Mémoire de Master
Version 0.a.20230508

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

Liste des symboles

Γ_X Fonction d'auto-corrélation d'un processus $X \in L^2(\Omega)$

Table des matières

0.1 À faire / À chercher . . . 4

1 Représentations de mouvements Browniens 5

1.1 Représentation harmonisable . . . 5

1.1.1 Représentation en série orthogonale . . . 6

1.1.2 Représentation intégrale . . . 6

1.2 Mouvement Brownien fractionnaire . . . 6

1.2.1 Définition et propriétés . . . 6

1.2.2 Propriétés et régularité . . . 7

1.3 Mouvement Brownien multifractionnaire . . . 7

1.3.1 Définition et propriétés . . . 7

1.3.2 Régularité . . . 8

2 Extensions à $\mathbb{R}^d$ 9

2.1 Cas du mBf . . . 9

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy . . . 9

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire . . . 9

2.2 Cas du mBm . . . 9

2.2.1 Extension isotrope . . . 9

2.2.2 Extension anisotrope . . . 9

2.2.3 Régularité des extensions . . . 10

2.2.4 Du fBm au mBm . . . 10

3 Résultats complémentaires 11

3.1 Chapitre 1 . . . 11

3.2 Chapitre 2 . . . 11

Bibliographie 13

Remerciements

Introduction

L'aléa intervenant dans notre environnement peut être représenter à l'aide de variables aléatoires. L'exemple canonique est le lancer de dés : la variable aléatoire est la valeur prise par le dé après le lancer, et elle suit une loi dite uniforme – toutes les valeurs possibles ont une probabilité égale de survenir, si on considère que le dé n'est pas truqué.

Il existe des exemples moins triviaux : on peut se demander comment modéliser, à partir de variables aléatoires, l'évolution d'une file d'attente. Pour tout instant t (positif ou nul), on note N_t le nombre de personnes dans la file d'attente. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la file d'attente est vide, et que le nombre de personnes arrivant dans la file durant un intervalle de temps T_1 ne dépend pas du nombre de personnes arrivant dans la file durant un intervalle T_2 (supposé différent de T_1). De plus, on suppose que pour tout intervalle de temps T_0 de durée t_0, le nombre de personnes arrivant dans la file suit une loi de Poisson de paramètre λt_0 avec $\lambda > 0$. En résumé, nous imposons que la famille $N = \{N_t : t \geq 0\}$ vérifie les conditions suivantes :

— $N_0 = 0$

— Pour tout $t \geq 0$, $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$

— Quels que soient $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$, $N_{s_1} - N_{t_1}$ est indépendant de $N_{s_2} - N_{t_2}$.

Remarquons que pour cet exercice, assez simple, nous désirions modéliser non plus *l'état* (variable aléatoire) d'un objet, mais *l'évolution* (famille de variables aléatoires) de cet objet. Cette distinction nous permet d'introduire la notion de *processus aléatoire*, ou, plus communément, de *processus stochastique*

Parmi la classe des processus stochastiques, l'un d'entre eux revêt une importance toute particulière : le mouvement Brownien. Depuis sa première étude par le botaniste Robert Brown (1773-1858) dans les années 1830, celui-ci s'est vu appliqué dans divers domaines des activités humaines. En 1901, Louis Bachelier (1870-1946), sous la direction d'Henri Poincaré (1854-1912), écrit une thèse de doctorat nommé « Théorie de la spéculation », dans lequel il développe un modèle mathématique de mouvement Brownien et l'applique à la finance pour décrire l'évolution des prix des actions à la bourse de Paris.

Alors qu'il étudie la théorie cinétique des gaz, Albert Einstein (1879-1955) propose de lier le déplacement de particules (supposées suivre une trajectoire Brownienne) à des quantités physiques. Pour ce faire, il n'étudie qu'une composante de la position des particules, et dérive une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}$$

où $p_t(x)$ est la densité de probabilité qu'une particule se situe en x à l'instant t, et où D est le *coefficient de diffusion* des particules dans l'environnement. Si on suppose un nombre N de particules à la position $x = 0$ en le temps $t = 0$, alors une solution de cette équation est

$$p_t(x) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(\frac{-x^2}{4Dt}).$$

En particulier, si X_t est une variable aléatoire de densité p_t, on observe que $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = 2Dt$, ce qui montre que la distance parcourue par une telle particule ne dépend pas linéairement du temps, mais de la racine carrée de celui-ci.

