

Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg  
2<sup>ème</sup> année

---

**Robotique et automatisation**  
**2<sup>ème</sup> partie**

Jacques GANGLOFF  
Et  
Michel de MATHELIN

# Programme de la deuxième partie (1)

---

- 2<sup>ème</sup> partie: Synthèse des correcteurs numériques
  - Objectifs
  - Synthèse par transposition à partir du continu
  - PID numériques
  - Auto-réglage des PID
  - Placement des pôles
  - Robustesse

# Bibliographie – ouvrages en français

---

- E. Godoy et E. Ostertag, [Commande numérique des systèmes](#).  
Ellipses, Collection Technosup, Paris, 2003.
- R. Longchamp, [Commande numérique de systèmes dynamiques](#).  
Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1995.
- E. Ostertag, [Systèmes et asservissements continus](#).  
Ellipses, Collection Technosup, Paris, 2004.
- M. Rivoire et J.-L. Ferrier, [Commande par ordinateur et identification](#).  
Eyrolles, Paris, 1997.

# Bibliographie – ouvrages en anglais

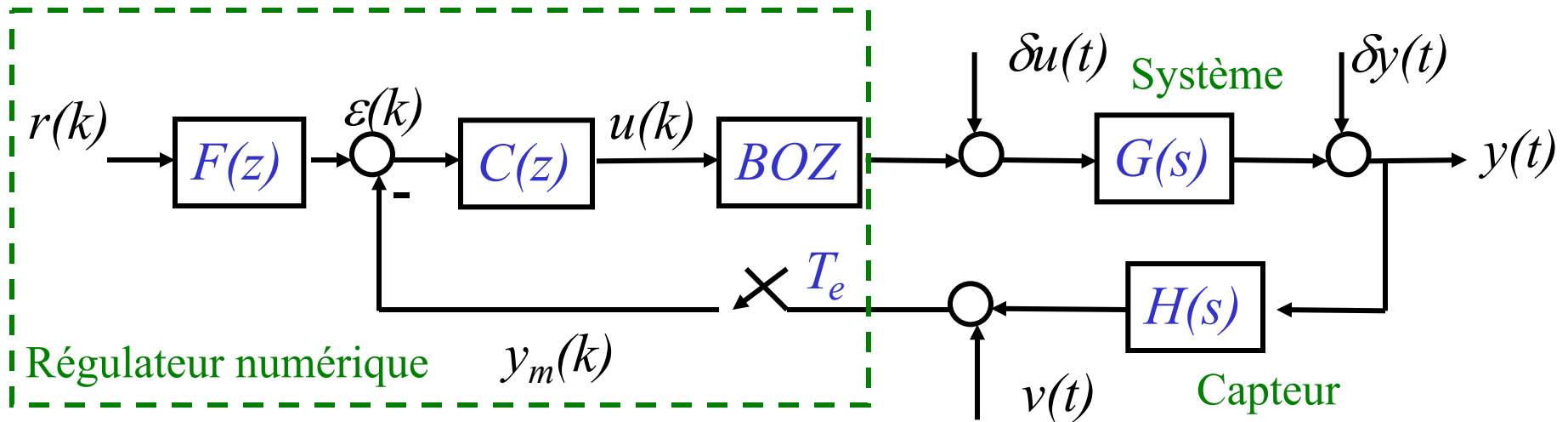
---

- K. Aström and B. Wittenmark, [Computer controlled systems : theory and design](#).  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984, 1990.
- G. Franklin, J. Powell, and A. Emami-Naeini, [Feedback control of dynamic systems](#).  
Addison Wesley, Wokingham, 1988.
- G. Franklin, J. Powell, and L. Workman, [Digital control of dynamic systems](#).  
Addison Wesley, Wokingham, 1989.
- T. Kailath, [Linear Systems](#).  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- B. Kuo, [Automatic control systems](#).  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- B. Kuo, [Digital control systems](#).  
Harcourt Brace & Jovanovich, Orlando, 1992.
- K. Ogata, [Modern control engineering](#).  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.

# Synthèse des correcteurs numériques

## 1 Objectifs (1)

- Asservissement numérique d'un système continu



$G(s)$  Fonction de transfert du système

$H(s)$  Fonction de transfert du capteur

$r$  Signal de consigne ou de référence

$u$  Signal de commande

$y$  Signal de sortie (**grandeur à réguler**)

$y_m$  Mesure de la sortie

$\delta u$  Perturbation d'entrée

$\delta y$  Perturbation de sortie

$v$  Bruit de mesure

$C(z)$  Correcteur

$F(z)$  Préfiltre

$\varepsilon$  Erreur d'asservissement

# Synthèse des correcteurs numériques

## 1 Objectifs (2)

---

- Objectifs de la synthèse:

### Stabilité:

- Le système en boucle fermée est stable

### Performance:

- Suivre les variations de la consigne
- Comportement en boucle fermée conforme à un modèle
- Rejeter les perturbations et le bruit

### Robustesse:

- Conservation de la stabilité et des performances malgré les incertitudes sur le modèle (dynamiques non modélisées, non linéarités, incertitudes paramétriques, ...)

