ОМА Лаб 4

Владислав Моисеев

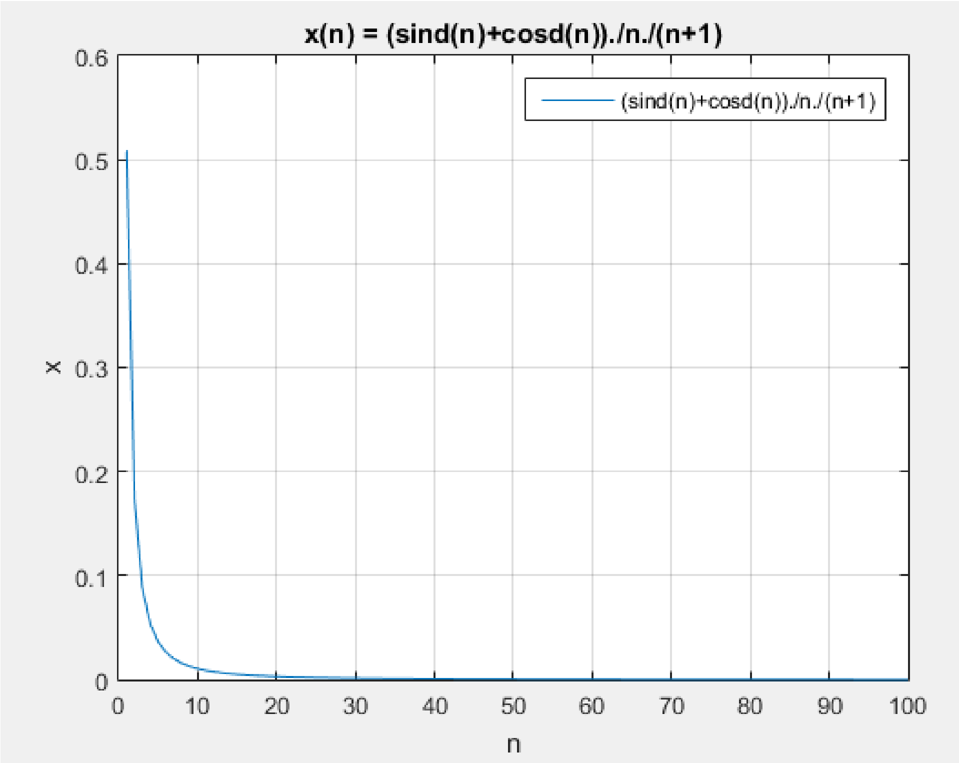
Упражнение 1

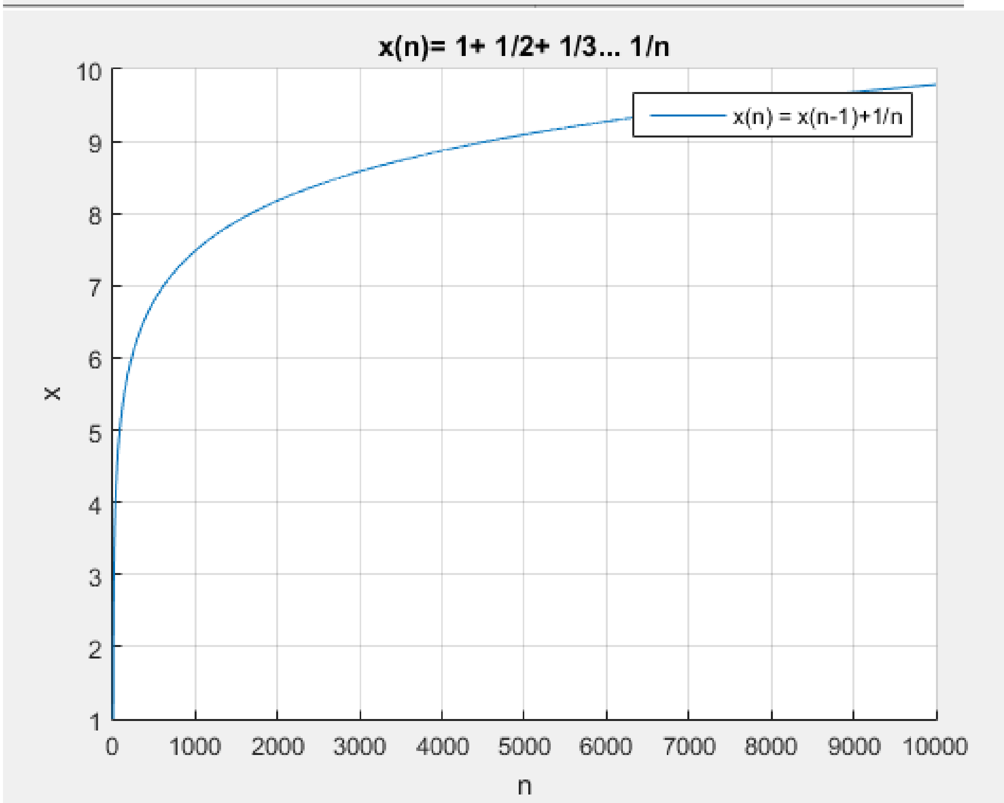
По графику последовательности $\{x_n\}$ высказать предположения (гипотезы) о ее свойствах (монотонности, ограниченности, сходимости):

