

## Lab 3 – interpolacja

Barbara Doncer

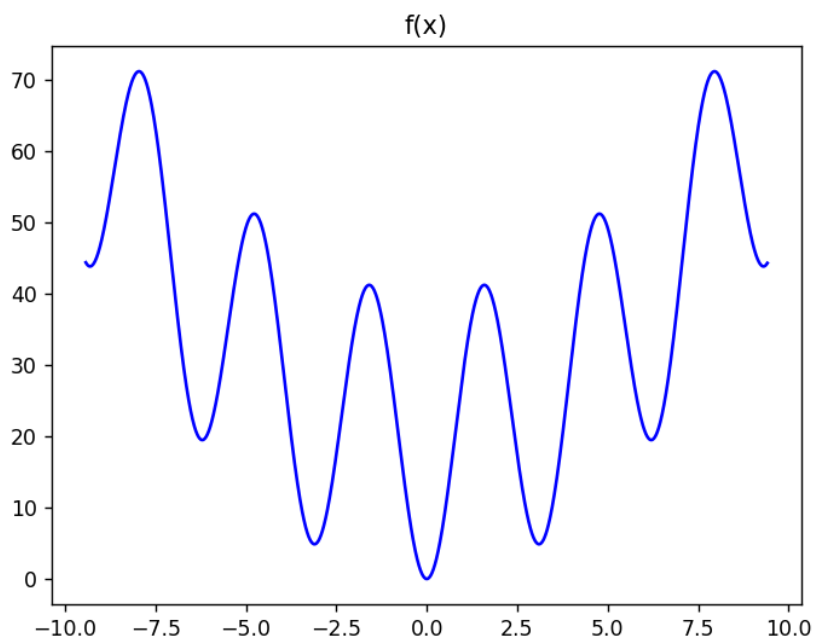
### 1. Polecenie

Dla funkcji  $f(x)$  wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki. Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

### 2. Zadana funkcja i jej wykres

$$f(x) = 20 + \frac{x^2}{2} - 20 \cdot \cos(2x)$$

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$



Wykres 2.1 Funkcja  $f(x)$  na zadanym przedziale

## FUNKCJA SKLEJANA 2-GO STOPNIA

### 3. Wyznaczenie

Przy  $n$  punktach będziemy wyznaczać  $n - 1$  funkcji w postaci:

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i + c_i \quad i \in \{0, \dots, n - 2\}$$

Mamy więc  $3n - 3$  niewiadomych.

Wiemy, że do każdej z tych funkcji należą dwa znane punkty:

$$\begin{cases} a_i x_j^2 + b_i x_j + c_i = y_j \\ a_i x_{j+1}^2 + b_i x_{j+1} + c_i = y_{j+1} \end{cases} \quad i \in \{0, \dots, n - 2\}, j \in \{0, \dots, n - 1\}$$

To daje nam  $2n - 2$  równań.

Kolejne  $n - 2$  równań daje nam przyrównanie do siebie pochodnych sąsiednich funkcji:

$$2a_i x_j + b_i = 2a_{i+1} x_j + b_{i+1} \Leftrightarrow 2a_i x_j + b_i - 2a_{i+1} x_j - b_{i+1} = 0 \\ i \in \{0, \dots, n - 3\}, j \in \{0, \dots, n - 3\}$$

Brakuje nam więc 1 informacji. Określimy ją za pomocą warunku brzegowego.

### 4. Warunki brzegowe

#### a) warunek brzegowy 1

Ustalamy, że  $a_0 = 0$ . Sprawi to, że funkcja między dwoma pierwszymi punktami będzie liniowa.