# Synthèse des correcteurs numériques

## 1 Objectifs (3)

---

- Outils pour la synthèse:

### Stabilité:

- Critère de Jury
- Critère de Nyquist

### Performance:

- Lieu d'Evans (placement des pôles de la boucle fermée)
- Calcul des erreurs en régime permanent
- Simulation (vérification a posteriori)

### Robustesse:

- Marges de stabilité (diagramme de Nyquist)
- Simulation (vérification a posteriori)

# Synthèse des correcteurs numériques

## 1 Objectifs (4)

---

- Méthodes simples pour la synthèse (monovariable):
  - Transposition de correcteurs continus
  - Utilisation de PID
  - Autoréglage
  - Placement de pôles (lieu d'Evans, retour d'état)
  - Modèle interne
  - Méthodes algébriques (RST)
- Méthodes avancées pour la synthèse (multivariable):
  - Commande optimale : minimalisation d'un critère quadratique sur l'erreur d'asservissement et la commande
  - Commande robuste : prise en compte optimale de bornes sur les incertitudes pour la stabilité et la performance
  - Commande non linéaire : prise en compte de modèles non linéaires du système à asservir



# Synthèse des correcteurs numériques

## 2 Transposition à partir du continu (1)

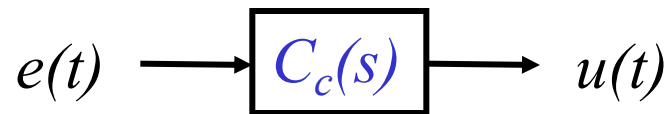
---

- Principe:
  1. Synthèse d'un correcteur continu
  2. Le correcteur numérique est obtenu par approximation de la fonction de transfert du correcteur continu à l'aide d'équations aux différences de différentes manières :
    - Echantillonnage-blocage
    - Approximation d'Euler (différence vers l'arrière)
    - Approximation d'Euler (différence vers l'avant)
    - Transformation bilinéaire (ou homographique)

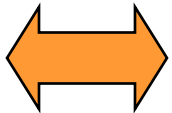
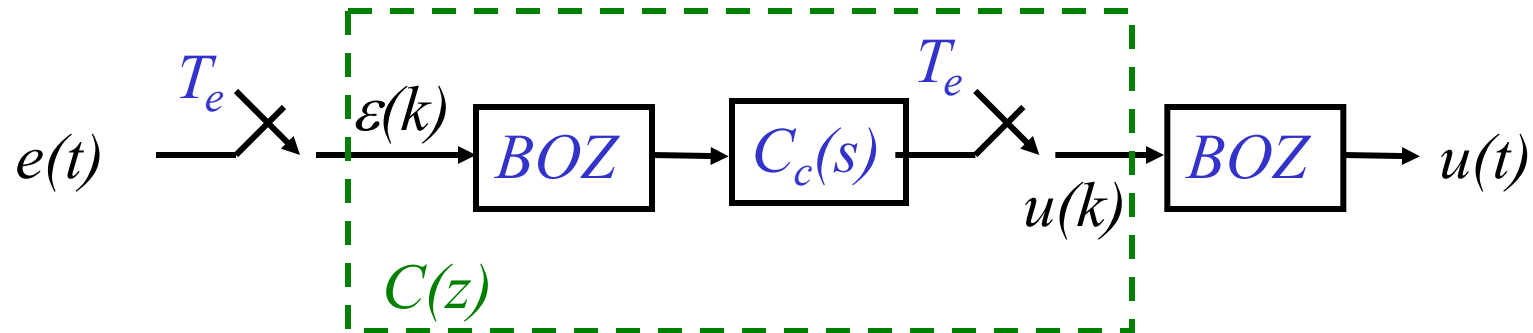
# Synthèse des correcteurs numériques

## 2 Transposition à partir du continu (2)

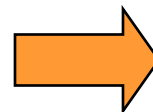
### A. Echantillonnage-blocage :



Se comporte comme:



$$C(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{C_c(s)}{s} \right\}$$



Conserve la stabilité

# Synthèse des correcteurs numériques

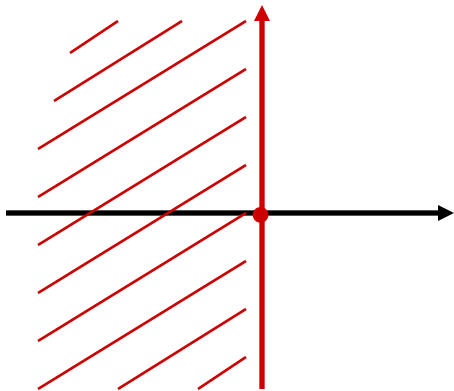
## 2 Transposition à partir du continu (3)

### B. Approximation bilinéaire (homographique):

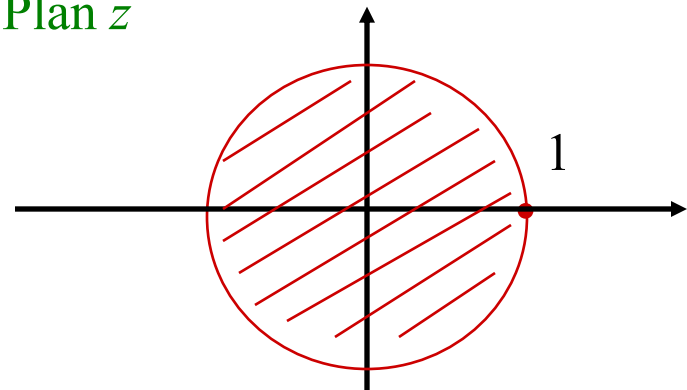
Dans la littérature anglo-saxonne: Tustin's approximation

$$s \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

Plan  $s$



Plan  $z$



$$\longleftrightarrow C(z) = C_c \left( s = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \right) \longrightarrow$$

