Mémoire de Master
Version 0.b.20230509

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

Remerciements

Introduction

0.1 À faire / À chercher

- Introduction des différents chapitres
- Liens avec les séries temporelles
  - On étudie ces liens *après* avoir exposé la théorie sur le mBm.
  - En particulier, on veut prédire le comportement d'une série temporelle. On peut estimer sa fonction exposant de Hurst, mais A. Deliège, dans son mémoire, semble indiquer que ce n'est pas une façon de faire commune.
  - Pour estimer l'exposant de Hölder ponctuel d'une série temporelle suivant le modèle du mBm, voir par exemple [1]. Pour l'estimation de l'exposant de Hurst, on peut se référer à [2, 3]
  - Les références [4, 5] peuvent être utiles à cet égard.
- Concernant la représentation en ondelettes, prendre garde à certaines subtilités ([6]).
- Temps local d'un processus : ~~applicable aux semimartingales, et le mBf n'est pas une semimartingale (ni le mBm).~~ $\longrightarrow$ Ayache définit autrement le temps local, voir [7, Sec. 2.2]. On pourra faire la distinction avec les semimartingales, c'est un cas plus facile à traiter (voir [8, p. 13-14]), et s'aider de [9, Sec. 10.1] (pour le fBm).
- Trouver des applications : le mBf est populaire, le mBm un peu moins (voir cette page de l'INRIA au cas où)
- Ajouter quelques illustrations (utiliser R + PYTHON pour ne pas perdre trop de temps sur ce point).

Table des matières

Chapitre 1

Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et l'opérateur de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

> **Attention.** Insérer entre une et trois réalisations du mouvement Brownien sur un intervalle $[0, T]$.

Ce chapitre introduit le *« mouvement Brownien fractionnaire »*, où la régularité des trajectoires est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, le *« mouvement Brownien multifractionnaire »* est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second ; une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

1.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Bien que le mouvement Brownien fractionnaire possède des applications multiples et transversales, nous nous limiterons à une étude sommaire dans cette section. Pour de plus amples détails sur les propriétés génériques du mouvement Brownien fractionnaire, ou plus généralement, des processus α-stables, on pourra consulter le livre de référence [10]. Concernant l'intégration stochastique définie à partir du mouvement Brownien fractionnaire, [9] propose une étude détaillée de multiples définitions de ce type d'intégrales ; on trouvera en particulier des applications en finance et en théorie de la commande optimale. L'ouvrage [11] s'attache à étudier les équations différentielles stochastiques bâties sur ce processus.

Les résultats de cette section sont issus principalement de [**nourdin2012**, 9].

1.1.1 Définition et propriétés

Par le **??**, le mouvement Brownien fractionnaire peut être défini à partir de son opérateur de covariance.

Définition 1.1.1. Soit $H \in \,]0,1[$; un *mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst* H est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H(t) = \{B^H(t) : t \in [0,\infty[\}$$

tel que

$$K^H(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] = \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right) \tag{1.1.1}$$

et tel que

$$B^H(0) = 0 \text{ p.s.}$$

quels que soient $t_1, t_2 \in [0,\infty[$.

Attention. Ajouter package nécessaire pour guillemets francophones.

Notation. Quand il n'y aura aucune ambiguïté, la mention *« d'exposant de Hurst H »* pourra être omise. De même, on pourra désigner un mouvement Brownien fractionnaire par le sigle *« mBf »*.

Comme nous pourrons le constater sous peu, l'exposant de Hurst H est un paramètre quantifiant la régularité des trajectoires du mBf B^H. En particulier, plus la valeur de H est proche de 0, plus ses trajectoires seront *« irrégulières »* (dans un sens que nous prendrons soin de préciser) ; à l'inverse, plus la valeur de H est proche de 1, plus les trajectoires de B^H seront *« régulières »*.

Attention. Insérer illustration pour différentes valeurs de H (*i.e.* $H \in \{0.001, 0.25, 0.5, 0.75, 0.999\}$).

