Mémoire de Master
Version 0.b.20230509

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

# Remerciements

# Introduction

## 0.1 À faire / À chercher

- Introduction des différents chapitres
- Liens avec les séries temporelles
  - On étudie ces liens *après* avoir exposé la théorie sur le mBm.
  - En particulier, on veut prédire le comportement d'une série temporelle. On peut estimer sa fonction exposant de Hurst, mais A. Deliège, dans son mémoire, semble indiquer que ce n'est pas une façon de faire commune.
  - Pour estimer l'exposant de Hölder ponctuel d'une série temporelle suivant le modèle du mBm, voir par exemple [1]. Pour l'estimation de l'exposant de Hurst, on peut se référer à [2, 3]
  - Les références [5, 4] peuvent être utiles à cet égard.
- Concernant la représentation en ondelettes, prendre garde à certaines subtilités ([6]).
- Temps local d'un processus : ~~applicable aux semimartingales, et le mBf n'est pas une semimartingale (ni le mBm).~~ $\longrightarrow$ Ayache définit autrement le temps local, voir [7, Sec. 2.2]. On pourra faire la distinction avec les semimartingales, c'est un cas plus facile à traiter (voir [8, p. 13-14]), et s'aider de [9, Sec. 10.1] (pour le fBm).
- Trouver des applications : le mBf est populaire, le mBm un peu moins (voir cette page de l'INRIA au cas où)
- Ajouter quelques illustrations (utiliser R + PYTHON pour ne pas perdre trop de temps sur ce point).

# Liste des symboles

$\Gamma_X$ Opérateur de covariance d'un processus $X \in L^2(\Omega)$

# Table des matières


0.1 À faire / À chercher . . . . . . v

**1 Représentations de mouvements Browniens 1**

1.1 Mouvement Brownien fractionnaire . . . . . . 1

1.1.1 Définition et propriétés . . . . . . 2

1.1.2 Propriétés et régularité . . . . . . 3

1.2 Mouvement Brownien multifractionnaire . . . . . . 3

1.2.1 Définition et propriétés . . . . . . 3

1.2.2 Régularité . . . . . . 4

1.3 Propriétés en moyenne quadratique . . . . . . 4

1.3.1 Représentation en série orthogonale . . . . . . 4

**2 Extensions à $\mathbb{R}^d$ 7**

2.1 Cas du mBf . . . . . . 7

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy . . . . . . 7

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire . . . . . . 7

2.2 Cas du mBm . . . . . . 7

2.2.1 Extension isotrope . . . . . . 7

2.2.2 Extension anisotrope . . . . . . 8

2.2.3 Régularité des extensions . . . . . . 8

2.2.4 Du fBm au mBm . . . . . . 8

**3 Résultats complémentaires 9**

3.1 Chapitre 1 . . . . . . 9

3.1.1 Théorème de Mercer . . . . . . 9

3.2 Chapitre 2 . . . . . . 9

**Bibliographie 11**

# Chapitre 1

# Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne $\mu$ et son opérateur de covariance $K$. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne $\mu$ est donnée par $\mu(t) = 0$ et l'opérateur de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

**Attention.** Insérer entre une et trois réalisations du mouvement Brownien sur un intervalle $[0, T]$.

Ce chapitre introduit le *« mouvement Brownien fractionnaire »*, où la régularité des trajectoires est contrôlée par une constante $H$ appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, le *« mouvement Brownien multifractionnaire »* est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second ; une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

## 1.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Selon le théorème d'extension de Kolmogorov, il est possible de définir un processus stochastique gaussien à partir de son opérateur de covariance et de sa fonction moyenne. Nous proposons de définir de la sorte le mouvement Brownien fractionnaire, qui jouit de propriétés similaires au mouvement Brownien standard.

Ses applications, nombreuses et transversales, suffisent à justifier l'étude sommaire ci-présentée. Pour de plus amples détails sur les propriétés génériques du mouvement Brownien fractionnaire, ou plus généralement, des processus $\alpha$-stables, on pourra consulter le livre de référence [10]. Concernant l'intégration stochastique définie à partir du mouvement Brownien fractionnaire, [9] propose une étude détaillée de multiples définitions de ce type d'intégrales ; on trouvera en particulier des applications en finance et en théorie de la commande optimale. L'ouvrage [11] s'attache à étudier les équations différentielles stochastiques bâties sur ce processus.

**Attention.** Ajouter un rappel historique sur le mBf (voir [9, p. 6] et [12]).

### 1.1.1 Définition et propriétés

Nous choisissons d'étudier le mouvement Brownien fractionnaire défini à partir de son opérateur de covariance. L'approche présentée ici est développée dans [7] ; notons que, historiquement, c'est par une intégrale stochastique qu'a été défini le mouvement Brownien fractionnaire (voir [12] à ce propos).