Conserve la stabilité et la forme de la réponse en fréquence

# Synthèse des correcteurs numériques

## 2 Transposition à partir du continu (4)

---

### B. Approximation bilinéaire (homographique):

Remarque:

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1 + \frac{T_e}{2}s}{1 - \frac{T_e}{2}s}$$

si  $s$  est sur l'axe imaginaire alors

$$z = \left( \frac{1 + \frac{T_e}{2}j\omega}{1 - \frac{T_e}{2}j\omega} \right) = \left( \frac{1 - \frac{T_e^2}{4}\omega^2 + T_e j\omega}{1 + \frac{T_e^2}{4}\omega^2} \right)$$
$$= e^{j\varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = \arctan 2 \left( \frac{\frac{T_e \omega}{1 + \frac{T_e^2}{4}\omega^2}, \frac{1 - \frac{T_e^2}{4}\omega^2}{1 + \frac{T_e^2}{4}\omega^2} \right)$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 2 Transposition à partir du continu (5)

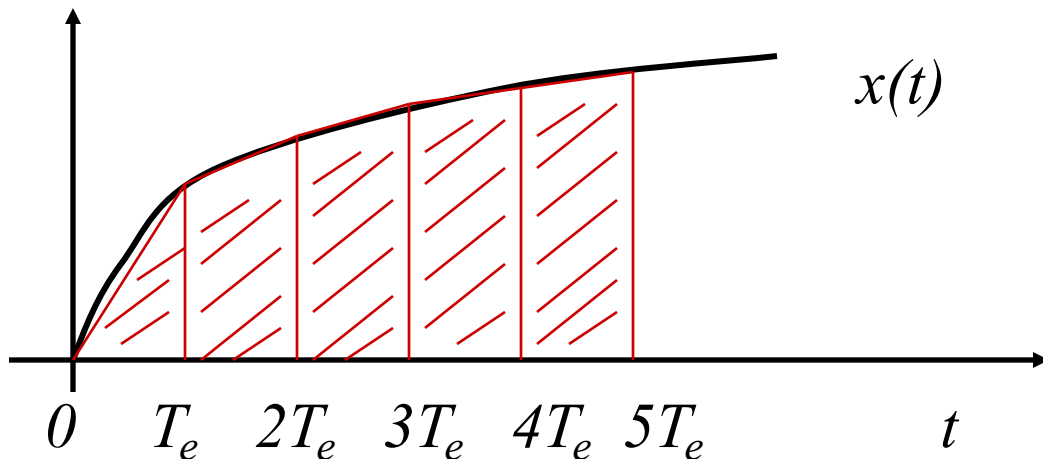
### B. Approximation bilinéaire (homographique):

Approximation de l'intégrale: approximation trapézoïdale

$$I(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T_e}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad \longleftrightarrow \quad \rightarrow I(t) = I(t - T_e) + \frac{T_e}{2} (x(t) + x(t - T_e))$$

$$I(t = nT_e) = I(0) + \frac{T_e}{2} \sum_{k=1}^n (x(kT_e) + x((k-1)T_e))$$



Approximation du retard:

$$z^{-1} = e^{-T_e s} = \frac{e^{-T_e s/2}}{e^{T_e s/2}}$$

$$\rightarrow z^{-1} = \frac{1 - \frac{T_e}{2}s}{1 + \frac{T_e}{2}s}$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 2 Transposition à partir du continu (6)

---

- C. Conclusions:

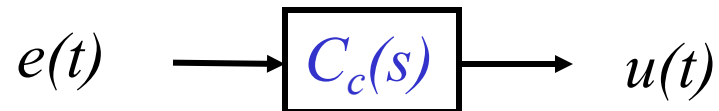
1. La méthode s'appuie sur les résultats d'une synthèse de correcteur analogique sur la base du modèle du système qui est également continu.
2. La synthèse ne prend pas en compte le bloqueur et le déphasage introduit par celui-ci dans la boucle d'asservissement.
3. Les performances du correcteur numériques seront au mieux celles du correcteur analogique.
4. Les performances du correcteur numérique se rapprocheront d'autant plus de celles du correcteur analogique que la période d'échantillonnage est petite.

# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (1)

---

### A. Forme analogique (rappel) :



$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$\longleftrightarrow C_c(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \quad \text{PID idéal}$$

$$\longrightarrow C_c(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right] \quad \text{PID réel}$$

avec  $N \geq 5$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (2)

---

### B. Formes numériques (transposition du continu) :

1. Echantillonnage-blocage:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - e^{-\frac{NT_e}{T_d}}} \right]$

2. Différences vers l'arrière:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT_e}{T_d})z - 1} \right]$

3. Différences vers l'avant:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - (1 - \frac{NT_e}{T_d})} \right]$

4. Transformation bilinéaire:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T_e}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT_e}{2T_d})z - (1 - \frac{NT_e}{2T_d})} \right]$



# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (3)

---

### C. Formes standards :

Correcteur P:  $C(z) = K_p$

Correcteur PI:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e}{z-1} \right]$

