Lab 2 – interpolacja

Barbara Doncer

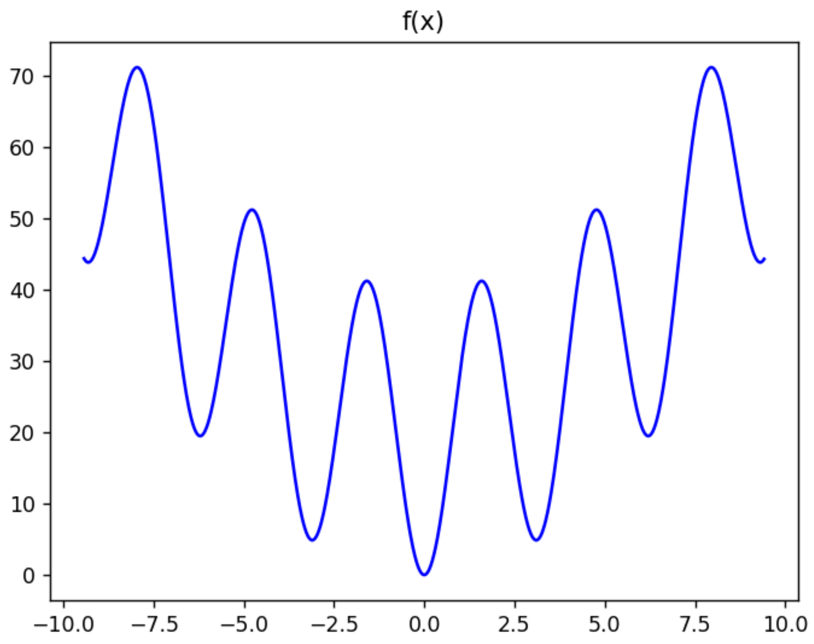
1. Polecenie

Wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa . Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2. Zadana funkcja i jej wykres

$$f(x) = 20 + \frac{x^2}{2} - 20 \cdot \cos(2x)$$

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$



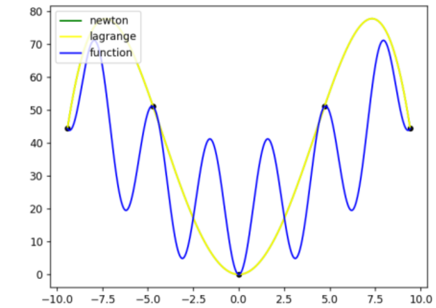
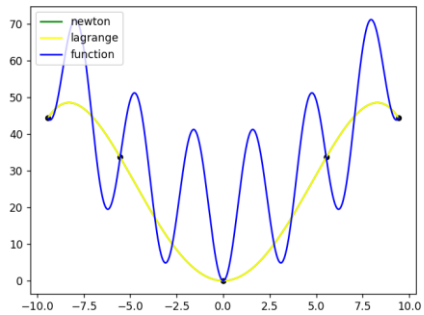
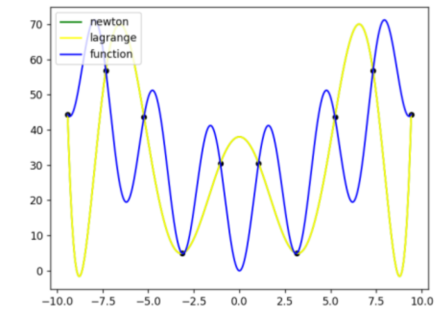
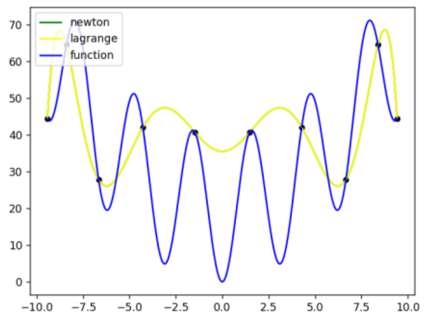
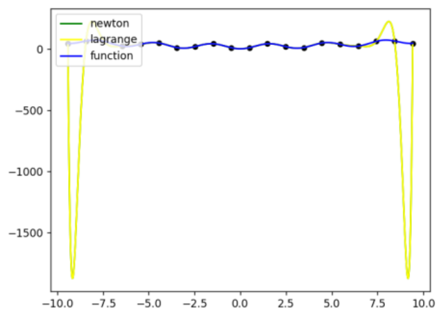
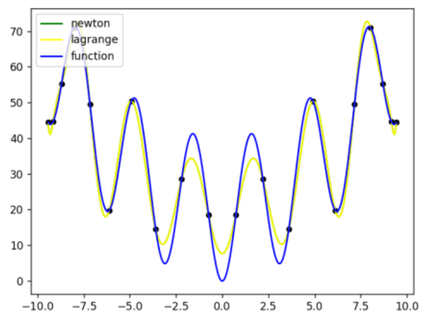
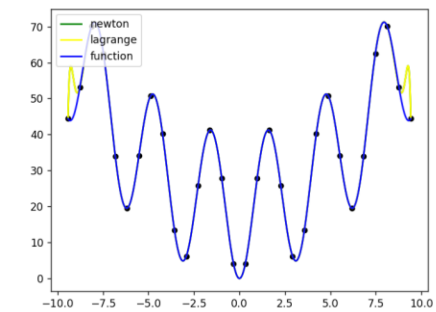
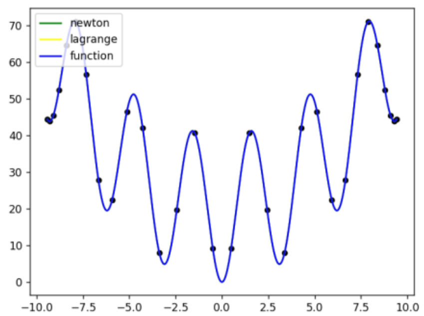
Wykres 2.1 Funkcja f(x) na zadanym przedziale

