Lab 5 – aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Barbara Doncer

1. Polecenie

Dla funkcji f(x) zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć jej wartości w *n* dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi.

Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji.

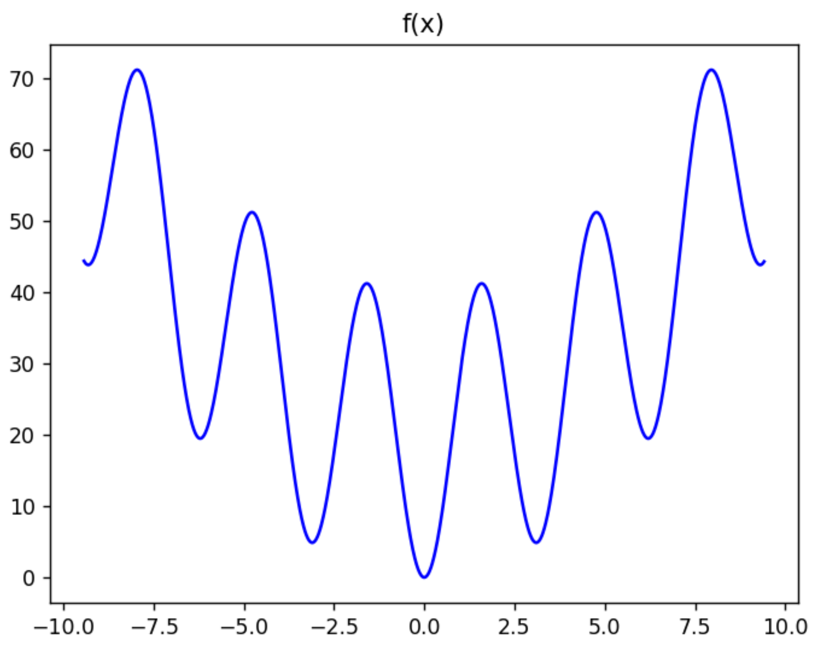
Oszacować błędy przybliżenia.

Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

2. Zadana funkcja i jej wykres

$$f(x) = 20 + \frac{x^2}{2} - 20 \cdot \cos(2x)$$

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$



Wykres 2.1 Funkcja f(x) na zadanym przedziale

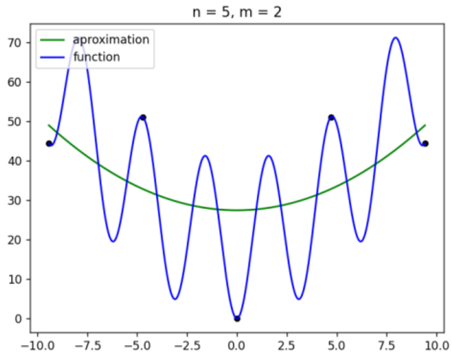
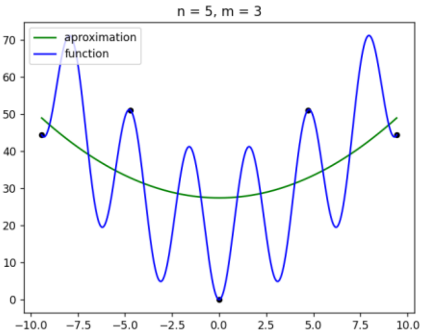
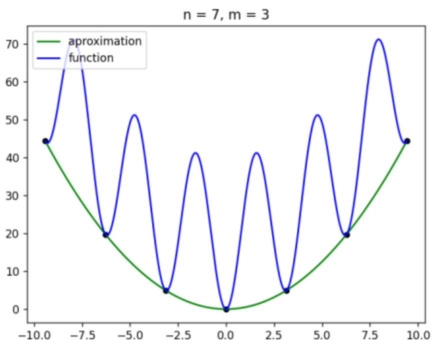
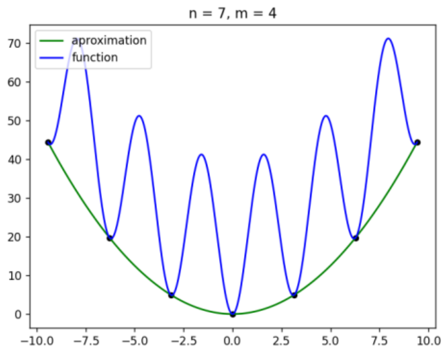
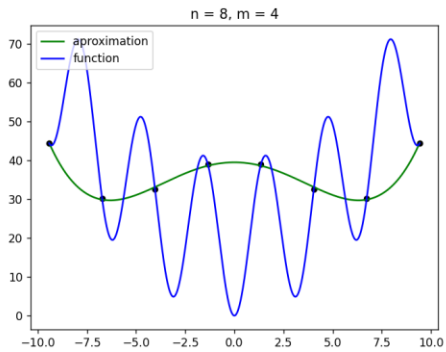
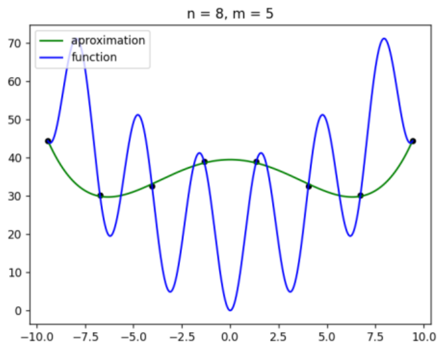
3. Wyniki aproksymacji

