

Mémoire de Master
Version 0.a.20240219

Benjamin Dosse

ANNÉE ACADÉMIQUE 2022–2023

Table des matières

1	Représentations de mouvements Browniens	1
1.1	Mouvement Brownien fractionnaire	1
1.1.1	Définition et propriétés	1
	Propriétés fondamentales	2
1.1.2	Propriétés négatives	3
	Prédictibilité	3
	Propriété de Markov	3
1.1.3	Écritures alternatives	5
1.2	Mouvement Brownien multifractionnaire	6
1.2.1	Définition et propriétés	6
	Propriétés du générateur	6
1.2.2	Propriétés des trajectoires du mBm	6
	Propriété de Hölder	6
1.2.3	Écritures alternatives	6
1.2.4	Un mot sur le mBm lorsque $H(t)$ n'est pas déterministe	6
2	Extensions à \mathbb{R}^d	9
2.1	Cas du mBf	9
2.1.1	Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy	9
2.1.2	Drap Brownien fractionnaire	9
2.2	Cas du mBm	9
2.2.1	Extension isotrope	9
2.2.2	Extension anisotrope	9
2.2.3	Régularité des extensions	9
A	Résultats complémentaires	11
A.1	Probabilités	11
A.2	Analyse stochastique	11
A.3	Chapitre 1	11
A.4	Chapitre 2	11
	Bibliographie	13

Chapitre 1

Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K . Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et l'opérateur de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

Attention. Insérer entre une et trois réalisations du mouvement Brownien sur un intervalle $[0, T]$.

Ce chapitre introduit le « *mouvement Brownien fractionnaire* », où la régularité des trajectoires est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, le « *mouvement Brownien multifractionnaire* » est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second ; une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

1.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Bien que le mouvement Brownien fractionnaire possède des applications multiples et transversales, nous nous limiterons à une étude sommaire dans cette section. Pour de plus amples détails sur les propriétés génériques du mouvement Brownien fractionnaire, ou plus généralement, des processus α -stables, on pourra consulter le livre de référence [1]. Concernant l'intégration stochastique définie à partir du mouvement Brownien fractionnaire, [2] propose une étude détaillée de multiples définitions de ce type d'intégrales ; on trouvera en particulier des applications en finance et en théorie de la commande optimale. L'ouvrage [3] s'attache à étudier les équations différentielles stochastiques bâties sur ce processus.

Les résultats de cette section sont issus principalement de [2, 4].

1.1.1 Définition et propriétés

Par le Théorème A.2.1, le mouvement Brownien fractionnaire peut être défini à partir de son opérateur de covariance.

DÉFINITION 1.1.1. Soit $H \in]0, 1[$; un *mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst* H est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H(t) = \{B^H(t) : t \in [0, \infty[\}$$

tel que

$$K_H(t_1, t_2) = \mathbb{E} [B^H(t_1)B^H(t_2)] = \frac{1}{2} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \quad (1.1.1)$$

et tel que

$$B^H(0) = 0 \text{ p.s.}$$

quels que soient $t_1, t_2 \in [0, \infty[$.

NOTATION. Quand il n'y aura aucune ambiguïté, la mention « *d'exposant de Hurst* H » pourra être omise. De même, on pourra désigner un mouvement Brownien fractionnaire par le sigle « *mBf* ».

Comme nous pourrions le constater sous peu, l'exposant de Hurst H est un paramètre quantifiant la régularité des trajectoires du mBf B^H . En particulier, plus la valeur de H est proche de 0, plus ses trajectoires seront « *irrégulières* » (dans un sens que nous prendrons soin de préciser); à l'inverse, plus la valeur de H est proche de 1, plus les trajectoires de B^H seront « *régulières* ».

Attention. Insérer illustration pour différentes valeurs de H (*i.e.* $H \in \{0.001, 0.25, 0.5, 0.75, 0.999\}$).