**Définition 1.1.1.** Soit $H \in \,]0,1[$ ; un processus stochastique $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ est un *mouvement Brownien fractionnaire* (noté dans la suite « mBf ») s'il s'agit d'un processus gaussien centré dont l'opérateur de covariance $K_H$ est défini par

$$K_H(t,s) = \mathbb{E}\left[B_H(t)B_H(s)\right] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

et dont les trajectoires sont presque sûrement continues.

> **Attention.** Renvoyer en annexe le résultat donnant l'existence d'un processus gaussien pour un opérateur de covariance donné.

Il est clair que pour $H = \frac{1}{2}$, $B_H$ est un mouvement Brownien standard.

**Remarque 1.1.2.** Dans la Définition 1.1.1, l'hypothèse d'un processus centré peut être relâchée. Cela ne change fondamentalement aucun résultat présenté ici. Nous la formulons afin de ne pas alourdir les notations et les calculs.

Le lien avec le mouvement Brownien standard peut sembler nébuleux. La proposition suivante rend ce lien plus évident à l'aide d'une représentation intégrale.

**Proposition 1.1.3** (Représentation intégrale)**.** *Soit $H \in \,]0,1[$ ; le processus définie explicitement par*

$$B_H(0) = 0$$
$$B_H(t) - B_H(0) = c\left(\int_{-\infty}^{0} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)\right)$$

*où $c \in \,]0,\infty[$ est une constante, est un mBf.*

> **Attention.** On pourra écrire quelque part un rappel portant sur l'intégrale d'Itô. Il faudra prendre soin de préciser que même si on ne l'a pas étudié dans le cours « Processus stochastiques » (2021–2022), on peut définir une intégrale d'Itô impropre, *e.g.* sur des intervalles non bornés.

On peut d'ores et déjà donner des propriétés fondamentales du mBf.

**Proposition 1.1.4.** *Soient $H \in \,]0,1[$ et $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ un fBm. On a :*

1. *$B_H(0) = 0$ p.s.*
2. *$B_H$ est à accroissements stationnaires*
3. *$B_H$ est un processus gaussien tel que $\mathbb{E}\left[B_H(t)^2\right] = t^{2H}$*

> **Attention.** Démonstration à faire.

**Question.** Comment apporter les distinctions portant sur les valeurs possibles de $H$ : évoquer tout de go que le cas $H = \frac{1}{2}$ crée naturellement cette distinction, ou attendre que cela émerge des calculs ?

### 1.1.2 Propriétés et régularité

L'exposant de Hurst modifie la régularité trajectorielle du fBm, mais modifie également quelques propriétés en comparaison du mouvement Brownien standard. Le mBf est auto-similaire, mais ses incréments ne sont pas indépendants, et il ne s'agit pas d'une semimartingale.

**Prérequis.** On peut définir ce qu'est une semimartingale, mais il faut alors définir ce qu'est une martingale locale. Soit on suppose que c'est connu, soit on donne tout de même quelques propriétés de ces objets.

On peut définir *plusieurs* intégrales stochastiques pour le fBm : voir [9, Chp. II-V]. C'est moins agréables qu'avec le mouvement Brownien standard.

Tout comme pour le mouvement Brownien standard, on utilise le théorème de Kolmogorov-Centsov pour établir la régularité des trajectoires du fBm.

**Attention.** Biagini énonce que le fBm possède une mémoire longue. Cette propriété est davantage étudiée pour les séries temporelles.

## 1.2 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du fBm est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

### 1.2.1 Définition et propriétés

Ayache ([7]) introduit le mBm au moyen d'une représentation intégrale et de générateurs.

**Prérequis.** Inclure le passage sur la transformation de Fourier : elle est utile pour quelques articles.

Un générateur est une intégrale stochastique (bien choisie) par rapport au bruit gaussien (transformation de Fourier d'un mouvement Brownien).

Si on note $X(u, v)$ un générateur, alors $Y(t) = X(t, H(t))$ est un mBm (cette construction considère déjà $t \in \mathbb{R}^d$).

Il existe des liens évidents avec le mBf : il suffit de choisir une fonction constante.

**Attention.** Écrire le théorème d'existence de l'événement de probabilité 1 dont il est question dans la Proposition suivante.

**Proposition 1.2.1.** *Supposons que $\Omega^*$ bien choisie est de mesure 1 ; la continuité de $H$ implique la continuité de $Y(\cdot, \omega)$ sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $\omega \in \Omega^*$.*

**Attention.** On a une réciproque.

**Question.** Que peut-on dire de l'auto-similarité du mBm ? Voir [7, Définitions (1.69) et (1.70)]. Le Théorème 1.91 de [7] répond à la question.