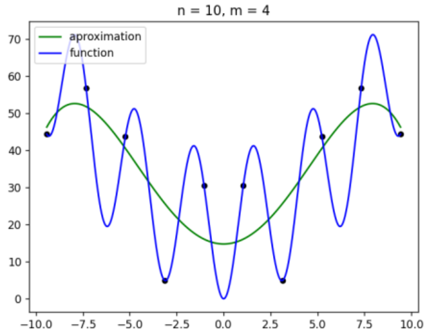
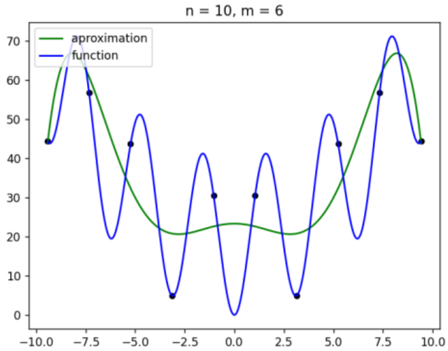
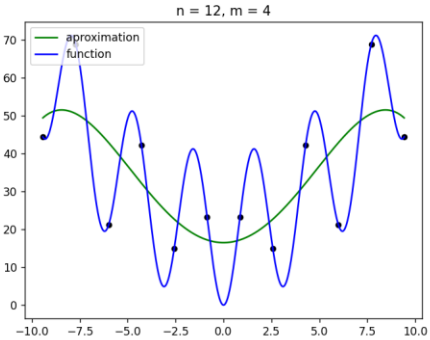
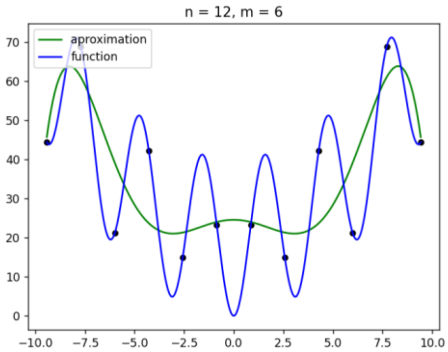
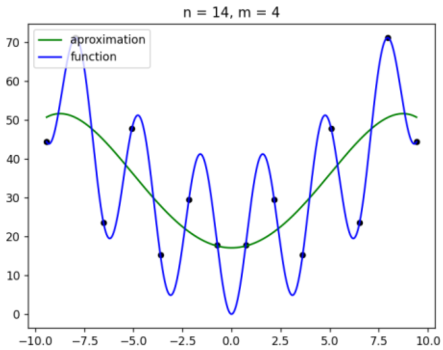
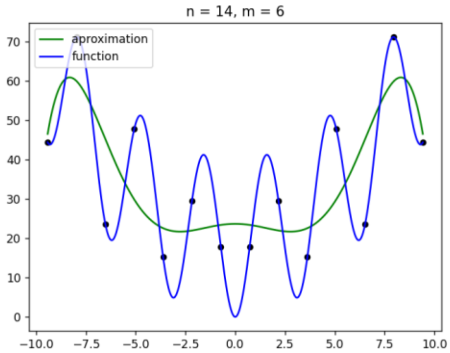
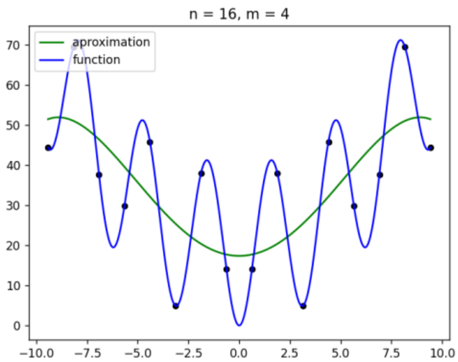
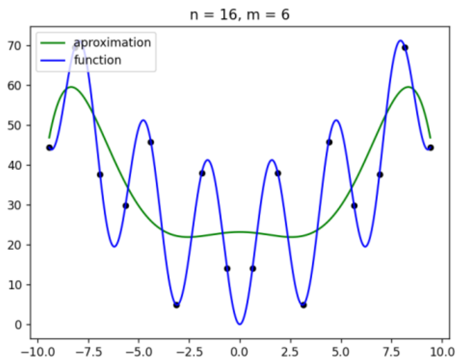
Poniżej przedstawione są wykresy funkcji (niebieski) oraz wyniku aproksymacji (zielony). Zastosowano oznaczenie:

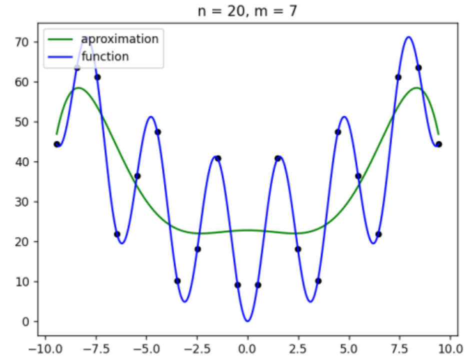
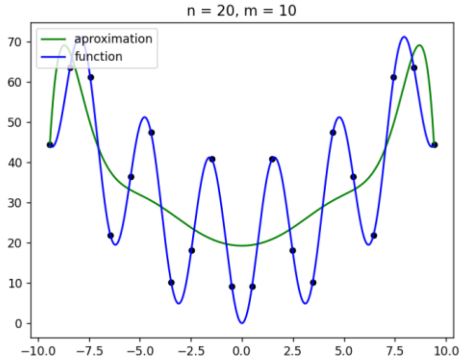
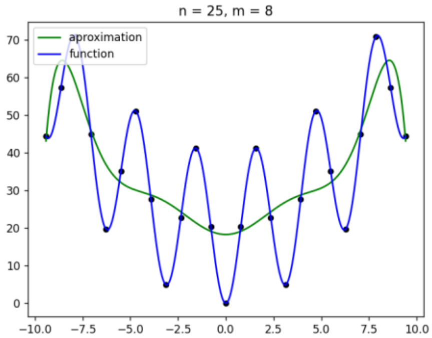
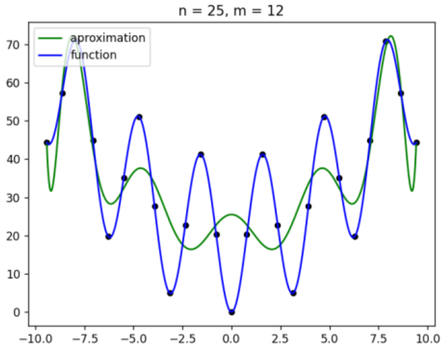
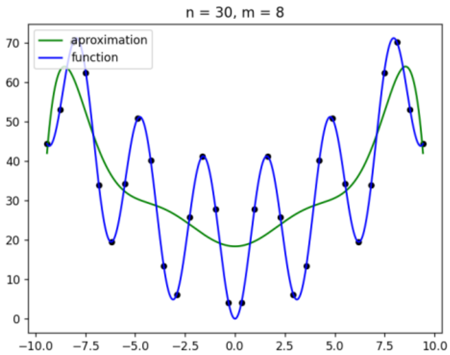
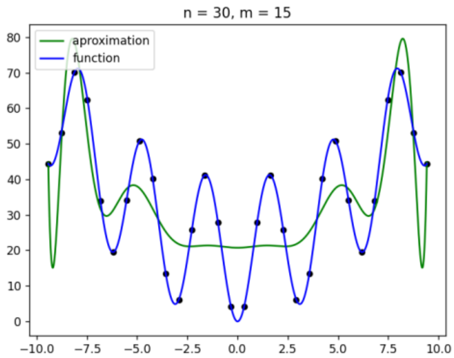
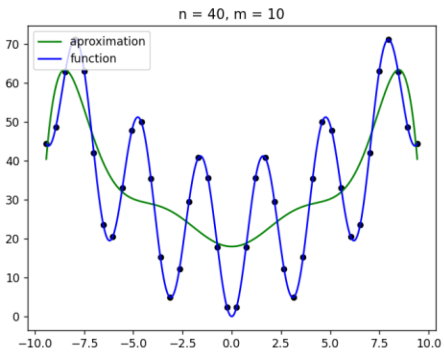
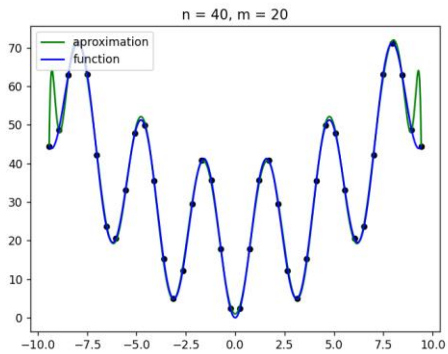
$$n - liczba\ węzłów$$