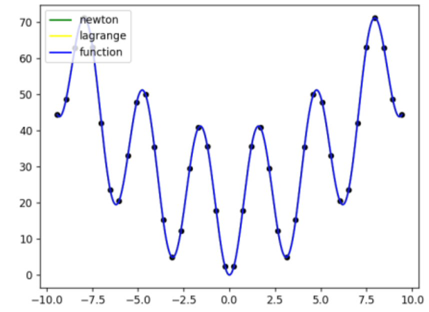
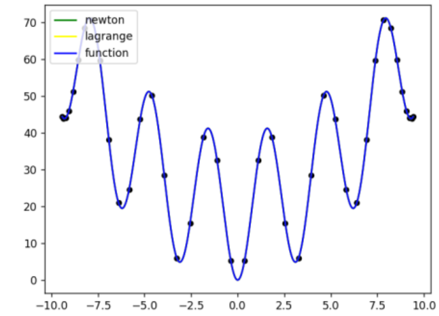
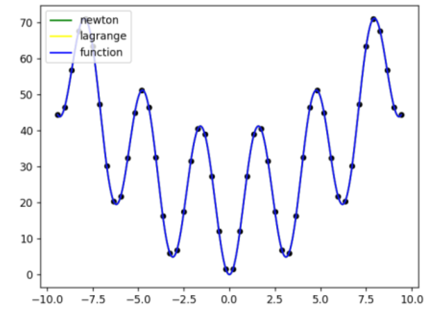
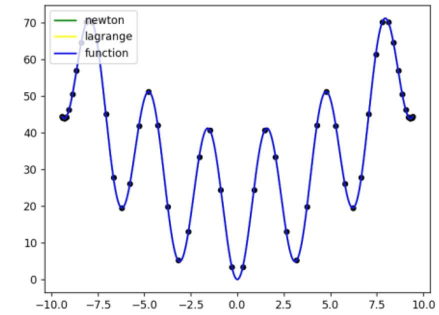
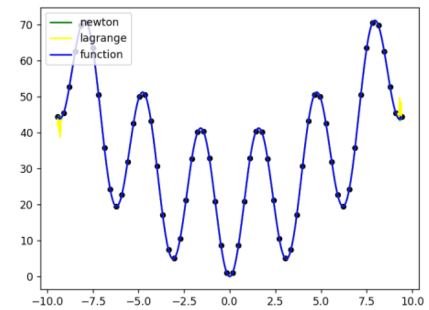
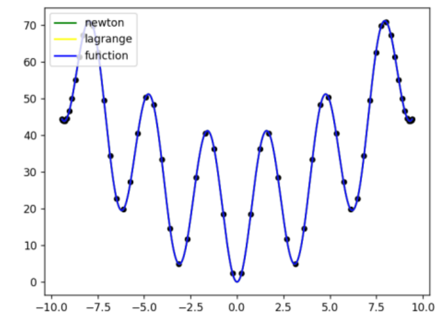
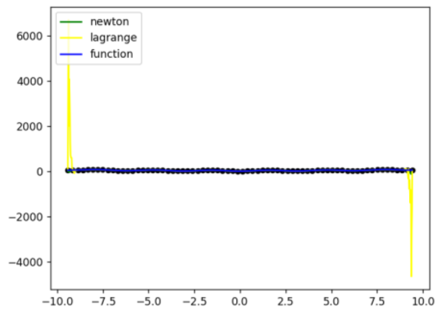
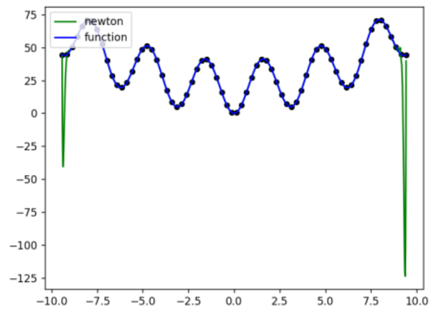
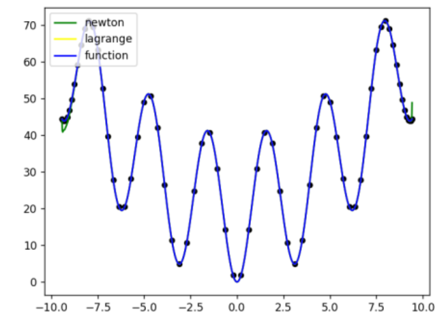
3. Wyniki interpolacji