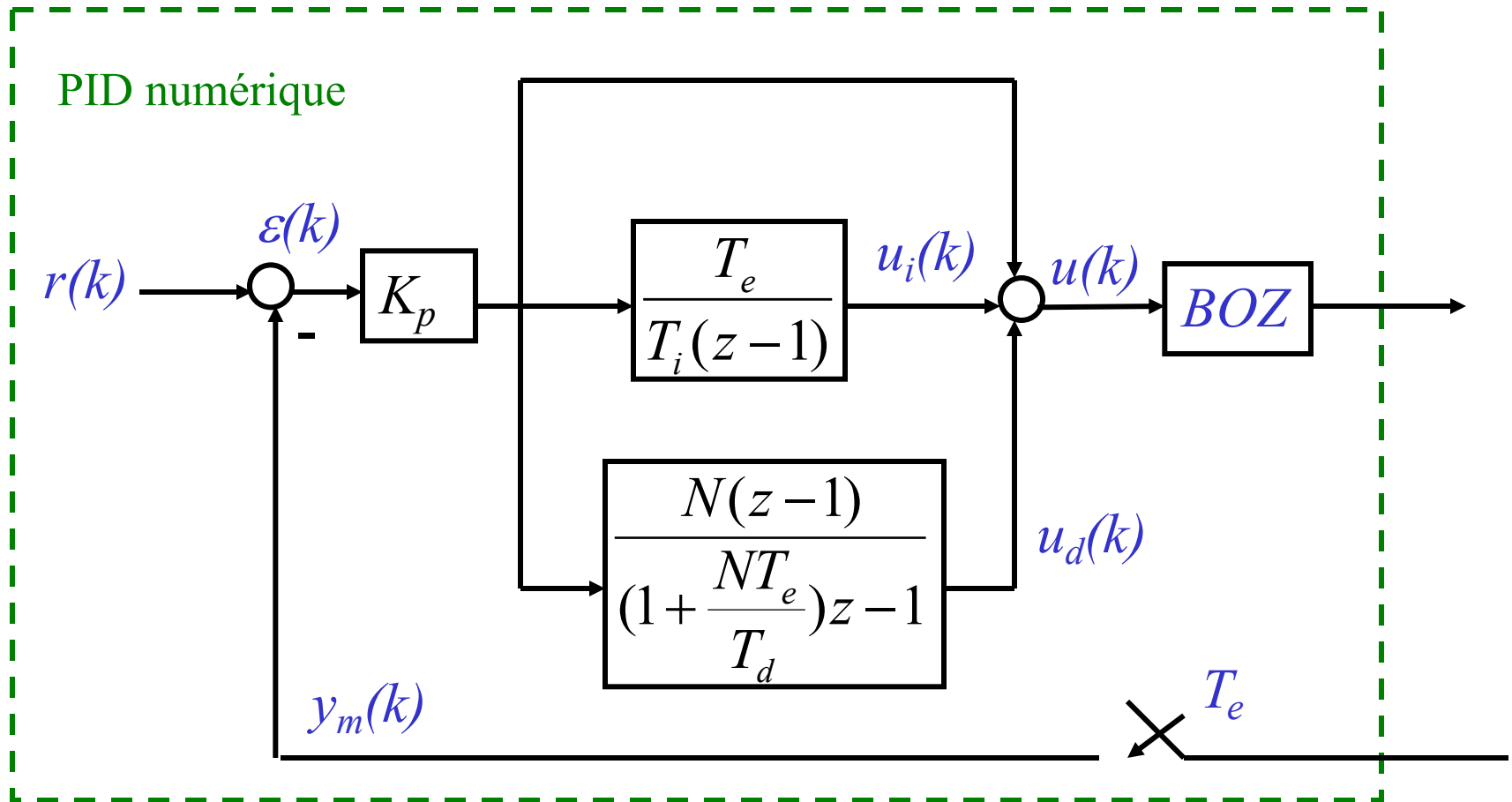
Correcteur PD:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT_e}{T_d})z - 1} \right]$

Correcteur PID:  $C(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e}{z-1} + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT_e}{T_d})z - 1} \right]$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (4)