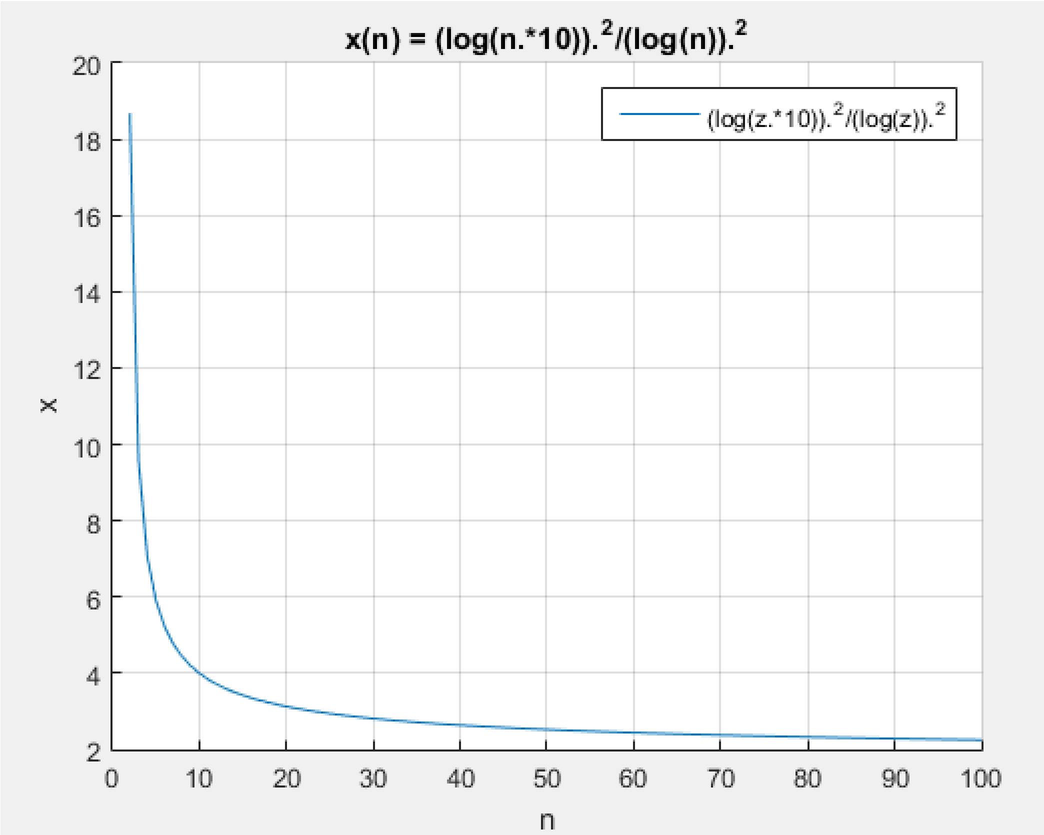
а) $x_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n(n+1)}$; б) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots \dfrac{1}{n}$; в) $x_n = \lg^2(10n) / \lg^2 n$.

Решение:

```
clear; clc; cla; close all;
n=1:100;
x= (sind(n)+cosd(n))./n./(n+1);

plot(n, x);
xlabel('n'),ylabel('f(x)')
grid on;
title('x(n) = (sind(n)+cosd(n))./n./(n+1)')
xlabel('x'), ylabel('n')
legend('(sind(n)+cosd(n))./n./(n+1)')

clear;
figure()
grid on;
x(1) = 1;
hold on;
n = 1:100;
for k=2:100
    x(k) = x(k-1)+1/k;
end
plot(n, x);
title('x(n)= 1+ 1/2+ 1/3... 1/n'); xlabel('n'); ylabel('x'); legend('x(n) = x(n-1)+1/n');

clear;
figure()
hold on;
grid on;
n = 1:100;
x = (log10(n.*10)./log10(n)).^2;
plot(n, x);

title('x(n) = (log(n.*10)).^2/(log(n)).^2'); xlabel('n'); ylabel('x');
legend('(log(z.*10)).^2/(log(z)).^2');
```


x(n) = (sind(n)+cosd(n))./n./(n+1)
(sind(n)+cosd(n))./n./(n+1)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
x
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
n


x(n)= 1+ 1/2+ 1/3... 1/n
x(n) = x(n-1)+1/n
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
n



Вывод: А) монотонно убывает, ограничена снизу x = 0, сверху x = 0.5, имеет сходимость и предел а = 0.25.