Poniżej przedstawione są wykresy funkcji (niebieski) oraz wyniku interpolacji metodą Lagrange'a (żółty) oraz Newtona (zielony). Na niektórych wykresach nie widać zielonej linii dlatego, że wynik uzyskany metodą Newtona pokrywa się znacząco z tym uzyskanym metodą Lagrange'a. Zastosowano oznaczenie:

$$n - liczba\ węzłów$$

Tabela 3.1 Wykresy interpolacji dla różnych typów i liczby węzłów

n	węzły rozmieszczone równolegle	węzły Czebyszewa
5		
10		
20		
30		

40		
50		
60		
70	 	

4. Błędy interpolacji

Sprawdzenie dokładności wielomianu odbyło się na dwa sposoby. Kolorem niebieskim zostały oznaczone najlepsze wyniki. Zastosowano oznaczenia:

$$f(x) - funkcja\ podana\ w\ zadaniu$$
$$W(x) - wyznaczony\ wielomian$$

a. Błąd kwadratowy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - W(x_i)\right)^2$$

Tabela 4.1 Błąd kwadratowy dla poszczególnych przypadków

n	węzły rozmieszczone równolegle		węzły Czebyszewa	
	Lagrange	**Newton**	**Lagrange**	**Newton**
5	570791.0243059717	570791.0243059718	316484.6841492898	316484.68414928974
10	837940.0667131372	837940.066713121	377448.6770810762	377448.67708107556
20	156348398.73501274	156348398.7369383	14594.878451740395	14594.878452933344
30	5939.575619249512	5939.576138355226	0.000932268200010994	0.0009322593886365957
40	7.362797283010531e-05	7.325753966284045e-05	1.3375327865550092e-14	9.282581294633787e-09
50	0.00011915332764571147	4.1401305995081276e-06	5.400694766619709e-25	1.7294693185269263e-05
60	165.87079026560224	3.1297350015053884	8.83519737787731e-25	0.00017212364403539356
70	133147398.08562024	176487.99819582625	1.0671965102317458e-24	126.53445048622882

