Lab 5

Влад Моисеев ПИН 12

Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, на отрезке $[a, b]$ ($a = x_0$) методом ломаных Эйлера с заданной точностью ε.

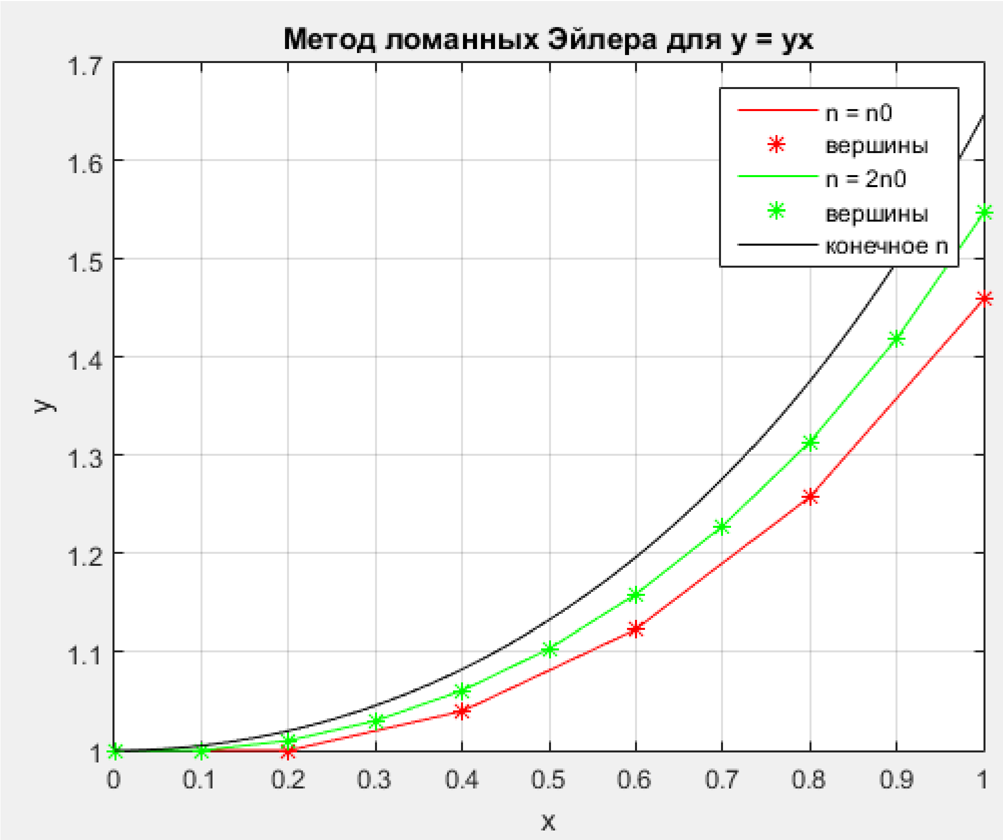
```
clear; clc; cla; close all;
syms x;
f = sym('x*y');
Y = sym('exp(x^2/2)');
e = 0.001; a = 0; b = 1; y0 = 1; x0 = 0; n0 = 5;
[L, n] = MV_1f(f, x0, y0, a, b, n0, e);

X = a:(b-a)/n:b;
figure()
plot(X, L, 'r')
hold on; grid on;
plot(X, subs(Y, x, X), 'k')
xlabel('x'); ylabel('y'); title('Точное и полученное значения');
legend('Полученные', 'Точные')
xlim([0.95, 1]); %ylim([])
```