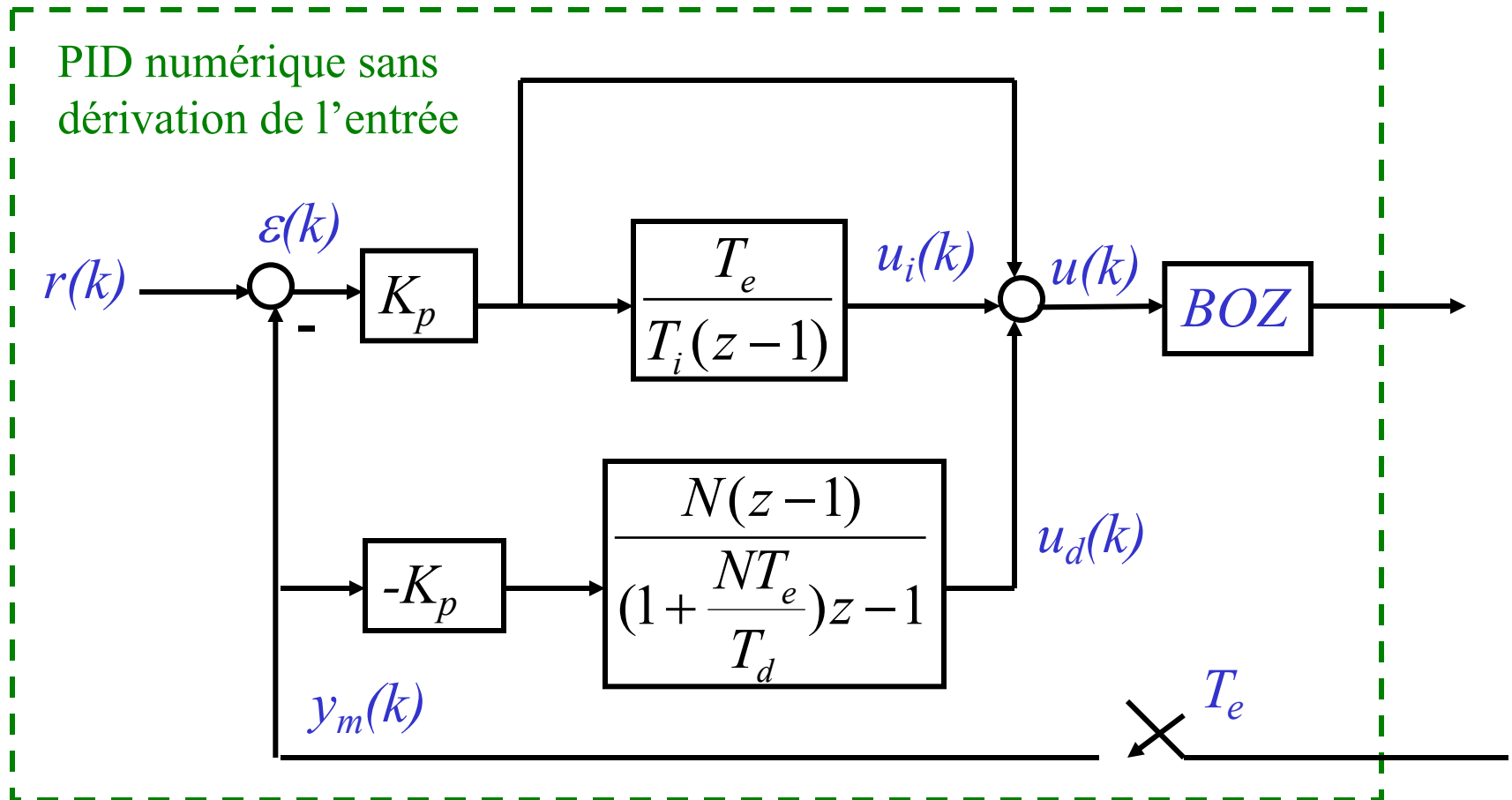
### D. Schéma forme standard :



# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (5)

### D. Schéma forme standard (suite):



# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (6)

---

### E. Equations aux différences :

Correcteur PID sans dérivation de l'entrée:

$$\varepsilon(k) = r(k) - y_m(k)$$

$$u(k) = K_p \varepsilon(k) + u_i(k) + u_d(k)$$

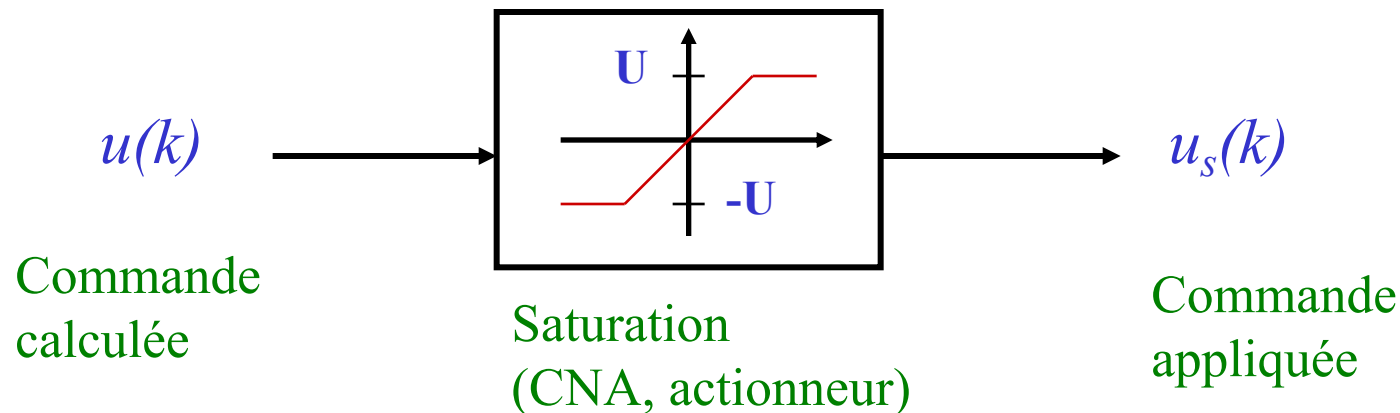
$$u_i(k) = u_i(k-1) + K_p \frac{T_e}{T_i} \varepsilon(k-1)$$

$$u_d(k) = \frac{1}{1 + \frac{NT_e}{T_d}} u_d(k-1) - \frac{K_p N}{1 + \frac{NT_e}{T_d}} [y_m(k) - y_m(k-1)]$$

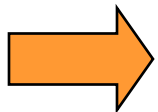
# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (8)

### F. Anti-saturation du terme intégral (anti-windup):



$$u_s(k) = \begin{cases} U & \text{si } u(k) > U \\ u(k) & \text{si } |u(k)| \leq U \\ -U & \text{si } u(k) < -U \end{cases}$$



Risque d'emballement du terme intégral en cas de saturation

# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (9)

---

### F. Anti-saturation du terme intégral (suite):

#### 1. **Intégration conditionnelle:**

Principe : bloquer l'intégration quand la commande sature

$$\varepsilon(k) = r(k) - y_m(k)$$

$$u_0(k) = K_p \varepsilon(k) + u_i(k-1) + K_p \frac{T_e}{T_i} \varepsilon(k-1) + u_d(k)$$

$$u_i(k) = \begin{cases} u_i(k-1) + K_p \frac{T_e}{T_i} \varepsilon(k-1) & \text{si } |u_0(k)| \leq \mathbf{U} \\ u_i(k-1) & \text{si } |u_0(k)| > \mathbf{U} \end{cases}$$

$$u(k) = K_p \varepsilon(k) + u_i(k) + u_d(k)$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 3 PID numériques (10)

