Моисеев ПИН-22 лаб 5

1 Задайте функцию f(x) = x 3 на отрезке [0, 1]. Очевидно, определённый ЛР 5. Интегрирование функций. Формулы трапеций, Симпсона. 143 интеграл от функции f(x) на этом отрезке равен 1 4 . Напишите программу, вычисляющую значение интеграла по формулам трапеций и Симпсона.

```
clear; clc;
syms x
f = @(x)x^3;
fun = x^3;
a = 0; b = 1; n = 20;
trap = intTrap(fun, a, b, n)
simp = intSimpson(fun, a, b, n)

f2 = x^2;
f3 = x/2;
eps(1) = int(fun, a, b)- intTrap(fun, a, b, n);
eps(2) = int(fun, a, b) - intSimpson(fun, a, b, n);
eps(3) = int(f2, a, b) - intTrap(f2, a, b, n);
eps(4) = int(f2, a, b) - intSimpson(f2, a, b, n);

eps(5) = int(f3, a, b) - intTrap(f3, a, b, n);
eps(6) = int(f3, a, b) - intSimpson(f3, a, b, n);
double(eps)
max(eps)
```

Какую максимальную теоретическую ошибку мы при этом допускаем? Найдите реальное значение погрешности (абсолютное значение разности между теоретическим и аналитическим решением).

Погрешности `[ -1/1444, 667/40000, -1/2166, 101/6000, 0, 1/100]` , макс 0.0168

Почему при вычислении интеграла по формуле Симпсона от данной функции ошибка равна нулю?

Потому что при вычислении интеграла многочлена 3 и ниже степени по формуле симпсона погрешности нет.

Лемма. *Формула Симпсона точна для любого многочлена 3-ей степени, т.е. имеет место точное равенство* $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$, *если* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

Какие бы получились значения погрешностей для квадратичной и линейной функций (предположите и проведите численный эксперимент для f2(x) = x 2 , f1(x) = x/2 на отрезке [0, 1]).

-0.0005   0.0168   0   0.0100

2 Используя соотношение найдите значение числа π с точностью 10−6 . Из каких соображений выбирался шаг для получения указанной точности?

```
clear; clc;
syms x;
F = @(x)1./(1+x.^2);
a = 0; b = 1;
[I1, n1] = piFind(F, a, b, 10^(-6));
PI = I1*4, n1
format long e

[I2, n2] = piFindRunge(F, a, b, 10^(-6));
PIRunge = I2*4, n2
```

```
function I = intSimpson2(F, a, b, n)
if mod(n, 2) ~= 0
    n = n + 1;
end
h = (b-a)/(n-1);
x = a:h:b;
coeff = [1, repmat([4, 2], 1, (n-2)/2), 1];
I = F(x).*coeff.*h./3;
I = double(sum(I));
end
```

```
function [I, n] = piFind(f, a, b, eps)
n = 2; old = inf;
I = intSimpson2(f, a, b, n);


for i = [100, 10, 2]
    while abs(I - old)>=eps
        old = I;
        n = n + i;
        I = intSimpson2(f, a, b, n);
    end
    n = n - i;
end
end
```

PI1 = 3.141433942327509

n1 = 4090

шаг выбирался подбором, постепенно уменьшаясь при выполнении условия

3 Реализовать предыдущее задание, определяя точность методом Рунге. При численном вычислении интегралов последовательно с шагами h и h/2 можно сократить число арифметических операций. Заметим, что приближённое значение интеграла Ih/2 есть сумма, часть слагаемых которой возможно уже участвовало при вычислении Ih. Поэтому можно получить Ih/2 , используя числовое значение Ih. Это позволяет избежать повторного суммирования части слагаемых.

Сделал в предыдущем задании

PIRunge = 3.141588732078840

n2 =78890

```
function [I2, n] = piFindRunge(f, a, b, eps)
n = 2;
I1 = intSimpson(f, a, b, n);
I2 = intSimpson(f, a, b, 2*n);

for i = [100, 10, 2]
    while abs(I1 - I2)>=eps
        n = n + i;
        I1 = intSimpson2(f, a, b, n);
        I2 = intSimpson(f, a, b, n*2);
    end
    n = n - i;
end
end
```

Контрольные вопросы

1. В каких случаях имеет смысл использовать неравномерное распределение узлов? Каким образом алгоритмически можно реализовать автоматический подбор шага?

В никаких. Моим мега крутым способом

2. Какая ошибка допускается, если подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом, а затем производится аналитическое вычисление интеграла?

Ошибка приближения функции интерполяционным полиномом n-ой степени в точке x — это разность $Rn(x) = f(x) - Pn(x)$. Если взять Rn как число то погрешность интеграла $Rn*x$

3. Какой метод — прямоугольников (с выбором центральной точки) или трапеций — даёт в общем случае меньшую ошибку?

центральный

4. Каким образом можно уточнить значение интеграла, уже вычисленного по формулам трапеций и прямоугольников?

На основании формул прямоугольников и трапеций можно получить уточненные значения интегралов, если учесть характер погрешностей этих формул. Главный член погрешности формулы прямоугольников (по среднему) на каждом отрезке [xi-1, xi] равен $h3 * f\ IV(xi - 1/2)/24$; для формулы трапеций он равен $-h3 * f''(xi)/12$, т.е. примерно вдвое больше и имеет другой знак. На основании этого можно записать уточненную формулу для вычисления определенного интеграла с использованием значений I1 и I2, вычисленных по методам прямоугольников и трапеций:

I » (2I1 + I2)/3.