Norbert Wiener (1894-1964), en 1923, propose une définition du mouvement Brownien à partir des outils de la théorie de la mesure, et prouve la continuité presque sûre des trajectoires du mouvement Brownien.

0.1 À faire / À chercher

- Revoir l'introduction
- Liens avec les séries temporelles
- Temps local d'un processus : applicable aux semimartingales, et le mBf n'est pas une semimartingale (ni le mBm).
- Trouver des applications : le mBf est populaire, le mBm un peu moins (voir cette page de l'INRIA au cas où)
- Ajouter quelques illustrations (utiliser R + PYTHON pour ne pas perdre trop de temps sur ce point).

Chapitre 1

Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et la fonction de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

Ce chapitre introduit le mouvement Brownien fractionnaire, où la régularité est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, notamment en ce qui concerne la régularité (sous différentes acceptions) des trajectoires, le mouvement Brownien multifractionnaire est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second. Une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

1.1 Représentation harmonisable

La notion de processus harmonisable est présentée par M. Loève ([1]). Dans ce chapitre, on notera $\Gamma_X(t_1, t_2)$ l'auto-corrélation d'un processus centré X aux temps t_1, t_2, pour autant que $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty$. S'il existe une fonction d'auto-corrélation γ de variation bornée telle que [1]

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = \iint e^{i(t_1 s_1 - t_2 s_2)} d\gamma(s_1, s_2),$$

alors on dira que Γ_X est *harmonisable*.

> **Prérequis.** Il faut introduire l'intégrale de Riemann-Stieltjes pour les processus ([1, p. 138]) pour donner un sens à la double intégrale ci-dessus et à l'intégrale ci-dessous.

On dira qu'un processus $X \in L^2(\Omega)$ est un *processus harmonisable* s'il existe une variable aléatoire $Y \in L^2(\Omega)$ telle que Γ_Y est harmonisable et telle que

$$X(t) = \int e^{its} dY(s) \tag{1.1.1}$$

1. On observe clairement une composante d'un produit vectoriel, ou bien un déterminant. Essayer d'investiguer dans la direction de ces notations.

où l'égalité est entendue au sens de la convergence presque sûre. Nous allons montrer qu'un processus est harmonisable si, et seulement si, sa fonction d'auto-corrélation est harmonisable. Nous donnerons ensuite des *représentations harmonisables* de tels processus, tout en donnant quelques propriétés remarquables de ceux-ci.

> **Attention.** On obtient une « transformée de *Fourier-Stieltjes* ». On peut trouver une sorte d'inverse (convergence en moyenne quadratique).

1.1.1 Représentation en série orthogonale

> **Attention.** Ajout d'un post-it ([1, p. 143]).

Loève présente deux décompositions : un développement à la Taylor et une décomposition par des fonctions dites *propres* [2]. Après un développement peu amusant, on définit ce qu'est un processus de second ordre stationnaire. En particulier un processus de second ordre [3] qui est de plus stationnaire est un processus de second ordre stationnaire.

1.1.2 Représentation intégrale

On donne ici une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une représentation de la forme (1.1.1) : être stationnaire et continu en un point.

> **Attention.** Les liens ne sont pas très clairs entre les différentes décompositions, ni comment elles peuvent être appliquées afin d'extraire de l'information sur les processus.

1.2 Mouvement Brownien fractionnaire

1.2.1 Définition et propriétés

Le mouvement Brownien fractionnaire (on écrira mBf à partir de maintenant) est *une* généralisation du mouvement Brownien. Cette généralisation permet de définir la régularité (au sens de Hölder) des trajectoires du processus. Pour cela, on utilise l'exposant (dit *de Hurst*) H.

> **Question.** Problème de l'estimation de H : a-t-il sa place dans ce document ?

Lévy propose d'utiliser l'intégrale de Riemann-Liouville(-Itô) pour définir le mBf :

$$B_H = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \tag{1.2.1}$$

Or, d'après [2], *« cette intégrale accorde bien trop d'importance à l'origine pour beaucoup d'applications »*. La représentation de Weyl est alors proposée :

$$B_H(0) = 0 \tag{1.2.2}$$

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right) \tag{1.2.3}$$

où les égalités ont lieu p.s.