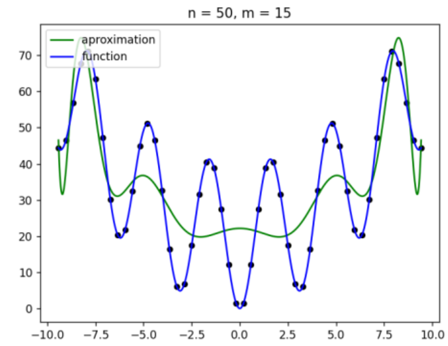
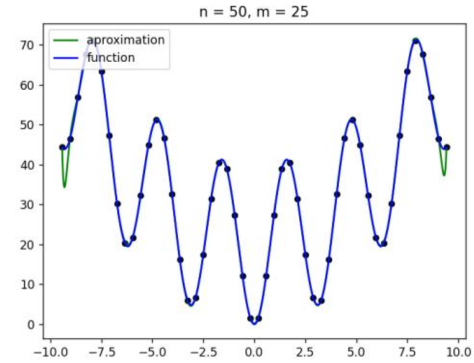
$m - stopień\ funkcji\ aproksymującej$ (napisany nad każdym wykresem)

Tabela 3.1 Wykresy aproksymacji dla różnej liczby węzłów

n		
5	m = 2 	m = 3 
7	m = 3 	m = 4 
8	m = 4 	m = 5 

10	m = 4 	m = 6 
12	m = 4 	m = 6 
14	m = 4 	m = 6 
16	m = 4 	m = 6 

20	m = 7 	m = 10 
25	m = 8 	m = 12 
30	m = 8 	m = 15 
40	m = 10 	m = 20 

50	m = 15	m = 25
		

4. Błędy aproksymacji

Sprawdzenie dokładności wielomianu odbyło się na dwa sposoby. Kolorem niebieskim zostały oznaczone zauważalnie lepsze wyniki dla każdego n. Zastosowano oznaczenia:

$$f(x) - funkcja\ podana\ w\ zadaniu$$

$$W(x) - wyznaczony\ wielomian$$

$$N - ilość\ punktów, w\ których\ zostały\ obliczone\ błędy$$

$$N = 1000$$

a. <u>Błąd kwadratowy</u>

$$\sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - W(x_i)\right)^2$$

Tabela 4.1 Błąd kwadratowy dla poszczególnych przypadków

n	m	błąd kwadratowy
5	2	2,41E+05
	3	2,41E+05
7	3	5,99E+05
	4	5,99E+05
8	4	4,06E+05
	5	4,06E+05
10	4	2,14E+05
	6	2,03E+05
12	4	2,04E+05
	6	1,93E+05
14	4	2,01E+05
	6	1,87E+05
16	4	2,01E+05
	6	1,85E+05
20	7	1,84E+05
	10	1,77E+05