REMARQUE 1.1.2. L'exposant de Hurst $H = \frac{1}{2}$ crée un mouvement Brownien standard; si $t_1, t_2 \in [0, \infty[$, et si $t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^{\frac{1}{2}}(t_1)B^{\frac{1}{2}}(t_2)] &= \frac{1}{2} (t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|) \\ &= \frac{1}{2} (t_1 + t_2 - t_2 + t_1) \\ &= t_1 = \min\{t_1, t_2\}. \end{aligned}$$

De même, il est possible de relâcher la définition du mBf en donnant la permission à H de prendre la valeur 1 : dans ce cas, le mBf est presque sûrement une droite. En effet, quel que soit $t \in [0, \infty[$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(B^1(t) - tB^1(1))^2] &= \mathbb{E} [(B^1(t))^2] - 2t\mathbb{E} [B^1(t)B^1(1)] + \mathbb{E} [(tB^1(1))^2] \\ &= t^2 - t(t^2 + 1 - (t-1)^2) + t^2 = 0. \end{aligned}$$

Propriétés fondamentales

La Remarque 1.1.2 suggère que le mBf partage des propriétés analogues au mouvement Brownien standard. La proposition suivante donne une caractérisation du mBf.

PROPOSITION 1.1.3. Soit $H \in]0, 1[$; si B^H est un mBf, alors pour tout $t \in [0, \infty[$:

1. Quel que soit $k \in]0, \infty[$, $B^H(kt) = k^H B^H(t)$;
2. Quel que soit $h \in]0, \infty[$, $B^H(t+h) - B^H(h) = B^H(t)$;
3. Si $t \neq 0$, $B^H(\frac{1}{t}) = t^{-2H} B^H(t)$;

où la convergence a lieu au sens des lois fini-dimensionnelles.

Réciproquement, si $B^H = \{B^H(t) : t \in [0, \infty[\}$ est un processus gaussien vérifiant les points 1 et 2, et tel que

4. $B^H(0) = 0$;

5. $B^H(1) = 1$;

alors B^H est un mBf d'exposant de Hurst H .

REMARQUE 1.1.4. La relation (1) permet d'écrire, pour tout $t \in [0, \infty[$:

$$B^H(t) = t^H B^H(1).$$

Démonstration. Pour montrer les points 1 à 3, il suffit de calculer l'opérateur de covariance dans chacun de ces cas, et d'appliquer le Théorème A.2.1.

Pour montrer la réciproque, supposons disposer d'un processus B^H satisfaisant les hypothèses de celle-ci. Il suffit de montrer que le processus est centré (direct vu les points 1 et 2) et que son opérateur de covariance vérifie l'équation (1.1.1). Pour ce dernier point, soient $t_1, t_2 \in [0, \infty[$; il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(t_1)B^H(t_2)] &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} [(B^H(t_1))^2] + \mathbb{E} [(B^H(t_2))^2] - \mathbb{E} [(B^H(t_1) - B^H(t_2))^2] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} [(B^H(t_1))^2] + \mathbb{E} [(B^H(t_2))^2] - \mathbb{E} [(B^H(|t_1 - t_2|))^2] \right) \end{aligned}$$

vu l'hypothèse du point 2. De même, le point 1 et la Remarque 1.1.4 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(t_1)B^H(t_2)] &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [(B^H(1))^2] (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Vu la proposition précédente, on dira que le processus B^H est *auto-similaire* s'il vérifie le point 1, qu'il est à *incréments stationnaires* s'il vérifie le point 2, et qu'il respecte *l'inversion du temps* s'il vérifie le point 3.

1.1.2 Propriétés négatives

Le mouvement Brownien standard, en dépit de ses trajectoires (presque sûrement) nulle part dérivables, reste un processus plutôt régulier. En quelques sortes, il est « *régulier dans son irrégularité* ». En considération de la Remarque 1.1.2, le mouvement Brownien standard est un mBf particulier. En fait, il est *maximal* pour certaines propriétés liées à la régularité.

Prédictibilité

Une manière de mesurer la régularité d'un processus stochastique est d'observer sa « prédictibilité », *i.e.* s'il est possible de prévoir, à plus ou moins long terme, son comportement. Dans le cas du mouvement Brownien standard, il est connu¹ qu'il s'agit d'une semi-martingale. Ce n'est pas le cas du mBf.

Propriété de Markov

Un processus est vérifie la *propriété de Markov* si, pour prédire son comportement futur, seul l'instant présent est « utile ».