#### b) warunek brzegowy 2

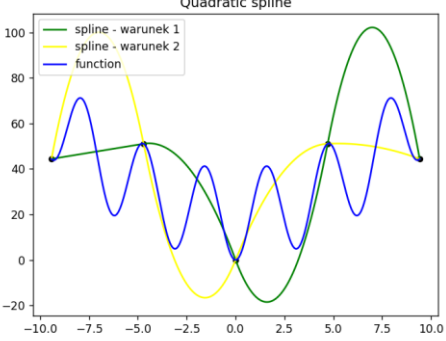
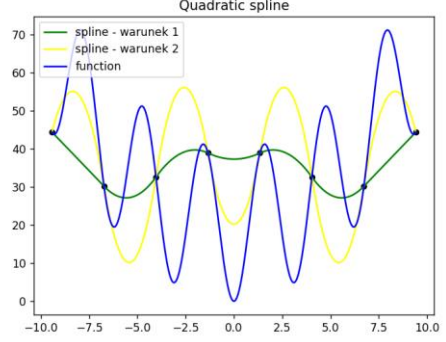
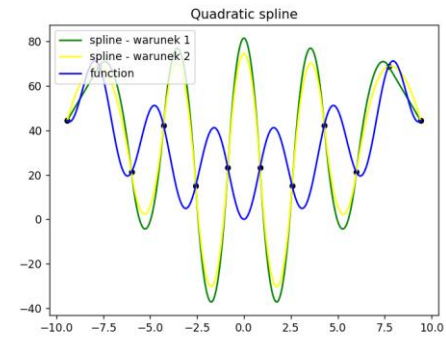
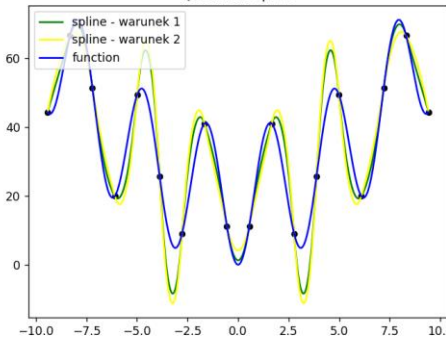
Ustalamy, że  $s'(x_n) = f'(x_n)$ .

## 5. Wyniki

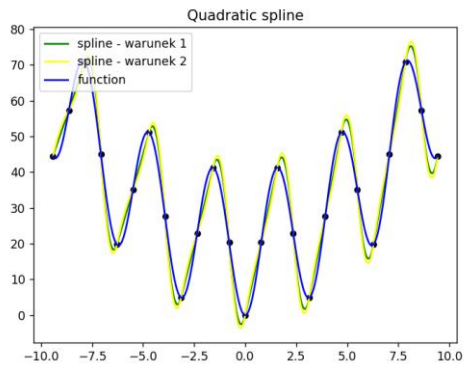
Poniżej przedstawione są wykresy funkcji (niebieski) oraz wyniku obliczeń z warunkiem brzegowym 1 (zielony) i warunkiem brzegowym 2 (żółty). Zastosowano oznaczenie:

$n$  – liczba węzłów

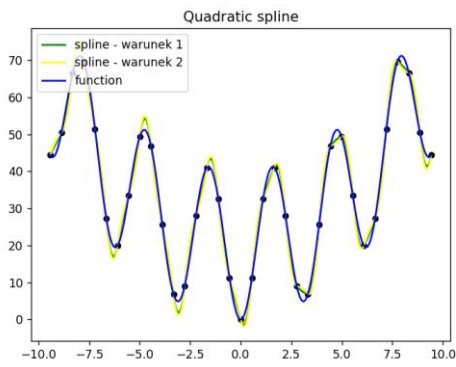
Tabela 5.1 Wykresy dla funkcji sklejanej 2 stopnia.

n	wykres
5	
8	
12	
18	

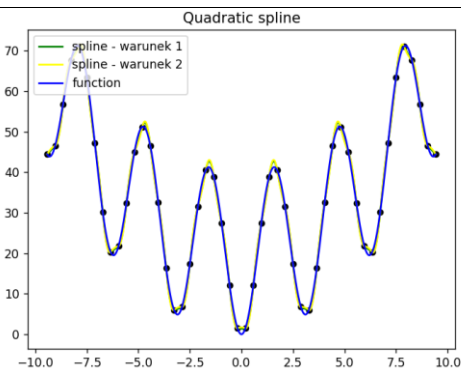
25



35



50



## 6. Błędy interpolacji

Sprawdzenie dokładności odbyło się na dwa sposoby. Kolorem niebieskim zostały oznaczone najlepsze wyniki. Zastosowano oznaczenia:

$f(x)$  – funkcja podana w zadaniu

$W(x)$  – wyznaczony wielomian

$N$  – ilość punktów, w których zostały obliczone błędy

$$N = 1000$$

### a. Błąd kwadratowy

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - W(x_i))^2$$

Tabela 6.6.1 Błąd kwadratowy dla poszczególnych przypadków

n	warunek brzegowy 1	warunek brzegowy 2
5	9,58E+05	8,99E+05
8	3,90E+05	4,93E+05
12	1,63E+06	1,30E+06
18	4,14E+04	6,82E+04
25	1,42E+04	2,32E+15
35	4,24E+03	6,68E+03
50	1,08E+03	1,68E+03

### b. Maksymalna różnica

$$\max_{i=1,\dots,N} |f(x_i) - w(x_i)|$$

Tabela 6.6.2 Maksymalna różnica dla poszczególnych przypadków

n	warunek brzegowy 1	warunek brzegowy 2
5	7,78E+01	7,59E+01
8	3,73E+01	4,90E+01
12	8,15E+01	7,46E+01
18	1,46E+01	1,75E+01
25	5,99E+00	7,43E+00
35	3,07E+00	3,80E+00
50	1,48E+00	1,83E+00

## 7. Wnioski

- warunek brzegowy 1 daje dokładniejsze wyniki niż warunek brzegowy 2
- błędy zmniejszają się wraz ze wzrostem liczby węzłów (nie występuje efekt Rungego)

## FUNKCJA SKLEJANA 3-GO STOPNIA

### 8. Wyznaczenie

Przy  $n$  punktach będziemy wyznaczać  $n - 1$  funkcji w postaci:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{s_i''(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i''(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x)$$
$$i \in \{0, \dots, n - 2\}$$

Po przyjęciu następujących oznaczeń:

$$\sigma_i = \frac{1}{6}s''(x_i)$$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

Dostajemy:

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1$$

Otrzymujemy w ten sposób  $n-2$  równania, a mamy  $n$  niewiadomych.

Brakuje nam więc 2 informacji. Określimy je za pomocą warunków brzegowych.

### 9. Warunki brzegowe

a) warunek brzegowy 1 – natural cubic spline

Ustalamy, że  $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$ .

b) warunek brzegowy 2

Zakładamy, że przez 4 pierwsze punkty przechodzi jedna funkcja sześcienna (taka sama sytuacja z 4 ostatnimi punktami). Otrzymujemy dzięki temu 2 dodatkowe równania:

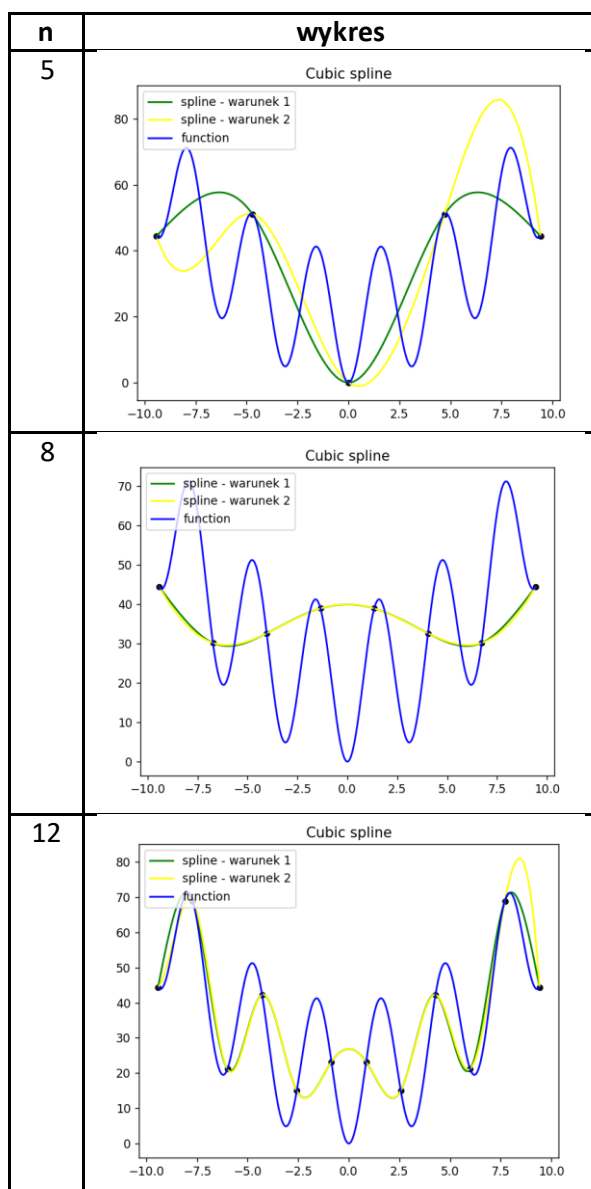
$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases}$$

