Собственные векторы и собственные числа в унитарном пространстве.

Линейное отображение $\mathcal{A}: C^3 \to C^3$ задается матрицей $A=\begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Характеристическое уравнение $-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-13=0$.
2. Собственные числа матрицы A: $\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=3-2i,\quad \lambda_3=3+2i$.
3. Собственные векторы матрицы A:

$\lambda_1=-1$	$\lambda_2=3-2i$	$\lambda_3=3+2i$
$u^1=(1,1,1)$	$u^2=(-4-5i,-1-4i,1)$	$u^3=(-4+5i,-1+4i,1)$

4. Векторы $\{u^1,u^2,u^3\}$ образуют базис пространства. Матрицы перехода к этому базису:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -4-5i & -4+5i \\ 1 & -1-4i & -1+4i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & -10 & 22 \\ -4-2i & 5+5i & -1-3i \\ -4+2i & 5-5i & -1+3i \end{pmatrix}.$$

5. Отображение $\mathcal{A}$ обладает простой структурой. Матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисе $\{u^1,u^2,u^3\}$ из собственных векторов: $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2i & 0 \\ 0 & 0 & 3+2i \end{pmatrix}$.

6. Собственные векторы матрицы A^T, отвечающие ее собственным числам:

$\lambda_1=-1$	$\lambda_2=3-2i$	$\lambda_3=3+2i$
$v^1=(4,-5,11)$	$v^2=(1-i,-2+i,1)$	$v^3=(1+i,-2-i,1)$

7. Векторы $\{v^1,v^2,v^3\}$ образуют базис пространства. Матрицы перехода к этому базису:

$$F=\begin{pmatrix} 4 & 1-i & 1+i \\ -5 & -2+i & -2-i \\ 11 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad F^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11+17i & -11+7i & -1-3i \\ -11-17i & -11-7i & -1+3i \end{pmatrix}$$

8. Сосчитать

$B^T\cdot F=$ $\qquad$ $F^T\cdot B=$

9. Проверить, что векторы, образованные строками матрицы B^{-1}, также являются собственными векторами матрицы A^T, найти отвечающие им собственные числа.

$w^1=\frac{1}{20}(8,-10,22)$	$w^2=\frac{1}{20}(-4-2i,5+5i,-1-3i)$	$w^3=\frac{1}{20}(-4+2i,5-5i,-1+3i)$
$\lambda\ =-1$	$\lambda\ =3-2i$	$\lambda\ =3+2i$

10. Проверить, что векторы, образованные строками матрицы F^{-1}, также являются собственными векторами матрицы A, найти отвечающие им собственные числа.

$f^1=\frac{1}{20}(2,2,2)$	$f^2=\frac{1}{20}(-11+17i,-11+7i,-1-3i)$	$f^3=\frac{1}{20}(-11-17i,11-7i,-1+3i)$
$\lambda\ =-1$	$\lambda\ =3-2i$	$\lambda\ =3+2i$

11. Вычислить матрицу скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (u^1,w^1) & (u^1,w^2) & (u^1,w^3) \\ (u^2,w^1) & (u^2,w^2) & (u^2,w^3) \\ (u^3,w^1) & (u^3,w^2) & (u^3,w^3) \end{pmatrix}=$$

Вычисления и комментарии.

1. Характеристическое уравнение.

Матрица $A=\begin{pmatrix}7 & -7 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}$. След $\operatorname{tr}A=7+0-2=5$.

Определитель $\det A=\begin{vmatrix}7 & -7 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -7 & 8\\ 2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -7 & -8\\ 0 & 14 & -19\\ 0 & -11 & 14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14 & -19\\ -11 & 14\end{vmatrix}=-13$.

Характеристическая матрица: $A-\lambda E=\begin{pmatrix}7-\lambda & -7 & -1\\ 2 & -\lambda & -3\\ -2 & 3 & -2-\lambda\end{pmatrix}$.

Характеристическая система $\begin{cases}(7-\lambda)u_1 & -7u_2 & -u_3 & =0\\ 2u_1 & -\lambda u_2 & -3u_3 & =0\\ -2u_1 & +3u_2 & -(2+\lambda)u_3 & =0\end{cases}$.

Характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -7 & -1\\ 2 & -\lambda & -3\\ -2 & 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-13=0.$$

2. Собственные числа матрицы A.

Решение характеристического уравнения

$\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda+13=0$, делители 13: $\pm 1,\pm 13$, $\lambda_1=-1$ – корень, $\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda+13=$
$=(\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+13)=0\Rightarrow\lambda_2=3-2i,\lambda_3=3+2i$.

Проверки: сумма $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5=\operatorname{tr}A$, произведение $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-13=\det A$.

3. Собственные векторы матрицы A.