1. Insérer référence.

DÉFINITION 1.1.5. Soit $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ un processus stochastique ; on dira de X qu'il vérifie la propriété de Markov si, quel que soit $t_1, t_2 \geq 0$ tels que $t_1 < t_2$ et quel que soit $A \in \mathbb{B}$, la relation

$$\mathbb{P}(X(t_2) \in A | X(t), t \leq t_1) = \mathbb{P}(X(t_2) \in A | X(t_1)) \quad (1.1.2)$$

est vérifiée ; on dira aussi que X est un *processus de Markov*.

Afin de montrer que si B^H est un mBf avec $H \neq \frac{1}{2}$, alors B^H ne vérifie pas la propriété de Markov, nous avons besoin du résultat suivant ([5]).

LEMME 1.1.6. Soit $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ un processus gaussien dont la fonction moyenne μ est identiquement nulle ; si X vérifie la propriété de Markov, alors quels que soient $t, u, v \in [0, \infty[$ tels que $t < u < v$, on a :

$$\mathbb{E}[X(t)X(v)] \mathbb{E}[(X(u))^2] = \mathbb{E}[X(t)X(u)] \mathbb{E}[X(u)X(v)]. \quad (1.1.3)$$

Démonstration. Si $t, u, v \in [0, \infty[$, et si $t < u < v$, alors la Proposition A.1.1 donne l'espérance de $X(t)$ et de $X(v)$ conditionnellement à $X(u)$; en particulier, il vient :

$$\mathbb{E}[X(t)|X(u)] = \frac{\mathbb{E}[X(t)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} X(u), \quad (1.1.4)$$

$$\text{et} \quad (1.1.5)$$

$$\mathbb{E}[X(v)|X(u)] = \frac{\mathbb{E}[X(v)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} X(u). \quad (1.1.6)$$

Vu les propriétés des espérances conditionnelles, on dispose de l'égalité

$$\mathbb{E}[X(t)X(v)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)X(v)|X(u)]] ;$$

vu que le processus X est de Markov, on dispose de l'indépendance inconditionnelle du produit, *i.e.*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)X(v)|X(u)]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|X(u)] \mathbb{E}[X(v)|X(u)]] . \quad (1.1.7)$$

Ainsi, vu les relations (1.1.4) et (1.1.7), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)X(v)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(t)|X(u)] \mathbb{E}[X(v)|X(u)]] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[X(t)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} X(u) \frac{\mathbb{E}[X(u)X(v)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} X(u)\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[X(t)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} \frac{\mathbb{E}[X(u)X(v)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} \mathbb{E}[(X(u))^2] \\ &= \frac{(\mathbb{E}[X(t)X(u)])(\mathbb{E}[X(u)X(v)])}{\mathbb{E}[(X(u))^2]}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

THÉORÈME 1.1.7. Soit $H \in]0, 1[\setminus \frac{1}{2}$; si B^H est un mBf, alors B^H n'est pas un processus de Markov.

Démonstration. D'abord, nous montrons que si B^H est un processus de Markov, alors il admet deux « représentations » équivalentes, définies à partir de son opérateur de covariance. Pour aboutir à une contradiction, nous montrons que le comportement limite de ces deux « représentations » diffère.

Vu le Lemme 1.1.6, quels que soient $t, u, v \in [0, \infty[$ tels que $t < u < v$, il vient que

$$\mathbb{E} [B^H(t)B^H(v)] \mathbb{E} [(B^H(u))^2] = \mathbb{E} [B^H(t)B^H(u)] \mathbb{E} [B^H(u)B^H(v)]. \quad (1.1.8)$$

Posons $v = 1$ et définissons explicitement, pour tout $t \in]0, 1[$, la fonction φ_H par :

$$\varphi_H(t) = K_H(t, 1) \quad (1.1.9)$$

$$= \frac{1}{2} (t^{2H} + 1 - |t - 1|^{2H}). \quad (1.1.10)$$

Ainsi définie, la fonction φ_H est strictement positive sur $]0, 1[$; en particulier, il vient la relation

$$\frac{\mathbb{E} [B^H(t)B^H(u)]}{\mathbb{E} [(B^H(u))^2]} = \varphi_H\left(\frac{t}{u}\right)$$

pour autant que $u \in]t, 1[$. De cette égalité, et vu la relation (1.1.8), nous pouvons écrire une formule similaire pour φ_H :