Remarque 1.1.2. L'exposant de Hurst $H = \frac{1}{2}$ crée un mouvement Brownien standard ; si $t_1, t_2 \in [0,\infty[$, et si $t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B^{\frac{1}{2}}(t_1)B^{\frac{1}{2}}(t_2)\right] &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|) \\
&= \frac{1}{2}(t_1 + t_2 - t_2 + t_1) \\
&= t_1 = \min\{t_1, t_2\}.
\end{aligned}$$

De même, il est possible de relâcher la définition du mBf en donnant la permission à H de prendre la valeur 1 : dans ce cas, le mBf est presque sûrement une droite. En effet, quel que soit $t \in [0,\infty[$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(B^1(t) - tB^1(1)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B^1(t)\right)^2\right] - 2t\mathbb{E}\left[B^1(t)B^1(1)\right] + \mathbb{E}\left[\left(tB^1(1)\right)^2\right] \\
&= t^2 - t\left(t^2 + 1 - (t-1)^2\right) + t^2 = 0.
\end{aligned}$$

Propriétés fondamentales

La Remarque 1.1.2 suggère que le mBf partage des propriétés analogues au mouvement Brownien standard. La proposition suivante donne une caractérisation du mBf.

Proposition 1.1.3. *Soit $H \in \,]0,1[$; si B^H est un mBf, alors pour tout $t \in [0,\infty[$:*

1. *Quel que soit $k \in \,]0,\infty[$, $B^H(kt) = k^H B^H(t)$;*

2. *Quel que soit* $h \in]0, \infty[$, $B^H(t+h) - B^H(h) = B^H(t)$ *;*
3. *Si* $t \neq 0$, $B^H(\frac{1}{t}) = t^{-2H} B^H(t)$ *;*

où la convergence a lieu au sens des lois fini-dimensionnelles.

Réciproquement, si $B^H = \left\{B^H(t) : t \in [0, \infty[\right\}$ *est un processus gaussien vérifiant points 1 et 2, et tel que*

4. $B^H(0) = 0$ *;*
5. $B^H(1) = 1$ *;*

alors B^H *est un mBf d'exposant de Hurst* H*.*

Remarque 1.1.4. La relation (1) permet d'écrire, pour tout $t \in [0, \infty[$:

$$B^H(t) = t^H B^H(1).$$

Démonstration. Pour montrer les points 1 à 3, il suffit de calculer l'opérateur de covariance dans chacun de ces cas, et d'appliquer le **??**.

Pour montrer la réciproque, supposons disposer d'un processus B^H satisfaisant les hypothèses de celle-ci. Il suffit de montrer que le processus est centré (direct vu les points point 1 et **??**) et que son opérateur de covariance vérifie la relation équation (1.1.1). Pour ce dernier point, soient $t_1, t_2 \in [0, \infty[$; il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_2)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1) - B^H(t_2)\right)^2\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_2)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(B^H(|t_1 - t_2|)\right)^2\right]\right)\end{aligned}$$

vu l'hypothèse point 2. De même, l'hypothèse point 1 et la Remarque 1.1.4 permette d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(B^H(1)\right)^2\right]\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right).\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Vu la proposition précédente, on dira que le processus B^H est *auto-similaire* s'il vérifie la relation point 1, qu'il est à *incréments stationnaires* s'il vérifie la relation point 2, et qu'il respecte *l'inversion du temps* s'il vérifie la relation point 3.

1.1.2 Propriétés négatives

Le mouvement Brownien standard, en dépit de ses trajectoires (presque sûrement) nulle part dérivables, reste un processus plutôt régulier. En quelques sortes, il est *« régulier dans son irrégularité »*. En considération de la Remarque 1.1.2, le mouvement Brownien standard est un mBf particulier. En fait, il est *maximal* pour certaines propriétés liées à la régularité.

Prédictibilité

Une manière de mesurer la régularité d'un processus stochastique est d'observer sa « prédictibilité », *i.e.* s'il est possible de prévoir, à plus ou moins long terme, son comportement. Dans le cas du mouvement Brownien standard, il est connu[1] qu'il s'agit d'une semi-martingale. Ce n'est pas le cas du mBf.

