

1. 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 都是方阵, 则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1| \cdot |\boldsymbol{A}_2| \cdots\cdots |\boldsymbol{A}_m|$
2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m, n 阶矩阵, 则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$
3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m, n 阶矩阵, 则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$

1.1.5 行列式的性质

性质

1. 行列式与其转置行列式相等
2. 对调行列式的两行 (或列), 行列式变为其相反数
3. 行列式的某行 (或列) 有公因子可以提取
4. 若行列式某行 (或列) 的元素全是零, 则该行列式为零
5. 行列式某两行 (或两列) 相同, 则行列式为零
6. 行列式某两行 (或两列) 的元素成比例, 则行列式为零
7. 行列式某行 (或列) 为两个元素之和时, 行列式可拆为两个行列式之和, 例如
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
8. 行列式某行 (或某列) 的倍数加到另一行 (或另一列), 行列式不变
9. 行列式等于某行 (或列) 的元素与其代数余子式之积的和, 即
$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1, 2, \cdots, n)$$
10. 行列式某行 (或某列) 的元素与另一行 (或列) 元素的代数余子式之积的和为零

1.1.6 克拉默法则

定理 1.1 (克拉默法则)

对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中第二个为非齐次方程组，第一个是齐次方程组，第一个为第二个对应的导出组令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

其中，D 称为系数行列式

我们有如下结论

1. $Ax=0$ 只有零解的充分必要条件是 $D \neq 0$;$Ax=0$ 有非零解 (或者 (I) 有无穷多个解) 的充分必要条件是 $D=0$
2. $Ax=b$ 有唯一解的充分必要条件是 $D \neq 0$, 且 $x_i = \frac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$; 当 $D=0$ 时,$Ax=b$ 要么无解, 要么有无穷多个解

♡

1.1.7 典型例题

例题 1.2 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 2 \\ 3 & 2x-1 & 1-x \\ 0 & -1 & 3x \end{vmatrix}$, 则 x^2 的系数为 ________

例题 1.3 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 为 4 维列向量, $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3| = 2, |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_1, 3\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3| = 9$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$

例题 1.4 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 m, n 阶矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = a, |\boldsymbol{B}| = b$, 计算 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$

例题 1.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维线性无关的向量, $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, 求 $|\boldsymbol{A}|$

例题 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, 且 $a_{ij} = A_{ij}$, 证明: $|\boldsymbol{A}| \neq 0$

例题 1.7 求 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

例题 1.8 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=n+1$$

例题 1.9 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{其中} a_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$$

例题 1.10 计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$$

1.1.8 利用加边法解决缺行范德蒙德行列式

例题 1.11 求行列式：(注意没有 a_i^{n-1} 的行)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

第 2 章 向量 (线性) 空间

为了适应不同学生的基础情况，上课顺序是从这一章开始的。

对于一般的非零基础的情况，默认大家已经掌握一般行列式的求解。如果是零基础也可以从本节开始，至于提到的有关行列式的命题，可以先记录下来，等补充完行列式章节再来回顾。

从行列式开始引入线性代数就是反人类的设计！

2.1 方程组的行图像与列图像、线性空间、线性表示、生成子空间与高维空间下方程组的解的解释

2.1.1 方程组的行图像与列图像

考虑如下二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

显然，这个方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

行图像：我们将上述方程组以行的视角来作图，即考虑平面直角坐标系下直线 $x+y=2$ 与直线 $x-y=0$，会发现交点的坐标就是方程组的解

列图像：将系数看做是向量的各个分量，考虑方程

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解方程就是找到合适的系数 x, y 使得等式成立

笔记

1. 行图像就是找交点，列图像就是找系数

2. 对于方程组的解的情况：对于行图像来说，有交点就意味着有解；对于列图像来说，存在一组系数使得等式成立就是有解。进一步，如果有无数个交点，就意味着有无穷多解，如果有无数种系数组合使得等式成立就是有无穷多解

3. 方程组的解只有三种情况之一：无解、有唯一解、有无穷多解（没有“有限个多解”的情况，即若有两个不同的解，一定有无穷多个解）

4. 以后仅考虑列图像，且时刻注意列图像对应的“维度”

2.1.2 补充内容：线性空间的定义

这里仅介绍线性空间的特殊情况——向量空间的定义，虽然大纲并未明确要求掌握，但是为了后续课程叙述的方便，要求所有同学学习。

重点理解“运算的封闭性”。

定义 2.1 (向量空间的定义)

记 $\boldsymbol{R}^n$ 为由全部 n 维实向量构成的集合 (记为集合 V), 这是一个规定了加法和数乘这两种线性运算的集合，我们把它称为 n 维向量空间。向量空间需要满足以下 8 条性质：

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha, \forall \alpha, \beta \in V$ (加法交换律)
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ (加法结合律)

- V 中有一个元素，记作 0，它具有下述性质：

$$\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha \in V$$

具有这样性质的元素 0 称为 V 的零元

- 对于 $\alpha \in V$，存在 $\beta \in V$，使得

$$\alpha + \beta = 0$$

具有这样性质的元素 β 称为 α 的负元

- $1\alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$
- $(kl)\alpha = k(l\alpha), \forall k, l \in R, \forall \alpha \in V$
- $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \forall k, l \in R, \forall \alpha \in V$
- $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \forall k \in R, \forall \alpha, \beta \in V$

♣

笔记

1. 严格上讲，上述定义的最后三个条件中的 k 和 l 可以是某个数域而不一定非得是实数
2. 上述 8 条法则等价于“对加法和数乘运算封闭”，即可以简化为两条

$$\forall \alpha_1 \in V, \alpha_2 \in V, \alpha_1 + \alpha_2 \in V$$

$$\forall c \in R, \alpha \in V, c\alpha \in V$$

3. 若 V 的一个子集也满足上述 8 条运算法则 (或者满足两条等价命题)，这个子集称为 V 的一个子空间
4. 任何一个向量空间 (包括任意的子空间) 都必须包零向量
5. 零向量构成一个特殊的子空间称为“零子空间”

2.1.3 子空间、线性表示与生成子空间

2.1.3.1 子空间

柠宝：子空间与生成子空间只是站的角度不同，一个是站在空间的角度，一个是站在向量组生成的角度。

定义 2.2 (子空间)

设 U 是数域 R 上线性空间 V 的一个非空子集，则 U 是 V 的一个子空间的充分必要条件是，U 对于 V 的加法和数量乘法封闭，即

$$\alpha, \beta \in U \Longrightarrow \quad \alpha + \beta \in U$$

$$k \in R, \alpha \in U \Longrightarrow \quad k\alpha \in U$$

♣

笔记

1. 再次强调：任何子空间 (包括 R^n 向量空间本身) 都必须包含零向量
2. 对于 R^3 的三维向量空间来说，例如过原点的任意直线和任意平面都是其子空间维数分别是 1 维和 2 维)
3. 对加法和数乘封闭
4. 子空间本质上是向量的集合，要求该集合非空（因为至少要包含零向量）

2.1.3.2 线性组合

定义 2.3 (线性组合)

对线性空间 V 中, 按照一定次序排成的有限多个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ (它们中可以有相等的，也可以有零向量), 称为 V 的一个向量组. 设 $k_1, k_2, \cdots k_s \in R$, 则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合, 其中, $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 称为系数 ♣

定义 2.4 (线性表出)

进一步，对于线性空间 V 中的一个向量 β，如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots k_s \in R$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

称 β 向量能够被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，也可以称为线性表出 ♣

2.1.3.3 生成子空间

对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 我们不考虑这个向量组中是否有相同的向量，是否有零向量等，直接考虑他们的全部线性组合，就是这个向量组的生成子空间

下设 V 表示 n 维向量 (线性) 空间，以后不再重复说明

定义 2.5 (生成子空间)

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 V 的一个向量组, 令

$$W = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_1, \cdots, k_s \in R\}$$

称 W 是由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间，即向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的生成子空间，记为 $span(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$, 即

$$W = span(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_1, \cdots, k_s \in R\}$$ ♣

笔记

1. 令 $k_1 = k_2 = \cdots = 0$, 显然零向量在集合 W 中
2. 容易验证满足对加法和数乘封闭

下面这段话至关重要，直接上结论

问：如何“精简”向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 使得“精简”后的向量组的生成子空间与精简之前的生成子空间一样?

答：所谓“精简”之后的向量组，还有一个名字叫做“极大线性无关组”；所谓空间的维数，就是向量组则秩, 也等于其矩阵的秩, 也等于极大线性无关组中向量的个数

2.1.4 高维空间下的方程组的解的解释

2.1.4.1 方程租的矩阵形式与向量形式

先考虑本课程开篇的例子，对于二元一次方程组

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

对应的向量形式为

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

再进一步，我们将未知数看成是 $x = x_1, y = x_2, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 可以将方程组改写成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta$$

以上就是二元一次方程组的矩阵形式与向量形式

作为推广，考虑 s 个方程,n 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_n \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

对应的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{s2} & \cdots & a_{5n} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

可以简写为

$$Ax = b$$

笔记

1.A 称为系数矩阵,$[A:b]$ 称为增广矩阵

2. 对于方程组 $Ax = b$. 如果 $b = 0$, 称为齐次方程; 如果 $b \neq 0$, 称为非齐次方程

2.1.4.2 高维空间下的方程组解的解释

对于 n 元线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$ 的解的判定，考虑其列向量组的生成子空间 (即 $Ax = b$ 中系数矩阵 A 的列空间)

$$W = \operatorname{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \mid k_1, \cdots, k_n \in R\}$$

- 有解：$b \in W$

- 无解：$b \notin W$
- 有解且有唯一解：$b \in W$ 且对于等式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$, 只有一组系数使得等式成立 (表示法唯一)
- 有解且有无穷多解：$b \in W$ 且对于等式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$, 有无数组系数使得等式成立 (表示法不唯一)

作图理解：(重点，上课补充)

2.2 废物理论：对线性相关与线性无关的理解

书接上文，本节需要讨论的问题是，对于线性方程组 $Ax = b$ 对应的向量形式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$, 在有解的情况下，向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 满足什么条件的时候表示法唯一？

2.2.1 用废物理论来理解向量组的线性相关性

定义 2.6 (线性相关和线性无关)

设 V 是数域 K 上的线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中的一个向量组, 其中 $s \geqslant 1$. 如果 K 中有一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

那么称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性相关的

否则，称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的, 即如果从

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

可以推出 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 那么称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的 ♣

结论

1.α 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 有 $k \neq 0$ 使得 $k\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$; 从而 α 线性无关 $\Longleftrightarrow \alpha \neq 0$

2. 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 有一个部分组线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

3. 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则它的任意一个部分组也线性无关

4. 含有零向量的向量组一定线性相关; 单个向量构成的向量组线性相关的充要条件是这个向量是零向量

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是, 其中至少有一个向量可以由其余向量线性表出

6. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是, 其中每一个向量都不能由其余向量线性表出

7.R^n 中, 若列 (行) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则把每个向量添上 m 个分量 (所添分量的位置对于每个向量都一样), 得到的延伸组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 也线性无关

8.R^{n+m} 中, 若列 (行) 向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 线性相关, 则把每个向量去掉 m 个分量 (去掉的分量的位置对于每个向量都一样), 得到的缩短组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关

有关向量组和矩阵的等价放在下一节讲

命题 2.1

在数域 K 上的线性空间 V 中, 设向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 则表出方式唯一的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 ♠

证明

命题 2.2

在数域 K 上的线性空间 V 中，设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，那么向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

证明

命题 2.3

在数域 K 上的线性空间 V 中，设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，并且

$$\beta_1 = b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{s1}\alpha_s$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_s = b_{1s}\alpha_1 + \cdots + b_{ss}\alpha_s$$

证明：向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明

定理 2.1 (替换定理)

在数域 K 上的线性空间 V 中，设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_2$ 线性无关，向量 $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s$，证明：如果 $b_i \neq 0$，那么用 β 替换 α_i 以后得到的向量组

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$$

也线性无关

证明

2.2.2 有关线性相关性的典型例题

例题 2.1 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则 (　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. α_4 可由 α_1,α_3 线性表示

D. α_4 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示

例题 2.2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 则向量组 (　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

D. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

笔记 (10 星重点) 本例表明: 线性变换不可能增加维度，但是可以降低维度 (关键在于线性变换是否可逆). 可逆变换一定保持原有向量组的线性相关 (无关) 性

例题 2.3 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 但 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 (　　)

A. $\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

B. $\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1+\beta_2$ 线性无关

例题 2.4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, β_2 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 对任意常数 k 成立 (　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

2.2.3 向量组的线性相关性对方程组的刻画

对于由 n 元有序数组形成的线性空间 R^n, 线性相关的向量组与线性无关的向量组还可以从下列几个角度来刻画:

- R^n 中, 列向量组 $\alpha_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 1)$ 线性相关
  $\Longleftrightarrow$ R 中有不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$
  $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解
- R^n 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 1)$ 线性无关
  $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ 只有零解
- R^n 中, n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
  $\Longleftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组的矩阵的行列式等于 0
- R^n 中, n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
  $\Longleftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组的矩阵的行列式不等于 0
- R^n 中, n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
  $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为行向量组的矩阵的行列式等于 0
- R^n 中, n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
  $\Longleftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为行向量组的矩阵的行列式不等于 0

2.3 极大线性无关组与向量组的秩

上节课讨论了向量组的线性相关性与无关性，对于向量组 (1)$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, 我们考虑如下问题: 对于这个向量组 (1) 的生成子空间, 是否存在“向量个数”小于等于 s 的向量组 (2), 使得向量组 (2) 的生成子空间与向量组 (1) 的生成子空间完全一样? 这里的向量组 (2), 就是“极大线性无关组”, 这个“极大线性无关组”的向量的个数, 就是秩, 也是其生成子空间的维数, 也是这个向量组构成的矩阵的秩。

设 W 是由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间. 则 W 中每一个向量可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 我们希望找到向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组是线性无关的, 并且 W 中每一个向量仍然可以由这个部分组线性表出, 此时表出方式唯一. 直觉上看, 这样线性无关的部分组应当是“最大”的, 即从向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的其余向量中任取一个添进去, 所得到的新的部分组都线性相关。

2.3.1 极大线性无关组

定义 2.7 (极大线性无关组)

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组 (子集) 如果满足:

- 这个部分组是线性无关的
- 从向量组的其余向量 (如果还有的话) 中任取一个添加进去, 得到的新的部分组都线性相关, 那么这个部分组称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组

♣

笔记 注意到一个集合也是自身的子集，所以若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 本身就是自己的极大线性无关组

定义 2.8 (向量组的等价)

若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出. 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以互相线性表出, 则称这两个向量组等价, 记作

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$$

♣

性质

- 反身性：任一向量组与自身等价
- 对称性：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价, 则向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 等价
- 传递性：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价, 且向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与向量组 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 等价, 则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 等价

笔记 向量组等价的本质是两个向量组的生成子空间一致

命题 2.4

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与它的任意一个极大线性无关组等价

♠

命题 2.5

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价

♠

命题 2.6

设向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 如果 $r>s$, 那么向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关

♠

推论 2.1

设向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 如果向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$, 线性无关, 那么 $r\leqslant s$

♡

推论 2.2

等价的线性无关的向量组所含向量的个数相等

推论 2.3

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等

2.3.2 秩

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量组

向量组的一个极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩

全由零向量组成的向量组的秩规定为 0

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩记作 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$

笔记 1. 单个向量构成的向量组的秩等于 1 的充要条件是这个向量是非零向量

2.$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 全是零向量

3.$0 \leqslant \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right) \leqslant \min\{s,n\}$

所谓的秩，站在空间的角度，就是“生成子空间的维数”，下面是有关秩的命题

命题 2.7

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是，它的秩等于它所含向量的个数

命题 2.8

如果向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出，那么 $\operatorname{rank}(I) \leqslant \operatorname{rank}(II)$

推论 2.4

等价的向量组有相等的秩

命题 2.9

两个向量组等价的充分必要条件是：它们的秩相等并且其中一个向量组可以由另外一个向量组线性表出

推论 2.5

如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 有相等的秩，那么向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。即

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)=\begin{cases}\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right), \text{若}\boldsymbol{\beta}\text{ 可用}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\text{ 表示},\\ \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)+1, \text{若}\boldsymbol{\beta}\text{ 不可用}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\text{ 表示}\end{cases}$$

命题 2.10

1.$\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)$

2.$\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示 $\Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=s$

3.$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)$

4.$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \cong \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)$

2.3.3 求向量组的秩和极大线性无关组的方法

首先介绍一下方程组同解的概念

两个包含向量个数相等的有序向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$, 如果向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0} \text{ 和} x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}$$

同解 (即齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 和 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 同解). 就称它们有相同线性关系

命题 2.11

当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 有相同线性关系时

- 它们的对应部分组有一致的线性相关性
- 它们的最大无关组相对应, 从而秩相等
- 它们有相同的内在线性表示关系

当 A 经过初等行变换化为 B 时, $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 从而 A 的列向量组和 B 的列向量组有相同线性关系. 于是它们的最大无关组相对应, 秩相等

计算一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩和最大无关组的方法: 把此向量组作为列向量组构造矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \alpha_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 用初等行变换把它化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的非零行数就是 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, $\boldsymbol{B}$ 的各台角所在列号对应的部分组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个最大无关组

矩阵的初等行变换一共有三种

- 交换两行
- 用一非零的数乘以某一行
- 把一个行的 k 倍加到另一行 $(k\neq 0)$

例题 2.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,5,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-4,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,-2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,9,8)^{\mathrm{T}}$, 求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$, 找出一个最大无关组

2.3.4 典型例题

例题 2.6 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow$( )

(A) 存在全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0$.

(B) 存在不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\neq 0$.

(C) 每个 α_i 都不能用其他向量线性表示.

(D) 有线性无关的部分组.

例题 2.7 十星重点题目 $AB=0, A,B$ 是两个非零矩阵, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关. B 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关. B 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关. $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

例题 2.8 十星重点题目: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都是 n 维向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项中正确的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

笔记

1. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$

2.$r(AB)\leqslant \min r(A),r(B)$, 矩阵 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 因此

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$$

例题 2.9 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 线性相关, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,c\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,c\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

例题 2.10 十星重点题目: 设 A 是 n 阶矩阵, k 为正整数, $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个解, 但是 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$. 证明 $\alpha,A\alpha,\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关

例题 2.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$, 则 (　　)

(A) A 的任何 3 个行向量都线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个含有 3 个向量的部分组 (I)) 如果与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 等价, 则一定是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的最大无关组.

(C) A 的 3 阶子式都不为 0 .

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的线性相关的部分组含有向量的个数一定大于 3 .

例题 2.12 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 n 维向量, 下列命题成立的有 (　　)

(1) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(3) 如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(4) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_4$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关

例题 2.13 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量组, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$, 则 (　　) 不正确

(A) 如果 $r=n$, 则任何 n 维向量都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

(B) 如果任何 n 维向量都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 则 $r=n$.

(C) 如果 $r=s$, 则任何 n 维向量都可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示

(D) 如果 $r<n$, 则存在 n 维向量不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

例题 2.14 n 维向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以用 n 维向量组 (II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示

(A) 如果 (I) 线性无关, 则 $r\leqslant s$.

(B) 如果 (I) 线性相关, 则 $r>s$.

(C) 如果 (II) 线性无关, 则 $r\leqslant s$.

(D) 如果 (II) 线性相关, 则 $r>s$.

例题 2.15 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$

(1) 求 $\mathrm{rr}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$

(2) 求一个最大线性无关组, 并且把其余向量用它线性表示

例题 2.16 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)^{\mathrm{T}}$

(1) a,b 为什么数时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示?

(2) a,b 为什么数时, $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示, 并且表示方式唯一?

例题 2.17 给定向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$ 和 (II) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$. 当 a 为何值时 (I) 和 (II) 等价? a 为何值时 (I) 和 (II) 不等价?