$$\varphi_H(t) = \varphi_H\left(\frac{t}{u}\right)\varphi_H(u);$$

ce qui, en posant $\psi_H(x) = \ln(\varphi_H(e^{-x}))$, quel que soit $x \geq 0$, se récrit :

$$\psi_H(x + y) = \psi_H(x) + \psi_H(y). \quad (1.1.11)$$

Dès lors, par linéarité de ψ_H^2 , il existe une constante $c > 0$ telle que $\psi_H(x) = -cx$, étant donné que $\psi_H(0) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_H(x) = -\infty$. Autrement écrit, la fonction φ_H peut s'exprimer par

$$\varphi_H(t) = t^c$$

sur l'intervalle $]0, 1[$; remarquons déjà que cette réécriture implique

$$\varphi_H''(t) = c(c - 1)t^{c-2}$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\varphi_H''(t)| = c|c - 1| < \infty.$$

D'un autre côté, en dérivant deux fois l'expression (1.1.9), il vient l'égalité

$$\varphi_H''(t) = H(2H - 1)(t^{2H-2} - (1 - t)^{2H-2})$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\varphi_H''(t)| = \infty.$$

En effet, par choix de H , $H(2H - 1)$ est non-nul, et $2H - 2$ est (strictement) négatif. Ainsi, vu la contradiction, il vient que B^H n'est pas un processus de Markov si $H \neq \frac{1}{2}$. ■

1.1.3 Écritures alternatives

La théorie du mouvement Brownien standard a permis le développement d'une intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô); en particulier, il est possible de récrire trivialement le mouvement Brownien standard à partir d'une intégrale d'Itô :

$$B(t) = \int_0^t dB(s).$$

Ici, nous montrons qu'il est possible d'exprimer sous diverses formes le mouvement Brownien fractionnaire.

2. On peut dériver par rapport à x l'expression (1.1.11) pour montrer que la dérivée est constante sur $[0, \infty[$.

Intégrale stochastique

Décomposition orthogonale

Transformée de Fourier

1.2 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du mBf est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

Cette section est basée sur les résultats donnés dans [6], néanmoins ceux-ci sont limités à une dimension afin de ne pas alourdir l'exposé.

1.2.1 Définition et propriétés

Dans la Section 1.1, la généralisation proposée par le mBf consistait à introduire un exposant de Hurst $H \in]0, 1[$ afin d'assujettir les trajectoires du processus à une certaine irrégularité. Comme rappelé précédemment, l'introduction du mBf par Mandelbrot & Van Ness ([7]) se fut par une intégrale stochastique. Le choix d'une généralisation du mBf peut se faire à l'aide de ces représentations : dans [8], les auteurs proposent d'utiliser la représentation intégrale ; dans [6], il est proposé de modifier la transformée de Fourier du mBf. Dans les deux cas, cette modification porte sur l'exposant de Hurst, remplacé par une fonction mesurable $t \mapsto H(t)$ ³.

Propriétés du générateur

1.2.2 Propriétés des trajectoires du mBm

Prérequis. Pour évoquer le caractère non différentiable des trajectoires, on peut introduire quelques éléments relatifs aux temps locaux.

Propriété de Hölder

1.2.3 Écritures alternatives

Intégrale stochastique

Décomposition en ondelettes

Attention. Concernant la représentation en ondelettes, prendre garde à certaines subtilités ([9]).

1.2.4 Un mot sur le mBm lorsque $H(t)$ n'est pas déterministe

Piste. On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile ([10]), dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement. On peut explorer [11].

Piste. Considérer une fonction aléatoire suffisamment régulière pour la fonction $H(t)$. On peut procéder comme suit :

1. Remplacer $H(t)$ par un processus connu (comme $B(t)$) pour obtenir une première

3. Dans [6], cette fonction est nommée « *fonction multifractionnaire de Hurst* ».

heuristique.

2. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation intégrale (en particulier, est-ce qu'on peut *toujours* calculer ladite intégrale ?)
3. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation en série.
4. Si on veut passer d'une représentation à l'autre, est-ce qu'il y a des difficultés supplémentaires à surmonter ?
5. Peut-on toujours simuler les trajectoires d'un tel processus ?