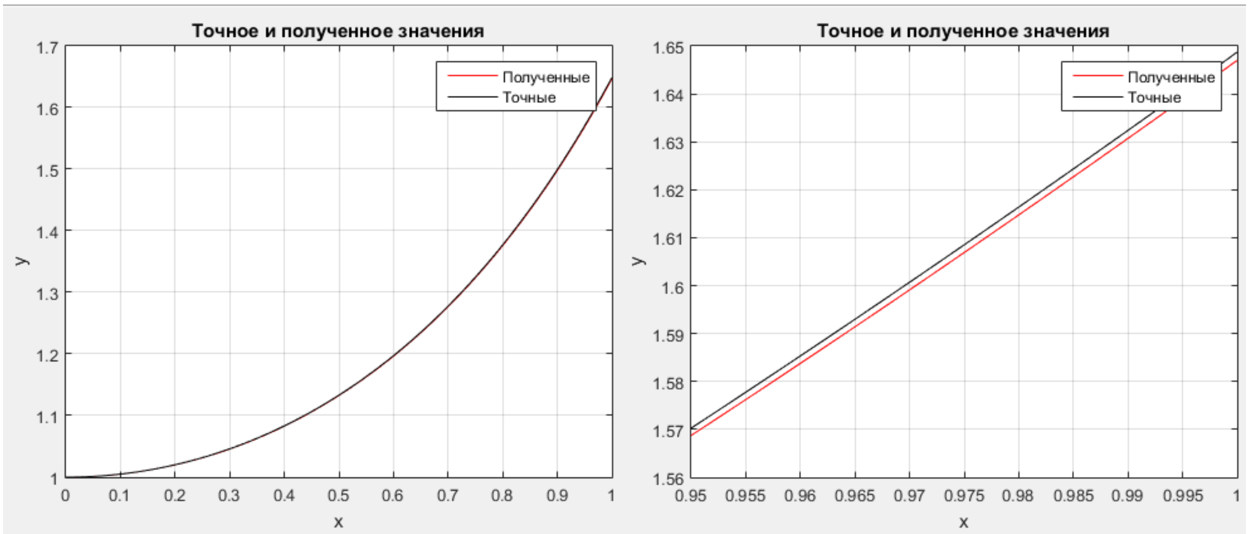
Функция

```
function [L, n] = MV_1f(Y, x0, y0, a, b, n0, e)
syms x y;
n = n0;
X = a:(b-a)/n:b;
y1(1) = y0;
y2(1) = y0;
for i = 2:1:n+1
    y1(i) = y1(i-1)+subs(Y, {x, y}, {X(i-1), y1(i-1)})*(b-a)/n;
end
figure(1)
plot(X, y1, 'r')
hold on; grid on;
plot(X, y1, 'r*')
%%%%%%%%%%

n = 2*n;
X = a:(b-a)/n:b;
for i = 2:1:n+1
    y2(i) = y2(i-1)+subs(Y, {x, y}, {X(i-1), y2(i-1)})*(b-a)/n;
end
plot(X, y2, 'g')
plot(X, y2, 'g*')
%%%%%%%%%%

for i = 1:1:n/2
    dy(i) = abs(y1(i)-y2(2*i-1));
end
```

```
while max(dy)>e
    y1 = y2;
    n = 2*n;
    X = a:(b-a)/n:b;
    for i = 2:1:n+1
    y2(i) = y2(i-1)+subs(Y, {x, y}, {X(i-1), y2(i-1)})*(b-a)/n;
    end
    for i = 1:1:n/2
    dy(i) = abs(y1(i)-y2(2*i-1));
    end
end
%%%%%%%%

X = a:(b-a)/n*2:b;
plot(X, y1, 'k')
xlabel('x'); ylabel('y'); title('Метод ломанных Эйлера для y = yx');
legend('n = n0','вершины','n = 2n0','вершины','конечное n');
n = n/2; L = y1;
end
```

Результат:





Вывод: Функция вычисляет первые два решения с n0 и 2n0 и строит их графики. А дальше сравнивает их. В цикле повторяю предыдущие действия пока максимальный модуль разности значений в совпадающих по x точках не будет меньше эпсилон. Как и в прошлой лабе обошелся без рекурсии. Каждое вычисление с n разбиением сравнивается с вычислением с разбиением 2n а возвращается значение с n, как достаточно точное. Как можно заметить по первому графику, чем больше итераций, тем точнее значение. Итоговое значение практически совпадает с точным, что можно заметить на втором графике и его приближении.

Упражнение 2.