Б) Монотонно возрастает, ограничена снизу x = 1, сходимости и предела не имеет.

В) Монотонно убывает, ограничена снизу x = 0, имеет сходимость и предел только при n > 1, т. к. при n = 1 x(n) = +беск.

Итоговый: наибольшей проблемой были попытки оценить функцию в дробных и отрицательных значениях n, но, когда понял, что n – натуральные числа, все стало на свои места.

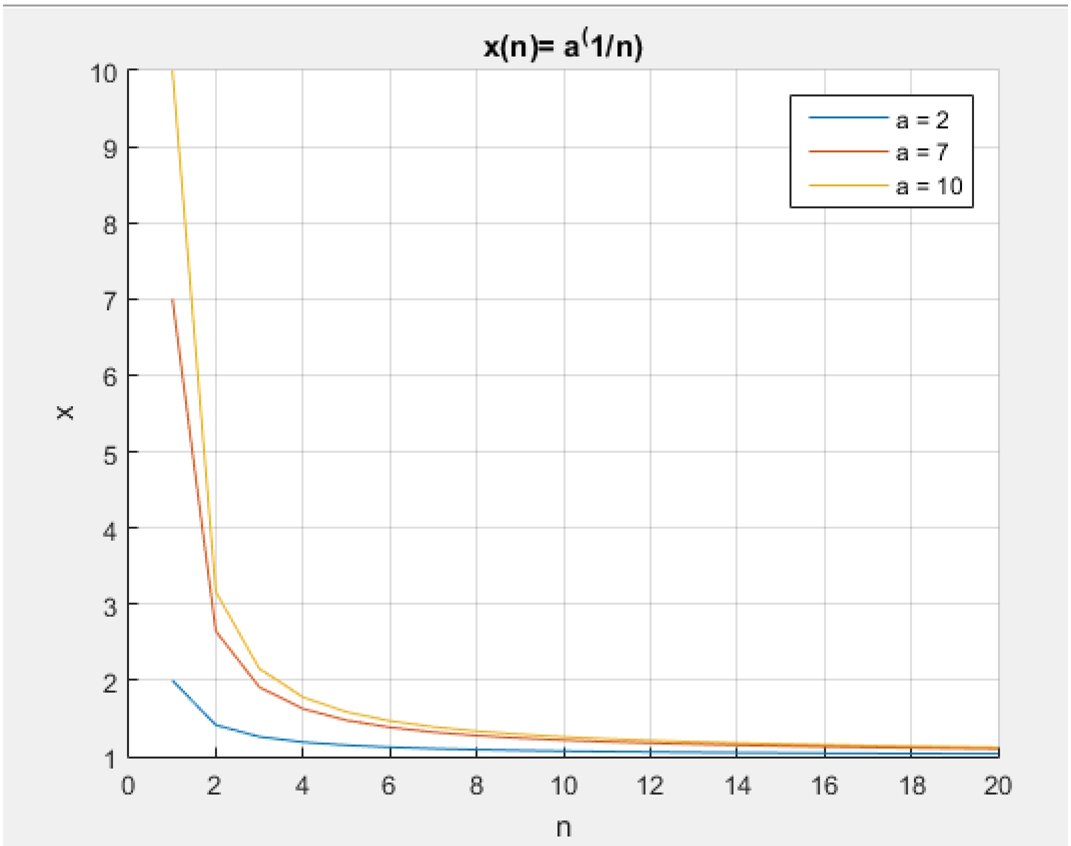
Упражнение 2

Провести вычислительный эксперимент по исследованию сходимости последовательности $x_n = \sqrt[n]{a}$ при различных значениях параметра a. При наличии сходимости сформулировать гипотезу о значении предела (с точностью до сотых).

Решение:

```
clear; clc; cla; close all;
grid on;
hold on;
n0 = 1:20;
for a = [2, 7, 10]
    for n=1:20
        x(n) = a^(1/n);
    end
    plot(n0, x)
end
title('x(n)= a^(1/n)'); xlabel('n'); ylabel('x'); legend('a = 2', 'a = 7', 'a = 10');
```

Результат:



Вывод: при любом значении а функция стремиться к x = 1, ограничена снизу x=1 и сверху x=a.

