Mémoire de Master
Version 0.b.20230509

Benjamin Dosse

Année Académique 2022–2023

Table des matières

Chapitre 1

Représentations de mouvements Browniens

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. On peut également le définir au moyen de sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K. Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in [0, \infty[\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et l'opérateur de covariance est donnée par $K(t, s) = \min(t, s)$.

Attention. Insérer entre une et trois réalisations du mouvement Brownien sur un intervalle $[0, T]$.

Ce chapitre introduit le *« mouvement Brownien fractionnaire »*, où la régularité des trajectoires est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, le *« mouvement Brownien multifractionnaire »* est introduit. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second ; une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

1.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Bien que le mouvement Brownien fractionnaire possède des applications multiples et transversales, nous nous limiterons à une étude sommaire dans cette section. Pour de plus amples détails sur les propriétés génériques du mouvement Brownien fractionnaire, ou plus généralement, des processus α-stables, on pourra consulter le livre de référence [1]. Concernant l'intégration stochastique définie à partir du mouvement Brownien fractionnaire, [2] propose une étude détaillée de multiples définitions de ce type d'intégrales ; on trouvera en particulier des applications en finance et en théorie de la commande optimale. L'ouvrage [3] s'attache à étudier les équations différentielles stochastiques bâties sur ce processus.

Les résultats de cette section sont issus principalement de [2, 4].

1.1.1 Définition et propriétés

Par le Théorème 3.1.1, le mouvement Brownien fractionnaire peut être défini à partir de son opérateur de covariance.

Définition 1.1.1. Soit $H \in \,]0,1[\,$; un *mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst* H est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H(t) = \left\{B^H(t) : t \in [0,\infty[\right\}$$

tel que

$$K^H(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] = \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right) \tag{1.1.1}$$

et tel que

$$B^H(0) = 0 \text{ p.s.}$$

quels que soient $t_1, t_2 \in [0,\infty[$.

Notation. Quand il n'y aura aucune ambiguïté, la mention *« d'exposant de Hurst H »* pourra être omise. De même, on pourra désigner un mouvement Brownien fractionnaire par le sigle *« mBf »*.

Comme nous pourrons le constater sous peu, l'exposant de Hurst H est un paramètre quantifiant la régularité des trajectoires du mBf B^H. En particulier, plus la valeur de H est proche de 0, plus ses trajectoires seront *« irrégulières »* (dans un sens que nous prendrons soin de préciser) ; à l'inverse, plus la valeur de H est proche de 1, plus les trajectoires de B^H seront *« régulières »*.

Attention. Insérer illustration pour différentes valeurs de H (*i.e.* $H \in \{0.001, 0.25, 0.5, 0.75, 0.999\}$).

Remarque 1.1.2. L'exposant de Hurst $H = \frac{1}{2}$ crée un mouvement Brownien standard ; si $t_1, t_2 \in [0,\infty[$, et si $t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B^{\frac{1}{2}}(t_1)B^{\frac{1}{2}}(t_2)\right] &= \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 - t_2 + t_1\right) \\
&= t_1 = \min\{t_1, t_2\}.
\end{aligned}$$

De même, il est possible de relâcher la définition du mBf en donnant la permission à H de prendre la valeur 1 : dans ce cas, le mBf est presque sûrement une droite. En effet, quel que soit $t \in [0,\infty[$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(B^1(t) - tB^1(1)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B^1(t)\right)^2\right] - 2t\mathbb{E}\left[B^1(t)B^1(1)\right] + \mathbb{E}\left[\left(tB^1(1)\right)^2\right] \\
&= t^2 - t\left(t^2 + 1 - (t-1)^2\right) + t^2 = 0.
\end{aligned}$$

Propriétés fondamentales

La Remarque 1.1.2 suggère que le mBf partage des propriétés analogues au mouvement Brownien standard. La proposition suivante donne une caractérisation du mBf.

Proposition 1.1.3. *Soit $H \in \,]0,1[\,$; si B^H est un mBf, alors pour tout $t \in [0,\infty[$:*

1. *Quel que soit $k \in \,]0,\infty[$, $B^H(kt) = k^H B^H(t)$;*
2. *Quel que soit $h \in \,]0,\infty[$, $B^H(t+h) - B^H(h) = B^H(t)$;*
3. *Si $t \neq 0$, $B^H(\frac{1}{t}) = t^{-2H} B^H(t)$;*

où la convergence a lieu au sens des lois fini-dimensionnelles.