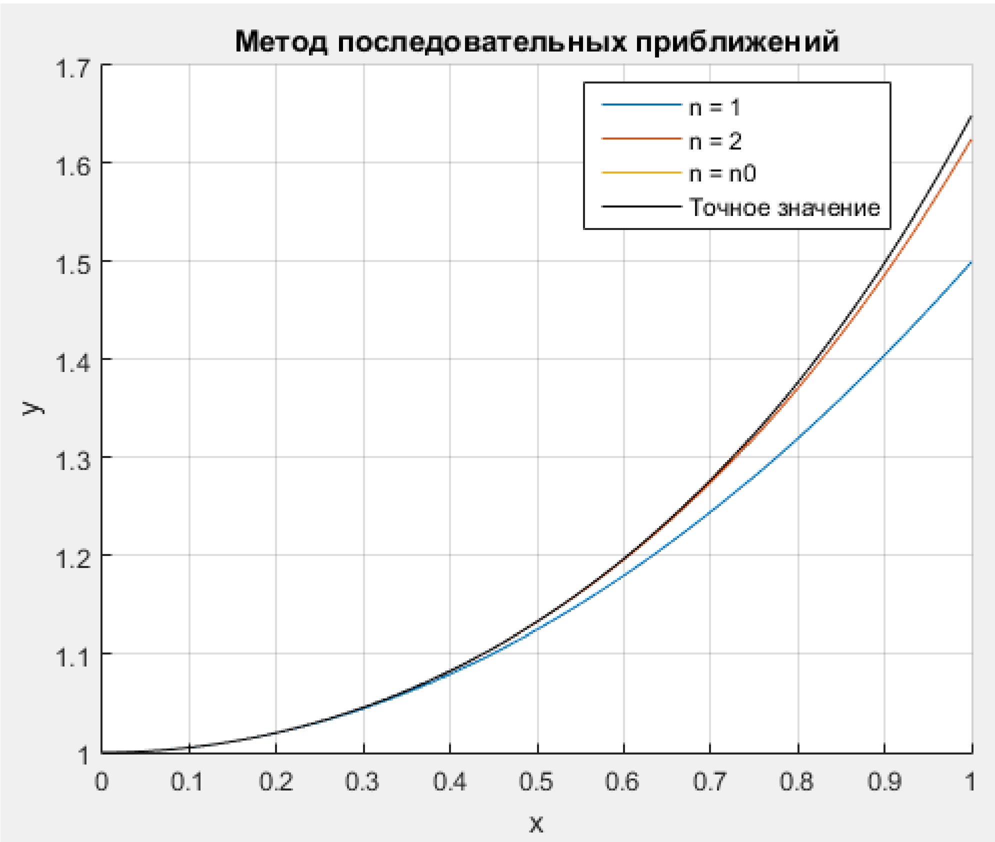
Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, методом последовательных приближений Пикара.

```
clear; clc; cla; close all;
syms x;
f = sym('x*y');
Y = sym('exp(x^2/2)');
a = 0; b = 1; y0 = 1; x0 = 0; n0 = 5;
L = MV_2f(f, x0, y0, n0);

X = 0:0.01:1;
plot(X, subs(Y, x, X), 'k')
legend('n = 1', 'n = 2', 'n = n0', 'Точное значение')

rez = double(max(abs(subs(L(n0), x, X) - subs(Y, x, X))))
```

Функция:

```
function [L] = MV_2f(Y, x0, y0, n0)
syms x y;
y1 = y0+subs(int(Y, x, x0, x), y, y0);
L(1) = y1;

for i = 2:1:n0
    y1 = y0+subs(int(subs(Y, y, y1), x, x0, x), y, y0);
    L(i) = y1;
end
N = 100;
X = 0:1/N:1;
figure()
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
title('Метод последовательных приближений');
plot(X, subs(L(1), x, X))
plot(X, subs(L(2), x, X))
plot(X, subs(L(n0), x, X))
end
```

Результат




```
rez =

   2.3354e-05
```

Вывод: снова без рекурсии. Вычислил первый y, а дальше подставлял его с помощью subs в изначальную функцию, интегрировал посредством int() и подставлял значения y0. И так n0 раз.

Оказалось первое вычисление вне цикла можно было внести в цикл, ну да ладно.

Хоть ручное интегрирование несколько сложнее метода Эйлера, однако уже при 5 итерациях мы получаем точное значение (с погрешностью 2.3*10^-5) что является достаточным.

Вопросы:

1) Метод Эйлера состоит в замене точного решение функцией, графически являющейся функцией ломаных. Разбиваем интервал на равные части. На каждом разбиении заменяем функцию на отрезок прямой с некоторым коэффициентом k. Чем мельче разбиение, тем точнее решение
2) Метод последовательных приближений: свести решение задачи Коши к вычислению интегралов. Рекуррентно вычисляя значения интегралов, получаем тем более точные значения, чем больше n. Где n – число интегрирований.