25	8	1,71E+05
	12	1,38E+05
30	8	1,70E+05
	15	1,49E+05
40	10	1,69E+05
	20	9,95E+03
50	15	1,30E+05
	25	1,32E+03

b. Maksymalna różnica

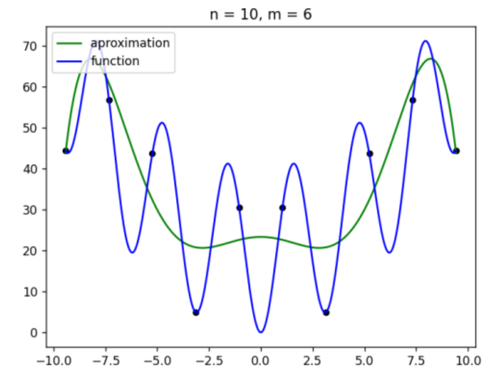
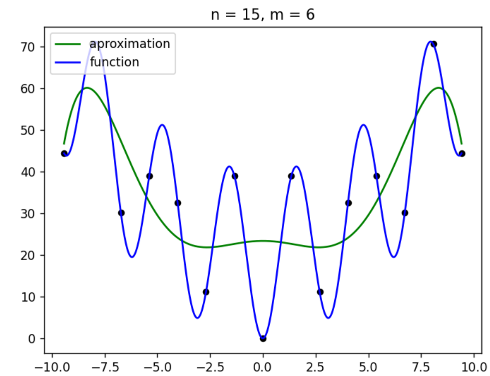
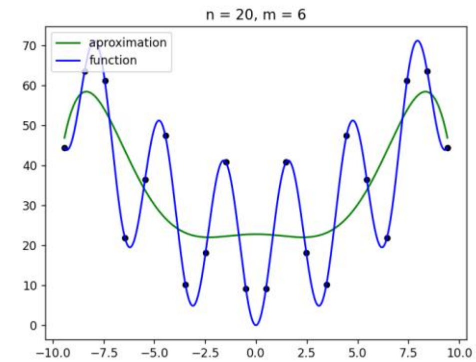
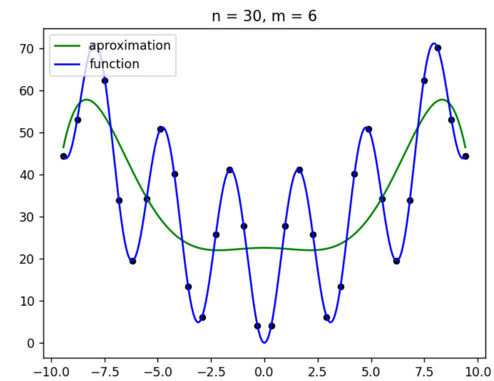
$$\max_{i=1,\dots,N} |f(x_i) - w(x_i)|$$

Tabela 4.2 Maksymalna różnica dla poszczególnych przypadków

n	m	maksymalna różnica
5	2	2,85E+01
	3	2,85E+01
7	3	4,00E+01
	4	4,00E+01
8	4	3,95E+01
	5	3,95E+01
10	4	2,76E+01
	6	2,67E+01
12	4	2,48E+01
	6	2,49E+01
14	4	2,39E+01
	6	2,39E+01
16	4	2,34E+01
	6	2,33E+01
20	7	2,29E+01
	10	2,11E+01
25	8	2,20E+01
	12	2,55E+01
30	8	2,19E+01
	15	2,93E+01
40	10	2,23E+01
	20	2,03E+01
50	15	2,21E+01
	25	9,54E+00

5. Analiza dla m = 6.

Tabela 5.1 Wykresy dla m = 6.