Chapitre 2

Extensions à \mathbb{R}^d

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d ; on introduit alors les notions d'extensions isotrope¹ (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

Question. Ce qui suit évoque des généralisations à \mathbb{R}^d des mBf et mBm; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

2.1 Cas du mBf

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

2.2 Cas du mBm

Les paramètres vivent dans \mathbb{R}^d , donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \rightarrow]0, 1[$.

2.2.1 Extension isotrope

2.2.2 Extension anisotrope

2.2.3 Régularité des extensions

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([6]).

Annexe A

Résultats complémentaires

A.1 Probabilités

PROPOSITION A.1.1 (Distribution conditionnelle d'un vecteur gaussien).

A.2 Analyse stochastique

THÉORÈME A.2.1 (Théorème de consistance de Kolmogorov).

THÉORÈME A.2.2 (Théorème de continuité de Kolmogorov (cas \mathbb{R}^d)).

A.3 Chapitre 1

A.4 Chapitre 2

Bibliographie

- [1] Gennady SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*. Stochastic Modeling 1. Boca Raton : CRC Press, 1994, p. xxii, 632. ISBN : 978-0-41205-171-5.
- [2] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications*. Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008, p. xii, 329. ISBN : 978-1-85233-996-8.
- [3] Yuliya S. MISHURA. *Stochastic Calculus for Fractionnal Brownian Motion and Related Processes*. Lectures Notes in Mathematics 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008, p. xvii, 397. ISBN : 978-3-540-75873-0.
- [4] Ivan NOURDIN. *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*. Bocconi & Springer Series. Milano : Springer-Verlag, 2012. IX, 122. ISBN : 978-88-470-2822-7.
- [5] A. K. BASU. *Introduction to Stochastic Process*. Harrow : Alpha Science International, 2007, p. xi, 419. ISBN : 978-1-84265-105-6.
- [6] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks*. World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.
- [7] Benoit B. MANDELBROT et John W. VAN NESS. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.
- [8] Romain François PELTIER et Jacques LÉVY-VÉHEL. *Multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results*. Rapport de recherche INRIA n°2645. 1995.
- [9] Antoine AYACHE et Pierre R. BERTRAND. « A process very similar to multifractional Brownian motion ». In : *Recent Developments in Fractals and Related Fields* (2010). hal-00354081v2f, p. 311-326. DOI : 10.1007/978-0-8176-4888-6.
- [10] Joachim LEOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « White noise-based stochastic calculus with respect to multifractional Brownian motion ». In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 86.1 (2014), p. 87-124.
- [11] Erick HERBIN, Joachim LEOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « Stochastic Integration with respect to multifractional Brownian motion via tangent fractional Brownian motions ». In : (2012). URL : <https://inria.hal.science/hal-00653808v5>.
- [12] Ju-Yi YEN et Marc YOR. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion : A Tale of Wiener and Itô Measures*. Lecture Notes in Mathematics 2088. London : Springer-Verlag, 2013. ISBN : 978-3-319-01269-8.
- [13] Michel LOÈVE. *Probability Theory II*. 4^e éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. ISBN : 0-387-90262-7.
- [14] Erick HERBIN. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.
- [15] Matthieu GARCIN. *Forecasting with fractional Brownian motion : a financial perspective*. Consulté le 31 mai 2023. 2021. URL : <https://arxiv.org/pdf/2105.09140.pdf>.

- [16] Matthieu GARCIN. *Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates*. HAL. hal-01399570f. Consulté le 31 mai 2023. 2016. URL : <https://hal.science/hal-01399570>.
- [17] Sixian JIN, Qidi PENG et Henry SCHELLHORN. « Estimation of the Pointwise Hölder Exponent of Hidden Multifractional Brownian Motion Using Wavelet Coefficients ». In : (2017). URL : <https://arxiv.org/abs/1512.05054v4>.
- [18] Jean-François COEURJOLLY. « Identification of multifractional Brownian motion ». In : *Bernoulli* 11.6 (2005), p. 987-1008.
- [19] Joachim LEOVITS et Mark PODOLSKIJ. *Estimation of the global regularity of a multifractional Brownian motion*. Consulté le 02 juin 2023. 2018. URL : <https://arxiv.org/abs/1607.02391>.