Réciproquement, si $B^H = \{B^H(t) : t \in [0, \infty[\}$ *est un processus gaussien vérifiant les points 1 et 2, et tel que*

4. $B^H(0) = 0$ *;*

5. $B^H(1) = 1$ *;*

alors B^H *est un mBf d'exposant de Hurst* H*.*

Remarque 1.1.4. La relation (1) permet d'écrire, pour tout $t \in [0, \infty[$:

$$B^H(t) = t^H B^H(1).$$

Démonstration. Pour montrer les points 1 à 3, il suffit de calculer l'opérateur de covariance dans chacun de ces cas, et d'appliquer le Théorème 3.1.1.

Pour montrer la réciproque, supposons disposer d'un processus B^H satisfaisant les hypothèses de celle-ci. Il suffit de montrer que le processus est centré (direct vu les points 1 et 2) et que son opérateur de covariance vérifie l'équation (1.1.1). Pour ce dernier point, soient $t_1, t_2 \in [0, \infty[$; il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_2)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1) - B^H(t_2)\right)^2\right]\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[\left(B^H(t_1)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(B^H(t_2)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(B^H(|t_1 - t_2|)\right)^2\right]\right)\end{aligned}$$

vu l'hypothèse du point 2. De même, le point 1 et la Remarque 1.1.4 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B^H(t_1)B^H(t_2)\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(B^H(1)\right)^2\right]\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right).\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Vu la proposition précédente, on dira que le processus B^H est *auto-similaire* s'il vérifie le point 1, qu'il est à *incréments stationnaires* s'il vérifie le point 2, et qu'il respecte *l'inversion du temps* s'il vérifie le point 3.

1.1.2 Propriétés négatives

Le mouvement Brownien standard, en dépit de ses trajectoires (presque sûrement) nulle part dérivables, reste un processus plutôt régulier. En quelques sortes, il est *« régulier dans son irrégularité »*. En considération de la Remarque 1.1.2, le mouvement Brownien standard est un mBf particulier. En fait, il est *maximal* pour certaines propriétés liées à la régularité.

Prédictibilité

Une manière de mesurer la régularité d'un processus stochastique est d'observer sa « prédictibilité », *i.e.* s'il est possible de prévoir, à plus ou moins long terme, son comportement. Dans le cas du mouvement Brownien standard, il est connu[1] qu'il s'agit d'une semi-martingale. Ce n'est pas le cas du mBf.

1. Insérer référence.

Propriété de Markov

Un processus est vérifie la *propriété de Markov* si, pour prédire son comportement futur, seul l'instant présent est « utile ».

DÉFINITION 1.1.5. Soit $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ un processus stochastique ; on dira de X qu'il vérifie la propriété de Markov si, quel que soit $t_1, t_2 \geq 0$ tels que $t_1 < t_2$ et quel que soit $A \in \mathbb{B}$, la relation

$$P(X(t_2) \in A | X(t), t \leq t_1) = P(X(t_2) \in A | X(t_1)) \tag{1.1.2}$$

est vérifiée ; on dira aussi que X est un *processus de Markov.*

Afin de montrer que si B^H est un mBf avec $H \neq \frac{1}{2}$, alors B^H ne vérifie pas la propriété de Markov, nous avons besoin du résultat suivant.

LEMME 1.1.6. *Si $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ est un processus de Markov, alors X vérifie la relation*

$$\mathbb{E}\left[X(t)X(v)\right]\mathbb{E}\left[(X(u)^2\right] = \mathbb{E}\left[X(t)X(u)\right]\mathbb{E}\left[X(u)X(v)\right] \tag{1.1.3}$$

quels que soient $t, u, v \in [0, \infty[$ tels que $t \leq u \leq v$.

THÉORÈME 1.1.7. *Soit $H \in]0, 1[\setminus \frac{1}{2}$; si B^H est un mBf, alors B^H n'est pas un processus de Markov.*

1.1.3 Écritures alternatives

La théorie du mouvement Brownien standard a permis le développement d'une intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô) ; en particulier, il est possible de récrire trivialement le mouvement Brownien standard à partir d'une intégrale d'Itô :

$$B(t) = \int_0^t dB(s).$$

Ici, nous montrons qu'il est possible d'exprimer sous diverses formes le mouvement Brownien fractionnaire.

Intégrale stochastique

Décomposition orthogonale

Il est nécessaire d'invoquer un outil d'analyse fonctionnel pour la démontrer. Si nous l'énonçons ici, nous renvoyons à la Section 3.2 pour en connaître une démonstration.