---

### F. Anti-saturation du terme intégral (suite):

#### 2. Anti-saturation standard:

Principe : recalculer le terme intégral pour ne pas saturer

$$\varepsilon(k) = r(k) - y_m(k)$$

$$u_0(k) = K_p \varepsilon(k) + u_i(k-1) + K_p \frac{T_e}{T_i} \varepsilon(k-1) + u_d(k)$$

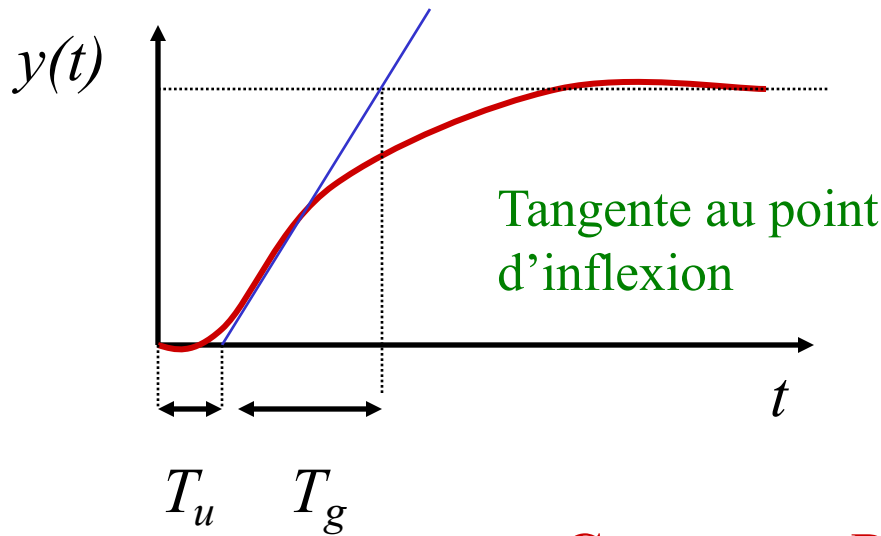
$$u_i(k) = \begin{cases} \mathbf{U} - (K_p \varepsilon(k) + u_d(k)) & \text{si } u_0(k) > \mathbf{U} \\ u_i(k-1) + K_p \frac{T_e}{T_i} \varepsilon(k-1) & \text{si } |u_0(k)| \leq \mathbf{U} \\ -\mathbf{U} - (K_p \varepsilon(k) + u_d(k)) & \text{si } u_0(k) < -\mathbf{U} \end{cases}$$

$$u(k) = K_p \varepsilon(k) + u_i(k) + u_d(k) = u_s(k)$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 4 Auto-réglage des PID (1)

### A. Méthode de Takahashi basée sur la réponse indicielle



Correcteur P:  $K_p = \frac{T_g}{T_u + T_e}$

Correcteur PI:  $K_p = \frac{0,9 T_g}{T_u + \frac{T_e}{2}} - \frac{0,135 T_g T_e}{\left(T_u + \frac{T_e}{2}\right)^2}$   $\frac{K_p}{T_i} = \frac{0,27 T_g T_e}{\left(T_u + \frac{T_e}{2}\right)^2}$



# Synthèse des correcteurs numériques

## 4 Auto-réglage des PID (2)

---

### A. Méthode de Takahashi basée sur la réponse indicielle (suite)

Correcteur PID:

$$K_p = \frac{1,2 T_g}{T_u + T_e} - \frac{0,3 T_g T_e}{\left(T_u + \frac{T_e}{2}\right)^2}$$

$$\frac{K_p}{T_i} = \frac{0,6 T_g T_e}{\left(T_u + \frac{T_e}{2}\right)^2}$$

$$K_p T_d = \frac{T_g}{2T_e}$$

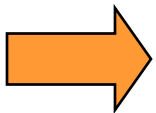
# Synthèse des correcteurs numériques

## 4 Auto-réglage des PID (3)

---

### B. Méthode de Takahashi en boucle fermée:

Principe : augmenter le gain en boucle fermée avec une correction proportionnelle jusqu'à la mise en oscillation