$\lambda_1=-1$:

$$\begin{pmatrix}8 & -7 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}10 & -10 & 0\\ 8 & -8 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}Б & С & Б\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\end{array}\leftrightarrow\begin{cases}u_1 & -u_2 & & =0\\ & -u_2 & +u_3 & =0\end{cases}$$

$$u_2=\alpha,u_1=\alpha,u_3=\alpha,\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad\alpha=1,\quad u^1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=(1,1,1).$$

$\lambda_2=3-2i$:

$$\begin{pmatrix}4+2i & -7 & -1\\ 2 & -3+2i & -3\\ -2 & 3 & -5+2i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & (-3+2i)/2 & -3/2\\ 0 & 2i & -8+2i\\ 0 & 1-i & 5+3i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 4+5i\\ 0 & 1 & 1+4i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}С & Б & Б\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 4+5i\\ 0 & 1 & 1+4i\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}u_1 & & +(4+5i)u_3 & =0\\ & u_2 & +(1+4i)u_3 & =0\end{cases}\Rightarrow u_3=\alpha,u_2=-(1+4i)\alpha,u_1=-(4+5i)\alpha,$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-4-5i)\\ -1-4i)\\ 1\end{pmatrix},\quad\alpha=1,\quad u^2=\begin{pmatrix}-4-5i\\ -1-4i\\ 1\end{pmatrix}=(-4-5i,-1-4i,1).$$

Если приводить матрицу к ступенчатой форме, начиная с $a_{13}=-1$, то получается совсем другой ответ $u^2=(41,\ 24+11i,-4+5i)$. Собственных векторов много…

$\lambda_3 = 3+2i$:

Нетрудно видеть, что $A\cdot u=\lambda\cdot u \Leftrightarrow \overline{A\cdot u}=\overline{\lambda\cdot u} \Leftrightarrow \overline{A}\cdot\overline{u}=\overline{\lambda}\cdot\overline{u} \Leftrightarrow A\cdot\overline{u}=\overline{\lambda}\cdot\overline{u}$, так как матрица A вещественная, $\overline{A}=A$. Вектор $\overline{u}$ – собственный, отвечающий собственному числу $\overline{\lambda}$. Поэтому $u^3=\overline{u^2}=\overline{(-4-5i,-1-4i,1)}=(-4+5i,-1+4i,1)$.

Проверки:

$$A\cdot u^1=\begin{pmatrix}7&-7&-1\\2&0&-3\\-2&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-1\cdot u^1$$

$$A\cdot u^2=\begin{pmatrix}7&-7&-1\\2&0&-3\\-2&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4-5i\\-1-4i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22-7i\\-11-10i\\3-2i\end{pmatrix}=(3-2i)\cdot\begin{pmatrix}-4-5i\\-1-4i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22-7i\\-11-10i\\3-2i\end{pmatrix}$$

4. Матрицы перехода к новому базису.

Столбцы матрицы перехода от новых координат к старым образованы векторами нового базиса:

$$B=\begin{pmatrix}1&-4-5i&-4+5i\\1&-1-4i&-1+4i\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от старых координат к новым – матрица B^{-1}.

$B_{11}=\ -8i$	$B_{21}=\ 10i$	$B_{31}=\ -22i$
$B_{12}=\ -2+4i$	$B_{22}=\ 5-5i$	$B_{32}=\ -3+i$
$B_{13}=\ 2+41$	$B_{23}=\ -5-5i$	$B_{33}=\ 3+i$
$\Delta=\ -20i$	$\Delta=\ -20i$	$\Delta=\ -20i$

$$B^{-1}=\frac{1}{20i}\begin{pmatrix}8\mathrm{i}&-10\mathrm{i}&22\mathrm{i}\\2-4\mathrm{i}&-5+5\mathrm{i}&3-\mathrm{i}\\-2-4\mathrm{i}&5+5\mathrm{i}&-3-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}8&-10&22\\-4-2i&5+5\mathrm{i}&-1-3\mathrm{i}\\-4+2\mathrm{i}&5-5\mathrm{i}&-1+3\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

Незначительные упрощения – после деления на i получается алгебраическая форма.

5. Без комментариев.
6. Без комментариев.
7. Почти без комментариев. Вычисление обратной матрицы:

$F_{11}=\ 2i$	$F_{21}=\ 2i$	$F_{31}=\ 2i$
$F_{12}=\ -17-11i$	$F_{22}=\ -7-11i$	$F_{32}=\ 3-i$
$F_{13}=\ 17-11i$	$F_{23}=\ 7-11i$	$F_{33}=\ -3-i$
$\Delta=\ 20i$	$\Delta=\ 20i$	$\Delta=\ 20i$

$$F^{-1}=\frac{1}{20i}\begin{pmatrix}2i&2i&2i\\-17-11i&-7-11i&3-i\\17-11i&7-11i&-3-i\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}2&2&2\\-11+17i&-11+7i&-1-3i\\-11-17i&-11-7i&-1+3i\end{pmatrix}$$

8. Без комментариев (но ответы "красивые"**).**

9. Проверить, что векторы, пропорциональные строкам матрицы B^{-1}, также являются собственными векторами матрицы A^T, найти отвечающие им собственные числа.

Проще проверить совпадение векторов $A\cdot w$ и $\lambda\cdot w$, нежели выносить множитель λ из произведения $A\cdot w$. Проверять $A\cdot w^3=\lambda_3\cdot w^3$ не нужно, если выполнено $A\cdot w^2=\lambda_2\cdot w^2$. Пример:

$$A^T \cdot w^2 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -7 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4-2i \\ 5+5i \\ -1-3i \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -16+2i \\ 25+5i \\ -9-7i \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \cdot w^2 = \frac{1}{20}(3-2i)\cdot\begin{pmatrix} -4-2i \\ 5+5i \\ -1-3i \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -16+2i \\ 25+5i \\ -9-7i \end{pmatrix} = A^T \cdot w^2.$$

10. Без комментариев.

11. Вычислить матрицу скалярных произведений. Базисы $\{u^1, u^2, u^3\}$ и $\{w^1, w^2, w^3\}$ – пример биортонормированных базисов (дуальных, двойственных, название зависит от конкретного раздела математики, в котором встречаются такие базисы).