THÉORÈME 1.1.8 (Théorème de Mercer)**.** *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et soit*

$$K : I \times I \to \mathbb{R}$$

une fonction continue et symétrique. Si K est une fonction de type positif, alors il existe une base orthonormée de fonctions continues $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(I)$ et des constantes $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positives ou nulles telles que

$$K(s, t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k(s) e_k(t) \tag{1.1.4}$$

où la convergence de la série est uniforme.

Attention. Définir « de type positif ».

Remarque 1.1.9. Les fonctions $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ intervenant dans le Théorème 1.1.8 sont des « fonctions propres » associées aux « valeurs propres » $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour l'opérateur dont le noyau est défini par K [2], *i.e.*

$$\int K(s,t)e_k(t)dt = c_k e_k(t).$$

Le théorème suivant assure, sous certaines conditions, l'existence d'une « décomposition en ondelettes » d'un processus stochastique $X \in L^2$.

Théorème 1.1.10. *Soit* $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$ *un processus de* $L^2(\Omega)$*, et supposons que* Γ_X *soit continue sur* $[0,T]\times[0,T]$ *; le processus* X *admet une décomposition de la forme* **??** *si, et seulement si, la suite de constante* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et la suite de fonctions* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de* Γ_X.

Démonstration. À faire. ■

Attention. Une covariance ne définie pas entièrement un drap : voir [5]

Remarque 1.1.11. La convergence de la série du Théorème 1.1.10 est uniforme.

Transformée de Fourier

1.2 Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du mBf est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

Cette section est basée sur les résultats donnés dans [6], néanmoins ceux-ci sont limités à une dimension afin de ne pas alourdir l'exposé.

1.2.1 Définition et propriétés

Dans la Section 1.1, la généralisation proposée par le mBf consistait à introduire un exposant de Hurst $H \in \,]0,1[$ afin d'assujettir les trajectoires du processus à une certaine irrégularité. Comme rappelé précédemment, l'introduction du mBf par Mandelbrot & Van Ness ([7]) se fut par une intégrale stochastique. Le choix d'une généralisation du mBf peut se faire à l'aide de ces représentations : dans [8], les auteurs proposent d'utiliser la représentation intégrale ; dans [6], il est proposé de modifier la transformée de Fourier du mBf. Dans les deux cas, cette modification porte sur l'exposant de Hurst, remplacé par une fonction mesurable $t \mapsto H(t)$ [3].

Propriétés du générateur

1.2.2 Propriétés des trajectoires du mBm

2. On pourra par ailleurs trouver l'appellation de *noyau de Mercer*.
3. Dans [6], cette fonction est nommée *« fonction multifractionnaire de Hurst »*.

Prérequis. Pour évoquer le caractère non différentiable des trajectoires, on peut introduire quelques éléments relatifs aux temps locaux.

Propriété de Hölder

1.2.3 Écritures alternatives

Intégrale stochastique

Décomposition en ondelettes

Attention. Concernant la représentation en ondelettes, prendre garde à certaines subtilités ([9]).

1.2.4 Un mot sur le mBm lorsque $H(t)$ n'est pas déterministe

Piste. On peut définir (au moins) une intégrale stochastique pour le mBm. C'est assez difficile ([10]), dans le sens où il faut utiliser des outils qui (je crois) n'ont pas encore été vu ou ne sont pas au programme actuellement. On peut explorer [11].

Piste. Considérer une fonction aléatoire suffisamment régulière pour la fonction $H(t)$. On peut procéder comme suit :

1. Remplacer $H(t)$ par un processus connus (comme $B(t)$) pour obtenir une première heuristique.
2. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation intégrale (en particulier, est-ce qu'on peut *toujours* calculer ladite intégrale ?)
3. Étudier les conséquences d'un tel remplacement (en général) en partant de la représentation en série.
4. Si on veut passer d'une représentation à l'autre, est-ce qu'il y a des difficultés supplémentaires à surmonter ?
5. Peut-on toujours simuler les trajectoires d'un tel processus ?

Chapitre 2

Extensions à $\mathbb{R}^d$

On dispose de plusieurs méthodes permettant d'étendre le mouvement Brownien fractionnaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$; on introduit alors les notions d'extensions isotrope [1] (processus de Lévy) et non-isotrope (drap brownien). Ces techniques sont reprises et étudiées dans le cas d'un mouvement Brownien multifractionnaire.