例题 2.18 求常数 a, 使得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 但是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

例题 2.19 已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 但不可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示. 证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

2.4 向量空间、基、维数与过渡矩阵 (仅数一)

本节内容虽然仅面向数一，但是建议数二和数三的同学也同步学习。因为相关内容已经在前面已经有所介绍，这里仅仅是再总结，顺便把过渡矩阵的概念讲了

重点理解“同一个向量在不同基下的坐标”

这一节在一般的考研数学辅导书上都是轻描淡写的直接给出相关公式和概念。一般的书上，包括的内容有：

- n 维向量空间及其子空间
- 基、维数、坐标
- 过渡矩阵、坐标变换公式
- 规范正交基

其中，向量空间和子空间的概念我们已经进行了深入总结。基向量的个数就是空间的维数，本节内容重点讲解一下三个部分：

(1)“向量”和“坐标”的区别

(2) 过渡矩阵和坐标变换公式

(3) 规范正交基的概念与几何意义。至于施密特正交化会放在5.5中进行讲解

2.4.1 基、向量与向量的坐标

首先我们在 XOY 平面考虑一个简单的例子

设向量 $\gamma=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 显然在 x 轴和 y 轴上的分量分别是 2 和 1. 实际上，在标准基

$$i=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},j=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

下的坐标也是 $(2,1)^{\mathrm{T}}$, 因为，显然有

$$\gamma=2i+1j$$

即

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

笔记

1. 向量 = 空间中的一组基向量构成的矩阵 × 坐标, 在以单位矩阵的列向量为基的情况下, 此时向量与坐标相等。不同的基下，坐标一般是不同的，但是向量是一样的. 类似于质量在地球和月球上是一样的，但是重力不同，在加速度为 $1\mathrm{m/s^2}$ 的星球上，质量与重力在数值上完全一样

2. 有了向量、基、坐标的概念，我们可以对线性方程组 $Ax=b$ 作如下解释 (假设均有解)

- 对于非齐次方程，解向量可以看成是向量 b 在以 A 的列向量为基的情况下的坐标，当然 A 的列可以充当基的必要条件是它们线性无关
- 对于齐次方程，解向量可以看成是零向量在 A 的列向量为基的情况下的坐标，只有零解表明此时零向量的坐标是全零向量

2.4.2 过渡矩阵、坐标表变换公式

定义 2.10 (过渡矩阵)

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 和 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}k$ 都是 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，并设 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 中的坐标为

$(c_{1i}, c_{2i}, \cdots, c_{ki})$, 构造矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k$ 到 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 的过渡矩阵. 它也就是向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 对于 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k$ 的表示矩阵，即

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k)\boldsymbol{C}$$

如果 $\boldsymbol{V}$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k$ 和 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 中的坐标分别为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_k)^{\mathrm{T}}$, 即有 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k)\boldsymbol{x}$, 并且

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k)Cy$$

于是有坐标变换公式: $x = Cy$ ♣

2.4.3 规范正交基

定义 2.11

- 如果 $\boldsymbol{V}$ 的一个基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k$ 是单位正交向量组, 则称为规范正交基
- 两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积
- 两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵
- R^n 中的以一组正交基为列向量构成的矩阵是正交矩阵

♣

2.4.4 典型例题

例题 2.20 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的基, 则从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2/2, \boldsymbol{\alpha}_3/3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \alpha_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 (　　)

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/6 \\ -1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 1/2 & -1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

例题 2.21 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 1, 1, a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间为 2 维空间, 则, $a =$ ________

第 3 章 线性方程组

3.1 方程组的判定定理以及解的结构

3.1.1 算子的概念

这里并不会给出严格的有关“算子”的概念。

通俗地讲，“算子”就是映射 (可以理解为函数 $y=f(x)$ 中的 f)，重点是我们应该站在“接收输入 $x \rightarrow$ 经过算子处理 $\rightarrow$ 得到输出”的角度来理解映射. 尤其是考虑这个算子是否满足“线性性质”。

所谓“线性性质”，通俗的解释就是“输出端与输入端‘同步’变化”。

我们考虑函数

$$y=f(x)=kx$$

不难得到，对于任意的 $x_1, x_2 \in R$，都有

$$\begin{aligned} & f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right) \\ & f\left(k x_1\right)=k f\left(x_1\right)\end{aligned}$$

笔记

1. 矩阵对向量运算也可以看做是一个线性运算，对于方程 $Ax=b$ 显然有

$$\begin{gathered} A\left(x_1+x_2\right)=A x_1+A x_2=b_1+b_2 \\ A(k x)=k A x=k b\end{gathered}$$

2. 在函数中，大量的函数并不是“线性函数”，例如 $f(x)=\sin x$

3. 常见的“线性算子”(对加法和数乘封闭)，又称“线性变换”、“线性映射”有：

- 梯度算子:$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$
- 散度算子：$\operatorname{div} \mathbf{F}=\nabla \cdot \mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$
- 拉普拉斯算子：$\Delta f=\nabla^2 f=\nabla \cdot \nabla f=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

3.1.2 线性方程组有解的判定

定理 3.1 (非齐次方程有解的判定定理)

非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解的充分必要条件是:增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相等，即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$$

证明 线性方程组 $x_1 \boldsymbol{\alpha}_1+x_2 \boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n \boldsymbol{\alpha}_n=\beta$ 有解

$\Longleftrightarrow \beta \in \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n\right)$

$\Longleftrightarrow \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta\right) \subseteq \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right)$

$\Longleftrightarrow \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta\right)=\operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right)$

$\Longleftrightarrow \operatorname{dim} \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n, \beta\right)=\operatorname{dim} \operatorname{span}\left(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n\right)$

笔记

1. 非齐次方程 $Ax=\beta$ 的解的情况如下 (设 A 有 n 列):

- 有解：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$
- 有解且有唯一解：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})=n$
- 有解且有无穷多解：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})<n$
- 无解：$r(A)<r(A \mid \beta)$

3.1.3 线性方程组解的结构

3.1.3.1 齐次线性方程组解的结构、基础解系和解空间

R 上的 n 元齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

的解集 W 是 R^n 的一个子集. 由于 $0\in W$, 因此 W 非空集

性质

1. 若 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\delta}\in W$, 则 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\delta}\in \boldsymbol{W}$
2. 若 $\boldsymbol{\eta}\in W,k\in R$, 则 $k\boldsymbol{\eta}\in W$

笔记 有关两条性质的说明

1. 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次方程 $Ax=0$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 也是 $Ax=0$ 的解，即

$$A(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=0$$

2. 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次方程 $Ax=0$ 的解，则 $k\boldsymbol{\eta}$ 也是 $Ax=0$ 的解，即

$$A(k\boldsymbol{\eta})=0$$

由上述性质发现对于 W 中的元素，满足对加法和数乘封闭，所以 W 是一个线性空间。由于 W 中的每个向量都是 n 维的 (有 n 个分量)，所以全体 n 维向量构成了 R^n。显然 W 是 R^n 的一个子空间，我们称为“方程组 $Ax=0$ 的解空间”，简称“解空间”(记为 W)

既然 W 是空间，我们考虑如下两种情况

- W 是“零空间”
  $\Leftrightarrow$ 即 W 中只包含零向量
  $\Leftrightarrow$ 齐次方程 $Ax=0$ 只有零解
  $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 A 列满秩
  $\Leftrightarrow A$ 列空间维度为 $s(A$ 的列数)
  $\Leftrightarrow r(A)=s(A$ 的列数)
  $\Rightarrow$ 如果 A 是方阵则 $|A|\neq 0$
- W 不是“零空间”，注意零元素一定在 W 中
  $\Leftrightarrow$ 即 W 中有非零向量
  $\Leftrightarrow$ 齐次方程 $Ax=0$ 有非零解
  $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 A 列不满秩
  $\Leftrightarrow A$ 列空间维度小于 $s(A$ 的列数)
  $\Leftrightarrow r(A)<s(A$ 的列数)
  $\Rightarrow$ 如果 A 是方阵则 $|A|=0$

笔记

1. 至此我们将方程组的解、向量的线性表示以及线性相关性、空间三者联系到一起
2. 对于齐次线性方程组 $Ax=0$，我们考虑的角度是“0 的表示是否唯一？”; 对于非齐次线性方程 $Ax=b$，我们考虑的角度是“向量 b 是否可以被 A 的列向量线性表示？如果可以，是否是唯一表示？”

定义 3.1 (解空间与基础解系)

当 n 元齐次线性方程组 $Ax=0(A$ 是 $s\times n$ 的矩阵，下同) 有非零解时，全体解向量构成的集合 W 称为 n 元其次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间，设解空间的一组基为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，有

$$W=\operatorname{span}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$$

称向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系 ♣

笔记

1. 通解：$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k, c_i \in R$

2. 下面将会证明 $dim(W) = n - r(A)$，即解空间的维度为 $n - r(A)$，即基础解系中向量的个数为 $n - r(A)$

设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r, 且 $r < n$, 此时方程组 $Ax = 0$ 有非零解。把 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵 J, 则 J 有 r 个非零行, 从而 J 有 r 个主元，不妨设它们分别在第 $1, 2, \cdots, r$ 列. 于是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 = -b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 是自由未知量

为了求出一个线性无关的解向量组, 先让自由未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 取下述 $n - r$ 组数:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

即让各个自由变量每次分别取 1（当然也可以是其余非零数字），其余自由变量每次均取 0。分别带入上述一般解公式中，从而得到齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的 $n - r$ 个解：

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \eta_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

由于线性无关可以得到其延伸组无关，所以 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 也线性无关

此时方程组的通解就是

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

例题 3.1 求下列齐次线性方程组的一个基础解系, 并且写出它的全部解

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 14x_2 + 22x_3 - 9x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -5 \\ 3 & -14 & 22 & -9 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{11}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 是自由未知量. 从而方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

因此齐次线性方程组的全部解为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3, k_i \in R, i = 1, 2, 3$$

3.1.3.2 非齐次方程组解的结构

对于齐次方程解的结构清楚之后，下面开始讨论非齐次方程

n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

记解集为 U, 注意 U 不是一个线性空间（想想看为什么?）

性质

1. 若 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \in U$, 则 $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta} \in W$
2. 若 $\gamma \in U, \boldsymbol{\eta} \in W$, 则 $\gamma + \boldsymbol{\eta} \in U$

笔记 有关两条性质的说明

1. 如果 γ, δ 是非齐次方程 $Ax = \beta$ 的解，则 $\gamma - \delta$ 是齐次方程 $Ax = 0$ 的解，即

$$A(\gamma - \delta) = 0$$

2. 如果 γ 是非齐次方程 $Ax = \beta$ 的解，η 是齐次方程 $Ax = 0$，则 $\gamma + \eta$ 是非齐次方程 $Ax = \beta$ 的解，即

$$A(\gamma + \eta) = \beta$$

3. 如果 $\xi_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的一组解, 则

- 它们的线性组合 $c_1\xi_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_s = 1$
- 它们的线性组合 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $A = \mathbf{0}$ 的解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_s = 0$

4.

定理 3.2 (非齐次方程组的通解)

n 元非齐次线性方程组如果有解, 那么它的解集 U 为

$$U = \gamma_0 + W$$

其中 $\gamma_0 \in U$, 称 γ_0 是非齐次线性方程组的一个特解; W 是相应的齐次线性方程组 (即导出组) 的解空间 ♡

笔记

1. 齐次方程的全体解称为“解空间”
2. 非齐次方程的解为“齐次通解 + 非齐次特解”

下面是求 n 元非齐次线性方程组的全部解的步骤:

- 把非齐次线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵, 然后写出它的一般解（同解方程）
- 让自由未知量都取值 0 , 得到非齐次线性方程组的一个特解 γ_0

- 把非齐次线性方程组的一般解公式中的常数项去掉 (对应的导出组), 便得到导出组的一般解
- 进而求出导出组的一个基础解系: $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$
- 写出非齐次线性方程组的全部解为

$$U = \left\{\gamma_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r} \mid k_1, \cdots, k_{n-r} \in R\right\}$$

笔记 注意到非齐次方程全部解构成的向量组的秩为 $n - r(A) + 1$

例题 3.2 求下列非齐次线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1 \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ -9x_1 - 4x_2 - x_3 = 17 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{18}{7} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程的一般解 (同解方程) 为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{8}{7}x_4 - 1 \\ x_2 = 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 - 2 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量. 令 $x_3 = 0, x_4 = 0$, 得一个特解 γ_0 :

$$\gamma_0 = (-1, -2, 0, 0)'$$

导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{8}{7}x_4 \\ x_2 = 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量, 从而导出组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

因此原方程组的全部解为

$$U = \{\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in R\}$$

3.1.4 一个重要结论

定理 3.3

设 $AB = 0$, 则满足

$$r(A) + r(B) \leq n$$

其中,n 为矩阵 A 的列数

证明

3.1.5 典型题目

例题 3.3 $AX=0$ 和 $BX=0$ 都是 n 元方程组, 下列命题正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{B}X=\mathbf{0}$ 同解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

B. $AX=0$ 的解都是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

C. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解 $\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

D. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{B}X=\mathbf{0}$ 的解.

例题 3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$

A. 在 $r=m$ 时有解.

B. 在 $m=n$ 时有唯一解.

C. 在 $r<n$ 时有无穷多解.

D. 在 $r=n$ 时有唯一解.

例题 3.5 $\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ 2x_2+x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系为

A. $(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$.

B. $(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}},(0,1/2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

C. $(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},(-2,0,2,0)^{\mathrm{T}}$.

D. $(0,-1,0,2)^{\mathrm{T}},(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

例题 3.6 已知 $(1,a,2)^{\mathrm{T}},(-1,4,b)^{\mathrm{T}}$ 构成齐次线性方程组

$$\begin{cases} sx_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-tx_2-2x_3=0 \end{cases}$$

的一个基础解系, 求 a,b,s,t

例题 3.7 设 ξ_1,ξ_2 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的两个不同的解, $\eta_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为它的导出组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则它的通解为 ( )

A. $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)/2$.

B. $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)/2$.

C. $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)/2$.

D. $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)/2$.

例题 3.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解, k_1,k_2 为任意常数, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 ( )

A.$(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

B. $(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

C.$(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

D.$(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

例题 3.9 设线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有 3 个不同的解 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-2,n$ 是末知数个数, 则 ( )

A. 对任何数 $c_1,c_2,c_3,c_1\boldsymbol{\gamma}_1+c_2\boldsymbol{\gamma}_2+c_3\boldsymbol{\gamma}_3$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的解;

B. $2\gamma_1-3\gamma_2+\gamma_3$ 是导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的解;

C. $2\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性相关;

D. $\gamma_1-\gamma_2,\gamma_2-\gamma_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

例题 3.10 讨论 p,t 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t. \end{cases}$$

无解? 有解? 有解时写出全部解

3.2 方程组的同解、公共解问题和已知基础解系求系数矩阵问题

3.2.1 方程组的公共解问题

柠宝：涉及公共解的问题一般是放在两个齐次线性方程组的背景下来讨论的，也有少部分题目是在非齐次方程下来描述。为了方便叙述，设以下矩阵都是 n 阶方阵，这里以齐次方程为例进行讲解。

设有两个方程组分别为

$$Ax=0 \text{ 与} Bx=0$$

且有 $r(A)=r_1<n, r(B)=r_2<n$, 则两个方程组均有非零解

进一步，假设两个方程组的基础解系分别为

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_1}$$

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r_2}$$

我们考虑这两组基础解系的生成子空间，即两个方程组的解空间，分别为

$$U=\operatorname{span}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_1}\right)$$

$$V=\operatorname{span}\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r_2}\right)$$

公共解存在的充要条件为:

$$U\cap V\neq\varnothing$$

本质上，就是考虑 U 的全体

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_1}\xi_{n-r_1}$$

与 V 的全体

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r_2}\eta_{n-r_2}$$

是否有交集，即方程

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_1}\xi_{n-r_1}=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r_2}\eta_{n-r_2}$$

是否有解

笔记

1. 对于列数 (未知数个数) 相同的的两个方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$. 公共解的存在性一定可以得到保证，显然 $0\in U\cap V$，关键考虑是否有非零公共解

2. 一般方法是在已知其中一个方程组的基础解系的前提下 (不妨设已知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_1}$), 假设公共解的形式为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_1}\xi_{n-r_1}$$

将此向量带入到 $Bx=0$ 中，找到系数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r_1}$ 满足的条件，从而得到全体公共解

3. 在使用 2 中的方法的时候，通常选择基础解系较少的向量来进行公共解的假设

例题 3.11 设 (I) 和 (II) 是两个四元齐次线性方程组, (I) 为

$$\begin{cases} x_1+x_2=0\\ x_3-x_4=0\end{cases}$$

(II) 有一个基础解系 $(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 求 (I) 和 (II) 的全部公共解

例题 3.12 设 (I) 和 (II) 都是 4 元齐次线性方程组, 已知 $\xi_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\xi_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 (I) 的一个基础解系, $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 (II) 的一个基础解系. 求 (I) 和 (II) 公共解

例题 3.13 设 (I) 和 (II) 都是 3 元非齐次线性方程组, (I) 有通解 $\boldsymbol{\xi}_1+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,1)$; (II) 有通解 $\boldsymbol{\xi}_2+c\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,2)$, $\boldsymbol{\eta}=(1,1,2)$. 求 (II) 和 (II) 的公共解

例题 3.14 设 (I) 和 (II) 是两个四元齐次线性方程组, (I) 的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{bmatrix}$$

(II) 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$

(1) 求 (I) 的一个基础解系;

(2)a 为什么值时 (I) 和 (II) 有公共非零解? 此时求出全部公共非零解.

3.2.2 方程组的同解问题

同样，我们考虑两个方程 (列数相同)

$$Ax=0\text{ 与 }Bx=0$$

定理 3.4 (方程组同解的充要条件)

对于方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$(设系数矩阵的列数均为 n)

同解意味着解空间相同

$\Leftrightarrow$ 行空间相同

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 行空间的维数相同

笔记

1. 注意这里的判定定理不能写成 $r(A)=r(B)=r(A\mid B)$，即 A 与 B 的列空间不一定相同，原因是两个矩阵不一定有相同的行 (相同的方程个数)

2.$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的必要条件是 $r(A)=r(B)$

3. 定理的等价描述为：若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解, 且 $r(A)=r(B)$, 则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

例题 3.15 (2003 真题) 设有齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$, 其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵, 以下命题正确的是 (　　)

(1) 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解, 则 $r(A)\geq r(B)$;

(2) 若 $r(A)\geq r(B)$, 则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解;

(3) 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 则 $r(A)=r(B)$;

(4) 若 $r(A)=r(B)$, 则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

A.(1)(2)

B.(1)(3)

C.(2)(4)

D.(3)(4)

例题 3.16 已知齐次线性方程组 (I)

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ax_1+a^2x_3=0\\ax_2+a^2x_4=0\end{cases}$$

的解都满足方程 $x_1+x_2+x_3=0$, 求 a 和方程组的通解

例题 3.17 已知两个线性方程组

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5\\ nx_2-x_3-2x_4=-11,\\ x_3-2x_4=1-t\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6,\\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}
$$

同解，求 m,n,t

例题 3.18 已知齐次线性方程组

$$
\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0,\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad \text{和}\quad \begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}
$$

同解，求 a,b,c

3.2.3 已知基础解系求系数矩阵 (或构造方程) 问题

这里我们先给出问题以及解决办法，再进行证明

问题：已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 线性无关, 求一个 n 元齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$, 使得 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 是它的基础解系

方法：

- 以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 为行向量构造矩阵 $\boldsymbol{B}$
- 求出 $BX=0$ 的一个基础解系 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-k}$
- 令 $\boldsymbol{A}$ 是以 $\gamma_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-k}$ 为行向量的 $(n-l)\times n$ 阶矩阵. 则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 即所求

证明 (听课补充)

例题 3.19 构造齐次方程组, 使得 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 构成它的基础解系

例题 3.20 构造非齐次方程，使得其通解为

$$
(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+c_1(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}+c_2(0,2,1,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\ \text{任意}
$$

3.3 方程组有关的证明题

例题 3.21 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系. 证明 $\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_t$ 线性无关

例题 3.22 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 为 3 个 n 维向量, 已知 n 元齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的每个解都可以用 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 线性表示, 并且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-3$, 证明 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系

例题 3.23 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$, 试讨论当 a,b 为何值时

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示, 求表示式;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示式不唯一, 求表示式的一般形式.

3.4 (仅数一) 矩阵、向量与直线方程、平面方程之间的关系

(未完待续)

例题 3.24 (2019 数学一) 设有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}, \bar{A}$, 则 (　　)

(A)$r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$

(B)$r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$

(C)$r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$

(D)$r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$

例题 3.25 (2020 数学一) 已知直线 $l_1 : \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2 : \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

第 4 章 矩阵

4.1 矩阵的运算

柠宝：本章内容在前面的有关向量和方程组中已有涉及，包括系数矩阵、增广矩阵、秩的概念，本章对矩阵进行全面的介绍

本章内容几乎是纯代数的角度来进行讲解，所以相对于之前站在空间的角度而言并不是特别有趣捏

4.1.1 矩阵的概念与运算

4.1.1.1 矩阵的概念

定义 4.1

由 $m \times n$ 个数 $\boldsymbol{a}_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 当 $m=n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 也称为 n 阶方阵。$|\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 ♣

笔记

1. 在“降维打击学线代导学课”中我们讲了矩阵乘法，并且在前面的章节讲了“过渡矩阵”，总结为“左乘行变换，右乘列变换”。讲了列空间、行空间，对于矩阵的审视角度主要从两方面来刻画：

- 矩阵可以视作记录了信息 (向量) 的语言
- 矩阵可以视作记录变化的语言

4.1.1.2 常见的几种特殊矩阵

下面是几种常见的矩阵

- 单位矩阵：主对角线上元素都是 1, 其余元素全为零的方阵称为单位矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{I}$)
- 对角矩阵: 主对角线上元素为任意常数, 而主对角线外的元素都是零的方阵. 若主对角线上的元素相等, 则称为数量矩阵
- 三角矩阵: 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角矩阵; 主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角矩阵, 上、下三角矩阵统称三角矩阵
- 矩阵的转置: 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列的元素位置交换, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置,, 记为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$

  性质

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A} \quad (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

- 对称矩阵: 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵; 如果 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}^{T}=-\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵

  对称矩阵 A 的特点: A 中的元素关于主对角线对应相等; 反对称矩阵特点: A 的主对角线上的元素均为 0 , 其余元素关于主对角线互为相反数
- 正交矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵, 如果有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.
- 可交换矩阵: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 称为可交换矩阵

4.1.1.3 矩阵的三种关系

线性代数的一条主线是研究线性空间的性质，包括向量的线性表示与线性相关性，子空间以及空间的交与和（空间的和本课程不讲），可以称为“以向量为工具研究空间”

线性代数的另一条主线是矩阵之间的关系，包括以下三种关系：

(1) 等价关系：两个矩阵可以在进行有限次初等行变换和列变换下相互转换

(2) 相似关系：本质上是同一个线性变换在不同基下的描述

(3) 合同关系：以二维空间和三维空间为例，合同表明同一个二次曲线（曲面）在不同基下的表示

下面给出数学描述：

定义 4.2

等价关系: 若存在满秩阵 P, Q, 使 $B = PAQ$, 则称矩阵 A 与 B 等价, 记为 $A \cong B$

合同关系: 若存在满秩阵 P, 使 $B = P^T AP$, 则称矩阵 A 与 B 合同.