b. Maksymalne odchylenie

$$\max_{i=1,\dots,N}|f(x_i) - w(x_i)|$$

Tabela 4.2 Błąd kwadratowy dla poszczególnych przypadków

n	węzły rozmieszczone równolegle		węzły Czebyszewa	
	Lagrange	**Newton**	**Lagrange**	**Newton**
5	52.73861440526481	52.7386144052648	37.856002611244215	37.85600261124421
10	58.05045316407126	58.050453164068266	42.508455868625994	42.508455868625944
20	1918.602438424995	1918.6024383749038	7.708519649689342	7.708519649759313
30	15.21479085662451	15.214790847708649	0.0015605344019438763	0.0015605327295273442
40	0.002014827254527063	0.002000738813933367	5.929287283379381e-09	1.927847241489644e-05
50	0.0050108848670618045	0.0007258528783609108	9.947598300641403e-14	0.0008599450532074115
60	5.764648899522939	0.6165853244382689	1.2789769243681803e-13	0.0029658186261727337
70	6651.885921004967	167.8336607256207	1.4210854715202004e-13	4.4576343616624

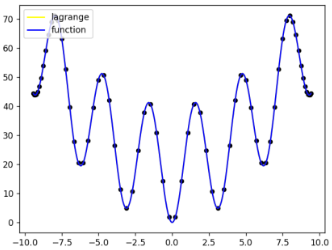
5. Najlepsze przybliżenie funkcji

a. <u>Błąd kwadratowy</u>

Najmniejszy błąd kwadratowy:

- Newton, węzły Czebyszewa: n = 40
- Pozostałe przypadki: n = 50

Najmniejszy błąd kwadratowy ze wszystkich: metoda Lagrange'a, węzły Czebyszewa, n = 50 (5.400694766619709e-25)



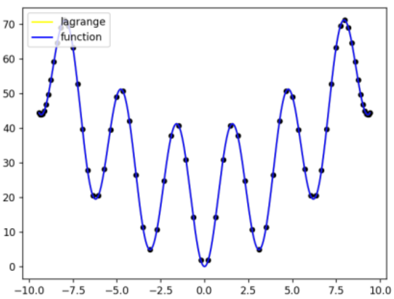
Wykres 5.1 Wynik interpolacji metodą Lagrange'a z użyciem 50 węzłów Czebyszewa

b. <u>Maksymalne odchylenie</u>

Najmniejsze maksymalne odchylenie:

- Lagrange, węzły rozmieszczone równolegle: n = 40
- Newton, węzły Czebyszewa: n = 40
- Newton, węzły rozmieszczone równolegle: n = 50
- Lagrange, węzły Czebyszewa: n = 50

Najmniejszy błąd kwadratowy ze wszystkich: metoda Lagrange'a, węzły Czebyszewa, n = 50 (9.947598300641403e-14)



Wykres 5.2 Wynik interpolacji metodą Lagrange'a z użyciem 50 węzłów Czebyszewa

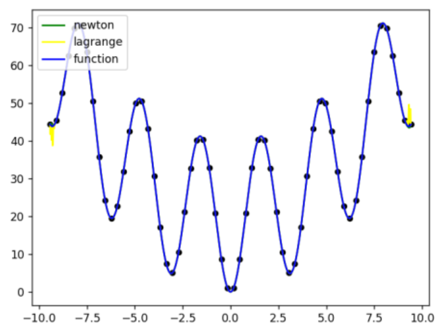
Zarówno w przypadku błędu kwadratowego jak i maksymalnego odchylenia najlepszym wielomianem interpolującym okazał się ten otrzymany dzięki metodzie Lagrange'a na 50 węzłach Czebyszewa.