2. Utilisation du théorème de Mercer, à renvoyer en annexe ?
3. C'est à dire, qui admet des moments d'ordre deux finis

Attention. Donner la définition du mBf *via* l'espérance.

Attention. On obtient gratuitement une représentation intégrale du mBf grâce à la représentation de Weyl. Il suffira de calculer l'espérance.

1.2.2 Propriétés et régularité

L'exposant de Hurst modifie la régularité trajectorielle du fBm, mais modifie également quelques propriétés en comparaison du mouvement Brownien standard. Le mBf est auto-similaire, mais ses incréments ne sont pas indépendants, et il ne s'agit pas d'une semimartingale.

Prérequis. On peut définir ce qu'est une semimartingale, mais il faut alors définir ce qu'est une martingale locale. Soit on suppose que c'est connu, soit on donne tout de même quelques propriétés de ces objets.

On peut définir *plusieurs* intégrales stochastiques pour le fBm : voir [3, Chp. II-V]. C'est moins agréables qu'avec le mouvement Brownien standard.

Tout comme pour le mouvement Brownien standard, on utilise le théorème de Kolmogorov-Centsov pour établir la régularité des trajectoires du fBm.

Attention. Biagini énonce que le fBm possède une mémoire longue. Cette propriété est davantage étudiée pour les séries temporelles.

1.3 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du fBm est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

1.3.1 Définition et propriétés

Ayache ([4]) introduit le mBm au moyen d'une représentation intégrale et de générateurs.

Prérequis. Inclure le passage sur la transformation de Fourier : elle est utile pour quelques articles.

Il existe des liens évidents avec le mBf : il suffit de choisir une fonction constante.

Question. Que peut-on dire de l'auto-similarité du mBm ?

Prérequis. On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile, dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement.

1.3.2 Régularité

Sont données quelques propriétés trajectorielles, dont des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction H pour la continuité du mBm. Des résultats concernant la régularité (globale, locale, et ponctuelle) de Hölder sont démontrés.

Chapitre 2

Extensions à $\mathbb{R}^d$

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$; on introduit alors les notions d'extensions isotrope [1] (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

> **Question.** Ce qui suit évoque des généralisations à $\mathbb{R}^d$ des mBf et mBm ; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

2.1 Cas du mBf

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

Il s'agit de l'extension isotrope, *i.e.* là où apparaît une valeur absolue pour le mBf, on fait apparaître une norme sur $\mathbb{R}^d$; dès lors, l'exposant de Hurst est identique quelle que soit la direction considérée.

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

La norme du mBf de Lévy est remplacée par un produit tensoriel des covariances unidimensionnelles ; l'exposant de Hurst peut être différent selon la direction observée.

2.2 Cas du mBm

Les paramètres vivent dans $\mathbb{R}^d$, donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \to]0, 1[$. Les représentations sont intégrales : on impose de plus que H soit mesurable.

2.2.1 Extension isotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

2.2.2 Extension anisotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie ; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([4]).

2.2.3 Régularité des extensions

La régularité dépend évidemment de la régularité de la fonction de Hurst H ; Herbin ([5]) exhibe une propriété intéressante (dans le cas isotrope) : si $H \in C^\beta(\mathbb{R}^d)$, alors on peut contrôler la variance des accroissements en fonction de $\max \beta, H(t)$. On a une propriété similaire dans le cas anisotrope.

2.2.4 Du fBm au mBm

> **Attention.** À chaque fois (ou presque), on peut disposer d'une représentation intégrale ; ça serait dommage de ne pas en parler.

Chapitre 3

Résultats complémentaires

3.1 Chapitre 1

3.2 Chapitre 2

Bibliographie

[1] Michel LOÈVE. *Probability Theory II*. 4e éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. ISBN : 0-387-90262-7.

[2] Benoit B. MANDELBROT et John W. VAN NESS. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.

[3] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications*. Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008. ISBN : 978-1-85233-996-8.

[4] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks*. World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.

[5] Erick HERBIN. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.