## 10. Wyniki

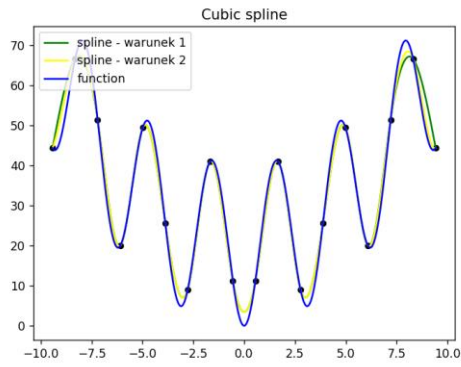
Poniżej przedstawione są wykresy funkcji (niebieski) oraz wyniku obliczeń z warunkiem brzegowym 1 (zielony) i warunkiem brzegowym 2 (żółty). Zastosowano oznaczenie:

$n$  – liczba węzłów

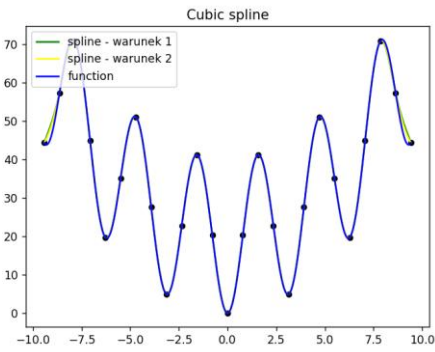
Tabela 10. 1 Wykresy dla funkcji sklejanej 3 stopnia.



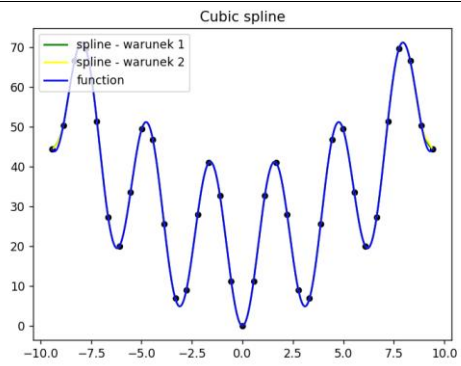
18



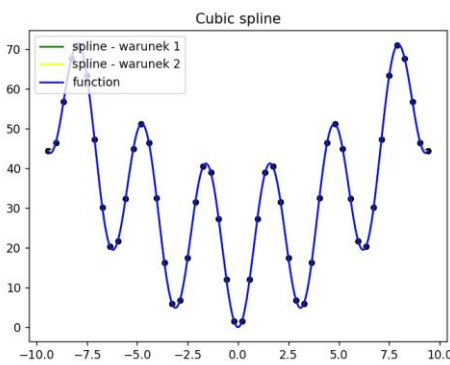
25



35



50





## 11. Błędy interpolacji

Sprawdzenie dokładności odbyło się na dwa sposoby. Kolorem niebieskim zostały oznaczone najlepsze wyniki. Zastosowano oznaczenia:

$f(x)$  – funkcja podana w zadaniu

$W(x)$  – wyznaczony wielomian

$N$  – ilość punktów, w których zostały obliczone błędy

$$N = 1000$$

### a. Błąd kwadratowy

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - W(x_i))^2$$

Tabela 11.1 Błąd kwadratowy dla poszczególnych przypadków

n	warunek brzegowy 1	warunek brzegowy 2
5	3,82E+05	5,74E+05
8	3,89E+05	3,97E+05
12	1,76E+05	1,93E+05
18	7,60E+03	4,10E+03
25	5,60E+02	3,74E+02
35	6,45E+01	8,70E+01
50	8,59E+00	4,74E+00