6. Efekt Runge'go

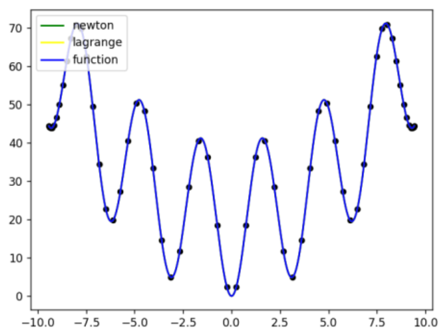
Efekt ten polega na pogorszeniu się jakości interpolacji wielomianowej i następuje od pewnej liczby węzłów n i z jej wzrostem się pogłębia. Jest to szczególnie zauważalne na końcach przedziałów.

Zgodnie z oczekiwaniami w przypadku interpolacji używającej węzłów Czebyszewa ten efekt nie wystąpił aż tak intensywnie, natomiast w przypadku interpolacji używającej węzłów równoodległych można go coraz wyraźniej dostrzec od n = 60, szczególnie w przypadku metody Lagrange'a. Można zaobserwować to na wykresach oraz przy porównaniu błędów, które w przypadku użycia węzłów Czebyszewa są znacznie mniejsze.

n = 60



Wykres 6.1 Wynik interpolacji dla 60 równooddalonych węzłów

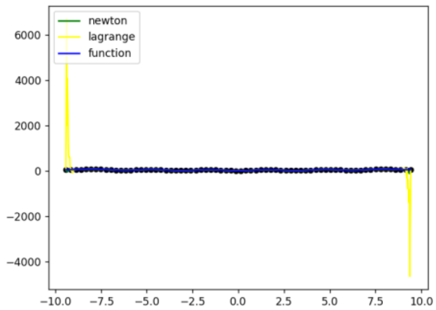


Wykres 6.2 Wynik interpolacji dla 60 węzłów Czebyszewa

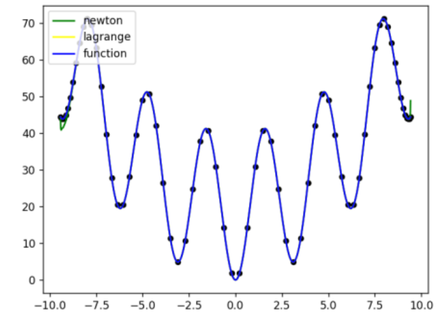
Tabela 6.1 Wyniki błędów dla 60 węzłów

błąd	węzły rozmieszczone równolegle		węzły Czebyszewa	
	Lagrange	Newton	Lagrange	Newton
kwadratowy	165.87079026560224	3.1297350015053884	8.83519737787731e-25	0.00017212364403539356
max odchylenie	5.764648899522939	0.6165853244382689	1.2789769243681803e-13	0.0029658186261727337

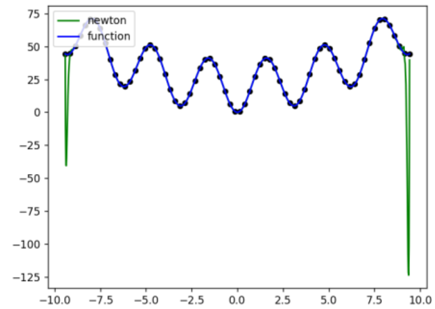
n = 70



Wykres 6.3 Wynik interpolacji Lagrange'a dla 70 równooddalonych węzłów



Wykres 6.4 Wynik interpolacji dla 70 węzłów Czebyszewa



Wykres 6.5 Wynik interpolacji Newtona dla 70 równooddalonych węzłów

Tabela 6.2 Wyniki błędów dla 70 węzłów

błąd	**węzły rozmieszczone równolegle**		**węzły Czebyszewa**	
	Lagrange	**Newton**	**Lagrange**	**Newton**
kwadratowy	133147398.08562024	176487.99819582625	1.0671965102317458e-24	126.53445048622882
max odchylenie	6651.885921004967	167.8336607256207	1.4210854715202004e-13	4.4576343616624

7. Wnioski końcowe

- metoda Lagrange'a i Newtona dają zbliżone wyniki
- najlepszą dokładność daje użycie metody Lagrange'a na 50 węzłach Czebyszewa
- efekt Runge'go jest silniejszy w metodzie Lagrange'a niż Newtona
- efekt Runge'go rozpoczyna się po użyciu około 60 równoodległych węzłów i pogłębia się ze wzrostem ich ilości