Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Matemática
Análisis Numérico

Reto Análisis Numérico

Cristian Da Camara, Kenneth Leonel, Camilo Sandoval

21 de Febrero del 2020

1. Evaluación de un Polinomio

Evaluar polinomios o funciones en general tiene muchos problemas, aún para el software profesional. Como se requiere poder evaluar el polinomio en las raíces encontradas, es necesario dedicarle un momento a losdetalles.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n1} + ... + an \tag{1}$$

un polinomio entonces, uno de los problemas que se enfrentan es evaluar el polinomio en valor dado x_0 de la manera más eficiente. Un método visto es Horner:

$$b_0 = a_0 \tag{2}$$

$$b_k = a_k + b_{k1}x_0(k = 1, ..., n1) \tag{3}$$

$$b_n = P(x0) \tag{4}$$

1. Implemente en R o Python el método de Horner para evaluar $f'(x_0)$, tenga en cuenta la precisión de la computadora o unidad de redondeo.

2. Implemente el método de Horner si se realiza con números complejos, tenga en cuenta la precisión

Solución 1:

1. Partiendo de un polinomio cualquiera, en nuestro caso es $5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ calculamos la derivada la cual es $15x^2 + 8x + 3$ donde lo almacenamos en un arreglo llamado coeficientesDerivada, luego usamos este arreglo en donde hacemos un ciclo con el número de iteraciones igual a la cantidad de coeficientes, dentro de ese ciclo evaluamos el valor de x=3 y utilizamos la siguiente formula:

res= res*x+coeficientesDerivada[j]

Con base en estas operaciones se obtuvieron los siguientes valores:

	resultado
1	15
2	53
3	162

En la tabla se muestra todos los resultados por cada iteración, en donde el resultado final es la ultima iteración que en este caso es 162.

2. Partiendo de un polinomio cualquiera, en nuestro caso es x^3+10x^2+8x ,guardamos el valor de los coeficientes en un arreglo coeficientesI, donde posteriormente hacemos un ciclo similar al del ejercicio anterior en donde evaluamos el valor de x=2+i en donde usamos la siguiente formula:

res=res*x+coeficientesI[n]

Con base en estas operaciones se obtuvieron los siguientes resultados:

	resultado
1	1+0i
2	12+1i
3	31+14i
4	48+59i

En la tabla se muestra todos los resultados por cada iteración, en donde el resultado final es la ultima iteración que en este caso es 48+59i .

2. Optima Aproximación Polinómica

La implementación de punto flotante de una función en un intervalo a menudo se reduce a una aproximación polinómica, siendo el polinomio típicamente proporcionado por el algoritmo Remez. Sin embargo, la evaluación de coma flotante de un polinomio de Remez a veces conduce a cancelaciones catastróficas.El algoritmo Remez es una metodología para localizar la aproximación racional minimax a una función. La cancelaciones que también hay que considerar en el caso de del método de Horner, suceden cuando algunos de los coeficientes polinómicos son de magnitud muy pequeña con respecto a otros. En este caso, es mejor forzar estos coeficientes a cero, lo que también reduce el recuento de operaciones. Esta técnica, usada clásicamente para funciones pares o impares, puede generalizarse a una clase de funciones mucho más grande. Aplicar esta tecnica para f(x) = sin(x) en el intervalo $[pi/64, pi/64]$ con una precisión deseada doble. Para cada caso, evalue la aproximación polinomica de la función, el error relativo y el número de operaciones necesarias

1. Aplique una aproximación de Taylor
2. Implemente el método de Remez

Solución 2:

1.A partir del polinomio sen(x) hallamos la aproximación polinomial por medio del teorema de Taylor, iniciamos calculando el valor teórico de sen(pi/64) el cual es 0.049067, posteriormente hacemos un ciclo que hace equivalencia a la sumatoria obtenida por teorema de Taylor de la ecuación sen(x):

$$f(x) \approx P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Luego se hace una tabla correspondiente con los resultados junto con sus errores respectivos, tanto relativo como absoluto, en las iteraciones realizadas

	resultados	teorico	errorAbsoluto	errorRelativo
1	0.00000000	0.04906767	4.906767e-02	1.000000e+02
2	0.04908739	0.04906767	1.971088e-05	4.015469e-02
3	0.04908739	0.04906767	1.971088e-05	4.015469e-02
4	0.04906767	0.04906767	2.374889e-09	4.840028e-06