相似关系: 若存在可逆阵 P, 使 $B = P^{-1}AP$, 则称矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$.

♣

笔记

1. 矩阵 A 和矩阵 B 等价的充要条件是：A 和 B 是同型矩阵且 $r(A) = r(B)$

2. 矩阵 A 和矩阵 B 合同的充要条件是：这里仅考虑实对称矩阵，两个实对称矩阵合同的充要条件是它们的正负惯性指数相同

3. 矩阵 A 和矩阵 B 相似的充要条件是：存在可逆阵 P, 使 $B = P^{-1}AP$

4.1.2 矩阵的运算

这里直接给出矩阵的相等、加减法和乘法

1. 矩阵的相等：相等的矩阵必须具有相同的行数与列数, 两个矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 相等是指对应位置的元素分别相等, 即 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$
2. 矩阵的和与差, 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则定义
$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (a_{ij} \pm b_{ij})\,(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$
3. 数乘矩阵: 数乘矩阵时, 将数乘到矩阵的每个元素上, 即
$$k\boldsymbol{A} = k\,(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$
矩阵的加法和数乘运算满足下列运算规律：
   - 交换律　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
   - 结合律　$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$,　$k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$
   - 分配律　$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}, (k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$

   以上 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 为数
4. 矩阵乘法: 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (c_{ij})_{m\times n}$, 其中
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$
矩阵乘法满足下列运算规律：
   - 结合律　$(\boldsymbol{AB})C = A(BC)$
   - 分配律　$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})C = AC + BC, C(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}$
   - 数与乘积的结合律　$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}) = k(\boldsymbol{AB})$
5. 方阵的幂: 对方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdots\cdots \boldsymbol{A}(n\boldsymbol{A})$ 相乘. 称 $\boldsymbol{A}^k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 特别地, 若存在整数 m, 使 $\boldsymbol{A}^m = 0$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵

方阵的幂满足下列运算规律:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{k+m},\left(\boldsymbol{A}^k\right)^m=\boldsymbol{A}^{km},k,m\text{ 为正整数}$$

笔记

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{E}_m$ 和 $\boldsymbol{E}_n$ 分别为 m 阶和 n 阶单位矩阵, 则有

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$, 特别地, $|k\boldsymbol{A}|=k^n\mid\boldsymbol{A}$

3.$AB=O\nRightarrow A=O$ 或 $B=O$; 由 $A^2=O\nRightarrow A=O$, 从而 $AB=AC\nRightarrow B=C$;$|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或$|\boldsymbol{B}|=0$, 这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵

3.$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立, 从而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 等一般也不成立 (当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, 上述公式成立)

4.$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 由此易证对任意矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 均为对称矩阵

4.1.3 矩阵乘法的四大审视角度

对于矩阵乘法的“左乘行变换、右乘列变换”在线代导学课（超链接可点击跳转）已经强调过，这里将会对四种审视角度进行总结

这里直接引用 Gilbert Strang 的《Introduction to Linear Algebra-5th edition-2016》有关矩阵乘法的四种角度的解读

4.1.3.1 The First Way: Dot Product

1.The entry in row i and column j of AB is (row i of A) $\cdot$ (column j of B)

4.1.3.2 The Second and Third Ways: Rows and Columns

2.Matrix A times every column of B $\quad A\left[b_1\cdots b_p\right]=\left[Ab_1\cdots Ab_p\right]$

3.Every row of A times matrix B $\quad [\text{ row } i\text{ of } A]\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=[\text{row } i \text{ of } AB]$

4.1.3.3 The Fourth Way: Columns Multiply Rows

4. Multiply columns 1 to n of A times rows 1 to n of B. Add those matrices.

$$\begin{bmatrix}\text{col }1&\text{col }2&\text{col }3\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{row }1&\cdots&\cdot\\ \text{row }2&\cdots&\cdot\\ \text{row }3&\cdots&\cdot\end{bmatrix}=(\text{col }1)(\text{row }1)+(\text{col }2)(\text{row }2)+(\text{col }3)(\text{row }3)$$

笔记 对于矩阵乘法 $AB=C$ 来说

1.C_{ij} 可以看成是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的向量内积运算的结果

2. 将矩阵 B 进行列分块，$AB=A\left[b_1\cdots b_p\right]=\left[Ab_1\cdots Ab_p\right]$ 相当于矩阵 A “分别作用于 (act on)” 矩阵 B 的每一个列向量, 也就是导学课中说的“右乘列变换”

3. 用矩阵 A 的每一个行向量来乘矩阵 B, 也就是导学课中说的“左乘行变换”

4. 看成是若干个向量的乘法（构成矩阵），再对这些矩阵进行相加

5. 上面的审视角度中，最重要的就是“左乘行变换，右乘列变换”，即

- 乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 个列向量 γ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合, 组合系数就是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 个列向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的各分量
- 乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 个行向量是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的线性组合, 组合系数就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量的各分量

根据上面的描述，再回忆一下生成子空间的概念，可以得到如下命题

命题 4.1

$A\boldsymbol{x}$ 就是 A 的列空间

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\text{ is a combination of the columns }A\boldsymbol{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

4.1.4 典型例题

例题 4.1 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\ldots,0,a)^{\mathrm{T}},a<0,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}+a^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 a

例题 4.2 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维非零列向量, 已知 $\boldsymbol{A}^2=3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$

例题 4.3 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量, 证明对正整数 k, 都有

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1}\boldsymbol{A}=(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))^{k-1}\boldsymbol{A}$$

例题 4.4 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

例题 4.5 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 求 A^n

例题 4.6 求 $\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}^{2017}$

例题 4.7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组, 满足

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$$

求作矩阵 B, 使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$

例题 4.8 (本题作为下一章特征值与特征向量的 “引例”) $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 3 维列向量, 使得 $P=\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha}\right)$ 可逆, 并且 $A^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-2A^2\boldsymbol{\alpha}$

(1) 求 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$

(2) 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

例题 4.9 已知 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=3$, 求 $\begin{vmatrix}\lambda a_1+\mu b_1&\lambda b_1+\mu c_1&\lambda c_1+\mu a_1\\\lambda a_2+\mu b_2&\lambda b_2+\mu c_2&\lambda c_2+\mu a_2\\\lambda a_3+\mu b_3&\lambda b_3+\mu c_3&\lambda c_3+\mu a_3\end{vmatrix}$

4.2 分块矩阵、初等变换、初等矩阵、逆矩阵

4.2.1 分块矩阵

对两个可以相乘的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 可以先用纵横线把它们切割成小矩阵 (要求 A 的纵向切割和 B 的横向切割一致), 再用它们来作乘法，例如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

笔记 把“块”当作元素, 按照乘法定义那样乘

4.2.2 可逆矩阵

4.2.2.1 可逆矩阵的概念和性质

我们将矩阵视为一种“线性变换”，运算的本质是映射。把矩阵看成是某种“对应法则”，这个对应法则可以建立“矩阵 B 到矩阵 C 的映射：$AB=C$”，也可以建立“向量 α 到向量 β 的映射：$A\alpha=\beta$”. 这里类似于一元函数中的“单射”，矩阵及其可逆矩阵的关系类似于“函数与其反函数”的关系，即“能从因变量出发找到对应的自变量”，即

$$B=A^{-1}C;\alpha=A^{-1}\beta;x=f^{-1}(y)$$

以上是关于“可逆矩阵”的第一个角度的理解，第二个角度是矩阵只有数乘和矩阵乘法，没有除法，逆矩阵的出现可以弥补矩阵运算没有除法的“缺陷”。

按图索骥：是一则来源于寓言故事的成语。成语典故最早见于《汉书 · 梅福传》,《艺林 · 伐山》亦有相似典故。按图索骥指按照图像寻找好马（索：寻找，觅求。骥：马，好马），比喻按线索寻找

这里充当“地图”的工具就是“初等矩阵”

定义 4.3 (可逆矩阵)

对于一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, 并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ ♣

性质

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆, 且有 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$
3. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆, 且有 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}A^{-1}$
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $k\neq 0$, 则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

笔记

1. 可逆矩阵一定是方阵, 但并不是所有方阵都有逆矩阵

2. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 非奇异, 即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 即在计算或证明时, 只要有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 就可得出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵的结论 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},B^{-1}=\boldsymbol{A}\right)$

定理 4.1 (矩阵可逆的判定定理)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆

$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0.$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}X=\boldsymbol{\beta}$ 唯一解; $\boldsymbol{AX}=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n.$

$\Leftrightarrow 0$ 不是 A 的特征值.

笔记 在证明某个矩阵可逆的时候，可以采用构造方程组的方法来证明这个方程组只有唯一解

例题 4.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实反对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

例题 4.11 设 A, B 都是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆. 证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A$ 也可逆, 并且

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$$

证明 只要证明等式 $(E-BA)\left[E+B(E-AB)^{-1}A\right]=E$ 即可

$$\begin{aligned}(E-BA)\left[E+B(E-AB)^{-1}A\right]&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A)+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}A\\&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A)+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}A\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}\\&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}A+\boldsymbol{B}A=E\end{aligned}$$

例题 4.12 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵, 证明

$$E-AB \text{ 可逆} \Leftrightarrow E-BA \text{ 可逆}$$

4.2.2.2 初等变换与初等矩阵

在求解向量组的秩和极大线性无关组的时候我们讲过三种初等（行）变换

- 交换矩阵的两行 (列)
- 以一个非零的数 k 乘矩阵的某一行 (列)
- 把矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

与之对应的三种初等矩阵，也就是说初等矩阵一共有三种，对应的功能就是完成三种初等变换的操作，具体到对矩阵 A 进行行变换还是列变换取决于这个初等矩阵对 A 进行左乘 (行变换) 还是右乘 (列变换)

初等变换的性质

性质

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过行 (或列) 的初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行 (或列) 向量仍等价
   (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$
   (2) 初等变换不改变矩阵的秩
2. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在有限个初等方阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_l$, 使得: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次行的初等变换, 相当于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘以一个 m 阶初等方阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列的初等变换, 相当于矩阵右乘以一个 n 阶初等方阵
4. 矩阵可逆的充要条件是可以写成一系列初等矩阵的乘积

笔记 三种初等矩阵的逆矩阵的理解记忆：（上课做笔记）

例题 4.13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的 1,2 列得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列上, 得 $\boldsymbol{C}$. 求 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $C=AQ$

例题 4.14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行上得 $\boldsymbol{B}$, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列上得 C

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $C=(\quad)$

(A) $P^{-1}AP$.
(B) PAP^{-1}.
(C) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.
(D) $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

例题 4.15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶可逆矩阵, $Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 已知

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

则 $Q^{\mathrm{T}}AQ=(\quad)$

(A) $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

例题 4.16 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 则必有 ( )

(A) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.

(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

4.2.2.3 利用初等变换求矩阵的逆矩阵

这里先介绍最基本的方法，再介绍矩阵方程中的方法

方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可表示为若干个同阶初等矩阵的乘积. 欲求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 首先要由 $\boldsymbol{A}$ 作出一个 $n\times 2n$ 的分块矩阵, 即

$$(A:E)$$

其次, 对这个矩阵施以行初等变换 (且只能用行初等变换), 将它的左半部的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵, 那么原来右半部的单位矩阵就同时化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

或者，只进行初等列变换

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}$$

下面介绍矩阵方程中有关逆矩阵的问题的解法

笔记

1. 对于矩阵方程 $AX=B$, 要求解 $X=A^{-1}B$, 可以构造分块矩阵 $(A:B)$, 对 A 只进行初等行变换为单位矩阵后，右边的 B 就变成了 $A^{-1}B$

2. 对于对于矩阵方程 $XA=B$, 要求解 $X=BA^{-1}$, 可以构造分块矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$, 对 A 只进行初等列变换为单位矩阵后，下方的 B 就变成了 BA^{-1}

3. 上面两种矩阵方程的核心原因是在于“左乘行变换，右乘列变换”

4. 在实际的操作中，我们一般都会使用“行变换”而不会使用列变换，可以通过转置这一操作将列变换转化为行变换进行求解

- 对于矩阵方程 $AX=B$, 将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并列作矩阵 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$, 对它作初等行变换是矩阵方程的同解变换, 于是得到求解初等变换法: 对 $(\boldsymbol{A} \mid B)$ 作初等行变换使得 $\boldsymbol{A}$ 变为单位矩阵, 此时 B 随之变为解 X

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \rightarrow (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{X})$$

- 对于矩阵方程 $XA=B$, 对两边转置化为 (I) 的形式: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 再用初等变换法求出 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, 转置得 $\boldsymbol{X}$

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)$$

定义 4.4 (等价矩阵)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$. 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总是可经过有限次行 (列) 初等变换化为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形 ♣

笔记

1.$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是同型矩阵且有相同的秩. $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ=B$

2. 向量组等价则对应的矩阵一定等价（前提是同型矩阵），矩阵等价不一定对应的（列）向量组等价

3. 造成 2 的原因是向量组等价只允许单一的行变换，矩阵等价的过程中可以允许行列同时变换

例题 4.17 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m<n)$ 线性无关, 则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件是 (　　)

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

4.2.2.4 分块矩阵的逆矩阵

下面直接给出常见的分块矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

4.3 伴随矩阵与矩阵的秩

4.3.1 伴随矩阵

定义 4.5 (伴随矩阵的概念)

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 记 A_{ij} 是 (i,j) 位元素 a_{ij} 的代数余子式, 规定 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = (A_{ij})^{\mathrm{T}}$$

基本公式:

(1)$\boldsymbol{A}A^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

(2) 对可逆矩阵有: $A^* = |\boldsymbol{A}|A^{-1}$

(3) 对于二阶方阵来说, 当 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $ad-bc \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. 相当于主对角元素换位, 次对角元素变号, 即可得到 A^*, 从而

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

♣

性质

1. $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$
2. $(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$
3. $(c\boldsymbol{A})^* = c^{n-1}\boldsymbol{A}^*$
4. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
5. $\left(\boldsymbol{A}^k\right)^* = (\boldsymbol{A}^*)^k$
6. $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$
7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则秩 $(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & 秩(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & 秩(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & 秩(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$

4.3.2 矩阵的秩

这里直接给出矩阵的秩的相关命题

定义 4.6

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记为 $r(\boldsymbol{A})$. 对于任何 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ (一系列初等行变换), n 阶可逆矩阵 Q (一系列初等列变换), 使

$$PAQ=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \text{其中} \boldsymbol{E}_r \text{ 为} r \text{ 阶单位矩阵}$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r$.

有关矩阵的秩的重要公式如下:

- $r(\boldsymbol{A})=r\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$
- 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$
- $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$
- $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$; 若 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$
- 当 $\boldsymbol{A}$ 列满秩时, $\boldsymbol{A}$ 在矩阵乘法中有左消去律:

$$AB=0\Rightarrow B=0$$
$$AB=AC\Rightarrow B=C.$$

- 如果 $\boldsymbol{A}$ 列满秩, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$
- 行满秩有对应的形式请自行补充:
- 用可逆矩阵 P,Q 去乘 $\boldsymbol{A}$, 不改变矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 即秩 $(PAQ)=$ 秩 $(AQ)=$ 秩 $(PA)=$ 秩 $(\boldsymbol{A})$
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times p$ 矩阵, 秩 $(\boldsymbol{A})=r$, 则存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$, p 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$, 右端称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形, 其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位矩阵
- 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维非零列向量, 则秩 $\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=$ 秩 $\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=1$

4.3.3 典型题目

例题 4.18 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 n 阶矩阵, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆, 求下列 $2n$ 阶矩阵的伴随矩阵

(1) $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$.

(4) $\begin{bmatrix}C & A\\ B & 0\end{bmatrix}$.

例题 4.19 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的 1,2 行得 $\boldsymbol{B}$, 则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的 1,2 行得到 $\boldsymbol{B}^*$

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的 1,2 列得到 $\boldsymbol{B}^*$

(C) 交换 A^* 的 1,2 行得到 $-B^*$

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的 1,2 列得到 $-\boldsymbol{B}^*$

例题 4.20 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 证明 $|\boldsymbol{A}|>0$

4.4 矩阵的广义初等变换、矩阵习题课

4.4.1 矩阵的广义初等变换

(本部分上课做笔记)

4.4.2 重要题型以及解题方法和技巧

4.4.2.1 证明矩阵的可逆性、求逆矩阵

求解逆矩阵常用的方法如下

- 伴随矩阵法: $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$, (适用于 $n\leqslant 3$ 的矩阵求逆)
- 初等变换求逆: $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行}}\left(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}\right)$
- 分块求逆
- 利用定义: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$
- 若是二阶矩阵, 证明两行不成比例（20 年真题）
- 构造同解方程证明秩相等

例题 4.21 (2001) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A-E)^{-1}=$ ________

例题 4.22 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

例题 4.23 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则必有 (　　)

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$

(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$

(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

例题 4.24 (2000) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵, 且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ________

例题 4.25 设 $A,B,AB-E$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $\left[\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{-1}$ 等于 (　　)

(A) $BAB-E$

(B) $ABA-E$

(C) $ABA-A$

(D) $BAB-B$

例题 4.26 设方阵 A,B 互为逆矩阵, 且 $A+B$ 可逆. 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$

例题 4.27 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ ________

例题 4.28 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________

4.4.2.2 伴随矩阵有关问题

例题 4.29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n \geqslant 2)$ 阶非零实矩阵, 其元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等, 求 $|\boldsymbol{A}|$

例题 4.30 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, 若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为 3 个相等的正数, 则 a_{11} 为 (　　)

(A) $\sqrt{3}/3$

(B) 3

(C) $1/3$

(D) $\sqrt{3}$

例题 4.31 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n-1) & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*=$ ________

例题 4.32 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若对任意 n 维向量, 均有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系中所含向量个数 (　　)

(A) $k=0$

(B) $k=1$

(C) $k>1$

(D) $k=n$

4.4.2.3 计算 n 阶矩阵的高次幂

例题 4.33 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3], \boldsymbol{\beta}=[1,1/2,1/3]$, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, 则 $A^n=$ ________

例题 4.34 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$(n 为正整数)

例题 4.35 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{bmatrix}$, 若存在秩大于 1 的三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}^n=$ ________

例题 4.36 (利用矩阵分解) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^n=$ ________

4.4.2.4 矩阵、分块矩阵的秩相关题目

例题 4.37 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 且 $B\boldsymbol{A}=A^{-1}B^{-1}$. 求秩 $(E+AB)+$ 秩 $(E-AB)$

例题 4.38 (2012) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 ________

例题 4.39 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为秩 $(\boldsymbol{A})=m<n, \boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵. 下述结论中正确的是 (　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换, 必可化为 $[E_m, O]$ 的形式

例题 4.40 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* = (\quad)$

(A) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ O & |\boldsymbol{A}|A^* \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$

例题 4.41 (2018) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则 $(\quad)$

(A)$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A})$

(B) $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A})$

(C) $r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$

(D) $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$

例题 4.42 (2021) 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是 $(\quad)$

(A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^TA \end{pmatrix} = 2r(A)$

(B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

(D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

例题 4.43 (2022) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则 $(\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 0$ 只有零解.

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{A} \\ O & A \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解.

(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 0$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = 0$ 同解.