n	wykres
10	
15	
20	
30	

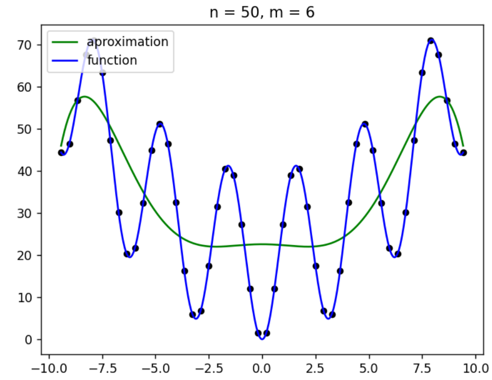
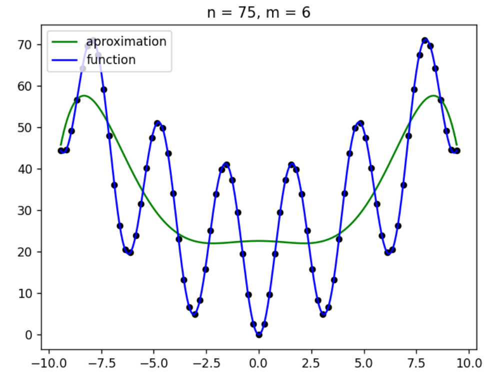
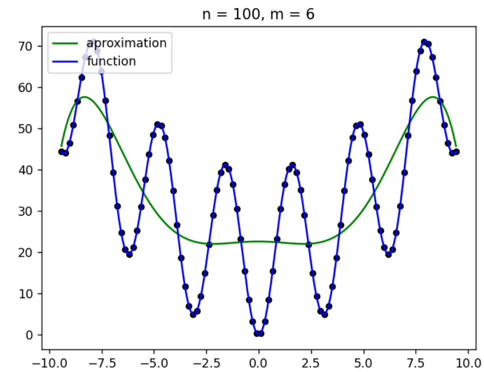
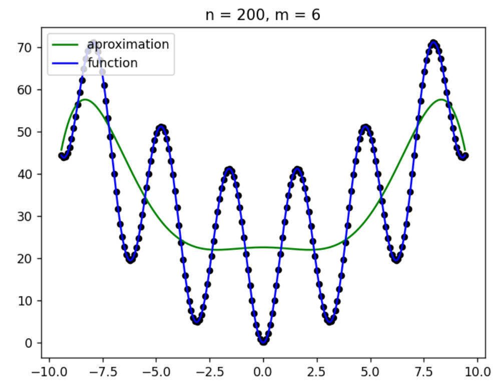
50	n = 50, m = 6 aproximation function
75	n = 75, m = 6 aproximation function
100	n = 100, m = 6 aproximation function
200	n = 200, m = 6 aproximation function