Gain critique :  $K_c$

Période des oscillations :  $T_c$

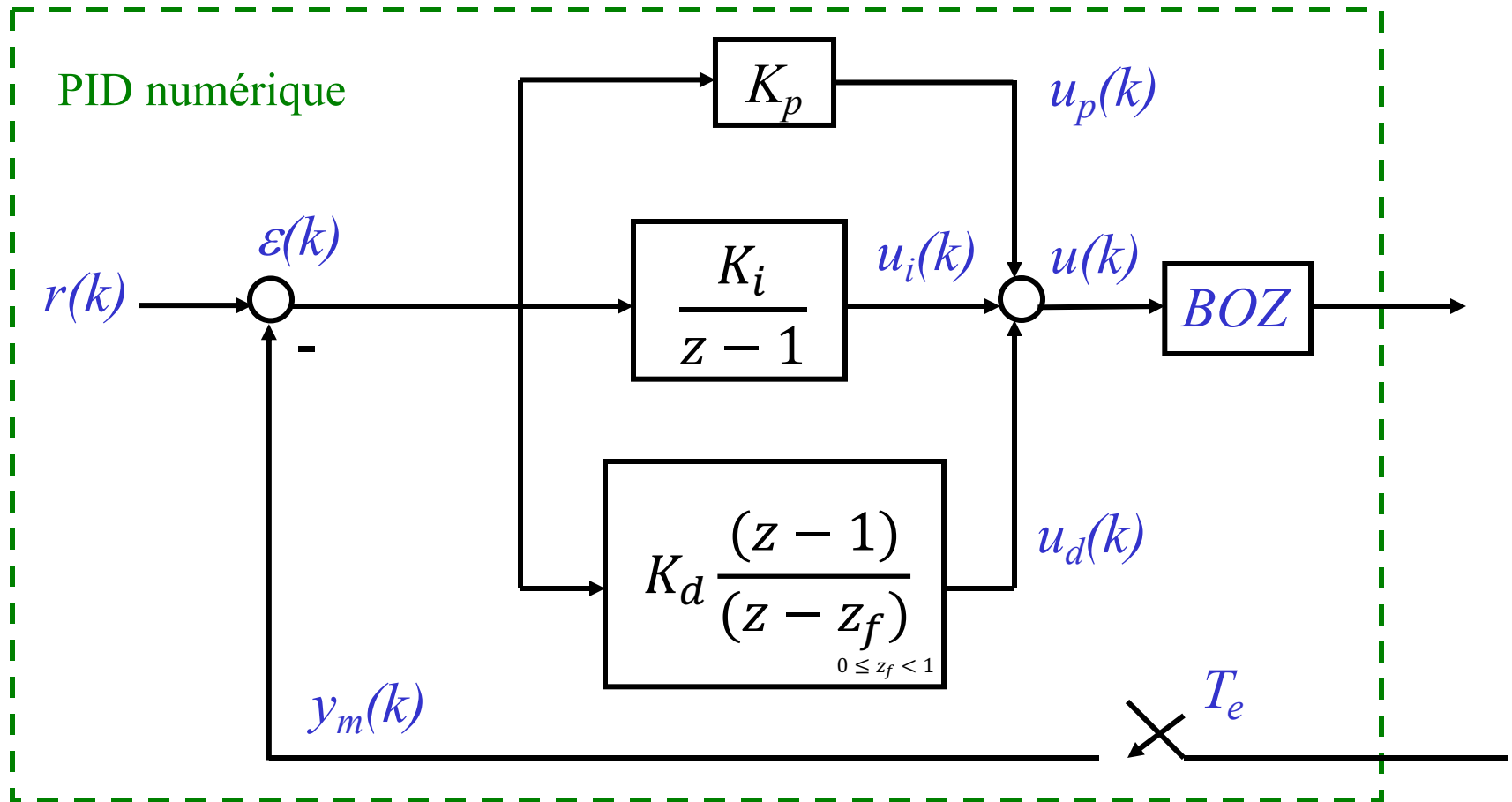
Correcteur PID:

$$K_p = 0,6K_c \left(1 - \frac{T_e}{T_c}\right) \quad \frac{K_p}{T_i} = \frac{1,2 K_c}{T_c} \quad K_p T_d = \frac{0,3 K_c T_c}{4}$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## Remarque

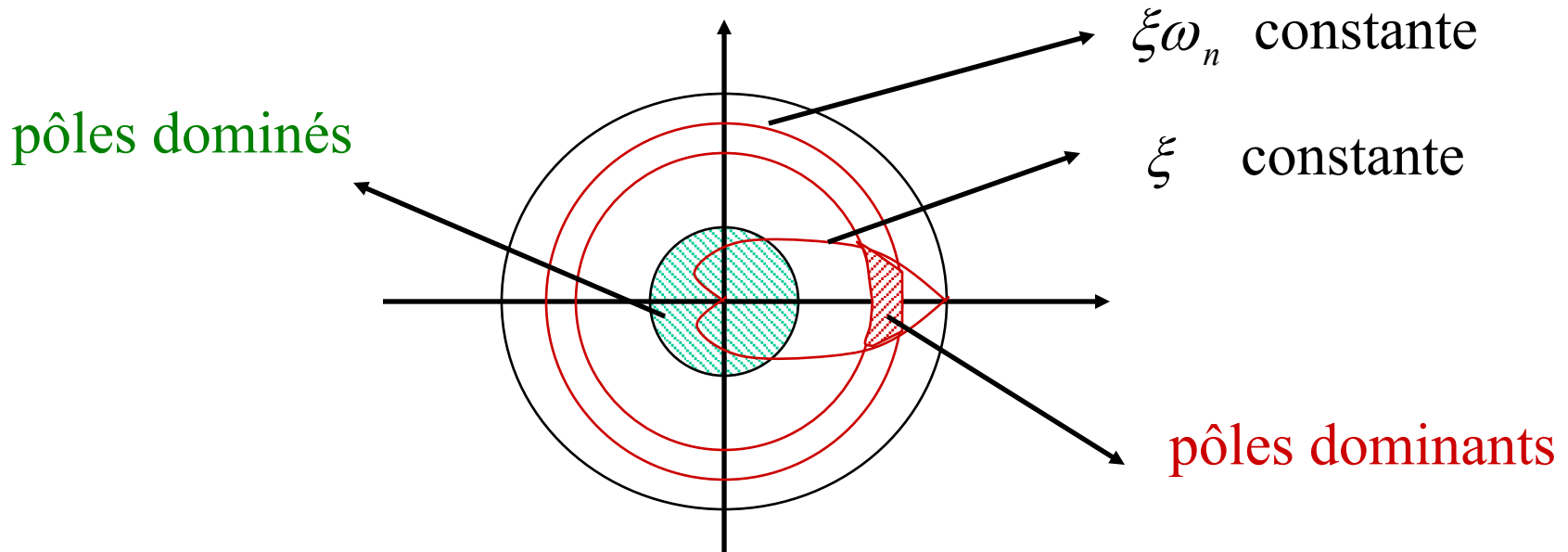
Forme parallèle du PID numérique : un réglage plus pratique