例题 4.44 (2023) 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = 0, E$ 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{pmatrix}$$

的秩分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, 则 $(\quad)$

(A) $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$

(B) $\gamma_1 \leq \gamma_3 \leq \gamma_2$

(C) $\gamma_3 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$

(D) $\gamma_2 \leq \gamma_1 \leq \gamma_3$

4.4.2.5 矩阵方程

例题 4.45 (2001) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, 且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\boldsymbol{A}X\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}X\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$$

其中 E 是三阶单位矩阵, 求 X

例题 4.46 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵, 又知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$

例题 4.47 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\2&2&-2\end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$

例题 4.48 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$

第 5 章 特征值与特征向量

5.1 线性变换、线性变换的矩阵与应用

5.1.1 基、向量、坐标

在讲解线性变换之前，我们对2.4中的内容进行简要复习

这里仅考虑 n 维向量空间 $V = R^n$. 这里要严格区分向量和坐标，在同一个向量空间 V 中，同一个向量可以有不同的坐标

定义 5.1

设 V 是 R 上 n 维线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 V 的两个基, 并且

$$\beta_1 = b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{n1}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n = b_{1n}\alpha_1 + \cdots + b_{nn}\alpha_n$$

$\beta_1, \cdots, \beta_n$ 分别在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标组成的矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

称为基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵

♣

5.1.2 线性变换和线性变换的矩阵

设 V 是 R 上的 n 维线性空间 (下同)。由于 V 中的每一个向量都由 V 的一组基唯一表示，线性变换需要将 V 中的每个向量进行变换，但是追踪每一个（无穷多个）向量的变换是不可能的，我们退而求其次，只需要追踪变换前后的基向量即可。这里可以理解成基向量“管理”或“决定”了 V 中的任何向量。类似于一个学校追踪全校每一个学生不太现实，只需要追踪其每个班的班主任即可，因为每个学生都被班主任“管理”着。

这里班主任的作用和 V 中基向量的作用是类似的

下面给出线性映射与线性变换的概念

定义 5.2 (线性映射与线性变换)

设 V 与 V' 是域 F 上的两个线性空间, V 到 V' 的一个映射 $\mathscr{A}$ 如果保持加法, 即

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{A}(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

$$\mathscr{A}(k\alpha) = k\mathscr{A}(\alpha), \quad \forall \alpha \in V, k \in F$$

那么称 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射

线性空间 V 到自身的线性映射通常称为 V 上的线性变换

$\mathscr{A}(\alpha)$ 也可写成 $\mathscr{A}\alpha$

♣

笔记

1. 线性映射对应的两个空间可以不同 (对应的矩阵不是方阵), 线性变换是自身到自身的映射 (对应的矩阵是方阵)

2. 线性变换是特殊的线性映射, 且这种变换可以用一个矩阵来进行表示

线性变换的本质就是建立变换前和变换后的映射法则

域 F 上线性空间 V 到 V' 的线性映射 $\mathscr{A}$ 具有下列性质:

性质

1. $\mathscr{A}(0)=0'$, 其中 $0'$ 是 V' 的零向量
2. $\mathscr{A}(-\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha), \quad \forall\alpha\in V$
3. $\mathscr{A}\left(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\right)=k_1\mathscr{A}\left(\alpha_1\right)+\cdots+k_s\mathscr{A}\left(\alpha_s\right)$
4. $\mathscr{A}$ 把 V 中线性相关的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 映成 V' 中线性相关的向量组 $\mathscr{A}\left(\alpha_1\right),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_s)$(注意: $\mathscr{A}$ 有可能把 V 中线性无关的向量组映成线性相关的向量组)
5. 设 $\dim V=n$, 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基, 则对于 V 中任一向量 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$, 有
$$\mathscr{A}(\alpha)=a_1\mathscr{A}\left(\alpha_1\right)+\cdots+a_n\mathscr{A}\left(\alpha_n\right)$$
这里表明只要知道了 V 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中的每个向量在 $\mathscr{A}$ 下的像: $\mathscr{A}\left(\alpha_1\right),\cdots,\mathscr{A}\left(\alpha_n\right)$, 那么 V 中任一向量 α 在 $\mathscr{A}$ 下的像就都确定了

对于 R 上的 n 维线性空间，变换前后的向量都可以被基线性表示，我们只需要追踪这个线性变换如何影响到基向量即可，由此给出线性变换对应的矩阵的概念

定义 5.3 (线性变换的矩阵)

设 V 是域 R 上 n 维线性空间, $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换, V 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 则 $\mathscr{A}$ 完全被 $\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n$ 决定, 设
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\alpha_1&=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n\\
\mathscr{A}\alpha_2&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n\\
\cdots\ \ \cdots&\ \ \cdots\ \ \cdots\\
\mathscr{A}\alpha_n&=\alpha_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n
\end{aligned}$$
我们把 $\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别作为第 $1,2,\cdots,n$ 列构造一个 n 级矩阵如下
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$
即
$$(\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$
我们把 $(\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)$ 简记成 $\mathscr{A}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 综合上面的式子，有
$$\mathscr{A}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)A$$
从而 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵就是中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ ♣

笔记

1. 这里介绍的是线性变换下的矩阵，同理对于线性映射也有对应的矩阵
2. 线性变换可逆的充要条件是对应的矩阵是可逆矩阵
3. 线性变换的作用对象对 V 中的向量，但是这种情况下带来了描述上的困难，所以我们是从基向量的视角来审视这个线性变换。对于同一个线性变换，在不同的基下的矩阵是不一样的，即使矩阵不一样，但是还是同

一个线性变换。这种“同一个线性变换在不同基下的矩阵”关系就是矩阵的相似 (具体的推导后面会介绍)。这里举两个例子：

- 基因的选择性表达：同样都是 DNA 形成了形态结构和生理功能不同的细胞，这里的 DNA 相同就类似于同一个线性变换，我们无法对 ATCG 碱基对直接进行译码，只能从“具体的细胞表现”来审视基因
- 电影院放电影时，不同的座位看的是同一部电影（视角不同，但是目标相同）

4. 对向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 进行线性换变换等同于对这个向量组右乘线性变换矩阵，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A$$

5.1.3 线性变换的运算

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \operatorname{Hom}(V, V'), k \in R$

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)\boldsymbol{A}, \mathscr{B}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)\boldsymbol{B}$$

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$$

$$(k\mathscr{A})(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)(k\boldsymbol{A})$$

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

5.2 特征值、特征向量与特征子空间

5.2.1 特征值、特征向量与特征子空间的概念

强烈建议观看 3B1B 的视频：线性代数的本质——特征值与特征向量

矩阵的特征值是本质上基于线性变换的，我们寻求的是在变换前后，对于某些方向上的向量，整个线性变换作用在这些向量上，对应的效果只有拉伸（可以反向），即

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda_0 \alpha$$

因为线性变换需要用矩阵来进行描述，所以下面给出两种形式的定义

定义 5.4

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换. 如果存在 $\lambda_0 \in F$, 以及 $\alpha \in V$ 且 $\alpha \neq 0$, 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda_0 \alpha$$

那么称 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 称 α 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量

矩阵形式的定义如下：

设 A 是 n 阶矩阵. 如果 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$ 不是零向量, 并且 $\boldsymbol{A\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 线性相关, 就称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 此时, 存在唯一数 λ, 使得

$$\boldsymbol{A\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi}$$

称 λ 为 ξ 的特征值. (也常常说 $\boldsymbol{\xi}$ 是属于特征值 λ 的特征向量.) ♣

笔记

1. 特征向量是依附于特征值存在的，我们称 ξ 是特征向量等同于 ξ 是属于某个特征值 λ 的特征向量

2. 对于等式 $A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$，显然对于任意的实数 λ, 零向量满足等式，所以我们要求特征向量必须是非零向量，因为没有研究的必要

3. 特征值可以为 0, 但是特征向量不可以为零向量

从属于特征值 λ 全部特征向量并不是一个线性空间 (因为没有零向量)，如果在这个集合中人为增加零向量，就可以构成一个线性空间。由此，我们引出特征子空间的概念

定义 5.5

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换. 如果 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 那么 V 的下述子集

$$V_{\lambda_0:}=\{\alpha\in V\mid \mathscr{A}\alpha=\lambda_0\alpha\}$$

是 V 的一个子空间, 称 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间

证明 $0\in V_{\lambda_0}$. 任给 $\alpha,\beta\in V_{\lambda_0},k\in F$, 有

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta=\lambda_0\alpha+\lambda_0\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$$
$$\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}\alpha=k(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(k\alpha)$$

因此 $\alpha+\beta,k\alpha\in V_{\lambda_0}$. 从而 V_{λ_0} 是 V 的一个子空间

定理 5.1

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, 设 λ_1,λ_2 都是 $\mathscr{A}$ 的特征值, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 若 V_{λ_1} 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, V_{λ_2} 中向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关

简单来说就是：不同特征值的特征向量一定线性无关

笔记

1. 同一个特征值的特征向量可能线性相关，可能线性无关
2. 本定理要求会证明

命题 5.1

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值. 如果 V_{λ_i} 中向量组 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 线性无关, $i=1,2,\cdots,s$, 那么 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2r_2},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 线性无关

5.2.2 特征值与特征向量的求解

定理 5.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级矩阵, 则

- λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值当且仅当 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的一个根
- α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解

笔记

1. 特征值可以为虚数，在考研数学中只考虑实数的情况

2.λ_j 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 我们把齐次线性方程组 $(\lambda_j\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 W_{λ_j} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_j 的特征子空间

下面给出具体步骤：

- 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda E-A|$
- 求特征多项式的全部根，即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值
- 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_j, 求 $(\lambda_j\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系: $\boldsymbol{\eta}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{jr_j}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的全部特征向量是

$$\left\{k_1\boldsymbol{\eta}_{j1}+\cdots+k_{r_j}\boldsymbol{\eta}_{jr_j}\mid k_1,\cdots,k_{r_j}\in R,\text{且它们不全为}0\right\}$$

笔记

1. 每一个不同的特征值都对应了一个不同的特征子空间

2. 设 A 是 n 阶矩阵，则特征值 λ_0 的特征子空间的维数是 $n-r(\lambda_0 E-A)$

3.$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

4. 特别的, $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow 0$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

命题 5.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 是一个 n 次多项式, λ^n 的系数是 $1, \lambda^{n-1}$ 的系数等于 $-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$, 常数项为 $(-1)^n|\boldsymbol{A}|$

证明

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\begin{aligned}&\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\\=&\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}$$

比较系数即可得到上述结论

例题 5.1 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量, 求 a, b 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值 λ

例题 5.2 设 λ_1, λ_2 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, ζ_1, ζ_2 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明:$\zeta_1+\zeta_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

5.2.3 特征值与特征向量的性质

有关特征值和特征向量的性质，主要抓住两方面的问题：

- 特征值本身的性质：有关行列式、迹的性质
- 不同矩阵的特征值和特征向量的关系：有些关系是他们之间的特征向量相同但是特征值不同；有些是特征向量不同但是特征值相同

定理 5.3

设 A 是 n 阶矩阵, 记 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 则

- $\Leftrightarrow 0$ 不是特征值
- $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$

这里 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹数

笔记 这两条性质是有关特征值本身的性质，即

1.A 的行列式等于特征值的乘积

2.A 主对角线的元素累加等于特征值全部加起来（重根按照重数算）

3. 由于 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$, 所以我们利用特征值又得到一条判断矩阵 A 是否可逆的方法：可逆 $\Leftrightarrow 0$ 不是特征值; 不可逆 $\Leftrightarrow 0$ 是特征值

4.$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同

刚刚的定理给出了特征值本身的性质，下面给出不同矩阵的特征值与特征向量的关系

定理 5.4

如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 特征值为 λ, 则
- $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的任何多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量, 特征值为 $f(\lambda)$
- 如果 A 可逆, 则 $\lambda \neq 0$, 并且 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 A^{-1} 和 A^* 的特征向量, 特征值分别为 $1/\lambda$ 和 $|A|/\lambda$(A 可逆时, A, A^{-1} 和 A^* 的特征向量完全一样), 即成立

$$A\xi=\lambda\xi, \text{且 } A \text{ 可逆} \Rightarrow A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi, A^*=\frac{|A|}{\lambda}\xi$$

♡

证明

命题 5.3

如果 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 则
- $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$(特别的 $\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $\lambda_1+c, \lambda_2+c, \cdots, \lambda_n+c$)
- 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \cdots, 1/\lambda_n; A^*$ 的特征值是 $|\boldsymbol{A}|/\lambda_1, |A|/\lambda_2, \cdots, |A|/\lambda_n$
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值也是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

♠

命题 5.4

如果 $\boldsymbol{A}$ 的一个多项式 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ 都满足 $f(\lambda)=0$, 但是 $f(\lambda)=0$ 时不能推出 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 仅仅能说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值一定是 $f(\lambda)=0$ 的某个根

♠

例题 5.3 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

例题 5.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵的特征值为 $1,2,3$, 设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式, 求 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{33}$

例题 5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵. 且 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$, 则 $\left|3\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^{-1}\right|=$ ________

例题 5.6 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$. 如果 $|2\boldsymbol{A}|=-48$, 则 $\lambda=$ ________

5.2.4 代数重数与几何重数的关系

定义 5.6

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, λ_1 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值. 则 $\mathscr{A}$ 的属于 λ_1 的特征子空间 V_{λ_1} 的维数称为特征值 λ_1 的几何重数, λ_1 作为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式的根的重数称为特征值 λ_1 的代数重数, 把 λ_1 的代数重数简称为 λ_1 的重数

♣

命题 5.5

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, λ_1 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 则 λ_1 的几何重数不超过它的代数重数

♠

笔记

1. (十星重点) 有一种情况我们是可以确定代数重数和几何重数一定相等，那就是特征值为单根的时候
2. 设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则它的重数 $\geqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$

5.2.5 重点：$r(A)=1$ 矩阵的特征值

根据上面有关代数重数和几何重数的结论们可以得到如下命题

定理 5.5

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 1,(n>1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

证明

命题 5.6

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量, 则

- $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$
- 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是零向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量, 特征值为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

例题 5.7 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-2,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 求 $\left|A^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right|$

例题 5.8 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量

例题 5.9 求 A 的特征值.

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$$

例题 5.10 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 2 , 又 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 和 $(A+E)X=\mathbf{0}$ 的解

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$

例题 5.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, 若 $A^3=\mathbf{0}$, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

5.3 相似矩阵、矩阵的相似对角化

5.3.1 相似矩阵的推导、定义和性质

上节课说到 V 中的一个线性变换与其矩阵一一对应，而线性变换的矩阵需要用到基来进行描述，追踪每一个向量是不现实的，我们追踪变换前后的基向量

设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\mathscr{A}$ 在 V 的另一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$; 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{P}$, 即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,P$$

由于这里是过渡矩阵，所以 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$. 从而 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 两边右乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 得

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\,\boldsymbol{P}^{-1}=[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,\boldsymbol{P}]\,\boldsymbol{P}^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

由于 $\mathscr{A}$ 分别在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 因此

$$\mathscr{A}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,\boldsymbol{A}$$
$$\mathscr{A}\,(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\,\boldsymbol{B}$$

综合上面的式子，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\,(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)&=\mathscr{A}\,[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\,\boldsymbol{P}]=[\mathscr{A}\,(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)]\,\boldsymbol{P}\\&=[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,(\boldsymbol{AP})\\&=\left[(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\,\boldsymbol{P}^{-1}\right](\boldsymbol{AP})=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right)\end{aligned}$$

笔记 上面的推导过程揭示了同一个线性变换在不同的基下的矩阵之间的关系

由此，我们引出相似矩阵的定义

定义 5.7

设 A,B 是两个 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 记作 $A\sim B$

显然相似矩阵具有对称性和传递性，即 $A\sim B\Leftrightarrow B\sim A$; 如果 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$

笔记 当 P 和 $\boldsymbol{A}$ 乘积不可交换时, $P^{-1}AP$ 不等于 A. 但是如果 A 是数量矩阵, 则任何 P 和 A 乘积可交换, 从而 $P^{-1}AP=A$, 即数量矩阵只和自己相似

定理 5.6

当 $A\sim B$ 时, 并且 $P^{-1}AP=B$, 则

1. $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$, 并且 $\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=f(\boldsymbol{B})$
2. A 可逆时 $A^{-1}\sim B^{-1}, A^*\sim B^*$. 并且 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}, P^{-1}A^*P=B^*$
3. 特征值完全相同，从而 $|A|=|B|$
4. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$
5. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式, 从而特征值完全相同. 于是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$
6. $\boldsymbol{\eta}$ 是 A 的特征向量 $\Leftrightarrow P^{-1}\boldsymbol{\eta}$ 是 B 的特征向量
7. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{D}$, 则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&0\\0&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$
8. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 则 $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B}),|f(\boldsymbol{A})|=|f(\boldsymbol{B})|$, 其中 $f(\boldsymbol{A})$ 为关于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式
9. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数 (重根重复计算) $=\mathrm{r(A)}$

笔记 注意到这里是相似的必要不充分条件（选择题常考）

例题 5.12 证明：如果两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中有一个可逆, 则 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{B}A$ 相似

5.3.2 矩阵的相似对角化

矩阵的相似来源于同一个线性变换在不同基下的矩阵，由于我们引入了特征值和特征向量的概念，自然而然的就会想到：所有特征子空间的基向量构成的向量组，能否构成整个线性空间的一组基？如果可以，线性变换在这组基下的矩阵一定是对角矩阵！（想想看为什么？）那么矩阵能否相似对角化的问题就转化为“全体特征子空间的和 (理解成所有特征子空间的所有基向量的生成子空间) 是否是整个线性空间?”

首先介绍基本概念

定义 5.8

1.n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如果就能相似于一个对角矩阵, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

2.n 维线性空间 V 上的一个线性变换 $\mathscr{A}$, 如果 V 中存在一个基使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵, 那么称 $\mathscr{A}$ 可对角化 ♣

由于线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的不同基下的矩阵是相似的, 并且相似的矩阵可以看成是 V 上同一个线性变换在 V 的不同基下的矩阵, 因此线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

现在我们来探索 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化的条件.

$\mathscr{A}$ 可对角化

$\Longleftrightarrow$ V 中存在一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使得

$$\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n=\lambda_n\alpha_n$

$\Longleftrightarrow$ V 中存在由 $\mathscr{A}$ 的特征向量组成的一个基, 此时相应的特征值为主对角元的对角矩阵是 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵

下面给出矩阵可以相似对角化的定理

定理 5.7

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 V 中存在由 $\mathscr{A}$ 的特征向量组成的一个基, 此时相应的特征值为主对角元的对角矩阵是 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵, 称它为 $\mathscr{A}$ 的标准形; 除了主对角线上元素的排列次序外, $\mathscr{A}$ 的标准形是唯一的 ♡

推论 5.1

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 此时 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 λ_i 是 α_i 所属的特征值 (即 $\mathscr{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$), $i=1,2,\cdots,n$ ♡

推论 5.2

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当

$$\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}=n$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 $\mathscr{A}$ 的全部不同的特征值

推论 5.3

$\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathscr{A}$ 的每个特征值 λ_i 的几何重数等于它的代数重数

笔记 下面对上述的定理即推论进行总结，

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，可相似对角化的几个充要条件为（下述几个条件等价）

- $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量
- $\boldsymbol{A}$ 的所有特征子空间的基构成的向量组的生成子空间就是 n 维向量空间
- 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i, 其重数 $k_i = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})$

下面给出 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 中 $\boldsymbol{P}$ 矩阵的构造方法

定理 5.8

n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 此时令

$$P = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

这里以一个简单题目作为收尾，下一节的习题课将会对相似矩阵相关题目进行全面练习

例题 5.13 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和特征向量

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化? 如能对角化, 则求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形矩阵

5.4 矩阵相似的习题课

5.4.1 对角化实现的步骤

设 A 可以对角化，步骤如下：

1. 对于 A 的每个特征值 λ_i, 求 $(A - \lambda_i E) X = 0$ 的基础解系
2. 将上面的所有基础解系合并在一起，就是 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$
3. 以它们为列向量构造矩阵 $P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, 则 $P^{-1}AP$ 就是对角矩阵, 对角线上的元素依次是 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的特征值

十星重点：这里需要特别强调一下，有关此类题目（尤其是遇到抽象矩阵），核心方法是 “用 A 左乘已知矩阵 P 将其转化为右乘 A, 即 $AP = PB$”

例题 5.14 (2016,11 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求 A^{99}

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合

例题 5.15 (2017,11 分) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$

(1) 证明 $r(\boldsymbol{A}) = 2$

(2) 设 $\boldsymbol{\beta} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解

例题 5.16 (2020,11 分) 设 A 为 2 阶矩阵, $P=(\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量

(I) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵

(II) 若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵

5.4.2 对于“各行元素之和为 c”条件的处理

由“右乘列变换”可以得到对于条件“各行元素之和为 c” $\Rightarrow(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的一个特征向量，对应的特征值为 c

例题 5.17 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 2 , 又 $\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $(A-E)X=0$ 和 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})X=0$ 的解

(1) 求 A 的特征值和特征向量

(2) 求矩阵 A

5.4.3 求可逆矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$ 但 A,B 均为非对角阵

设 A,B 同为 n 阶矩阵，并且可以相似对角化，但是均不是对角矩阵，但是题目中要求可逆矩阵 P, 使得

$$B=P^{-1}AP$$

方法：利用对角矩阵作为桥梁

因为 A,B 可对角化，则有定义，存在可逆矩阵 P_1,P_2 使得

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda$$
$$P_2^{-1}BP_2=\Lambda$$

其中, Λ 是对角矩阵即 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 从而

$$P_1^{-1}\mathrm{A}P_1=P_2^{-1}BP_2$$

整理可得

$$P_2P_1^{-1}\mathrm{A}P_1P_2^{-1}=B$$

即有

$$\left(P_1P_2^{-1}\right)^{-1}A\left(P_1P_2^{-1}\right)=B$$

所以，令 $P=P_1P_2^{-1}$ 即可满足题意

例题 5.18 (2019,11 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似

(1) 求 x,y

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$

5.4.4 典型题目

例题 5.19 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维单位列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$, 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 证明 : $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$ 相似

例题 5.20 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=0$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵

例题 5.21 A 是 4 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}, \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

例题 5.22 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=U^{-1}A^*U$. 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值和特征向量

例题 5.23 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组, 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵

例题 5.24 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$, 其中 $a\neq b$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

例题 5.25 A 是 n 阶矩阵, 数 $a\neq b$. 证明下面 3 个断言互相等价:

(1)$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$

(2)$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=n$

(3)A 相似于对角矩阵, 并且特征值满足 $(\lambda-a)(\lambda-b)=0$

5.5 内积、施密特正交化、正交矩阵、实对称矩阵的相似对角化

5.5.1 内积与正交矩阵

内积 (数量积) 运算我们在高中就已经学过

定义 5.9

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 任给 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 规定

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

这个二元实值函数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积 (通常称它为标准内积)

利用矩阵乘法，上式可以写成

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$$

性质

1. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$, (对称性)
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$, (线性性之一)
3. $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, (线性性之二)
4. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, (正定性)

笔记

1.$\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量 $\Longleftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=1$

2. 单位化：非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 乘以 $\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ 得到单位向量 $\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$, 称为把 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化

3. 如果 $(\boldsymbol{\alpha},\beta)=0$, 那么称 α 与 β 是正交的, 记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$

4.$\mathbb{R}^n$ 有了标准内积后, 称它为一个 n 维欧几里得空间，简称为欧式空间

5. 零向量与任何向量正交

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 由非零向量组成的向量组如果其中每两个向量都正交, 那么称它们为正交向量组. 仅由一个非零向量组成的向量组也是正交向量组. 如果正交向量组的每个向量都是单位向量，那么称它为正交单位向量组。

简单来说，单位正交向量组就是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的每个都是单位向量, 并且两两正交

典型的正交单位向量组就是三维空间中的 ijk

命题 5.7

正交向量组一定是线性无关的

证明

定义 5.10

n 阶矩阵 Q 称为正交矩阵, 如果它是实矩阵, 并且 $QQ^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ (即 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$)

定理 5.9

Q 是正交矩阵

$\Leftrightarrow Q$ 的列向量组是单位正交向量组.