### b. Maksymalna różnica

$$\max_{i=1,\dots,N} |f(x_i) - w(x_i)|$$

Tabela 11.2 Maksymalna różnica dla poszczególnych przypadków

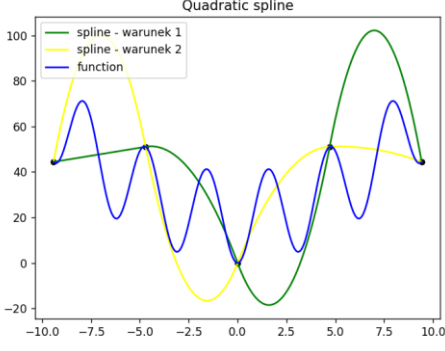
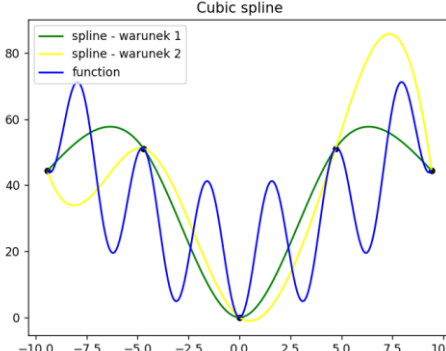
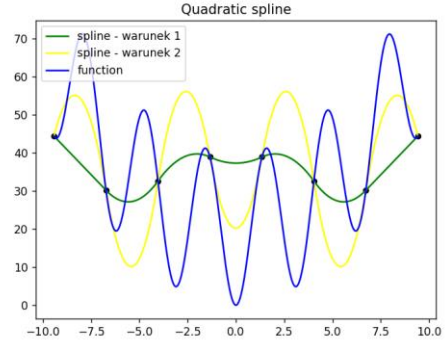
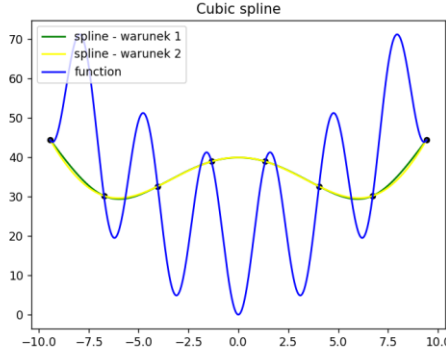
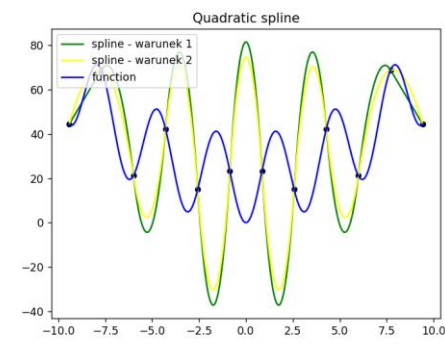
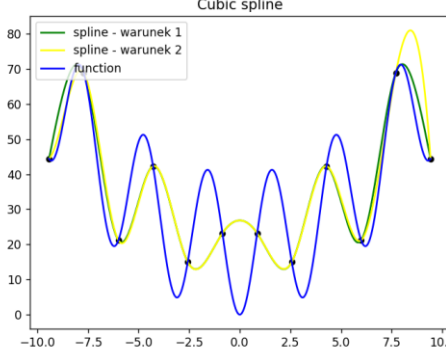
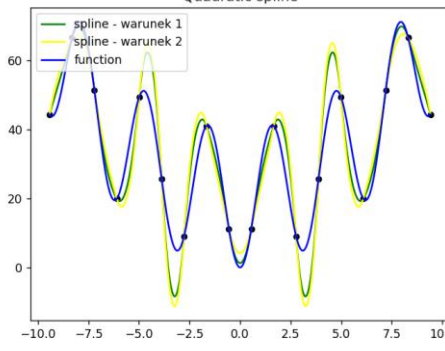
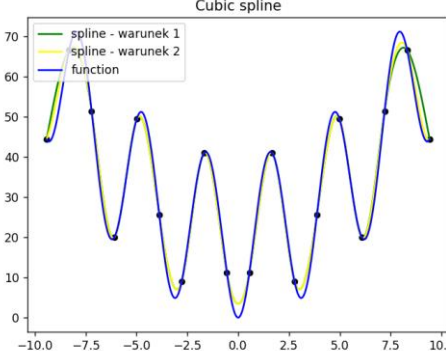
n	warunek brzegowy 1	warunek brzegowy 2
5	3,82E+01	5,88E+01
8	3,99E+01	3,99E+01
12	2,68E+01	2,68E+01
18	8,11E+00	5,44E+00
25	3,31E+00	2,66E+00
35	1,43E+00	1,97E+00
50	6,35E-01	4,83E-01