**Piste.** On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile ([13]), dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement. On peut explorer [14].

**Piste.** Considérer une fonction aléatoire suffisamment régulière pour la fonction $H(t)$. On peut procéder comme suit :

1. Remplacer $H(t)$ par un processus connus (comme $B(t)$) pour obtenir une première heuristique.
2. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation intégrale (en particulier, est-ce qu'on peut *toujours* calculer ladite intégrale ?)
3. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation en série.
4. Si on veut passer d'une représentation à l'autre, est-ce qu'il y a des difficultés supplémentaires à surmonter ?
5. Peut-on toujours simuler les trajectoires d'un tel processus ?

### 1.2.2 Régularité

**Question.** Est-il nécessaire de rappeler les notions vues lors des projets des cours d'Espaces Fonctionnels ? Renvois en annexe ?

Sont données quelques propriétés trajectorielles, dont des conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction $H$ pour la continuité du mBm. Des résultats concernant la régularité (globale, locale, et ponctuelle) de Hölder sont démontrés.

**Prérequis.** Temps local ; on montre qu'un temps local suffisamment régulier implique que, presque sûrement, les trajectoires du processus ne sont pas dérivables (voir *« le principe de Bernam »* [7, Sec. 2.3]).

## 1.3 Propriétés en moyenne quadratique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; on dira d'une variable aléatoire $X$ qu'elle admet un moment d'ordre deux si, et seulement si, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 < \infty$, et on note alors $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, voire $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ ou $X \in L^2(\mathbb{P})$ si le contexte est clair. Nous allons étendre cette définition aux processus stochastiques, et donner quelques propriétés liées à l'existence de ces moments. Dans la suite, nous suivons [15] ainsi que [10].

### 1.3.1 Représentation en série orthogonale

**Attention.** Ajout d'un post-it ([15, p. 143]).

LOÈVE présente deux décompositions : un développement à la Taylor et une décomposition par des fonctions dites *propres* [1]. Après un développement peu amusant, on définit ce qu'est un processus de second ordre stationnaire. En particulier un processus de second ordre [2] qui est de plus stationnaire est un processus de second ordre stationnaire.

On sait que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une décomposition en ondelettes de la forme

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

où la famille $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}} = \{2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k)\}$, définie à partir d'une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, forme une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On peut supposer qu'une telle décomposition existe également dans le cas des processus stochastiques, puisque ces processus peuvent être vus comme des fonctions à deux variables. Si une telle décomposition existe bien, il est nécessaire d'invoquer un outil d'analyse fonctionnel pour le démontrer. Si nous l'énonçons ici, nous renvoyons le lecteur à la Section 3.1.1 pour en connaître une démonstration.

**THÉORÈME 1.3.1** (Théorème de Mercer). *Soit $I$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et soit*

$$K : I \times I \to \mathbb{R}$$

*une fonction continue et symétrique. Si $K$ est une fonction de type positif, alors il existe une base orthonormée de fonctions continues $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(I)$ et des constantes $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ positives ou nulles telles que*

$$K(s,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e_k(s) e_k(t) \tag{1.3.1}$$

*où la convergence de la série est uniforme.*

**REMARQUE 1.3.2.** Les fonctions $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ intervenant dans le Théorème 1.3.1 sont des « fonctions propres » associées aux « valeurs propres » $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour l'opérateur dont le noyau est défini par $K$ [3], *i.e.*

$$\int K(s,t) e_k(t) dt = c_k e_k(t).$$

Le théorème suivant assure, sous certaines conditions, l'existence d'une « décomposition en ondelettes » d'un processus stochastique $X \in L^2$.

**THÉORÈME 1.3.3.** *Soit $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$ un processus de $L^2(\Omega)$, et supposons que $\Gamma_X$ soit continue sur $[0,T] \times [0,T]$ ; le processus $X$ admet une décomposition de la forme* **??** *si, et seulement si, la suite de constante $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et la suite de fonctions $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de $\Gamma_X$.*

**Démonstration.** À faire. ■

**REMARQUE 1.3.4.** La convergence de la série du Théorème 1.3.3 est uniforme.

1. Utilisation du théorème de Mercer, à renvoyer en annexe ?
2. C'est à dire, qui admet des moments d'ordre deux finis.
3. On pourra par ailleurs trouver l'appellation de *noyau de Mercer*.

