Medición de Qubits y la Esfera de Bloch

Beatriz Fresno Naumova

1 La Esfera de Bloch y los Estados Qubit

En mecánica cuántica, un qubit puede representarse como una superposición de los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Estos estados son ortogonales y forman una base en el eje Z, es decir:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, se pueden definir otras bases ortogonales, como la base del eje X, donde tenemos los estados:

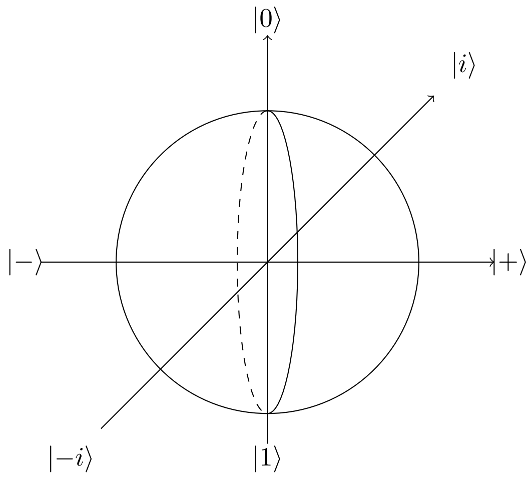
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle),$$

y la base del eje Y, que incluye los estados:

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i\,|1\rangle), \quad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i\,|1\rangle).$$

Estos estados se pueden visualizar en la **esfera de Bloch**, que es una representación geométrica de un qubit puro. Los puntos más importantes en la esfera son:

- $|0\rangle$ en el polo norte (Z^+),
- $|1\rangle$ en el polo sur (Z^-),
- $|+\rangle$ en el eje X^+,
- $|-\rangle$ en el eje X^-,
- $|i\rangle$ en el eje Y^+,
- $|-i\rangle$ en el eje Y^-.



2 Colapso de un Estado Cuántico

Cuando medimos el estado de un qubit, el sistema *colapsa* a uno de los eigenestados del observable que estamos midiendo. Si medimos el estado en la base $|0\rangle, |1\rangle$, la probabilidad de colapsar a $|0\rangle$ es $|a|^2$ y la probabilidad de colapsar a $|1\rangle$ es $|b|^2$ si el estado del qubit antes de la medición era $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

Sin embargo, podemos realizar la medición en cualquier eje. Por ejemplo, si medimos en la base $|+\rangle, |-\rangle$, las probabilidades de colapso dependen de las proyecciones del estado sobre esta nueva base.

3 Solución del Ejercicio

Dado el estado arbitrario $a|0\rangle + b|1\rangle$, queremos calcular la probabilidad de que el qubit colapse a $|+\rangle$ cuando medimos respecto al eje X, es decir, en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Sabemos que:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Queremos expresar el estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ como una combinación de $|+\rangle$ y $|-\rangle$:

$$a|0\rangle + b|1\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle.$$

Para hacerlo, resolvemos el sistema:

$$a|0\rangle + b|1\rangle = c\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + d\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

lo cual nos da las ecuaciones:

$$a = \frac{c+d}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{c-d}{\sqrt{2}}.$$

De aquí, resolvemos para c y d:

$$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, la probabilidad de colapsar al estado $|+\rangle$ es:

$$|c|^2 = \left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{|a+b|^2}{2}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el estado colapse a $|+\rangle$ es $\frac{|a+b|^2}{2}$.