Mémoire de Master

Version 0.b.20230509

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

Remerciements

Introduction

0.1 À faire / À chercher

— Introduction des différents chapitres

— Liens avec les séries temporelles

— Temps local d'un processus : ~~applicable aux semimartingales, et le mBf n'est pas une semimartingale (ni le mBm).~~ $\longrightarrow$ Ayache définit autrement le temps local, voir [1, Sec. 2.2]. On pourra faire la distinction avec les semimartingales, c'est un cas plus facile à traiter (voir [2, p. 13-14]), et s'aider de [3, Sec. 10.1] (pour le fBm).

— Trouver des applications : le mBf est populaire, le mBm un peu moins (voir cette page de l'INRIA au cas où)

— Ajouter quelques illustrations (utiliser R + Python pour ne pas perdre trop de temps sur ce point).

Liste des symboles

Γ_X	Opérateur de covariance d'un processus $X \in L^2(\Omega)$

Table des matières

Chapitre 1

Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et la fonction de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

Ce chapitre introduit le mouvement Brownien fractionnaire, où la régularité est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, notamment en ce qui concerne la régularité (sous différentes acceptions) des trajectoires, le mouvement Brownien multifractionnaire est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second. Une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

1.1 Représentation harmonisable

La notion de processus harmonisable est présentée par M. Loève ([4]). Dans ce chapitre, on notera $\Gamma_X(t_1, t_2)$ l'opérateur de covariance d'un processus X aux temps t_1, t_2, pour autant que $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty$. Sauf mention contraire, on supposera que X est centré. S'il existe un opérateur de covariance γ de variation bornée telle que [1]

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = \iint e^{i(t_1 s_1 - t_2 s_2)} d\gamma(s_1, s_2),$$

alors on dira que Γ_X est *harmonisable*.

1.2 Intégrale stochastique

> **Prérequis.** Il faut introduire l'intégrale de Riemann-Stieltjes pour les processus ([4, p. 138]) pour donner un sens aux intégrales.

1. On observe clairement une composante d'un produit vectoriel, ou bien un déterminant. Essayer d'investiguer dans la direction de ces notations.

Attention. Insérer une référence vers la construction de l'intégrale d'Itô.

L'intégrale d'Itô est une intégrale *« à la Riemann »* pour une classe de processus stochastiques. Cette définition de l'intégrale stochastique demande que les processus à intégrer soient, entre autres hypothèses, *adaptés* à la filtration du mouvement Brownien.

Attention. Il semblerait que Loève ne veut pas donner trop de détails concernant la construction de l'intégrale : il s'agit d'une somme de Riemann-Stieltjes, et si elle converge dans L^2, alors on dit que c'est une intégrale ; sinon, on oublie.

Question. Refaire le raisonnement avec les processus de la classe $\mathcal{H}^2$ adaptés au processus par rapport auquel on intègre ?

On dira qu'un processus $X \in L^2(\Omega)$ est un *processus harmonisable* s'il existe une variable aléatoire $Y \in L^2(\Omega)$ telle que Γ_Y est harmonisable et telle que

$$X(t) = \int e^{its} dY(s) \tag{1.2.1}$$

où l'égalité est entendue au sens de la convergence presque sûre. Nous allons montrer qu'un processus est harmonisable si, et seulement si, sa fonction d'auto-corrélation est harmonisable. Nous donnerons ensuite des *représentations harmonisables* de tels processus, tout en donnant quelques propriétés remarquables de ceux-ci.

Attention. On obtient une « transformée de *Fourier-Stieltjes* ». On peut trouver une sorte d'inverse (convergence en moyenne quadratique).

1.2.1 Représentation en série orthogonale

Attention. Ajout d'un post-it ([4, p. 143]).

Loève présente deux décompositions : un développement à la Taylor et une décomposition par des fonctions dites *propres* [2]. Après un développement peu amusant, on définit ce qu'est un processus de second ordre stationnaire. En particulier un processus de second ordre [3] qui est de plus stationnaire est un processus de second ordre stationnaire.

1.2.2 Représentation intégrale

On donne ici une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une représentation de la forme (1.2.1) : être stationnaire et continu en un point.

Attention. Les liens ne sont pas très clairs entre les différentes décompositions, ni comment elles peuvent être appliquées afin d'extraire de l'information sur les processus.