## 12. Wnioski

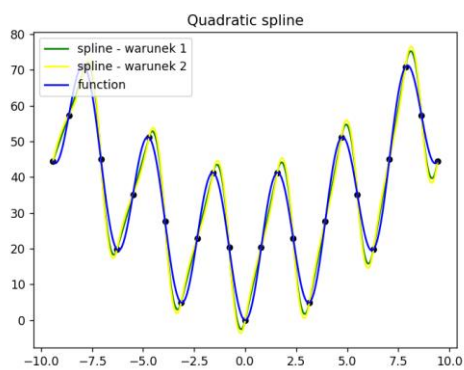
- trudno zauważyć zdecydowaną przewagę któregoś warunku brzegowego nad drugim
- błędy zmniejszają się wraz ze wzrostem liczby węzłów (nie występuje efekt Rungego)

## PORÓWNANIE WYNIKÓW FUNKCJI SKLEJANEJ 2 I 3-GO STOPNIA

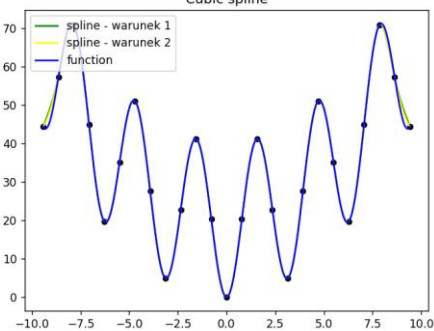
*Tabela. Wykresy wyników dla splinów 2 i 3-go stopnia*

n	2-go stopnia	3-go stopnia
5		
8		
12		
18		

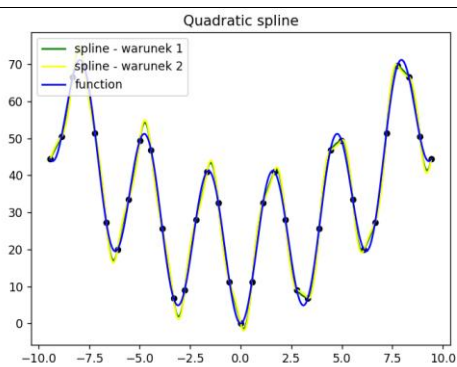
25



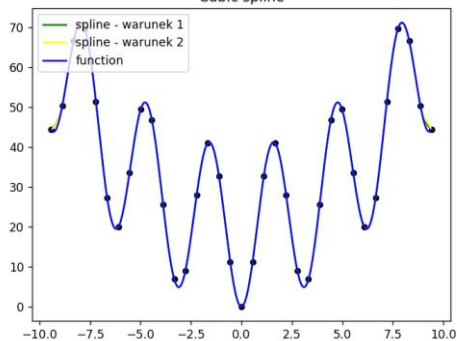
Cubic spline



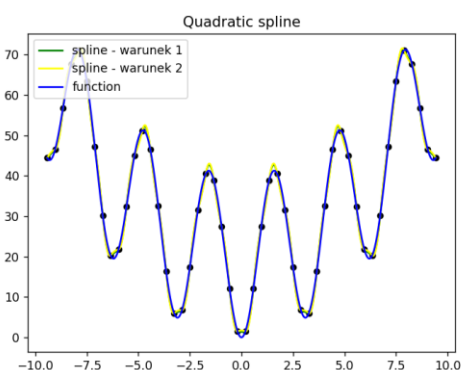
35



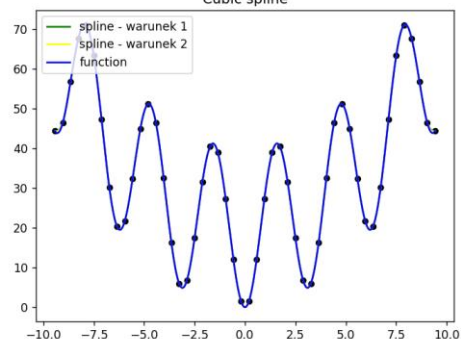
Cubic spline



50



Cubic spline



### Wnioski:

- interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia daje dokładniejsze wyniki niż interpolacja funkcjami sklejanymi 2 stopnia
- wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi 3 stopnia mniej wychylają się w górę i dół niż wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi 2 stopnia