Предел при любом a равен (a-1)/2.

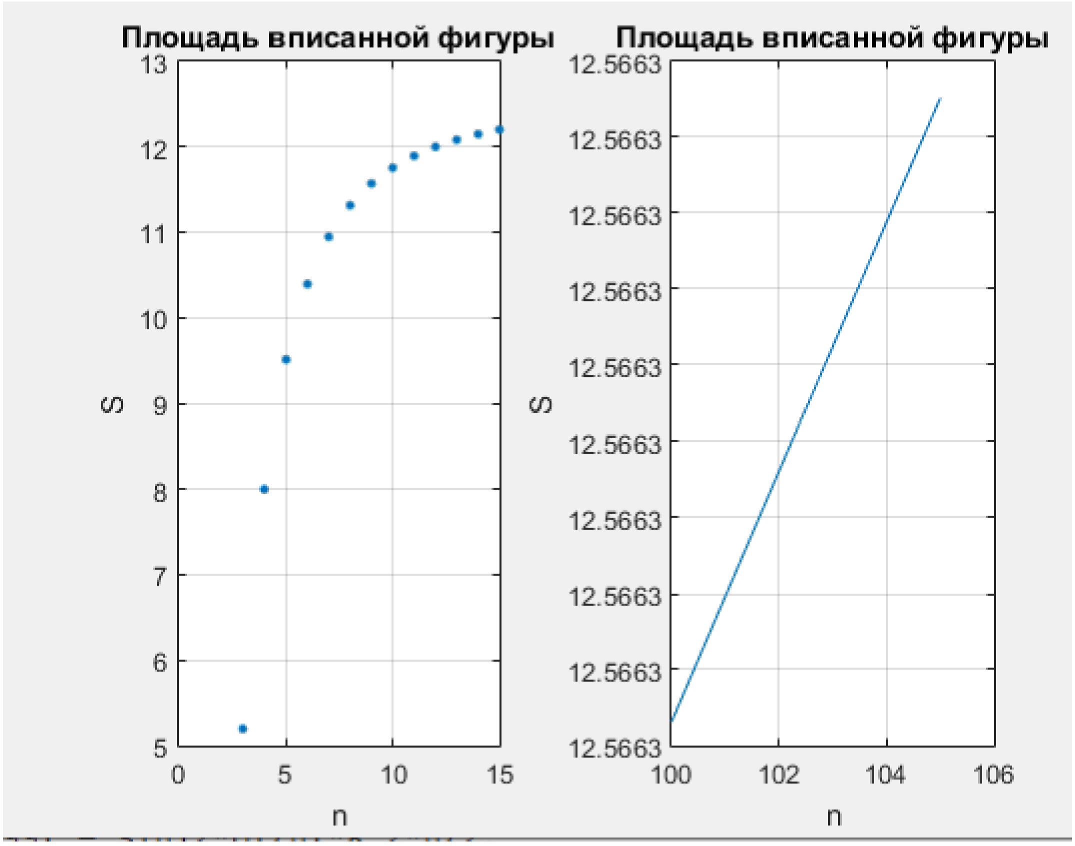
Упражнение 3

Построить график последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса $R = 2$. Определить по графику с точностью до тысячных значение предела этой последовательности.

Решение:

```
clear; clc; cla; close all;
R = 2;
subplot(1, 2, 1)
for n=3:15
S(n-2) = sin(2*pi/n)*R^2*n/2;
end
n=3:15;
plot(n, S, '.', 'MarkerSize', 10);
grid on; title('Площадь вписанной фигуры'); xlabel('n'); ylabel('S');
subplot(1, 2, 2)
for n=1000:1005
S1(n-999) = sin(2*pi/n)*R^2*n/2;
end

n = 100:105;
plot(n, S1);
grid on; title('Площадь вписанной фигуры'); xlabel('n'); ylabel('S');
a = (sin(2*pi/50)*R^2*50/2+sin(2*pi/3)*R^2*3/2)/2;
a = round(a*1000)/1000
```

Результат:



Вывод: Площадь вписанной фигуры вычисляем по формуле `S= sin(2*pi/n)*R^2*n/2;`
По второму графику видно что последовательность ограничена сверху S = 12.566
Снизу S = 5.1962. Следовательно предел равен их среднеарифметическому a = 8.865.