1. Insérer référence.

Propriété de Markov

Un processus est vérifie la *propriété de Markov* si, pour prédire son comportement futur, seul l'instant présent est « utile ».

Définition 1.1.5. Soit $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ un processus stochastique ; on dira de X qu'il vérifie la propriété de Markov si, quel que soit $t_1, t_2 \geq 0$ tels que $t_1 < t_2$ et quel que soit $A \in \mathbb{B}$, la relation

$$P(X(t_2) \in A | X(t), t \leq t_1) = P(X(t_2) \in A | X(t_1)) \tag{1.1.2}$$

est vérifiée ; on dira aussi que X est un *processus de Markov.*

Afin de montrer que si B^H est un mBf avec $H \neq \frac{1}{2}$, alors B^H ne vérifie pas la propriété de Markov, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 1.1.6. *Si $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ est un processus de Markov, alors X vérifie la relation*

$$\mathbb{E}\left[X(t)X(v)\right]\mathbb{E}\left[(X(u)^2\right] = \mathbb{E}\left[X(t)X(u)\right]\mathbb{E}\left[X(u)X(v)\right] \tag{1.1.3}$$

quels que soient $t, u, v \in [0, \infty[$ tels que $t \leq u \leq v$.

Théorème 1.1.7. *Soit $H \in]0, 1[\setminus \frac{1}{2}$; si B^H est un mBf, alors B^H n'est pas un processus de Markov.*

1.1.3 Écritures alternatives

1.2 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du fBm est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

1.2.1 Définition et propriétés

Ayache ([7]) introduit le mBm au moyen d'une représentation intégrale et de générateurs.

> **Prérequis.** Inclure le passage sur la transformation de Fourier : elle est utile pour quelques articles.

Un générateur est une intégrale stochastique (bien choisie) par rapport au bruit gaussien (transformation de Fourier d'un mouvement Brownien).

Si on note $X(u, v)$ un générateur, alors $Y(t) = X(t, H(t))$ est un mBm (cette construction considère déjà $t \in \mathbb{R}^d$).

Il existe des liens évidents avec le mBf : il suffit de choisir une fonction constante.

> **Attention.** Écrire le théorème d'existence de l'événement de probabilité 1 dont il est question dans la Proposition suivante.

Proposition 1.2.1. *Supposons que Ω^* bien choisie est de mesure 1 ; la continuité de H implique la continuité de $Y(\cdot, \omega)$ sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $\omega \in \Omega^*$.*

Attention. On a une réciproque.

Question. Que peut-on dire de l'auto-similarité du mBm ? Voir [7, Définitions (1.69) et (1.70)]. Le Théorème 1.91 de [7] répond à la question.

Piste. On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile ([12]), dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement. On peut explorer [13].

Piste. Considérer une fonction aléatoire suffisamment régulière pour la fonction $H(t)$. On peut procéder comme suit :

1. Remplacer $H(t)$ par un processus connus (comme $B(t)$) pour obtenir une première heuristique.
2. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation intégrale (en particulier, est-ce qu'on peut *toujours* calculer ladite intégrale ?)
3. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation en série.
4. Si on veut passer d'une représentation à l'autre, est-ce qu'il y a des difficultés supplémentaires à surmonter ?
5. Peut-on toujours simuler les trajectoires d'un tel processus ?

1.2.2 Régularité

Question. Est-il nécessaire de rappeler les notions vues lors des projets des cours d'Espaces Fonctionnels ? Renvois en annexe ?

Sont données quelques propriétés trajectorielles, dont des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction H pour la continuité du mBm. Des résultats concernant la régularité (globale, locale, et ponctuelle) de Hölder sont démontrés.

Prérequis. Temps local ; on montre qu'un temps local suffisamment régulier implique que, presque sûrement, les trajectoires du processus ne sont pas dérivables (voir *« le principe de Bernam »* [7, Sec. 2.3]).