# Synthèse des correcteurs numériques

## 5 Placement des pôles dominants

Principe: placer à l'aide du lieu d'Evans les pôles dominants de la fonction de transfert du système bouclé dans une région désirée



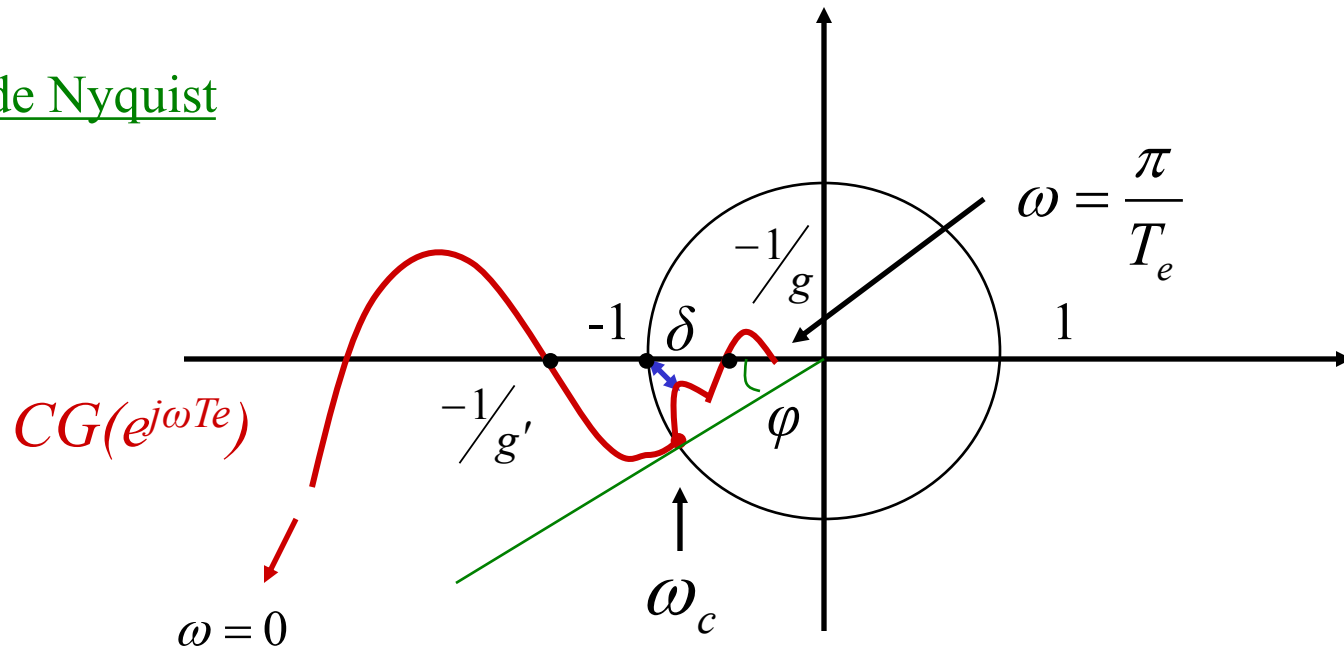
**Pôles dominants:**  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n \rightarrow z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_e} e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n T_e}$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 6 Robustesse (1)

### Marges de stabilité

### Diagramme de Nyquist



### Critère de Nyquist:

Le système asservi (en boucle fermée) est stable ssi  $CG(e^{j\omega T_e})$  encercle le point  $-1$  dans le sens anti-horlogique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la boucle ouverte

# Synthèse des correcteurs numériques

## 6 Robustesse (2)

---

### Marges de stabilité (suite)

#### A. Marge de phase $\varphi$

= déphasage qui entraîne l'instabilité (retard de phase)

#### B. Marge de retard $\tau$

= retard qui entraîne l'instabilité

soit  $\{\omega_{ci}\}$  les pulsations telles que  $\left|CG(e^{j\omega_{ci}T_e})\right| = 1$

soit  $\varphi_i = \pi + \arg CG(e^{j\omega_{ci}T_e})$

$$\Rightarrow \tau = \min_i \frac{\varphi_i}{\omega_{ci}T_e}$$

# Synthèse des correcteurs numériques

## 6 Robustesse (3)

---

### Marges de stabilité (suite)

C. Marges de gain  $g$  et  $g' < 1$

= gain qui entraîne l'instabilité

D. Marge de module  $\delta$

= distance minimale entre  $CG(e^{j\omega T_e})$  et  $-1$

$$\delta = \inf_{\omega \in \mathbf{R}} \left\{ \left| 1 + CG(e^{j\omega T_e}) \right| \right\} = \frac{1}{\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \left| \frac{1}{1 + CG(e^{j\omega T_e})} \right|} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\|S\|_{\infty}}$$

$\| \cdot \|_{\infty} = \text{norme } H_{\infty} \quad \text{ou} \quad L_{\infty}$