$\Leftrightarrow Q$ 的行向量组是单位正交向量组.

有了特征值和线性变换的概念，对于正交矩阵我们有如下性质

性质

1. 正交矩阵是欧氏空间中标准正交基到标准正交基的过渡矩阵

2. 若 A 为正交矩阵, 则 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$
4. 若 A 为正交矩阵, 则 A^{T}, A^{-1} 也是正交矩阵
5. 若 A, B 为 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵
6. 正交矩阵的特征值只能是 1 或 -1

5.5.2 施密特正交化

这里直接给出公式，然后进行几何上的讲解 (上课补充)

施密特正交化是吧线性无关的向量组改造为单位正交向量组的方法

以 3 个线性无关向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为例

(1) 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\alpha_1$

(2) $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$

(3) $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2$, 此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交非零向量组

(4) 作 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}, \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}$, 则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的单位正交向量组

笔记 整个过程分成两大步：先正交化，再单位化

5.5.3 实对称矩阵的相似对角化

定义 5.11

实数域上对称矩阵简称为实对称矩阵 ♣

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则有如下性质:

性质

1. A 的特征值都是实数
2. 对 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ, 其重数 $=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})$(每个特征值的代数重数与几何重数都相等), 则一定可以相似对角化
3. A 的属于不同特征值的特征向量互相正交

笔记 已知两个向量，可以通过叉乘来构造另一个正交向量

定理 5.10

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则

- A 相似于实对角矩阵, 对角元素均为 A 的特征值
- 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1} A Q=Q^{\mathrm{T}} A Q$ 是对角矩阵 ♡

构造正交矩阵 Q 的步骤:

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
2. 对每个特征值 λ, 求 $(A-\lambda E) X=0$ 的单位正交基础解系, 合在一起得到 A 的 n 个单位正交的特征向量
3. 用它们为列向量构造正交矩阵 Q

5.5.4 典型例题

例题 5.26 设 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 证明 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$

例题 5.27 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是一组两两正交的非零向量, 证明它们线性无关

例题 5.28 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 是两个线性无关的 n 维实向量组, 并且每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_j$ 都正交, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

例题 5.29 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶正交矩阵, 它的第一行第一列位置的元素是 1 , 又设 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则方程组 $AX=\beta$ 的解为 ________

例题 5.30 构造正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角矩阵

(1)$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(2)$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

例题 5.31 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 3 , 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解

(1) 求 A 的特征值和特征向量

(2) 求作正交矩阵 Q 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$$

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $[\boldsymbol{A}-(3/2)\boldsymbol{E}]^6$

例题 5.32 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3,\boldsymbol{\eta}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$ 分别是属于 1 和 2 的特征向量, 求属于 3 的特征向量, 并且求 A

第 6 章 二次型

6.1 二次型的概念及其矩阵表示

柠宝：在讨论二次型之前，我们需要知道本章的目的是什么：建立合适的坐标系 (基向量为单位向量并且正交即坐标轴相互垂直) 以确定一个二次曲线是一个什么样的曲线，形状如何？

本节内容在讲解的时候将会利用 *GeoGebra* 进行可视化

6.1.1 二次型及二次型矩阵的定义

定义 6.1

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

其中, $a_{ij} = a_{ji}, (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 称为 n 元二次型，简称二次型

若令

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则二次型 f 可以写成矩阵的形式

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中，A 称为二次型矩阵, 因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 所以二次型矩阵为对称矩阵, 且二次型矩阵与对称矩阵一一对应，并且把矩阵 A 的秩称为二次型的秩

♣

笔记

1. 矩阵的审视角度我们多了一个角度，那就是对于一个实对称矩阵而言，背后对应一个二次型
2. 二次型的秩定义为其二次型矩阵的秩
3. 考研数学只考虑实对称矩阵

6.1.2 二次型的几何意义

不管是平面图像还是三维中的立体图像，我们总是习惯于将坐标系的原点建立在图像的几何中心处（例如圆心、球心、椭圆的中心等）。实际上，一个几何实体的形状并不会因为坐标系的建立的不同而发生改变

为了避免由于例子的复杂性带来的对于二次型理解上所造成的障碍，我们这里考虑一个及其简单的例子

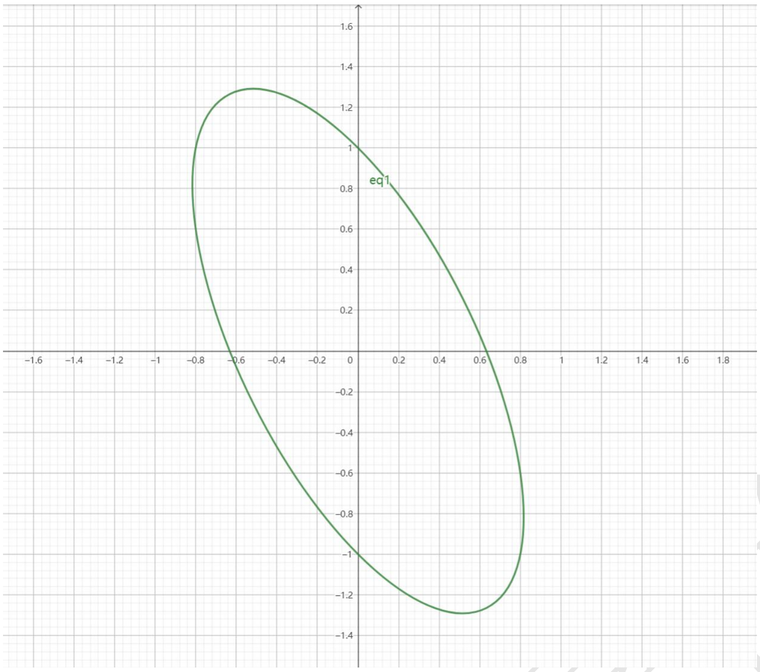
考虑一个二次曲线的方程为

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2 = 0$$

(图见**??**)

实际上，造成这个椭圆“倾斜”的原因是坐标系的选取并不合适。先说结论：在这个坐标系下，对应二次型的两个不同特征值的特征向量刚好就是这个椭圆的长轴和短轴的方向上述方程移项之后为

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$$



我们考虑等号的左边

$$f=5x^2+4xy+2y^2$$

对应的二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}5&2\\2&2\end{bmatrix}$$

由于我们已经有了过渡矩阵的概念，上述图像是放在平面直角坐标系 Oxy 中，我们的目标是找到一个合适的直角坐标系 Ox^*y^*, 使得二次曲线 S 在这个新的直角坐标系中的方程中 x^*y^* 项的系数为 0。为此，我们需要在已有的平面直角坐标系 Oxy 中引入坐标变换，假设坐标变换的公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是直角坐标系 Oxy 到直角坐标系 Ox^*y^* 的过渡矩阵. 把二次曲线 S 的方程中次项部分 $5x^2+4xy+2y^2$ 写成 $(x,y)\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 并且将二次型矩阵 A 和坐标变换公式 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$ 带入，得

$$(x^*,y^*)\,\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$$

为了使上式不出现 x^*y^* 项, 就只需要使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵. 设直角坐标系 Ox^*y^* 是把原直角坐标系 Oxy 绕原点 O 的旋转得到的, 设转角为 θ, 则坐标变换公式 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$ 中的 T 形如

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

计算得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$$

因此

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}'$$

例题 6.1 判断 $5x^2+4xy+2y^2-2=0$ 对应的二次曲线 S 是一个什么样的二次曲线

解 利用二次型的矩阵，令

$$A=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}$$

于是

$$5x^2+4xy+2y^2=(x,y)\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda-6)$, 因此 A 的全部特征值是 $1,6$

对于特征值 1, 求出 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, 单位化得 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

对于特征值 6, 求出 $(6I-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的一个基础解系 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 单位化得 $\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

令

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 因此它的属于不同特征值的特征向量是正交的. 从而 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ 正交 (这也可直接计算得出)。于是分别以它们为坐标的向量 $\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*$ 是互相垂直的。因此可以建立直角坐标系 Ox^*y^*, 其中 x^* 轴, y^* 轴的单位向量分别为 $\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*$. 原来的直角坐标系 Oxy 的 x 轴, y 轴的单位向量记作 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. 则

$$(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

从而直角坐标系 Oxy 到直角坐标系 Ox^*y^* 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{T}$. 因此坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$$

设从 x 轴正向到 x^* 轴正向的转角为 θ, 则 $\vec{e}_1^*$ 的坐标为 $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$, 从而

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

因此 $T'=T^{-1}$. 于是 S 在 Ox^*y^* 中的方程的二次项部分为

$$(x^*,y^*)\,T'AT\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=(x^*,y^*)\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}=x^{*2}+6y^{*2}$$

从而 S 在 Ox^*y^* 中的方程为

$$x^{*2}+6y^{*2}-2=0$$

即

$$\frac{x^{*2}}{2}+\frac{y^{*2}}{\frac13}=1$$

由此看出, S 是椭圆, 它的长轴在 x^* 轴上, 短轴在 y^* 轴上, 长半轴长为 $\sqrt2$, 短半轴长为 $\frac{\sqrt3}{3}$

总结：
为了使得整个章节的叙述更为流畅，我们引入保距变换的概念

定义 6.2 (保距变换)

设 X, Y 是两个度量空间 (这里是两个线性空间)，其中的距离分别是 d_X 和 d_Y 一个映射 $f: X \to Y$ 被称为"保距映射"，如果对任意的 $a, b \in X$ ，都有

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$$

容易得到：在欧几里得空间中，平移变换、旋转变换、反射变换以及它们的复合都是等距同构 ♣

笔记

1. 保距变换一定是一个线性变换
2. 所谓"保距变换"，就是在变换前的任意两个点的距离在变换后保持相等
3. 常见的保距变换有：平移、旋转、反射 (比如镜子里的你和现实中的你一样高)
4. "非保距变换"有：伸缩、非线性变换 (比如将一个扁的气球吹涨)
5. 本章后面讲的"合同变换"，本质上就是一种保距变换，目的是找到合适的坐标系使得二次型对应的图像的每个"轴"刚好与坐标系"共线"

6.1.3 有关二次型的几个概念

定义 6.3 (标准二次型)

只含有平方项不含交叉项的二次型，即形如

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2 + \cdots + l_n x_n^2$$

称为标准二次型 ♣

定义 6.4 (可逆线性变换)

设 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}$ 为可逆的矩阵, 称 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$ 为可逆的线性变换，若 P 为正交矩阵, 称 $X = PY$ 为正交变换, 正交变换是一种特殊的可逆线性变换 ♣

笔记 在对二次型进行标准化和规范化的过程当中，必须保证每一次的变换都是可逆的

定义 6.5 (二次型的标准化)

设 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为一个二次型, 若经过可逆的线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$ 把二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \overset{\boldsymbol{X}=P Y}{=} \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{Y} = l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + \cdots + l_m y_m^2$$

称为二次型的标准化 ♣

、

定义 6.6

系数为 1 和 -1 的标准二次型称为规范二次型，它的矩阵是规范对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{E}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它由阶数 n 和 p,q 决定 (p,q 的意义就是正负惯性指数）♣

笔记

1. 任何一个二次型矩阵都是唯一的，且任何二次型的矩阵都是对称矩阵

2. 非标准二次型的矩阵是对称矩阵但不是对角矩阵.

3. 二次型是标准二次型的充分必要条件是其矩阵是对角矩阵

4. 二次型的标准化等价于将二次型的矩阵对角化

5. 二次型的规范形和标准形一般来说是不唯一的，但是对应的规范形的非零平方项的个数唯一（等于其矩阵的秩）

下一节将会介绍化二次型为标准型、规范形的方法，本节内容只对二次型的概念作介绍

6.2 化二次型为标准形、规范形、矩阵的合同

6.2.1 二次型的标准化——配方法

柠宝：配方法的核心在于一次处理一个变量

例题 6.2 用配方法化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3+x_1\right)^2$ 为标准形

解

$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,x_3\right) &= \left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3+x_1\right)^2 \\ &= 2{x_1}^2+2{x_2}^2+2{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1+\frac{1}{2}\left(x_2+x_3\right)\right]^2+\frac{3}{2}{x_2}^2+\frac{3}{2}{x_3}^2-3x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1+\frac{1}{2}\left(x_2+x_3\right)\right]^2+\frac{3}{2}\left(x_2-x_3\right)^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+\frac{1}{2}\left(x_2+x_3\right) \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 则可将原二次型化为标准形

$$f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$$

错解：本题切不可令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3+x_1 \end{cases}$，想当然地将二次型化为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，所以 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3+x_1 \end{cases}$ 不是可逆的线性变换

笔记 利用配方法化二次型为标准形时，所作的线性变换一定要是可逆的

例题 6.3 用配方法化下列二次型为标准型

(1)$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

(2)$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

解 (1)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3 \\
&= \left[x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+(x_2-x_3)^2\right]-(x_2-x_3)^2+2x_2^2+2x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3-x_3^2 \\
&= (x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2-5x_3^2 \\
&= (x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2-5x_3^2.
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$ 原二次型化为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$

从上面的公式反解 (可以通过逆矩阵实现) 得到变换公式

$$
\begin{cases} x_1=y_1-y_2+3y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}
$$

从而变换矩阵为

$$
\begin{cases} x_1=y_1-y_2+3y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}
$$

(2) 这个二次型没有平方项，先作一次变换 (套路解法)

$$
\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}
$$

此时 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3$

虽然所得新二次型还不是标准的,但是有平方项了,可以进行配方了

$$
y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2
$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3, \\ y_2=z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases}$ 则

$$
f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2
$$

变换公式为

$$
\begin{cases} x_1=z_1+z_2-z_3, \\ x_2=z_1-z_2-z_3, \\ x_3=z_3. \end{cases}
$$

变换矩阵为

$$
C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

笔记

配方法与正交变换相比较计算量要小得多,在不指定用正交变换时一般都可用配方法。配方法的另一个优点是可以用它把二次型规范化。如 (1) 中 $y_3=x_3$ 改设为 $y_3=\sqrt{5}x_3$，则化得的二次型为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$,是规范二次型

6.2.2 二次型的标准化——正交变换法

方法：对二次型的矩阵 A, 作正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 是对角矩阵, 于是可逆线性变量替换 $X=QY$, 把原二次型化为标准二次型。

以上变换中的变换矩阵 Q 是正交矩阵，所以称为正交变换

但是由于 $A=Q^{-1}AQ$ 和 A 相似, 其对角线上的元素是 A 特征值, 因此一般地它只是对角矩阵, 不是规范对角矩阵。所以正交变换法只是将二次型标准化, 而不是规范化

下面给出正交变换法的详细步骤:

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$
2. 由 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$, 求出 λ_i 对应的线性无关的特征向量 $(1\leqslant i\leqslant n)$
3. 将线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 进行施密特正交化及单位化得 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$, 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 则 Q 是正交矩阵, 且 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$
4. 作正交变换将二次型化为标准形, 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=QY}{=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\left(Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

笔记 由于正交矩阵必定是可逆矩阵，所以这里变换前后的矩阵必然相似，从而可以利用相似矩阵的各种性质

例题 6.4 已知二次型 $2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 可用正交变换化为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求 a 和所作正交变换

解

原二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和化出二次型的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=10$. 而 $|\boldsymbol{A}|=2\left(9-a^2\right)$, 得 $a^2=4,a=2$

$\boldsymbol{A}$ 和 B 的特征值相同, 为 $1,2,5$. 对这 3 个特征值求单位特征向量

对于特征值 1 :

$$A-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $(A-E)X=0$ 的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_2+x_3=0,\end{cases}$$

得属于 1 的一个特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

对于特征值 2:

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的同解方程组

$$\begin{cases}x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

得属于 2 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$

对于特征值 5:

$$A-5E=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $(\boldsymbol{A}-5E)X=0$ 的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$$

得属于 5 的一个特征向量 $\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\gamma_3=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

令 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 则正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 把原二次型化为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

例题 6.5 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$, 已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$. 则下列各标准二次型

(1) $2y_1^2+2y_2^2$.

(2) $2y_1^2$.

(3) $2y_1^2+2y_3^2$.

(4) $2y_2^2+2y_3^2$

中可用正交变换化为 f 的是 ( )

(A) (1).

(B) (3), (4).

(C) (1), (3), (4).

(D) (2)

6.2.3 矩阵的合同

定义 6.7

两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同

设 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}$ 为两个二次型, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$, 称二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}$ 合同 ♣

定理 6.1

两个二次型可以用可逆线性变量替换互相转化的充分必要条件为它们是矩阵合同 ♡

笔记 合同是特殊的相似

下面给出惯性定理和矩阵合同的判定方法

定理 6.2 (惯性定理)

二次型的标准形系数中正系数、负系数的个数是保持不变的. 其中正系数的个数称为二次型的正惯性指数, 负系数的个数称为二次型的负惯性指数。正负惯性指数的和为二次型矩阵的秩 ♡

定理 6.3 (矩阵合同的判定定理)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}$ 正、负惯性指数相同
2. 设 A,B 是两个实对称矩阵, 则 $A\cong B$ 的充分必要条件是 A,B 的特征值中正、负特征值个数相等 ♡

笔记 合同一定相似, 相似不一定合同

6.2.4 典型题目

例题 6.6 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3,(b>0)$$

其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12

(1) 求 a,b

(2) 用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型

例题 6.7 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2

(1) 求 a

(2) 求作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

例题 6.8 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}$ 在正交变换 $X=QY$ 下化为 $10y_1^2-4y_2^2-4y_3^2$，Q 的第 1 列为 $\left(\frac{\sqrt{14}}{14},2\frac{\sqrt{14}}{14},3\frac{\sqrt{14}}{14}\right)^{\mathrm{T}}$

(1) 求 A

(2) 求一个满足要求的正交矩阵 Q

例题 6.9 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&2\\0&2&-2\end{bmatrix}$，求作一个 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵

例题 6.10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 既合同又相似.

(B) A 与 B 合同但不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不合同但相似.

(D) A 与 B 既不合同又不相似.

6.3 正定二次型、正定矩阵

6.3.1 正定二次型和正定矩阵的概念和性质

定义 6.8

如果实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，对任意一组不全为零的实数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，都有 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则称该二次型为正定二次型，正定二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵 ♣

命题 6.1

合同变换不改变二次型的正定型 ♠

定理 6.4 (正定二次型的判定定理)

实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件是以下条件之一成立：

(1) 正惯性指数为 n；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零；

(4) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$；

(5) 存在正交矩阵 Q, 使 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = Q^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$

(6)$\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵

笔记

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $k\boldsymbol{A}(k > 0), \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则有 $|\boldsymbol{A}| > 0$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上元素 $a_{ii} > 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$

6.3.2 典型例题

例题 6.11 已知 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 证明 $|A + E| > 1$

例题 6.12 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

当 λ 满足什么条件时 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定?

例题 6.13 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 实矩阵, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = n$, 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 正定

例题 6.14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 实矩阵, 证明: $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = n$

例题 6.15 (2021,12 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(1) 求正交矩阵 P, 使得 $P^T AP$ 为对角矩阵

(2) 求正定矩阵 C, 使得 $C^2 = (a + 3)E - A$

第三部分

概率论与数理统计

第 1 章 随机事件与概率

内容提要

- 第一节 随机事件及其运算
- 第二节 概率、条件概率、事件独立性和五大公式
- 第三节 古典概型、几何概型、伯努利试验

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象与随机试验

在一定的条件下, 并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**如抛一枚硬币与掷一颗骰子. 随机现象有两个特点:

1. 结果不止一个.
2. 哪一个结果出现, 人们事先并不知道.

只有一个结果的现象称为**确定性现象**. 例如, 每天早晨太阳从东方升起; 一个口袋中有十只完全相同的白球, 从中任取一支必然为白球.

例题 1.1 随机现象的例子

1. 抛一枚硬币, 有可能正面朝上, 也有可能反面朝上;
2. 掷一颗骰子, 出现的点数;
3. 一天内进入某超市的顾客数;
4. 某种型号电视机的寿命;
5. 测量某物理量(长度、直径等)的误差.

在相同条件下可以重复的随机现象又称为**随机试验**. 也有很多随机现象是不能重复的, 例如某场足球赛的输赢是不能重复的, 某些经济现象(如失业、经济增长速度等)也不能重复. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象, 但也十分注意研究不能重复的随机现象.

1.1.2 样本空间

随机现象的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**, 记为 $\Omega = \{\omega\}$, 其中 ω 表示基本结果, 又称为**样本点**. 样本点是今后抽样的最基本单元. 认识随机现象首先要列出它的样本空间.

例题 1.2 下面给出例 1.1 中随机现象的样本空间.