2. Utilisation du théorème de Mercer, à renvoyer en annexe ?
3. C'est à dire, qui admet des moments d'ordre deux finis.

Question. Que faire des résultats concernant la stabilité (dans L^2) opérations de différentiation et d'intégration ?

1.3 Mouvement Brownien fractionnaire

Attention. Ajouter un rappel historique sur le mBf (voir [3, p. 6] et [5]).

1.3.1 Définition et propriétés

Le mouvement Brownien fractionnaire (on écrira mBf à partir de maintenant) est *une* généralisation du mouvement Brownien. Cette généralisation permet de définir la régularité (au sens de Hölder) des trajectoires du processus. Pour cela, on utilise l'exposant (dit *de Hurst*) H.

Question. Problème de l'estimation de H : a-t-il sa place dans ce document ?

Lévy propose d'utiliser l'intégrale de Riemann-Liouville(-Itô) pour définir le mBf :

$$B_H = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \tag{1.3.1}$$

Or, d'après [5], *« cette intégrale accorde bien trop d'importance à l'origine pour beaucoup d'applications »*. La représentation de Weyl est alors proposée :

$$B_H(0) = 0 \tag{1.3.2}$$

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right) \tag{1.3.3}$$

où les égalités ont lieu p.s.

Attention. On obtient gratuitement une représentation intégrale du mBf grâce à la représentation de Weyl. Il suffira de calculer l'espérance.

Nous proposons de définir le mouvement Brownien fractionnaire au moyen d'une fonction de covariance, puis de revenir à cette forme intégrale par la suite.

Définition 1.3.1. Soit $H \in]0,1[$; un *mouvement Brownien fractionnaire* (on écrira mBf par la suite) *d'exposant de Hurst* H est un processus gaussien centré $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ dont l'opérateur de covariance $\Gamma(t,t')$ est donné par

$$\Gamma_{B_H}(t,t') = \mathbb{E}\left[B_H(t)B_H(t')\right] = \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - |t-s|^{2H}) \tag{1.3.4}$$

et dont les trajectoires sont presque sûrement continues.

Attention. Renvoyer en annexe le résultat donnant l'existence d'un processus gaussien pour un opérateur de covariance donné.

Remarque 1.3.2. Si $H = \frac{1}{2}$, on obtient un mouvement Brownien standard.

Attention. Faire le calcul.

On peut d'ores et déjà donner des propriétés fondamentales du mBf.

PROPOSITION 1.3.3. *Soient $H \in]0,1[$ et $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ un fBm. On a :*

1. $B_H(0) = 0$ *p.s.*
2. B_H *est à accroissements stationnaires*
3. B_H *est un processus gaussien tel que* $\mathbb{E}\left[B_H(t)^2\right] = t^{2H}$

Attention. Démonstration à faire.

Question. Comment apporter les distinctions portant sur les valeurs possibles de H : évoquer tout de go que le cas $H = \frac{1}{2}$ crée naturellement cette distinction, ou attendre que cela émerge des calculs ?

1.3.2 Propriétés et régularité

L'exposant de Hurst modifie la régularité trajectorielle du fBm, mais modifie également quelques propriétés en comparaison du mouvement Brownien standard. Le mBf est auto-similaire, mais ses incréments ne sont pas indépendants, et il ne s'agit pas d'une semimartingale.

Prérequis. On peut définir ce qu'est une semimartingale, mais il faut alors définir ce qu'est une martingale locale. Soit on suppose que c'est connu, soit on donne tout de même quelques propriétés de ces objets.

On peut définir *plusieurs* intégrales stochastiques pour le fBm : voir [3, Chp. II-V]. C'est moins agréables qu'avec le mouvement Brownien standard.

Tout comme pour le mouvement Brownien standard, on utilise le théorème de Kolmogorov-Centsov pour établir la régularité des trajectoires du fBm.

Attention. BIAGINI énonce que le fBm possède une mémoire longue. Cette propriété est davantage étudiée pour les séries temporelles.

1.4 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du fBm est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

1.4.1 Définition et propriétés

AYACHE ([1]) introduit le mBm au moyen d'une représentation intégrale et de générateurs.

Prérequis. Inclure le passage sur la transformation de Fourier : elle est utile pour quelques articles.

Un générateur est une intégrale stochastique (bien choisie) par rapport au bruit gaussien (transformation de Fourier d'un mouvement Brownien).

Si on note $X(u, v)$ un générateur, alors $Y(t) = X(t, H(t))$ est un mBm (cette construction considère déjà $t \in \mathbb{R}^d$).