Tabela 5.2 Błąd kwadratowy dla $m = 6$ i różnych wartości n

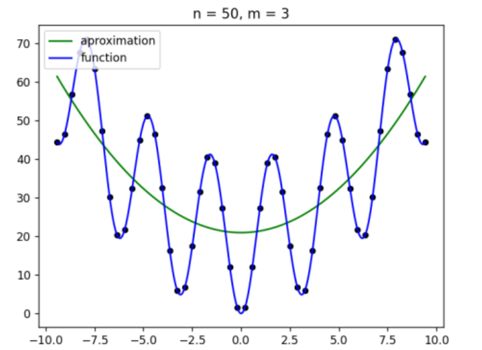
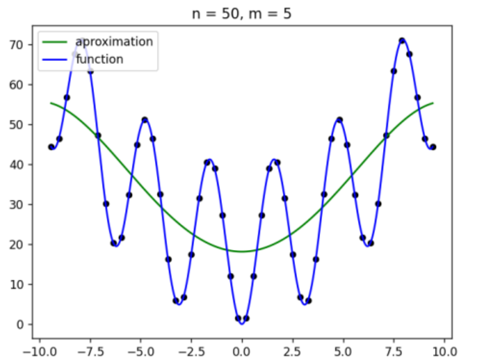
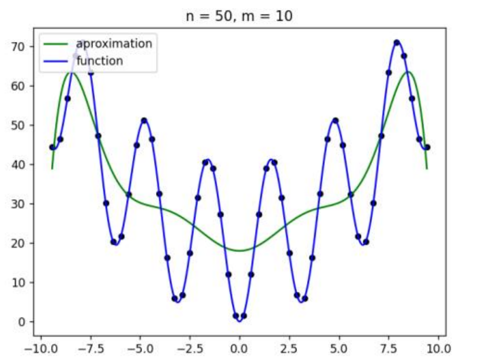
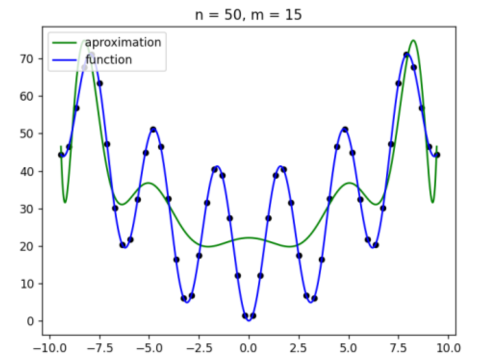
n	błąd kwadratowy
10	2,03E+05
15	1,86E+05
20	1,84E+05
30	1,84E+05
50	1,84E+05
75	1,84E+05
100	1,84E+05
200	1,84E+05

Tabela 5.3 Maksymalna różnica dla $m = 6$ i różnych wartości n

n	maksymalna różnica
10	2,67E+01
15	2,36E+01
20	2,29E+01
30	2,27E+01
50	2,26E+01
75	2,26E+01
100	2,26E+01
200	2,26E+01

6. Analiza dla n = 50.

Tabela 6.1 Wykresy dla n = 50.

m	wykres
3	
5	
10	
15	

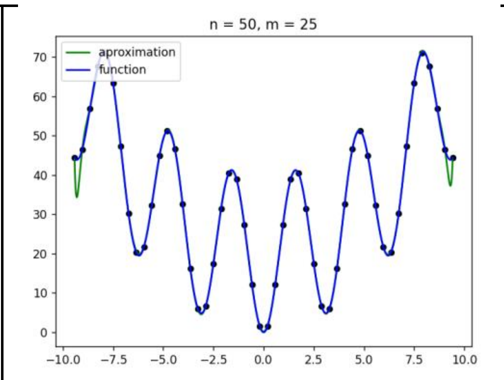
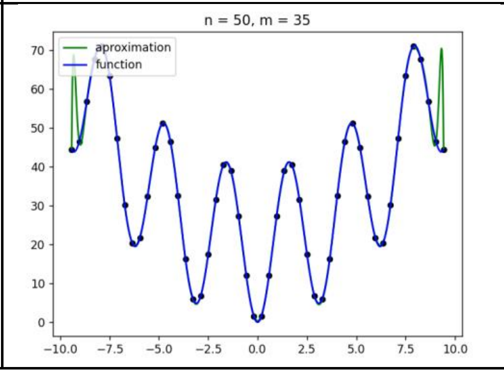
25	
35	

Tabela 6.2 Błąd kwadratowy dla n = 50 i różnych wartości m

m	błąd kwadratowy
3	2,01E+05
5	1,98E+05
10	1,68E+05
15	1,30E+05
25	1,32E+03
35	2,35E+06

Tabela 6.3 Maksymalna różnica dla n = 50 i różnych wartości m

m	maksymalna różnica
3	2,18E+01
5	2,24E+01
10	2,23E+01
15	2,21E+01
25	9,54E+00
35	4,99E+02

7. Wnioski końcowe
   - błędy aproksymacji zmniejszają się wraz ze wzrostem ilości węzłów
   - we wszystkich badanych przypadkach wraz ze wzrostem stopnia funkcji aproksymującej rośnie dokładność przybliżenia funkcji (zmniejsza się błąd kwadratowy) – oczywiście do pewnej ilości węzłów, przy której błąd zaczyna utrzymywać się na pewnym poziomie
   - na końcówkach przedziałów często występują duże wychylenia, dlatego trudno zauważyć jakąś tendencję, jeśli chodzi o zmiany maksymalnej różnicy