1. 抛一枚硬币的样本空间为: $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, 其中 ω_1 表示正面朝上, ω_2 表示反面朝上.
2. 掷一颗骰子的样本空间为: $\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, 其中 ω_i 表示出现 i 点, $i = 1, 2, \ldots, 6$. 也更直接明了地记此样本空间为: $\Omega_2 = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

笔记

1. 样本空间的本质是样本点的集合, 即本质是一个集合
2. 样本空间可能是一个无限集, 例如某天去淄博吃烧烤"赴淄赶烤"的人数为正整数; 灯泡的使用寿命
3. 样本空间中的元素可以是数也可以不是数.
4. 样本空间至少有两个样本点, 含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.
5. 从样本空间含有样本点的个数来区分, 样本空间可分为有限与无限两类, 譬如以上样本空间 Ω_1 和 Ω_2 中样本点的个数为有限个, 而 Ω_3、Ω_4 及 Ω_5 中样本点的个数为无限个. 但 Ω_3 中样本点的个数为可列个, 而 Ω_4 和 Ω_5 中的元素个数为不可列无限个. 在以后的数学处理上我们往往将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一

类, 称为离散样本空间. 而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类, 称为连续样本空间. 由于这两类样本空间有着本质上的差异, 故分别称呼之.

1.1.3 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**, 等价说法为样本空间的子集就是为**随机事件**简称**事件**, 常用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示. 如在掷一颗骰子中, $A =$ “出现奇数点” 是一个事件, 即 $A = \{1, 3, 5\}$.

在以上事件的定义中, 要注意以下几点.

1. 任一事件 A 是相应样本空间的一个子集. 在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω, 用其中一个圆或其他几何图形表示事件 A, 见图 1.1, 这类图形称为**维恩（Venn）图**.
2. 当子集 A 中某个样本点出现了, 就说事件 A 发生了, 或者说事件 A 发生当且仅当 A 中某个样本点出现了.
3. 事件可以用集合表示, 也可用明白无误的语言描述.
4. 由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**, 而样本空间 Ω 的最大子集（即 Ω 本身）称为**必然事件**, 样本空间 Ω 的最小子集（即空集 $\varnothing$）称为不可能事件.

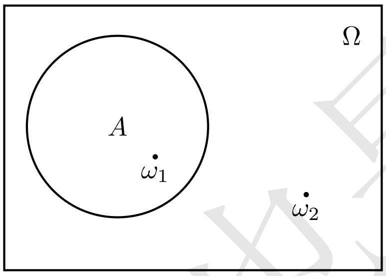


图 1.1: 维恩图

例题 1.3 掷一颗骰子的样本空间为: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

事件 $A =$ “出现 1 点”, 它由 Ω 的单个样本点 “1” 组成.

事件 $B =$ “出现偶数点”, 它由 Ω 的三个样本点 “2, 4, 6” 组成.

事件 $C =$ “出现的点数小于 7”, 它由的全部样本点 “1, 2, 3, 4, 5, 6” 组成, 即必然事件 Ω.

事件 $D =$ “出现的点数大于 6”, Ω 中任一样本点都不在 D 中, 所以 D 是空集, 即不可能事件 $\emptyset$.

1.1.4 随机变量

用来表示随机现象结果的变量称为**随机变量**, 常用大写字母 X, Y, Z 表示. 很多事件都可用随机变量表示, 表示时应写明随机变量的含义.

例题 1.4 掷一颗骰子, 出现的点数是一个随机变量, 记为 X. 则事件 “出现 3 点” 可用 “$X = 3$” 表示, 事件 “出现的点数不小于 3” 可用 “$X \geq 3$” 表示. 又如 “$X < 3$” 表示事件 “出现点数小于 3”.

掷两颗骰子的样本空间为

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,6) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (6,1) & (6,2) & \ldots & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Ω 共有 36 个样本点, 若记 X 与 Y 分别为第一与第二颗骰子出现的点数, 则 X 与 Y 均可取值: 1, 2, 3, 4, 5, 6. 而事件 “点数之和等于 5” 可表示成

$$X + Y = 5 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}.$$

另外事件 “$\max(X, Y) = 6$” 表示事件 “最大点数为 6”, 它含有

$$(1,6), (6,1), (2,6), (6,2), (3,6), (6,3), (4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)$$

共 11 个样本点.

例题 1.5 检查 10 件产品, 其中不合格品数 X 是一个随机变量, 它可以取值 $0, 1, \ldots, 10$. 则事件"不合格品数不多于 1 件"可用"$X \leq 1$"来表示. 而"$X > 2$"表示事件"不合格品数超过 2 件".

在不少场合, 用随机变量表示事件较为简洁明了. 这样一来, 事件有三种表示法:

1. 用集合表示.
2. 用语言表示, 但语言要明白无误.
3. 用随机变量表示.

在实际问题中, 哪一种表示法方便就用哪一种.

1.1.5 事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω（即同一个随机现象）中进行. 事件间的关系与集合间关系一样主要有以下几种:

1.1.5.1 包含关系

如果属于 A 的样本点必属于 B, 则称 A 被包含在 B 中（见图 1.2）, 或称 B 包含 A, 记为 $A \subset B$, 或 $B \supset A$. 用概率论的语言说: 事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

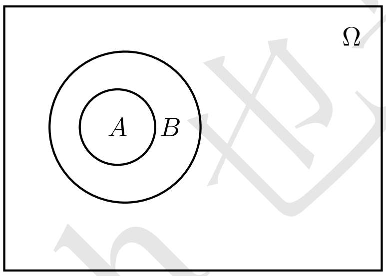


图 1.2: $A \subset B$

譬如掷一颗骰子, 事件 $A =$"出现 4 点"的发生必然导致事件 $B =$"出现偶数点"的发生, 故 $A \subset B$.

又如电视机的寿命 T 超过 10000h（记为事件 $A = \{T > 10000\}$）和 T 超过 2000h（记为事件 $B = \{T > 20000\}$）, 则 $A \supset B$, 见图 1.3.

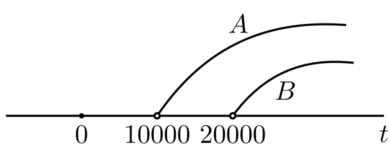


图 1.3: $\{T > 10000\} \supset \{T > 20000\}$

对任一事件 A, 必有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

1.1.5.2 相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足: 属于 A 的样本点必属于 B, 而且属于 B 的样本点必属于 A, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

从集合论观点看, 两个事件相等就意味着这两事件是同一个集合. 下例说明: 有时不同语言描述的事件也可能是同一件事.

例题 1.6

1. 掷两颗骰子, 以 A 记事件 “两颗骰子的点数之和为奇数” , 以 B 记事件 “两颗骰子的点数为一奇一偶” . 很容易证明: A 发生必然导致 B 发生, 而且 B 发生也必然导致 A 发生, 所以 $A = B$.
2. 口袋中有 a 只黑球, b 只白球（a 与 b 都大于零）, 从中不返回地一只一只摸球. 以 A 记事件 “最后摸出的几个球全是黑球” , 以 B 记事件 “最后摸出的一只球是黑球” . 对于此题粗看好像是 $A \neq B$, 但只要设想将球全部摸完为止, 则明显有: A 发生必然会导致 B 发生, 即 $A \subset B$; 反之注意到事件 A 中所述的 “几个” 最少是 1 只, 也可以是 2 只, $\cdots$, 最多为 a 只, 则 B 发生时 A 也必然会发生（对于这点请读者仔细体会）, 即 $B \subset A$, 由此得 $A = B$.

1.1.5.3 互不相容

如果 A 与 B 没有相同的样本点（见图 1.4）, 则称 A 与 B 互不相容. 用概率论的语言说: A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

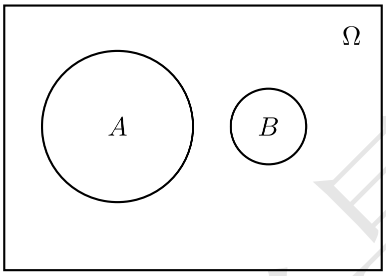


图 1.4: A 与 B 互不相容

如在电视机寿命试验中, “寿命小于 1 万小时” 与 “寿命大于 5 万小时” 是两个互不相容的事件, 因为它们不可能同时发生.

1.1.6 事件运算

事件的运算与集合的运算相当, 有并、交、差和余等四种运算.

1.1.6.1 事件 A 与 B 的并

记为 $A \cup B$. 其含义为 “由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件”（见图 1.5）. 或用概率论的语言说: “事件 A 与 B 中至少有一个发生” .

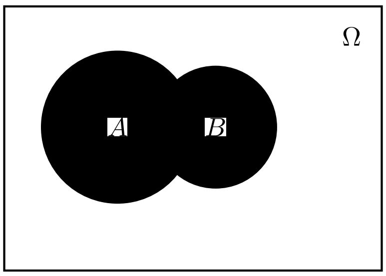


图 1.5: A 与 B 的并

如在掷一颗骰子的试验中, 记事件 A = “出现奇数点” = $\{1, 3, 5\}$, 记事件 B = “出现的点数不超过 3” = $\{1, 2, 3\}$, 则 A 与 B 的并为 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

1.1.6.2 事件 A 与 B 的交

记为 $A \cap B$, 或简记为 AB. 其含义为“由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件”(见图 1.6)). 或用概率论的语言说:“事件 A 与 B 同时发生”.

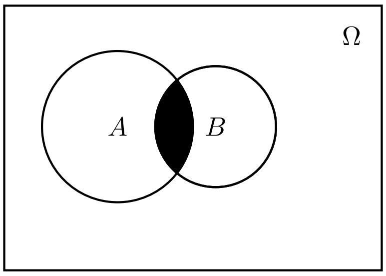


图 1.6: A 与 B 的交

如在掷一颗骰子的试验中, 记事件 A = “出现奇数点” = $\{1,3,5\}$, 记事件 B = “出现的点数不超过 3” = $\{1,2,3\}$, 则 A 与 B 的交为 $AB = \{1,3\}$.

若事件 A 与 B 为互不相容, 则其交必为不可能事件, 即 $AB = \emptyset$, 反之亦然. 这表明: $AB = \emptyset$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件.

事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件, 譬如有事件 $A_1, A_2, \ldots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 称为有限并; $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ 称为可列并; $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 称为有限交; $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ 称为可列交.

1.1.6.3 事件 A 对 B 的差

记为 $A - B$, 其含义为“由事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的新事件”(见图 1.9). 或用概率论的语言说:“事件 A 发生而 B 不发生”.

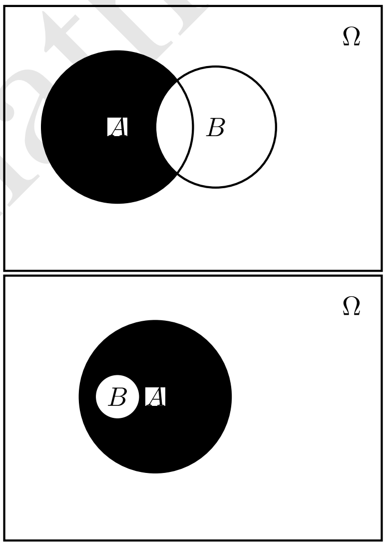


图 1.9

如在掷一颗骰子的试验中, 记事件 A = “出现奇数点” = $\{1,3,5\}$, 记事件 B = “出现的点数不超过 3” = $\{1,2,3\}$, 则 A 对 B 的差为 $A - B = \{15\}$.

若设 X 为随机变量, 则有

$$\{X = a\} = \{X \leq a\} - \{X < a\}, \quad \{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.$$

1.1.6.4 对立事件

事件 A 的对立事件, 记为 $\overline{A}$, 即 “由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件”(见图 1.10), 或用概率论的语言说: “A 不发生”, 即 $\overline{A}=\Omega-A$. 注意, 对立事件是相互的, 即 A 的对立事件是 $\overline{A}$, 而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A, 即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\emptyset$ 互为对立事件, 即 $\overline{\Omega}=\emptyset, \overline{\emptyset}=\Omega$.

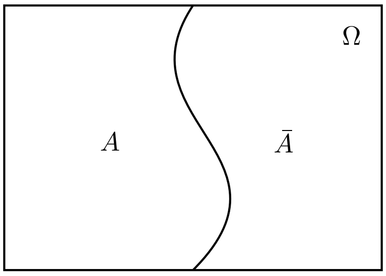


图 1.10: A 的对立事件 $\overline{A}$

如在掷一颗骰子的试验中, 事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1,3,5\}$ 的对立事件是 $\overline{A}=\{2,4,6\}$, 事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1,2,3\}$ 的对立事件是 $\bar{B}=\{4,5,6\}$.

A 与 B 互为对立事件的充要条件是: $A\cap B=\emptyset$, 且 $A\cup B=\Omega$.

此性质也可作为对立事件的另一种定义, 即如果事件 A 与 B 满足: $A\cap B=\emptyset$, 且 $A\cup B=\Omega$, 则称 A 与 B 互为对立事件, 记为 $\overline{A}=B, \overline{B}=A$.

例题 1.7 从数字 $1,2,\cdots,9$ 中可重复地任取 n 次 ($n\geq 2$), 以 A 表示事件 “所取的 n 个数字的乘积能被 10 整除”. 因为乘积能被 10 整除必须既取到数字 5, 又要取到偶数. 所以 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为 “所取的 n 个数字中或者没有 5, 或者没有偶数”. 如果记 $B=$ “所取的 n 个数字中没有 5”, $C=$ “所取的 n 个数字中没有偶数”, 则 $\overline{A}=B\cup C$.

例题 1.8 设 A、B、C 是某个随机现象的三个事件, 则

1. 事件 “A 与 B 发生, C 不发生” 可表示为: $AB\overline{C}$.
2. 事件 “A、B、C 中至少有一个发生” 可表示为: $A\cup B\cup C$.
3. 事件 “A、B、C 中至少有两个发生” 可表示为: $AB\cup AC\cup BC$.
4. 事件 “A、B、C 中恰好有两个发生” 可表示为: $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$.
5. 事件 “A、B、C 同时发生” 可表示为: ABC.
6. 事件 “A、B、C 都不发生” 可表示为: $\overline{ABC}$.
7. 事件 “A、B、C 不全发生” 可表示为: $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

1.1.6.5 事件的运算性质

1. 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA \tag{1.1}$$

2. 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \tag{1.2}$$

$$(AB)C=A(BC). \tag{1.3}$$

3. 分配律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \tag{1.4}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{1.5}$$

4. 对偶律（德莫根公式）

$$\text{事件并的对立等于对立的交:}\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \tag{1.6}$$

$$\text{事件交的对立等于对立的并:}\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{1.7}$$

1.1.7 典型例题

例题 1.9 设 A、B、C 为三事件, 试表示下列事件:

1. A、B、C 都发生或都不发生;
2. A、B、C 中不多于一个发生;
3. A、B、C 中不多于两个发生;
4. A、B、C 中至少有两个发生.

例题 1.10 请指明以下事件 A 和 B 间的关系:

1. 检查两件产品, 记事件 $A=$ “至少有一件不合格产品”, $B=$ “两次检查结果不同”.
2. 设 T 表示轴承寿命, 记事件 $A=T>5000h$, $B=T>8000h$.

例题 1.11 设 X 为随机变量, 其样本空间为 $\Omega=\{0\leq T\leq 2\}$, 记事件 $A=\{0.5<X\leq 1\}$, $B=\{0.25\leq X<1.5\}$. 写出下列事件:

1. $\overline{A}B$,
2. $\overline{A}\cup B$,
3. $\overline{AB}$,
4. $\overline{A\cup B}$.

1.2 概率、条件概率、事件独立性和五大公式

上一节中我们引入了事件及其运算，本节内容正式引入概率。

1.2.1 概率的定义

不同的教材对于概率的定义有些许区别，这里我们采用公理化的定义

定义 1.1 (概率的公理化定义)

设 Ω 为一个样本空间, $\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的一个事件域. 如果对任一事件 $A\in\mathscr{F}$, 定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足:

1. 非负性公理: 若 $A\in\mathscr{F}$, 则 $P(A)\geqslant 0$;
2. 正则性公理: $P(\Omega)=1$;（部分教材也称为规范性）
3. 可列可加性公理: 若 $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$, 互不相容, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P\left(A_i\right)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率, 称三元素 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$ 为概率空间

♣

概率的公理化定义刻画了概率的本质, 概率是集合 (事件) 的函数, 若在事件域 $\mathscr{F}$ 上给出一个函数, 当这个函数能满足上述三条公理, 就被称为概率; 当这个函数不能满足上述三条公理中任一条, 就被认为不是概率.

1.2.2 扫盲部分：排列与组合公式

考虑到部分同学高中是文科生，或者大学没学过概率论或者是专升本上来的同学，这里介绍一下高中理科生应该掌握的排列与组合相关内容，如果熟悉的可以跳过此部分。

排列是要求元素之间的顺序的，组合是不要求出现的次序。

排列与组合都是计算“从 n 个元素中任取 r 个元素”的取法总数公式, 其主要区别在于: 如果不讲究取出元素间的次序, 则用组合公式, 否则用排列公式；而所谓讲究元素间的次序, 可以从实际问题中得以辨别, 例如两个人相互握手是不讲次序的, 而两个人排队是讲次序的, 因为“甲右乙左”与“乙右甲左”是两件事.

【计数原理】

排列与组合公式的推导都基于如下两条计数原理:

1. 乘法原理: 如果某件事经 k 个步骤才能完成, 做第一步有 m_1 种方法, 做第二步有 m_2 种方法, $\cdots$, 做第 k 步有 m_k 种方法. 那么完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \mathrm{m}_k$ 种方法. 譬如, 甲城到乙城有 3 条旅游线路, 由乙城到丙城有 2 条旅游线路, 那么从甲城经乙城去丙城共有 $3 \times 2 = 6$ 条旅游线路.
2. 加法原理: 如果某件事可由 k 类不同途径之一去完成, 在第一类途径中有 m_1 种完成方法, 在第二类途径中有 m_2 种完成方法, ... 在第 k 类途径中有 m_k 种完成方法, 那么完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种方法. 譬如, 由甲城到乙城去旅游有三类交通工具: 汽车、火车和飞机. 而汽车有 5 个班次, 火车有 3 个班次, 飞机有 2 个班次, 那么从甲城到乙城共有 $5 + 3 + 2 = 10$ 个班次供旅游者选择.

【排列与组合的定义及计算公式】

1. 排列: 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素排成一列 (考虑元素先后出现次序), 称此为一个排列, 此种排列的总数记为 A_n^r, 按乘法原理, 取出的第一个元素有 n 种取法, 取出的第二个元素有 $n-1$ 种取法... 取出的第 r 个元素有 $n-r+1$ 种取法, 所以有
$$A_n^r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r!)}$$
若 $r = n$, 则称为全排列, 显然全排列 $A_n^n = n!$
2. 重复排列: 从 n 个不同元素中每次取出一个, 放回后再取下一个, 如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列, 此种重复排列数共有 n^r 个. 注意这里的 r 允许大于 n.
3. 组合: 从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素并成一组 (不考虑元素间的先后次序), 称此为一个组合, 此种组合的总数记为 $\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)$ 或 C_n^r. 按乘法原理此种组合的总数为
$$\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right) = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
在此规定 $0! = 1$ 与 $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1$
4. 重复组合: 从 n 个不同元素中每次取出一个, 放回后再取下一个, 如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合, 此种重复组合总数为 C_{n+r-1}^r. 注意这里的 r 也允许大于 n.

笔记 上述四种排列组合及其总数计算公式，在确定概率的古典方法中经常使用，但在使用中要注意识别有序与无序、重复与不重复。

1.2.3 条件概率

理解条件概率的关键在于“信息的获取”。

比如现在有一次抽奖活动，一共 100 人参加，只有一个人获奖，每个人都有一个奖票，刮开图层就能知道是否获奖。假设张三手里拿着一张奖票，但是没有刮开图层，那么就有如下两种情况：

- 每个人都没有刮开图层的情况下，每个人中奖的概率都是 1%
- 张三在得知旁边的某个人刮开图层后没中奖，那么此时张三的中奖概率就是 $\frac{1}{99}$，会发现此时概率提高了，原因在于获取了“有用的信息”

下面给出条件概率的定义

定义 1.2

设 A,B 是两个事件，且 $\boldsymbol{P}(A)>0$，则称在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为条件概率，记为 $\boldsymbol{P}(B\mid A)$，并定义

$$\boldsymbol{P}(B\mid A)=\frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(A)}\quad(\boldsymbol{P}(A)>0)$$

♣

笔记

1. 条件概率 $\boldsymbol{P}(\cdot\mid A)$ 也是一种概率，概率的一切性质和重要结论对条件概率都适用。设 $P(B)>0$，则

- $P(A\mid B)\geqslant 0$
- $P(\Omega\mid B)=1$
- 若 $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\mid B\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(A_n\mid B\right)$$

2. 注意表述"在 A 发生的条件下 B 发生的概率"，主语是 B，所以事件 $C=B\mid A$ 的对立事件为 $\bar{C}=\bar{B}\mid A$

3. 计算条件概率的方法：

- 在整个样本空间 Ω 中计算 $\boldsymbol{P}(AB)$ 及 $\boldsymbol{P}(A)$，再按条件概率的定义式求得 $\boldsymbol{P}(B\mid A)$
- 缩小样本空间：注意到，在求 $\boldsymbol{P}(B\mid A)$ 时已知事件 A 已发生，样本空间 Ω 中所有不属于 A 的样本点都被排除，原有的样本空间 Ω 缩减成为 $\Omega'=A$. 在缩减了的样本空间 $\Omega'=A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $\boldsymbol{P}(B\mid A)$. 比如刚刚中奖的例子中，已知一个人没有中奖，剩下的99 个人的中奖情况就是缩小之后的样本空间。

1.2.4 事件的独立性

1.2.5 概率的基本性质

1. $P(\varnothing)=0$
2. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥（互不相容），则有

$$\boldsymbol{P}\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)=\boldsymbol{P}\left(A_1\right)+\boldsymbol{P}\left(A_2\right)+\cdots+\boldsymbol{P}\left(A_n\right)$$

3. $P(\bar{A})=1-P(A)$
4. $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$
5. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

笔记 注意由概率的关系得不到事件的关系，例如概率为零得不到事件为不可能事件，换句话说，概率为 0 的事件也有可能发生，概率为 1 的事件也有可能不发生！

1.2.6 概率的五大公式（十星重点）

1. 加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2. 减法公式：

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

3. 乘法公式：当 $P(A)>0$ 时，

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

4. 全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组，则对任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \mid B_i\right)$$

5. 贝叶斯公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组，则对任意事件 A，且 $P(A)>0$，有

$$P\left(B_j \mid A\right)=\frac{P\left(B_j\right) P\left(A \mid B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \mid B_i\right)}, j=1,2, \cdots, n$$

1.2.7 事件的独立性

人类天生就对概率的处理有所欠缺，所以有关事件的独立性，一定要用定义来进行验证，不要想当然的凭直觉做题

这里有关事件的独立性是完全基于概率值来定义的，也就是说有且仅有独立性这一种情况下，概率的确定能得到事件间独立性的关系

考研重点考察两个事件以及三个事件的独立性

两个事件之间的独立性是指: 一个事件的发生不影响另一个事件的发生. 这在实际问题中是很多的, 譬如在掷两颗骰子的试验中, 记事件 A 为“第一颗骰子的点数为 1 ”, 记事件 B 为“第二颗骰子的点数为 4 ”. 则显然 A 与 B 的发生是相互不影响的.