1.3 Propriétés en moyenne quadratique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; on dira d'une variable aléatoire X qu'elle admet un moment d'ordre deux si, et seulement si, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 < \infty$, et on note alors $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, voire $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ ou $X \in L^2(\mathbb{P})$ si le contexte est clair. Nous allons étendre cette définition aux processus stochastiques, et donner quelques propriétés liées à l'existence de ces moments. Dans la suite, nous suivons [14] ainsi que [10].

1.3.1 Représentation en série orthogonale

Attention. Ajout d'un post-it ([14, p. 143]).

Loève présente deux décompositions : un développement à la Taylor et une décomposition par des fonctions dites *propres*[2]. Après un développement peu amusant, on définit ce qu'est un processus de second ordre stationnaire. En particulier un processus de second ordre[3] qui est de plus stationnaire est un processus de second ordre stationnaire.

On sait que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une décomposition en ondelettes de la forme

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

où la famille $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}} = \{2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -k)\}$, définie à partir d'une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, forme une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On peut supposer qu'une telle décomposition existe également dans le cas des processus stochastiques, puisque ces processus peuvent être vus comme des fonctions à deux variables. Si une telle décomposition existe bien, il est nécessaire d'invoquer un outil d'analyse fonctionnel pour le démontrer. Si nous l'énonçons ici, nous renvoyons le lecteur à la **??** pour en connaître une démonstration.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Mercer)**.** *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et soit*

$$K : I \times I \to \mathbb{R}$$

une fonction continue et symétrique. Si K est une fonction de type positif, alors il existe une base orthonormée de fonctions continues $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(I)$ et des constantes $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positives ou nulles telles que

$$K(s,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k(s) e_k(t) \tag{1.3.1}$$

où la convergence de la série est uniforme.

Remarque 1.3.2. Les fonctions $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ intervenant dans le Théorème 1.3.1 sont des « fonctions propres » associées aux « valeurs propres » $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour l'opérateur dont le noyau est défini par K[4], *i.e.*

$$\int K(s,t) e_k(t) dt = c_k e_k(t).$$

Le théorème suivant assure, sous certaines conditions, l'existence d'une « décomposition en ondelettes » d'un processus stochastique $X \in L^2$.

Théorème 1.3.3. *Soit $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$ un processus de $L^2(\Omega)$, et supposons que Γ_X soit continue sur $[0,T] \times [0,T]$; le processus X admet une décomposition de la forme* **??** *si, et seulement si, la suite de constante $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite de fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de Γ_X.*

Démonstration. À faire. ■

2. Utilisation du théorème de Mercer, à renvoyer en annexe ?
3. C'est à dire, qui admet des moments d'ordre deux finis.
4. On pourra par ailleurs trouver l'appellation de *noyau de Mercer*.

Attention. Pas besoin de se restreindre à un intervalle fermé... On a déjà vu ça dans le cours sur les familles de représentation.

Une covariance ne définie pas entièrement un drap : voir [15]

Remarque 1.3.4. La convergence de la série du Théorème 1.3.3 est uniforme.

Démonstration. À faire. ■

Attention. La décomposition recherchée porte le doux nom de *« Théorème de Karhunen-Loève »*. De rien.

Chapitre 2

Extensions à $\mathbb{R}^d$

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$; on introduit alors les notions d'extensions isotrope [1] (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

> **Question.** Ce qui suit évoque des généralisations à $\mathbb{R}^d$ des mBf et mBm ; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

2.1 Cas du mBf

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

Il s'agit de l'extension isotrope, *i.e.* là où apparaît une valeur absolue pour le mBf, on fait apparaître une norme sur $\mathbb{R}^d$; dès lors, l'exposant de Hurst est identique quelle que soit la direction considérée.

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

La norme du mBf de Lévy est remplacée par un produit tensoriel des covariances unidimensionnelles ; l'exposant de Hurst peut être différent selon la direction observée.

2.2 Cas du mBm

> **Question.** On a la possibilité de présenter le mBm dans $\mathbb{R}^d$ d'emblée. Le fait-on ? J'ai peur que ça ne soit ni pédagogique, ni très agréable pour le lecteur.

