Mémoire de Master

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

SOMMAIRE

CHAPITRE

I

MOUVEMENT BROWNIEN (MULTI)FRACTIONNAIRE

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et la fonction de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$. Cette définition ne permet pas de préserver une forme de *« mémoire »* du processus ; notion définie *via* la Définition **??**.

Ce chapitre introduit le mouvement Brownien fractionnaire, et établit ces propriétés mémorielles selon la valeur prise par *l'exposant de Hurst H*.

I.1 Mouvement Brownien fractionnaire

I.1.1 Définition et propriétés

I.1.2 Régularité et auto-similarité

I.1.3 Intégration

I.2 Mouvement Brownien multifractionnaire

I.2.1 Définition et propriétés

I.2.2 Liens avec le mBf

I.2.3 Régularité

CHAPITRE

II

PROCESSUS HARMONISABLES

La notion de processus harmonisable est présentée par M. Loève [**loeve1945**]. Dans ce chapitre, on notera $R_X(t_1, t_2)$ l'auto-corrélation d'un processus centré X aux temps t_1, t_2, pour autant que $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty$. S'il existe une fonction d'auto-corrélation γ de variation bornée telle que

$$R_X(t_1, t_2) = \iint e^{i(t_1 s_1 - t_2 s_2)} d\gamma(s_1, s_2),$$

alors on dira que R_X est *harmonisbale*.

On dira qu'un processus $X \in L^2(\Omega)$ est un *processus harmonisable* s'il existe une variable aléatoire $Y \in L^2(\Omega)$ telle que R_Y est harmonisable et telle que

$$X(t) = \int e^{its} dY(s)$$

où l'égalité est entendue au sens de la convergence presque sûre. Nous allons montrer qu'un processus est harmonisable si, et seulement si, sa fonction d'auto-corrélation est harmonisable. Nous donnerons ensuite des *représentations harmonisables* de tels processus, tout en donnant quelques propriétés remarquables de ceux-ci.

II.1 Représentation en série orthogonale

II.2 Représentation intégrale

II.3 Représentation en moyenne mobile

II.4 Le cas du mouvement Brownien (multi)fractionnaire

CHAPITRE

III

EXTENSIONS DU MBF

III.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Levy

III.1.1 Régularité

III.2 Feuille Brownienne fractionnaire

III.2.1 Régularité

CHAPITRE

IV

EXTENSIONS DU MBM