另外, 从概率的角度看, 事件 A 的条件概率 $P(A \mid B)$ 与无条件概率 $P(A)$ 的差别在于: 事件 B 的发生改变了事件 A 发生的概率, 也即事件 B 对事件 A 有某种“影响”. 如果事件 B 的发生对事件 A 的发生毫无影响, 即有 $P(A \mid B)=P(A)$. 由此又可推出 $P(B \mid A)=P(B)$, 即事件 A 发生对 B 也无影响, 可见独立性是相互的, 它们都等价于

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

另外对 $P(B)=0$, 或 $P(A)=0$, 上式仍然成立. 为此, 我们用 (1.5.1) 式作为两个事件相互独立的定义.

定义 1.3

设 A, B 两个事件满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

称 A 与 B 独立

笔记

1. 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 $\bar{B}$ 独立; $\bar{A}$ 与 B 独立; $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立
2. 0 概率事件与任意事件独立, 从而不可能事件与任意时间独立
3. 这里的独立是纯代数上的定义，意味着一个事件的发生与否都不改变另一个事件发生的概率。并不是意味着两个事件毫无关系。反过来，两个毫无关系的事件很明显是独立的
4. 设 $P(A)>0, P(B)>0$, 这种情况下两者独立的充要条件为
$$P(B \mid A)=P(B) \text{ 或} P(A \mid B)=P(A)$$
5. 无论事件 B 与事件 A 是否有关系，但事件 A 发生与否都不影响事件 B 发生的概率
6. 独立和互斥没有蕴涵关系；若 A 与 B 既独立有互斥，则至少有一个为零概率事件（不是不可能事件）
7. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立;$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立 $\neq A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

8. 设 A, B, C 是三个事件, 如果有

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$$

则称 A, B, C 两两独立. 若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 相互独立

作为补充，这里介绍 n 个事件相互独立的定义：（超纲）

定义 1.4

设有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 对任意的 $1 \leqslant i < j < k \cdots \leqslant n$, 如果以下等式均成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \end{cases}$$

则称此 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

♣

1.2.8 典型例题

例题 1.12 设 A, B, C 三事件相互独立, 试证 $A \cup B$ 与 C 相互独立

证明 因为

$$\begin{aligned} P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A \cup B)P(C) \end{aligned}$$

所以 $A \cup B$ 与 C 相互独立

例题 1.13 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1$, 则 (　　)

(A) 事件 A 与 B 互不相容

(B) 事件 A 与 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立

(D) 事件 A 和 B 相互独立

例题 1.14 设 A, B, C 三个事件两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是 (　　)

(A) A 与 BC 独立

(B) AB 与 $A \cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立

(D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立

例题 1.15 已知 $\boldsymbol{P}(A) = 0.5, \boldsymbol{P}(B) = 0.6, \boldsymbol{P}(B \mid A) = 0.8$, 求 $\boldsymbol{P}(A \cup B)$ 和 $\boldsymbol{P}(B \mid \bar{A})$

例题 1.16 某人衣袋中有两枚硬币, 一枚是均匀的, 另一枚两面都是正面.

(I) 如果他随机取一枚抛出, 结果出现正面, 则该枚硬币是均匀的概率为 ____

(II) 如果他将这枚硬币又抛一次, 又出现正面, 则该枚硬币是均匀的概率为 ____

柠宝：本节题目较少，习题课放在本章结束

1.3 古典概型、几何概型、伯努利试验

古典概型与几何概型在高中阶段已有介绍，包括伯努利试验在内都是已经学过的内容，这里主要是进行总结

不严格的情况下可以说：古典概型是几何概型的离散型版本，几何概型是古典概型的连续型版本

1.3.1 古典概型

古典概型需要同时满足如下三点：

1. 所涉及的随机现象只有有限个样本点，譬如为 n 个.
2. 每个样本点发生的可能性相等 (称为等可能性). 例如，抛一枚均匀硬币，出现正面和反面的概率相等
3. 若事件 A 含有 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{ 所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所有样本点的个数}}=\frac{k}{n}$$

1.3.2 几何概型

几何概型是古典概型的推广，只是样本空间中元素的个数变为无穷多个

如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，则称此试验为几何概型。对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量 (长度, 面积, 体积)}}{\Omega\text{ 的度量 (长度, 面积, 体积)}}$$

1.3.3 伯努利试验

伯努利试验只有两个结果，即发生或者不发生。例如坤坤的背带只有掉落或者不掉落，投篮命中或者不命中等。

定义 1.5

有两个试验 E_1 和 E_2，假如试验 E_1 的任一结果 (事件) 与试验 E_2 的任一结果 (事件) 都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立. ♣

类似地可以定义 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的相互独立性：如果 E_1 的任一结果、E_2 的任一结果 $\cdots\cdots E_n$ 的任一结果都是相互独立的事件，则称试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立. 如果这 n 个独立试验还是相同的，则称其为 n 重独立重复试验. 如果在 n 重独立重复试验中，每次试验的可能结果为两个：A 或 $\bar{A}$，则称这种试验为 n 重伯努利试验.

比如掷 n 枚硬币、掷 n 颗骰子、检查 n 个产品等，都是 n 重独立重复试验.

1.3.4 本章典型例题

本章的题型主要是由三部分构成，第一部分是事件之间的运算。第二部分是根据五大公式求概率，其中全概率公式和贝叶斯公式的运用较为困难。第三部分是求一些常见的概率，例如超几何分布以及伯努利试验的相关概率。

重要技巧：

1. 将复杂的式子利用公式展开
2. 注意减法公式以及对立事件的应用
3. 事件同时发生的数量越多，概率越低，即 $P(ABC)\leqslant P(AB)$

4. 全概率公式和贝叶斯公式的关键是对事件进行命名分类，尽量写成数学语言，即条件概率来表示事件而不是用文字

例题 1.17 对同一目标接连进行 3 次独立重复射击, 假设至少命中目标一次的概率为 7/8, 则单次射击命中目标的概率 $p=$ ____

例题 1.18 若在区间 $(0,1)$ 上随机地取两个数 u,v, 则关于 x 的一元二次方程 $x^2-2vx+u=0$ 有实根的概率为 ____

例题 1.19 某射手的命中率为 $p(0<p<1)$, 该射手连续射击 n 次才命中 k 次 $(k\leqslant n)$ 的概率为 (　　)

(A) $p^k(1-p)^{n-k}$

(B) $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

(C) $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$

(D) $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$

例题 1.20 设在 3 次独立重复试验中，事件 A 出现的概率均相等且至少出现一次的概率是 $\frac{19}{27}$, 则在一次试验中, 事件 A 出现的概率为 ____

例题 1.21 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为 ____

例题 1.22 设 A 和 B 为任意二不相容事件, 且 $\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)>0$, 则必有 (　　)

(A) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 不相容.

(B) $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 相容.

(C) $\boldsymbol{P}(A\cup\bar{B})=\boldsymbol{P}(\bar{B})$.

(D) $\boldsymbol{P}(A\bar{B})=\boldsymbol{P}(\bar{B})$.

例题 1.23 设 A_1,A_2 和 B 是任意事件, 且 $0<\boldsymbol{P}(B)<1$, $\boldsymbol{P}((A_1\cup A_2)\mid B)=\boldsymbol{P}(A_1\mid B)+\boldsymbol{P}(A_2\mid B)$, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{P}(A_1\cup A_2)=\boldsymbol{P}(A_1)+\boldsymbol{P}(A_2)$.

(B) $\boldsymbol{P}(A_1\cup A_2)=\boldsymbol{P}(A_1\mid B)+\boldsymbol{P}(A_2\mid B)$.

(C) $\boldsymbol{P}(A_1B\cup A_2B)=\boldsymbol{P}(A_1B)+\boldsymbol{P}(A_2B)$.

(D) $\boldsymbol{P}\left((A_1\cup A_2)\mid\bar{B}\right)=\boldsymbol{P}\left(A_1\mid\bar{B}\right)+\boldsymbol{P}\left(A_2\mid\bar{B}\right)$.

例题 1.24 设随机事件 A 与 B 互不相容, $0<P(A)<1$, 则下列结论中一定成立的是 (　　)

(A) $A\cup B=\Omega$.

(B) $\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega$.

(C) $A=B$.

(D) $\bar{A}\bar{B}=\varnothing$.

例题 1.25 (重点技巧)设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$, 则 A,B,C 都不发生的概率为 ____

【利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率】

柠宝：这一类题目的关键不是计算，而是对各个事件进行命名分类

例题 1.26 三个箱子中, 第一箱装有 4 个黑球 1 个白球, 第二箱装有 3 个黑球 3 个白球, 第三箱装有 3 个黑球 5 个白球, 现任取一箱, 再从该箱中任取一球, 试求:

(1) 取出的球是白球的概率

(2) 若取出的球是白球，则该球属于第二箱的概率

例题 1.27 有两个盒子，第一盒中装有 2 个红球，1 个黑球，第二盒中装有 2 个红球，2 个黑球, 现从这两盒中任取一球放在一起, 再从中任取一球, 问:

(1) 这个球是红球的概率

(2) 若发现这个球是红球，问第一个中取出的球是红球的概率

第 2 章 随机变量及其分布

内容提要

- ❑ 第一节　随机变量及其分布函数
- ❑ 第二节　离散型随机变量与连续型随机变量
- ❑ 第三节　常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布
- ❑ 第四节　常见分布的习题课
- ❑ 第四节　随机变量函数的分布

本章是整个概率论的核心章节，务必弄懂每个细节

2.1 随机变量及其分布函数

2.1.1 随机变量与分布函数的概念

【随机变量的概念】

定义 2.1

定义在样本空间 Ω 上的实值函数 $X = X(\omega)$ 称为随机变量, 常用大写字母 X, Y, Z 等表示随机变量, 其取值用小写字母 x, y, z 等表示. 假如一个随机变量仅取有限个或可列个值, 则称其为离散随机变量. 假如一个随机变量的可能取值充满数轴上的一个区间 (a, b), 则称其为连续随机变量, 其中 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$. ♣

柠宝：我们应该从函数或者映射的角度来理解随机变量的定义

笔记

1. 随机变量 X 是样本点 ω 的一个函数, 这个函数可以是不同样本点对应不同的实数, 也允许多个样本点对应同一个实数. 这个函数的自变量 (样本点) 可以是数, 也可以不是数, 但因变量一定是实数。

2. 研究概率论肯定要用到高等数学的方法，为了方便使用这些方法（例如极限、导数、积分等），我们的研究对象需要从普通的样本点（事件）转化为数字，这就是随机变量的作用

3. 本质上，随机变量建立了样本点（事件）到 R 的映射。进一步，二维随机变量建立了到 R^2 的映射

4. 与微积分中的变量不同, 概率论中的随机变量 X 是一种 "随机取值的变量" . 以认识离散随机变例, 我们不仅要知道 Y 取哪些值, 而且还要知道它取这些值的概率各是多少, 这就需要分布的概念. 有没有分布是区分一般变量与随机变量的主要标志。

【分布函数的概念】

注意分布函数的定义有两种，一种是取 $<$ 符号，一种是取 $\leqslant$，这里严格采用《考试大纲》中采用 $\leqslant$ 的定义，后续不再说明

定义 2.2

设 X 是一个随机变量, 对任意实数 x, 记

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leqslant x\}(-\infty < x < +\infty)$$

为随机变量 X 的分布函数. 且称 X 服从 $F(x)$, 记为 $X \sim F(x)$. 有时也可用 $F_X(x)$ 以表明是 X 的分布函数 (把 X 作为 F 的下标). ♣

笔记 将分布函数理解成一种 "累积函数"，如果要计算具体的某个事件的概率可以根据公式直接来算

2.1.2 分布函数的性质

任一分布函数 $F(x)$ 都具有如下三条基本性质:

1. 单调性: $F(x)$ 是定义在整个实数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调非减函数, 即对任意的 $x_1<x_2$, 有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.
2. 有界性: 对任意的 x, 有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$, 且
$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$
$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$
3. 右连续性: 右连续性 $F(x)$ 是 x 的右连续函数, 即对任意的 x_0, 有
$$\lim_{x\to x_0+}F(x)=F(x_0),$$
即
$$F(x_0+0)=F(x_0)$$

笔记 任何一个分布函数需要同时满足上述三条性质。反过来, 验证某一个函数是不是分布函数的方法就是验证其是否同时满足这三条性质

例题 2.1 下列函数中是某一随机变量分布函数的是 (　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\4e^{4x},x\geqslant 0\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1-x}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 1 & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

例题 2.2 设随机变量 X 的分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}a+\frac{b}{(1+x)^2}, & x>0\\ c, & x\leqslant 0\end{cases}$$
求常数 a,b,c 的值

2.1.3 分布函数的相关公式

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数, 则对任意两个实数 $a<b$, 有
$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a),$$
$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),$$
$$P(X\geqslant b)=1-F(b-0),$$
$$P(X>b)=1-F(b),$$
$$P(a<x<b)=F(b-0)-F(a),$$
$$P(a\leqslant X\leqslant b)=F(b)-F(a-0),$$
$$P(a\leqslant X<b)=F(b-0)-F(a-0).$$

其中，由分布函数的右连续性得到

$$F(a)=F(a+0)=\lim_{x\to a^+}F(x)$$

特别的，如果 X 是连续型随机变量, 则有

$$\boldsymbol{P}\{a<X\leqslant b\}=\boldsymbol{P}\{a\leqslant X<b\}=\boldsymbol{P}\{a<X<b\}=\boldsymbol{P}\{a\leqslant X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$$

柠宝：狗都不背，这些公式有着极其简单的记忆方法，请上课做好笔记

2.2 离散型随机变量与连续型随机变量

2.2.0.1 离散型随机变量的概念及其概率分布

定义 2.3

设 X 是一个随机变量, 如果 X 只取有限个或无穷可列个值, 则称 X 为离散型随机变量

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_i(i=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率 (即事件 $\{X=x_i\}$ 的概率) $\boldsymbol{P}\{X=x_i\}$ 为 $p_i(i=1,2,\cdots)$, 则称 $\boldsymbol{P}\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布或分布律. 它也可以采用表格的形式表示, 即

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_n)$	$\cdots$

或

$$X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{pmatrix}$$

对于两个任意实数 $a<b$, 有

$$\boldsymbol{P}\{a\leqslant X\leqslant b\}=\sum_{a\leqslant x_i\leqslant b}\boldsymbol{P}\{X=x_i\}=\sum_i p_i$$

其中 $\sum$ 表示对于满足 $a\leqslant x_i\leqslant b$ 的一切 $\{X=x_i\}$ 发生的概率求和

笔记

1. 简单来说，设 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$，则 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

或者

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ p_1, & x_1\leqslant x<x_2\\ p_1+p_2, & x_2\leqslant x<x_3\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

2. 为了能一定满足分布函数的右连续性，这里对于分段点的处理为五字真言：含左不含右（十星重点）

3. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内除 X 可能取的值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 外, 处处是连续的

例题 2.3 设离散随机变量 X 的分布列为

x	-1	2	3
P	0.25	0.5	0.25

试求 $P(X\leqslant 0.5),P(1.5<X\leqslant 2.5)$, 并写出 X 的分布函数

解

$$P(X \leqslant 0.5)=P(X=-1)=0.25$$

$$P(1.5<X \leqslant 2.5)=P(X=2)=0.5$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \\ 0.25, & -1 \leqslant x<2 \\ 0.25+0.5=0.75, & 2 \leqslant x<3 \\ 0.25+0.5+0.25=1, & x \geqslant 3\end{cases}$$

2.2.0.2 离散型随机变量的概率分布的性质（充要条件）

这里主要是两个性质：

1. 非负性：$p\left(x_i\right) \geqslant 0, i=1,2, \cdots$
2. 正则性：$\sum_{i=1}^{\infty} p\left(x_i\right)=1$

2.2.0.3 连续型随机变量及其概率密度

定义 2.4

如果对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在一个非负可积函数 $f(x)$, 使得对任意实数 x, 都有

$$F(x)=\boldsymbol{P}\{X \leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d} t,-\infty<x<+\infty$$

称 X 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度

笔记

1. 由于变上限积分函数一定连续, 所以此处的 $F(x)$ 一定连续, 但是密度函数 $f(x)$ 不一定是连续函数
2. 不能说凡是连续的 $F(x)$ 对应的 X 一定是连续型随机变量

2.2.1 连续型随机变量概率密度的性质

1. 非负性：$f(x) \geqslant 0$
2. 正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x=1$
3. 对于任意实数 $x_1, x_2\left(x_1 \leqslant x_2\right)$, 有

$$\boldsymbol{P}\left\{x_1<X \leqslant x_2\right\}=F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)=\int_{x_1}^{x_2} f(t) \mathrm{d} t$$

笔记

1. 函数 $f(x)$ 成为某一连续型随机变量的概率密度充要条件是同时满足条件 1 和条件 2
2. 对连续型随机变量 X, 由于 $F(x)$ 是连续函数, 所以上述性质 3 可以改写成: 对任意实数 $x_1<x_2$, 有

$$P\left\{x_1<X \leqslant x_2\right\}=P\left\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\right\}=P\left\{x_1 \leqslant X<x_2\right\}=P\left\{x_1<X<x_2\right\}=\int_{x_1}^{x_2} f(t) \mathrm{d} t$$

3. 连续型随机变量在任意一点处的概率为零，即

$$P\{X=x_i\}=0$$

2.2.2 典型题目

例题 2.4 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} c, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求常数 c 与分布函数

解 由密度函数的正则性知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}c\,\mathrm{d}x=2c$$

所以由 $2c=1$ 得 $c=0.5$. 利用分段积分, 我们还可求出 X 的分布函数

当 $x<-1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}t=0$$

当 $-1\leqslant x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{-3}^{x}0.5\,\mathrm{d}t=(x+1)/2$$

当 $x\geqslant 1$ 时,

$$F(x)=\int_{1}^{1}0.5\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}0\,\mathrm{d}t=1$$

所以得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1\\ \frac{x+1}{2}, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

例题 2.5 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x<2;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 X 的分布函数 $F(x)$

解 当 $x<0$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x=0$$

当 $0\leqslant x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{0}^{x}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}$$

当 $1\leqslant x<2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}(2-x)\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}+2x-1$$

当 $x\geqslant 2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x=1$$

综上所述，得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

【密度函数与分布列的异同点】

在离散型随机变量的场合，

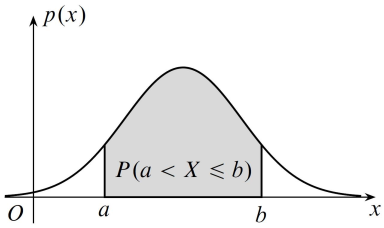
$$P(a<X\leqslant b)=\sum_{a<x_i\leqslant b} p\left(x_i\right)$$