Il existe des liens évidents avec le mBf : il suffit de choisir une fonction constante.

> **Attention.** Écrire le théorème d'existence de l'événement de probabilité 1 dont il est question dans la Proposition suivante.

Proposition 1.4.1. *Supposons que Ω^* bien choisie est de mesure 1 ; la continuité de H implique la continuité de $Y(\cdot, \omega)$ sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $\omega \in \Omega^*$.*

> **Attention.** On a une réciproque.

> **Question.** Que peut-on dire de l'auto-similarité du mBm ? Voir [1, Définitions (1.69) et (1.70)]. Le Théorème 1.91 de [1] répond à la question.

> **Piste.** On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile ([6]), dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement. On peut explorer [7].

> **Piste.** Considérer une fonction aléatoire suffisamment régulière pour la fonction $H(t)$.

1.4.2 Régularité

> **Question.** Est-il nécessaire de rappeler les notions vues lors des projets des cours d'Espaces Fonctionnels ? Renvois en annexe ?

Sont données quelques propriétés trajectorielles, dont des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction H pour la continuité du mBm. Des résultats concernant la régularité (globale, locale, et ponctuelle) de Hölder sont démontrés.

> **Prérequis.** Temps local ; on montre qu'un temps local suffisamment régulier implique que, presque sûrement, les trajectoires du processus ne sont pas dérivables (voir *« le principe de Bernam »* [1, Sec. 2.3]).

Chapitre 2

Extensions à $\mathbb{R}^d$

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$; on introduit alors les notions d'extensions isotrope [1] (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

> **Question.** Ce qui suit évoque des généralisations à $\mathbb{R}^d$ des mBf et mBm ; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

2.1 Cas du mBf

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

Il s'agit de l'extension isotrope, *i.e.* là où apparaît une valeur absolue pour le mBf, on fait apparaître une norme sur $\mathbb{R}^d$; dès lors, l'exposant de Hurst est identique quelle que soit la direction considérée.

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

La norme du mBf de Lévy est remplacée par un produit tensoriel des covariances unidimensionnelles ; l'exposant de Hurst peut être différent selon la direction observée.

2.2 Cas du mBm

> **Question.** On a la possibilité de présenter le mBm dans $\mathbb{R}^d$ d'emblée. Le fait-on ? J'ai peur que ça ne soit ni pédagogique, ni très agréable pour le lecteur.

Les paramètres vivent dans $\mathbb{R}^d$, donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \to \,]0, 1[$.

2.2.1 Extension isotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie ; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([1]).

2.2.2 Extension anisotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

2.2.3 Régularité des extensions

La régularité dépend évidemment de la régularité de la fonction de Hurst H ; Herbin ([8]) exhibe une propriété intéressante (dans le cas isotrope) : si $H \in C^\beta(\mathbb{R}^d)$, alors on peut contrôler la variance des accroissements en fonction de $\max \beta, H(t)$. On a une propriété similaire dans le cas anisotrope.

2.2.4 Du fBm au mBm

Attention. À chaque fois (ou presque), on peut disposer d'une représentation intégrale ; ça serait dommage de ne pas en parler.

Chapitre 3

Résultats complémentaires

3.1 Chapitre 1

3.2 Chapitre 2

Bibliographie

[1] Antoine Ayache. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks*. World Scientific, 2018. XIV, 220. isbn : 9789814525671.

[2] Ju-Yi Yen et Marc Yor. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion : A Tale of Wiener and Itô Measures*. Lecture Notes in Mathematics 2088. London : Springer-Verlag, 2013. isbn : 978-3-319-01269-8.

[3] Francesca Biagini et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications*. Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008. isbn : 978-1-85233-996-8.

[4] Michel Loève. *Probability Theory II*. 4e éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. isbn : 0-387-90262-7.

[5] Benoit B. Mandelbrot et John W. Van Ness. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.

[6] Joachim Lebovits et Jacques Lévy Véhel. « White noise-based stochastic calculus with respect to multifractional Brownian motion ». In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 86.1 (2014), p. 87-124.

[7] Erick Herbin, Joachim Lebovits et Jacques Lévy Véhel. « Stochastic Integration with respect to multifractional Brownian motion via tangent fractional Brownian motions ». In : (2012). url : `https://inria.hal.science/hal-00653808v5`.

[8] Erick Herbin. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.