Упражнение 4

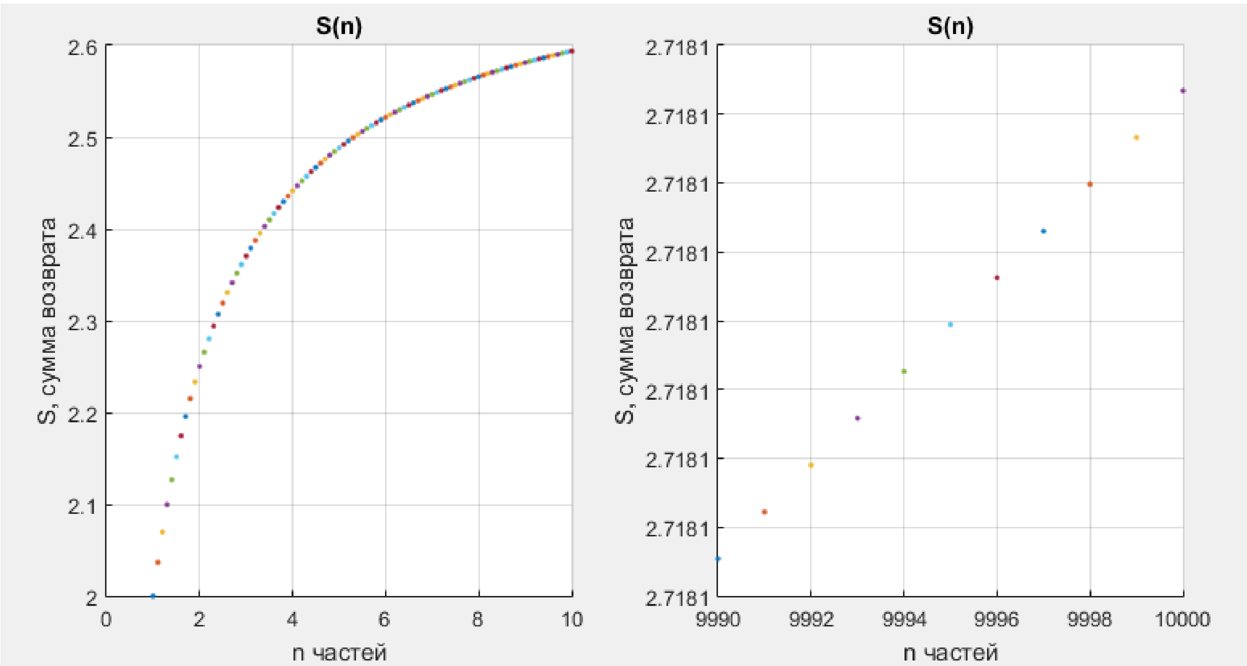
Перескажем историю, автором которой является выдающийся математик Якоб Бернулли.

Ростовщик дал купцу некоторую сумму денег S с условием, что через год тот вернет вдвое больше. Ростовщик задался вопросом: «Что будет, если начисление 100% распределить на два раза: начислить 50% в середине года, а потом еще 50 % в конце года»? Несложные расчеты показывают, что такой подход ростовщику выгоден, ведь через полгода купец будет должен ростовщику $1{,}5S$, а еще через полгода $1{,}5^2S = 2{,}25S$ (что лучше чем $2S$). А если пойти дальше и производить повышение четырежды в год? Тогда через три месяца купец будет должен ростовщику $1{,}25S$, через шесть - $1{,}25^2S$, через девять - $1{,}25^3S$, а через год - $1{,}25^4S \approx 2{,}4S$. Сумма возврата растет! В голове ростовщика возник хитрый план: увеличивать сумму, подлежащую возврату, «непрерывно». Иными словами, он решил разделить год на n равных частей так, чтобы по истечению каждого из промежутков сумма возрастала на $\frac{100}{n}$%. Ростовщик полагал, что при увеличении n это приведет к его неограниченному обогащению. Так ли это? Путем вычислительного эксперимента установите, на что может рассчитывать ростовщик при «неограниченном» возрастании n.

Решение:

```
clear; clc; cla; close all;
subplot(1, 2, 1)
hold on; grid on; xlabel('n частей'); ylabel('S, сумма возврата'); title('S(n)');
for n = 1:0.1:10
    s = 1;
    s = s*(1+1/n)^n;
    plot(n, s, '.');
end
%выше 2.7183S ростовщик не получит
subplot(1, 2, 2)
hold on; grid on; xlabel('n частей'); ylabel('S, сумма возврата'); title('S(n)');
for n = 9990:10000
    s = 1;
    s = s*(1+1/n)^n;
    plot(n, s, '.');
end
```

Результат:



Вывод: по графику видно, что долг возрастает, но ограничена сверху Sд = 2.7181S. Следовательно ростовщик не сможет получить больше 2.7181S от изначального займа S.