其中 x_i 为随机变量 X 的可能取值

而在连续型随机变量的场合，

$$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

其含义如下图



由定积分的意义可知，积分就是求和。从这个意义上讲，概率密度函数与概率分布列所起的作用是类似的，但它们之间的差别也是明显的，具体有

1. 离散随机变量的分布函数 $F(x)$ 总是右连续的阶梯函数，而连续随机变量的分布函数 $F(x)$ 一定是整个数轴上的连续函数，因为对任意点 x 的增量 Δx，相应分布函数的增量总有
$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\longrightarrow 0,\quad(\Delta x\to 0)$$
2. 离散随机变量 X 在其可能取值的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 上的概率不为 0，而连续随机变量 X 在 $(-\infty,+\infty)$ 上任一点 a 的概率恒为 0，即
$$P(X=a)=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$$
这表明：不可能事件的概率为 0，但概率为 0 的事件不一定是不可能事件；类似地，必然事件的概率为 1，但概率为 1 的事件不一定是必然事件.
3. 由于连续随机变量 X 仅取一点的概率恒为 0，从而在事件 “$a\leqslant X\leqslant b$” 中减去 $x=a$ 或减去 $X=b$. 不影响其概率. 即
$$P(a\leqslant x\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$$
这给计算带来很大方便. 而这个性质在离散随机变量场合是不存在的，在离散随机变量场合计算概率要 “点点计较” .
4. 由于在若干点上改变密度函数 $p(x)$ 的值并不影响其积分的值，从而不影响其分布函数 $F(x)$ 的值，这意味着一个连续分布的密度函数不唯一。考虑如下两个概率密度函数
$$f_1(x)=\begin{cases}0.5, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

它们都是 $(-1,1)$ 上均匀分布的密度函数. 但仔细考察这两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 可以发现

$$P\left(f_1(x) \neq f_2(x)\right) = P(X=-1) + P(X=1) = 0$$

可见这两个函数在概率意义上是无差别的, 在此称 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 是 "几乎处处相等" , 其含义是: 它们不相等处的点组成集合的概率为 0

2.2.3 既非离散又非连续的分布的处理方法（十星重点）

柠宝：红果果绿泡泡：请你像我这样做！说人话就是离散怎么分，我们就怎么分

其中 2017 到 2020 的概率大题均为此类题型

这里，由于还没有学常见分布，所以我们管中窥豹，仅对 2019 年的第一问作介绍，详细的过程会留在本章最后一节

例题 2.6 (2019,11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\} = p, P\{Y=1\} = 1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

2.3 常见的离散型、连续型随机变量及其概率分布

本节内容是重点，要求熟练掌握常见的各种分布（要求记忆，这也是我课程中为数不多需要记忆的敌方），后面还会要求记忆它们的期望、方差

2.3.1 常见的离散型随机变量及其概率分布

2.3.1.1 二项分布与两点分布

定义 2.5 (二项分布)

二项分布就是 n 重伯努利试验对应的分布

如果记 X 为 n 重伯努利试验中成功 (记为事件 A) 的次数, 则 X 的可能取值为 $0,1,\cdots,n$. 记 p 为每次试验中 A 发生的概率, 即 $P(A)=p$, 则 $P(\bar{A})=1-p$

因为 n 重伯努利试验的基本结果可以记作

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$$

其中 ω_i 或者为 A, 或者为 $\bar{A}$. 这样的 ω 共有 2^n 个, 这 2^n 个样本点 ω 组成了样本空间 Ω

下面求 X 的分布列, 即求事件 $\{X=k\}$ 的概率. 若某个样本点

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \{X=k\}$$

意味着 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 中有 k 个 A, $n-k$ 个 $\bar{A}$, 所以由独立性知

$$P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$$

而事件 $\{X=k\}$ 中这样的 ω 共有 C_n^k 个, 所以 X 的分布列为

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$$

这个分布称为二项分布, 记为

$$X \sim b(n,p)$$

二项分布的期望和方差分别为

$$E(X)=np,D(X)=np(1-p)$$

"二项分布" 名称由来: 二项概率 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 恰好是二项式 $[p+(1-p)]^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项

定义 2.6 (两点分布（也称 $0-1$ 分布）)

$n=1$ 时的二项分布 $b(1,p)$ 称为二点分布, 或称 $0-1$ 分布, 其分布列为:

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1$$

或记为

X	0	1
P	$1-p$	p

两点分布 $b(1,p)$ 主要用来描述一次伯努利试验中成功 (记为 A) 出现次数 (0 或 1)

笔记

1. 二项分布是 $0-1$ 分布的进阶版；$0-1$ 分布是二项分布的退化版
2. $0-1$ 分布是一次伯努利试验的情况，二项分布是 n 重伯努利试验的情况
3. 二项分布随机变量是 n 个独立同分布的两点分布随机变量之和
4. 如果 $X\sim(n,p)$, 则 $Y=n-X$ 服从二项分布 $B(n,q)$, 其中 $q=1-p$, 此处 Y 理解为失败的次数
5. 设坤坤投篮的命中率为 p, 各次投篮情况相互独立，记随机变量 X 表示 n 次投篮后的命中次数，则 $X\sim b(n,p)$, 当 $n=1$ 时，$X\sim b(1,p)$

2.3.1.2 泊松分布

这里补充介绍一下泊松分布的背景。

泊松分布适合于描述单位时间内随机事件发生的次数的概率分布。如某一服务设施在一定时间内受到的服务请求的次数，电话交换机接到呼叫的次数、汽车站台的候客人数、机器出现的故障数、自然灾害发生的次数、DNA 序列的变异数、放射性原子核的衰变数、激光的光子数分布等等。(单位时间内发生的次数，可以看作事件发生的频率，类似物理的频率 f)——摘自《维基百科》

定义 2.7 (泊松分布)

泊松分布的概率分布列 (有的教材称为概率质量函数) 为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,$$

其中参数 $\lambda>0$, 记为 $X\sim P(\lambda)$

泊松分布的参数 λ 是随机事件发生次数的数学期望值. 且方差与期望相等，即

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

定理 2.1 (泊松定理)

若随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$, 则当 p 充分小而 n 充分大且 $np=\lambda$ 适中时, X 近似服从参数为 $\lambda=np$ 的泊松分布, 即

$$\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

其中,$\lambda=np$

笔记

1. 此定理的主要作用是估值，即“用泊松分布估计二项分布”

2. 注意定理的条件 $np=\lambda$ 中要求 n 很大又 p 很小且 $\lambda=np$ 适中，实际应用中 $n\geqslant 100, p\leqslant 0.01$ 时即可利用上式。不过应满足 n 尽量大，否则效果不佳

3. 具体的题目中，一般会在题干中明确要求“请利用泊松定理估值”

4. 此定理虽然明确写在考纲中，但是历年鲜有涉及，原因是因为没有什么技术含量

2.3.1.3 几何分布

几何分布的背景是第 n 次试验才成功的情况 $(n>0)$

定义 2.8 (几何分布)

在伯努利试验序列中，记每次试验中事件 A 发生的概率为 p，如果 X 为事件 A 首次出现时的试验次数，则 X 的可能取值为 $1,2,\cdots$，称 X 服从几何分布，记为 $X\sim Ge(p)$，其分布列为

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p, k=1,2,\cdots$$

几何分布的期望与方差为

$$E(X)=\frac{1}{p}, D(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

♣

【几何分布的无记忆性】

当 m,n 均大于 0 时，有

1. $P\{X=m+n\mid X>m\}=P\{X=n\}$
2. $P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>n\}$

2.3.1.4 超几何分布

超几何分布是高中阶段已经掌握了的内容。

从一个有限总体汇总进行不放回抽样常会遇到超几何分布。

定义 2.9 (超几何分布)

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格（次品），一次性随机抽取 n 件产品，则其中含有的不合格品的个数 X 服从超几何分布，记为 $X\sim h(n,N,M)$. 超几何分布的概率分布列为

$$\boldsymbol{P}\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,\cdots,\min\{n,M\})$$

其中 n,N,M 均为正整数且 $n\leqslant N, M\leqslant N$

超几何分布的期望和方差分别为

$$E(X)=n\frac{M}{N}, D(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

♣

设有 N 个产品，其中有 M 个不合格品. 若从中不放回地随机抽取 n 个，则其中含有的不合格（次品），一次性随机抽取 n 件产品，则其中含有的不合格品的个数 X 服从超几何分布，记为 $X\sim h(n,N,M)$. 超几何分布的概率分布列为

$$\boldsymbol{P}\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,\cdots,\min\{n,M\})$$

2.3.1.5 超纲内容：负二项分布

定义 2.10 (负二项分布)

负二项分布，也称巴斯卡分布

在伯努利试验序列中，记每次试验中事件 A 发生的概率为 p，如果 X 为事件 A 第 r 次出现时的试验次数，则 X 的可能取值为 $r, r+1, \cdots, r+m, \cdots$ 称 X 服从负二项分布或巴斯卡分布，其分布列为

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, k=r, r+1, \cdots$$

记为 $X \sim Nb(r,p)$. 当 $r=1$ 时，即为几何分布

负二项分布的数学期望与方差分别为

$$E(X)=\frac{r}{p}, D(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

♣

笔记 如果将第一个 A 出现的试验次数记为 X_1，第二个 A 出现的试验次数 (从第一个 A 出现之后算起) 记为 X_2，第 r 个 A 出现的试验次数 (从第 $r-1$ 个 A 出现之后算起) 记为 X_r，则 X_i 独立同分布，且 $X_i \sim Ge(p)$. 此时有 $X=X_1+X_2+\cdots+X_r \sim Nb(r,p)$，即负二项分布的随机变量可以表示成 r 个独立同分布的几何分布随机变量之和.

2.3.2 常见的连续型随机变量及其概率分布

2.3.2.1 均匀分布

定义 2.11 (均匀分布)

若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，记作 $X \sim U(a,b)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x<b \\ 1, & x \geqslant b.\end{cases}$$

均匀分布的期望与方差分别为

$$E(X)=\frac{a+b}{2}, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

♣

笔记

1. 均匀分布其实就是古典概型 (每个结果等可能性) 在连续型随机变量下的版本。例如譬如一个半径为 的汽车轮胎，因为轮胎圆周上的任一点接触地面的可能性是相同的，所以轮胎圆周接触地面的位置 X 是服从 $(0,2\pi r)$ 上的均匀分布

2. 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布的随机变量 X 在 $[a,b]$ 的任意子区间的概率只依赖于该子区间的长度，与子区间的位置无关，即若 $[c,d] \subset [a,b]$，则

$$\boldsymbol{P}\{c \leqslant X \leqslant d\}=\frac{d-c}{b-a}$$

2.3.2.2 指数分布

不同的教材对于指数分布的定义有所区别，这里严格采用《大纲》中关于指数分布的定义

指数分布可以用来表示独立随机事件发生的时间间隔，比如旅客进入机场的时间间隔、电话打进客服中心的时间间隔、中文维基百科新条目出现的时间间隔、机器的寿命等。——摘自《维基百科》

定义 2.12 (指数分布)

随机变量 X 的概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为参数, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记为 $X \sim E(\lambda)$, 对应的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0\end{cases}$$

指数分布的期望与方差分别为

$$E(X)==\frac{1}{\lambda}, D(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

【指数分布的无记忆性】

对 $\forall s, t>0$，有

- $P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$

其中，指数分布的无记忆性可以当做结论或者性质来使用

2.3.2.3 一般正态分布

柠宝：正态分布有三种，分别是一般正态分布、标准正态分布以及二维正态分布，其中二维正态分布放在第三章进行讲解

定义 2.13

若随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi} \sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^{2}}{2 \sigma^{2}}},-\infty<x<+\infty$$

其中, μ 和 σ 均为常数, 且 $-\infty<\mu<+\infty, \sigma>0$, 则称 X 服从参数为 μ, σ^{2} 的正态分布, 简记为

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$$

正态分布 $N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$ 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi} \sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^{2}}{2 \sigma^{2}}} \mathrm{~d} t$$

一般正态分布的期望与方差分别为

$$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^{2}$$

正态分布的概率密度与分布函数图像如下图

笔记

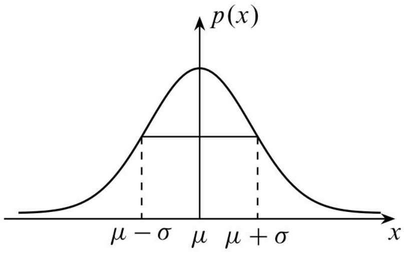
1. 对于一般正态分布, 总可以进行变换转化为标准正态分布

$$F(x)=\boldsymbol{P}\{X \leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), x \in R$$

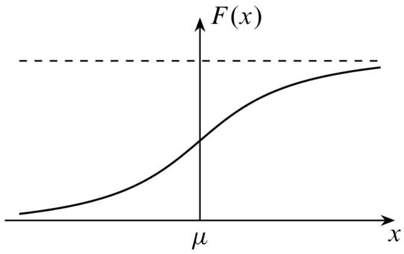
其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数

2.

$$\boldsymbol{P}\left\{x_{1}<X \leqslant x_{2}\right\}=\Phi\left(\frac{x_{2}-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_{1}-\mu}{\sigma}\right),-\infty<x_{1}<x_{2}<+\infty$$



(a) 密度函数 $p(x)$



(b) 分布函数 $F(x)$

3. 概率密度函数曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称. 这表明对于任意 $h>0$ 有

$$\boldsymbol{P}\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=\boldsymbol{P}\{\mu<X\leqslant\mu+h\}, \text{即} f(\mu-x)=f(\mu+x)$$

4. 当 $x=\mu$ 时 $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, $x=\mu$ 为 $f(x)$ 的驻点, 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处曲线有拐点, 曲线 $y=f(x)$ 以 x 轴为渐近线

5. 两个参数的几何意义:

- 如果固定 σ, 改变 μ 的值, 则图形沿 x 轴平移, 而不改变其形状. 也就是说正态密度函数的位置由参数 μ 所确定, 因此亦称 μ 为位置参数
- 如果固定 μ, 改变 σ 的值, 则 σ 愈小, 曲线呈高而瘦; σ 愈大, 曲线呈矮而胖. 也就是说正态密度函数的尺度由参数 σ 所确定, 因此称 σ 为尺度参数

定义 2.14 (标准化处理)

对于任意的一个随机变量 X, 设其均值和标准差分别为 μ 和 σ, 称

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

为标准化处理

♣

2.3.2.4 标准正态分布

定义 2.15

称 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为标准正态分布

标准正态分布下的概率密度以及分布函数分别用 $\varphi(x),\Phi(x)$ 表示, 即

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}, -\infty<u<+\infty$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, -\infty<u<+\infty$$

对于 $\Phi(x)$ 而言, 是个"不可积分函数", 除了某些特殊点的值, 只能通过查表得到

♣

性质

1. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, 即 $\varphi(x)$ 是偶函数
2. $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调递增, 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递减, 在 $x=0$ 处取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3. $x=\pm1$ 是 $\varphi(x)$ 的两个拐点
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$, 即 x 轴是 $\varphi(x)$ 的水平渐近线

除了性质, 还需要掌握常见的正态分布的相关公式:

- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, 特别地, $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
- $P(X>x)=1-\Phi(x)$
- $P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$

- $P(|X| < c) = 2\Phi(c) - 1$

以下定理要求掌握证明过程

定理 2.2

若 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, 则 $U = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$

证明

2.4 常见分布的习题课

2.5 随机变量函数的分布

首先回答为什么要引入“随机变量的函数”.

这里涉及到的问题其实是“能否直接观测”的问题

第 3 章 多维随机变量及其分布

内容提要

- 第一节 多维随机变量及其联合分布
- 第二节 边缘分布与随机变量的独立性
- 第三节 多维随机变量函数的分布
- 第四节 多维随机变量的数字特征
- 第五节 条件分布
- 第六节 历年概率大题套路汇总（有手就行）

3.1 多维随机变量及其联合分布

3.1.1 多维随机变量

首先给出 n 维随机变量的定义

定义 3.1

如果 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 是定义在同一个样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 上的 n 个随机变量，则称

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

为 n 维 (或 n 元) 随机变量或随机向量 ♣

这里举个例子：

在研究四岁至六岁儿童的生长发育情况时，我们感兴趣于每个儿童 (样本点 ω) 的身高 $X_1(\omega)$ 和体重 $X_2(\omega)$，这里 (X_1, X_2) 是一个二维随机变量

笔记 对于上面的儿童生长发育的例子，我们关心的不仅仅是 (身高，体重) 的联合分布，同时也想知道单独考虑身高或者单独考虑体重时的分布（即边缘分布），同时也想知道身高和体重之间的关系（即考虑他们的相关系数、协方差之类的指标）

对于数学的学习而言，我们舍弃掉一般的实际情况，将随机变量抽象成一般的随机变量 X、Y、Z，进而研究他们的联合分布、边缘分布和数字特征（期望、方差等）

3.1.2 联合分布函数

定义 3.2

对任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 个事件 $\{X_1 \leqslant x_1\}, \{X_2 \leqslant x_2\}, \cdots, \{X_n \leqslant x_n\}$ 同时发生的概率

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数 ♣

笔记 对于二维随机变量（考研只考二维，不会考三维），联合分布函数 $F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$ 是事件 $X \leqslant x$ 与 $Y \leqslant y$ 同时发生（事件的交）的概率。

如果将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么联合分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为顶点的左下无穷直角区域（含边界）的概率

定理 3.1

二维联合分布函数 $F(x,y)$ 必须同时满足以下四条基本性质

(1) 单调性：$F(x,y)$ 分别对 x 或 y 是单调非减（非严格单增），即

$$\text{当} x_1 < x_2 \text{时，有} F(x_1,y) \leqslant F(x_2,y)$$

$$\text{当} y_1 < y_2 \text{时，有} F(x,y_1) \leqslant F(x,y_2)$$

(2) 有界性：对任意的 x 和 y，有 $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$，且

$$F(-\infty,y) = \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$F(x,-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$F(+\infty,+\infty) = \lim_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$$

(3) 右连续性：对于每个变量都是右连续的，即

$$F(x+0,y) = F(x,y)$$

$$F(x,y+0) = F(x,y)$$

(4) 非负性：对任意的 $a<b, c<d$ 有

$$P(a<X\leqslant b, c<Y\leqslant d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geqslant 0$$

3.1.3 联合分布列

所谓联合分布律（或联合分布列），可以理解为离散型随机变量的“概率密度函数”

定义 3.3

如果二维随机变量 (X,Y) 只取有限个或可列个数对 (x_i,y_j)，则称 (X,Y) 为二维离散随机变量，称

$$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j), \quad i,j=1,2,\cdots$$

为 (X,Y) 的联合分布列，也表格形式表示

性质：

(1) 非负性：$p_{ij} \geqslant 0$

(2) 正则性：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

例题 3.1 从 $1,2,3,4$ 中任取一数记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一数记为 Y. 求 (X,Y) 的联合分布列及 $P(X=Y)$

3.1.4 联合概率密度

定义 3.4

如果存在二元非负函数 $p(x,y)$，使得二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 可表示为

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

则称 (X,Y) 为二维连续随机变量, 称 $p(u,v)$ 为 (X,Y) 的联合密度函数.
在 $F(x,y)$ 偏导数存在的点上有

$$p(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$$

♣

性质:
(1) 非负性: $p(x,y)\geqslant 0$
(2) 正则性: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=1$

笔记 重点: 求概率就是求积分
若 G 为平面上的一个区域, 则事件 $\{(X,Y)\in G\}$ 的概率可表示为在 G 上对 $p(x,y)$ 的二重积分

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例题 3.2 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-2x-3y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

试求: (1) $P(X<1,Y>1)$; (2) $P(X>Y)$

3.1.5 二维均匀分布和二维正态分布

一、二维均匀分布
若二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中, S_D 为平面区域 D 的面积, 则称 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布, 常记为 $U(D)$

例题 3.3 设 D 为平面上以原点为圆心、以 r 为半径的圆内区域, 如今向该圆内随机投点, 其坐标 (X,Y) 服从 D 上的二维均匀分布, 其密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leqslant r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

试求概率 $P(|X|\leqslant r/2)$

二、二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中，$\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1$

则称 (X,Y) 服从二维正态分布, 其分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

记为 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho\right)$

笔记 二维正态分布的性质：设 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$

1.$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

2.$C_1X+C_2Y\sim N\left(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2\rho C_1C_2\sigma_1\sigma_2\right)$

3.X 与 Y 相互独立的充要条件是 X 与 Y 不相关, 即 $\rho=0$

4.X 关于 $Y=y$ 或 Y 关于 $X=x$ 的条件分布也是正态分布

例题 3.4 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0)$, 则 $P\left(\frac{X}{Y}>0\right)=$________

例题 3.5 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$, 求 (X,Y) 落在区域

$$D=\left\{(x,y):\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\leqslant\lambda^2\right\}$$

内的概率

笔记 本题需要“重积分中的雅克比变换”相关知识，具体请看高数部分的二重积分相关内容（之前有讲）

3.2 边缘分布与随机变量的独立性

3.2.1 边缘分布函数与边缘概率密度

定义 3.5

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$，由

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

可知，X 也是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

分别称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 和} f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

为二维连续型随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度

例题 3.6 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-x-y-\lambda xy}, & x>0,y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这个分布称为二维指数分布，其中参数 $\lambda>0$

由于联合分布已知，易得 X 与 Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

笔记

我们可以发现，边缘分布都是参数 $\lambda=1$ 的指数分布，但是对于联合分布来说，不同的 λ 对应不同的联合分布。但是反过来，已知两个边缘分布，是不能确定其联合分布的，这也正是研究多维随机变量的原因

例题 3.7 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) 边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$; (2)$P(X<1/2)$ 及 $P(Y>1/2)$

例题 3.8 证明：二维正态分布的边缘分布为一维正态分布，其中

$$(X,Y) \sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$$

3.3 多维随机变量函数的分布

3.4 多维随机变量的数字特征

3.5 条件分布

3.6 历年概率大题套路汇总（有手就行）

第 4 章 随机变量的数字特征

第 5 章 大数定律和中心极限定理

第 6 章 数理统计的基本概念

第 7 章 参数估计

第 8 章 假设检验 (仅数一)