Les paramètres vivent dans $\mathbb{R}^d$, donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \to]0, 1[$.

2.2.1 Extension isotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie ; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([7]).

2.2.2 Extension anisotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

2.2.3 Régularité des extensions

La régularité dépend évidemment de la régularité de la fonction de Hurst H ; Herbin ([15]) exhibe une propriété intéressante (dans le cas isotrope) : si $H \in C^{\beta}(\mathbb{R}^d)$, alors on peut contrôler la variance des accroissements en fonction de $\max \beta, H(t)$. On a une propriété similaire dans le cas anisotrope.

2.2.4 Du fBm au mBm

Attention. À chaque fois (ou presque), on peut disposer d'une représentation intégrale ; ça serait dommage de ne pas en parler.

Chapitre 3

Résultats complémentaires

3.1 Chapitre 1

3.2 Analyse stochastique

Théorème 3.2.1 (Théorème de consistance de Kolmogorov).

3.3 Théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt

La décomposition proposée par le théorème de Karhunen-Loève dépend de la théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt ; un cas particulier d'opérateurs compacts.

Définition 3.3.1. Supposons que K est une application définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^d$, et supposons que $K \in L^2(D \times D, \lambda \times \lambda, \mathbb{R}^d)$

3.4 Chapitre 2

Bibliographie

[1] Sixian JIN, Qidi PENG et Henry SCHELLHORN. « Estimation of the Pointwise Hölder Exponent of Hidden Multifractional Brownian Motion Using Wavelet Coefficients ». In : (2017). URL : `https://arxiv.org/abs/1512.05054v4`.

[2] Jean-François COEURJOLLY. « Identification of multifractional Brownian motion ». In : *Bernoulli* 11.6 (2005), p. 987-1008.

[3] Joachim LEBOVITS et Mark PODOLSKIJ. *Estimation of the global regularity of a multifractional Brownian motion.* Consulté le 02 juin 2023. 2018. URL : `https://arxiv.org/abs/1607.02391`.

[4] Matthieu GARCIN. *Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates.* HAL. hal-01399570f. Consulté le 31 mai 2023. 2016. URL : `https://hal.science/hal-01399570`.

[5] Matthieu GARCIN. *Forecasting with fractional Brownian motion : a financial perspective.* Consulté le 31 mai 2023. 2021. URL : `https://arxiv.org/pdf/2105.09140.pdf`.

[6] Antoine AYACHE et Pierre R. BERTRAND. « A process very similar to multifractional Brownian motion ». In : *Recent Developments in Fractals and Related Fields* (2010). hal-00354081v2f, p. 311-326. DOI : `10.1007/978-0-8176-4888-6`.

[7] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks.* World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.

[8] Ju-Yi YEN et Marc YOR. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion : A Tale of Wiener and Itô Measures.* Lecture Notes in Mathematics 2088. London : Springer-Verlag, 2013. ISBN : 978-3-319-01269-8.

[9] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications.* Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008, p. xii, 329. ISBN : 978-1-85233-996-8.

[10] Gennady SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Processes. Stochastic Models with Infinite Variance.* Stochastic Modeling 1. Boca Raton : CRC Press, 1994, p. xxii, 632. ISBN : 978-0-41205-171-5.

[11] Yuliya S. MISHURA. *Stochastic Calculus for Fractionnal Brownian Motion and Related Processes.* Lectures Notes in Mathematics 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008, p. xvii, 397. ISBN : 978-3-540-75873-0.

[12] Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « White noise-based stochastic calculus with respect to multifractional Brownian motion ». In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 86.1 (2014), p. 87-124.

[13] Erick HERBIN, Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « Stochastic Integration with respect to multifractional Brownian motion via tangent fractional Brownian motions ». In : (2012). URL : `https://inria.hal.science/hal-00653808v5`.

[14] Michel LOÈVE. *Probability Theory II.* 4^{e} éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. ISBN : 0-387-90262-7.

[15] Erick Herbin. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.

[16] Benoit B. Mandelbrot et John W. Van Ness. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.