**Démonstration.** À faire. ■

# Chapitre 2

# Extensions à $\mathbb{R}^d$

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ; on introduit alors les notions d'extensions isotrope [1] (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

> **Question.** Ce qui suit évoque des généralisations à $\mathbb{R}^d$ des mBf et mBm ; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

## 2.1 Cas du mBf

### 2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

Il s'agit de l'extension isotrope, *i.e.* là où apparaît une valeur absolue pour le mBf, on fait apparaître une norme sur $\mathbb{R}^d$ ; dès lors, l'exposant de Hurst est identique quelle que soit la direction considérée.

### 2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

La norme du mBf de Lévy est remplacée par un produit tensoriel des covariances unidimensionnelles ; l'exposant de Hurst peut être différent selon la direction observée.

## 2.2 Cas du mBm

> **Question.** On a la possibilité de présenter le mBm dans $\mathbb{R}^d$ d'emblée. Le fait-on ? J'ai peur que ça ne soit ni pédagogique, ni très agréable pour le lecteur.

Les paramètres vivent dans $\mathbb{R}^d$, donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \to ]0, 1[$.

### 2.2.1 Extension isotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie ; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([7]).

### 2.2.2 Extension anisotrope

Les constructions sont similaires au mBf.

### 2.2.3 Régularité des extensions

La régularité dépend évidemment de la régularité de la fonction de Hurst $H$ ; Herbin ([16]) exhibe une propriété intéressante (dans le cas isotrope) : si $H \in C^{\beta}(\mathbb{R}^d)$, alors on peut contrôler la variance des accroissements en fonction de $\max \beta, H(t)$. On a une propriété similaire dans le cas anisotrope.

### 2.2.4 Du fBm au mBm

**Attention.** À chaque fois (ou presque), on peut disposer d'une représentation intégrale ; ça serait dommage de ne pas en parler.

Chapitre 3

# Résultats complémentaires

## 3.1 Chapitre 1

### 3.1.1 Théorème de Mercer

## 3.2 Chapitre 2

# Bibliographie


[1] Sixian JIN, Qidi PENG et Henry SCHELLHORN. « Estimation of the Pointwise H¨older Exponent of Hidden Multifractional Brownian Motion Using Wavelet Coefficients ». In : (2017). URL : https://arxiv.org/abs/1512.05054v4.

[2] Jean-François COEURJOLLY. « Identification of multifractional Brownian motion ». In : *Bernoulli* 11.6 (2005), p. 987-1008.

[3] Joachim LEBOVITS et Mark PODOLSKIJ. *Estimation of the global regularity of a multifractional Brownian motion.* Consulté le 02 juin 2023. 2018. URL : https://arxiv.org/abs/1607.02391.

[4] Matthieu GARCIN. *Forecasting with fractional Brownian motion : a financial perspective.* Consulté le 31 mai 2023. 2021. URL : https://arxiv.org/pdf/2105.09140.pdf.

[5] Matthieu GARCIN. *Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates.* HAL. hal-01399570f. Consulté le 31 mai 2023. 2016. URL : https://hal.science/hal-01399570.

[6] Antoine AYACHE et Pierre R. BERTRAND. « A process very similar to multifractional Brownian motion ». In : *Recent Developments in Fractals and Related Fields* (2010). hal-00354081v2f, p. 311-326. DOI : 10.1007/978-0-8176-4888-6.

[7] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks.* World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.

[8] Ju-Yi YEN et Marc YOR. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion : A Tale of Wiener and Itô Measures.* Lecture Notes in Mathematics 2088. London : Springer-Verlag, 2013. ISBN : 978-3-319-01269-8.

[9] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications.* Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008, p. xii, 329. ISBN : 978-1-85233-996-8.

[10] Gennady SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Processes. Stochastic Models with Infinite Variance.* Stochastic Modeling 1. Boca Raton : CRC Press, 1994, p. xxii, 632. ISBN : 978-0-41205-171-5.

[11] Yuliya S. MISHURA. *Stochastic Calculus for Fractionnal Brownian Motion and Related Processes.* Lectures Notes in Mathematics 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008, p. xvii, 397. ISBN : 978-3-540-75873-0.

[12] Benoit B. MANDELBROT et John W. VAN NESS. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.

[13] Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « White noise-based stochastic calculus with respect to multifractional Brownian motion ». In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 86.1 (2014), p. 87-124.

[14] Erick HERBIN, Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « Stochastic Integration with respect to multifractional Brownian motion via tangent fractional Brownian motions ». In : (2012). URL : https://inria.hal.science/hal-00653808v5.

[15] Michel LOÈVE. *Probability Theory II*. 4e éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. ISBN : 0-387-90262-7.

[16] Erick HERBIN. « From $N$ parameter fractional Brownian motions to $N$ parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.