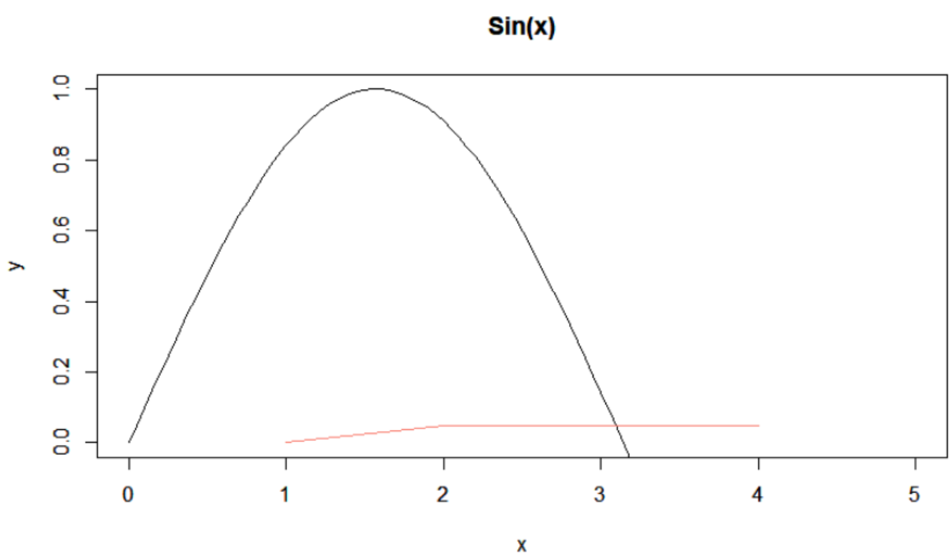
resultados: Valores obtenidos usando el algoritmo por cada iteración

teorico: Valor al cual queremos llegar mediante el algoritmo

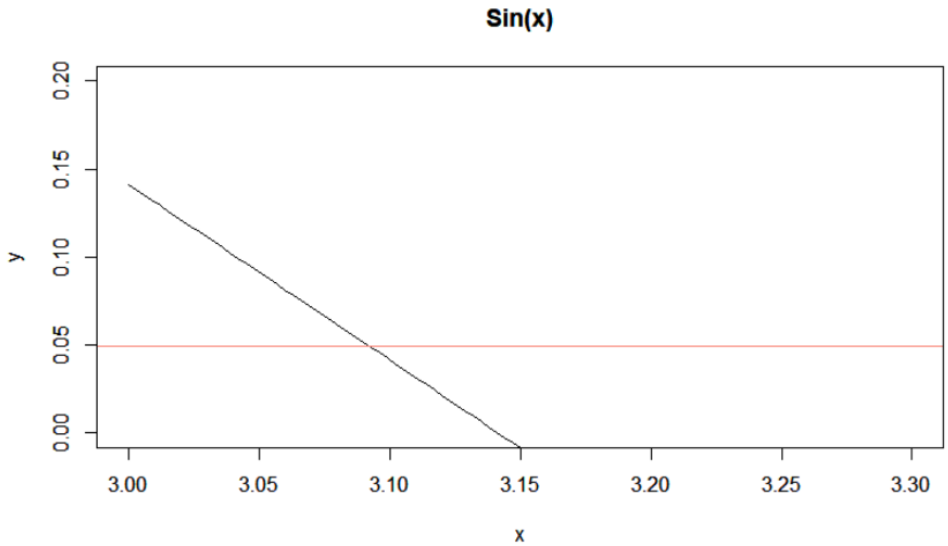
errorAbsoluto: Error absoluto por cada iteración

errorRelativo: Error relativo por cada iteración

Y de acuerdo a estos datos obtenidos obtuvimos lasa siguientes tablas:



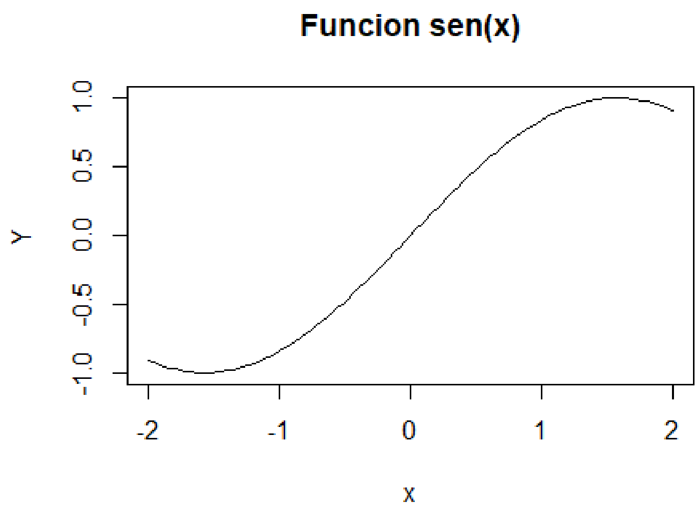
Vista con la gráfica ampliada



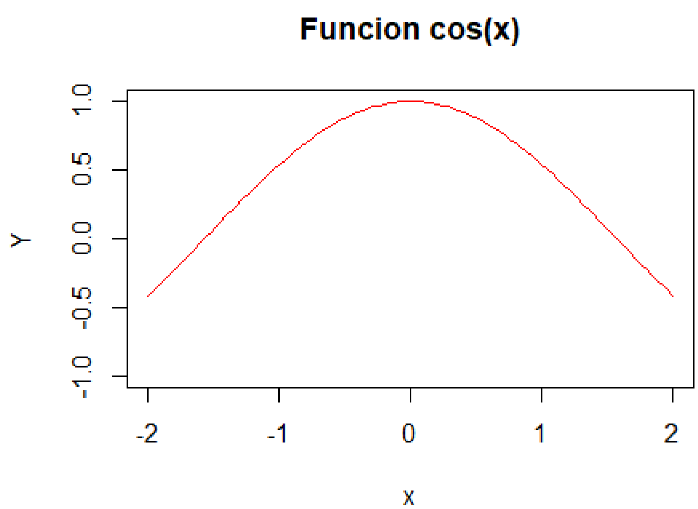
Gráfica en el punto donde cortan ambas gráficas

2. Inicialmente usamos la función f(x)=sen(x) en donde hacemos unas particiones para determinar la cantidad de datos que esta relacionado con el grado de polinomio que en este caso es 3, para llenar los vectores X (Valores que están dentro del intervalo) y Y (Valores evaluados en la función), haciendo un ciclo en donde la primera posición del arreglo tiene que ser el extremo izquierdo del intervalo que es $-pi/64$, así sucesivamente hasta llenar el arreglo cuyo ultimo valor es $pi/64$.

	x	y
1	-0.04908739	-0.04906767
2	0.00000000	0.00000000
3	0.04908739	0.04906767



Funcion sen(x)
Y
x
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
-2
-1
0
1
2



Funcion cos(x)
Y
x
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
-2
-1
0
1
2

Se resuelve el sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes del nuevo polinomio, en donde dichos coeficientes se guardaran en un arreglo Z para así obtener una nueva función que se aproxime a la original, por lo que para ello necesitamos la derivada de nuestra función que en este caso es la función f'(x)=cos(x).

```
0.0000000  0.9999999  0.0000000 -0.1666115
```

Posteriormente se gráfica el polinomio obtenido y se compara con la función f(x)=sen(x),de ahí tomamos un punto que este dentro del intervalo y lo evaluamos tanto en la función f(x)=sen(x) como en el polinomio para así obtener sus errores correspondientes.

	ErrorRelativo	ErroAbsoluto	ValorXpunto
1	7.653983e-06	9.392614e-10	0.01227185

Al hacer este procedimiento de los errores pudimos concluir que el error es muy pequeño por lo que comprueba el metodo de Remez, el cual consiste en que el polinomio obtenido se acerque mucho a la función inicial en donde su error tienda a cero.