> **Question.** Ce qui suit évoque des généralisations à $\mathbb{R}^d$ des mBf et mBm ; ne devrait-on pas également au moins évoquer le cas du mB standard (même si $B = B_H$ avec $H = \frac{1}{2}$) ?

2.1 Cas du mBf

2.1.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

2.1.2 Drap Brownien fractionnaire

2.2 Cas du mBm

Les paramètres vivent dans $\mathbb{R}^d$, donc il faut définir une fonction de Hurst $H : \mathbb{R}^d \to]0, 1[$.

2.2.1 Extension isotrope

2.2.2 Extension anisotrope

2.2.3 Régularité des extensions

1. On utilise les matrices orthogonales pour introduire l'isotropie ; ça revient à demander l'invariance par une isométrie ([6]).

Chapitre 3

Résultats complémentaires

3.1 Analyse stochastique

Théorème 3.1.1 (Théorème de consistance de Kolmogorov).

3.2 Théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt

La décomposition proposée par le théorème de Karhunen-Loève dépend de la théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt ; un cas particulier d'opérateurs compacts.

Définition 3.2.1. Supposons que K est une application définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^d$, et supposons que $K \in L^2(D \times D, \lambda \times \lambda, \mathbb{R}^d)$

3.3 Chapitre 1

3.4 Chapitre 2

Bibliographie

[1] Gennady SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*. Stochastic Modeling 1. Boca Raton : CRC Press, 1994, p. xxii, 632. ISBN : 978-0-41205-171-5.

[2] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications*. Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008, p. xii, 329. ISBN : 978-1-85233-996-8.

[3] Yuliya S. MISHURA. *Stochastic Calculus for Fractionnal Brownian Motion and Related Processes*. Lectures Notes in Mathematics 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008, p. xvii, 397. ISBN : 978-3-540-75873-0.

[4] Ivan NOURDIN. *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*. Bocconi & Springer Series. Milano : Springer-Verlag, 2012. IX, 122. ISBN : 978-88-470-2822-7.

[5] Erick HERBIN. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.

[6] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks*. World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.

[7] Benoit B. MANDELBROT et John W. VAN NESS. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.

[8] Romain François PELTIER et Jacques LÉVY-VÉHEL. *Multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results*. Rapport de recherche INRIA n°2645. 1995.

[9] Antoine AYACHE et Pierre R. BERTRAND. « A process very similar to multifractional Brownian motion ». In : *Recent Developments in Fractals and Related Fields* (2010). hal-00354081v2f, p. 311-326. DOI : 10.1007/978-0-8176-4888-6.

[10] Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « White noise-based stochastic calculus with respect to multifractional Brownian motion ». In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 86.1 (2014), p. 87-124.

[11] Erick HERBIN, Joachim LEBOVITS et Jacques LÉVY VÉHEL. « Stochastic Integration with respect to multifractional Brownian motion via tangent fractional Brownian motions ». In : (2012). URL : https://inria.hal.science/hal-00653808v5.

[12] Ju-Yi YEN et Marc YOR. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion : A Tale of Wiener and Itô Measures*. Lecture Notes in Mathematics 2088. London : Springer-Verlag, 2013. ISBN : 978-3-319-01269-8.

[13] Michel LOÈVE. *Probability Theory II*. 4e éd. Graduate Texts in Mathematics. New-York : Springer-Verlag, 1978. XVI, 413. ISBN : 0-387-90262-7.

[14] Matthieu GARCIN. *Forecasting with fractional Brownian motion : a financial perspective*. Consulté le 31 mai 2023. 2021. URL : https://arxiv.org/pdf/2105.09140.pdf.

[15] Matthieu GARCIN. *Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates*. HAL. hal-01399570f. Consulté le 31 mai 2023. 2016. URL : https://hal.science/hal-01399570.

[16] Sixian Jin, Qidi Peng et Henry Schellhorn. « Estimation of the Pointwise Hölder Exponent of Hidden Multifractional Brownian Motion Using Wavelet Coefficients ». In : (2017). url : `https://arxiv.org/abs/1512.05054v4`.

[17] Jean-François Coeurjolly. « Identification of multifractional Brownian motion ». In : *Bernoulli* 11.6 (2005), p. 987-1008.

[18] Joachim Lebovits et Mark Podolskij. *Estimation of the global regularity of a multifractional Brownian motion.* Consulté le 02 juin 2023. 2018. url : `https://arxiv.org/abs/1607.02391`.