Trabajando con Varios Qubits

Beatriz Fresno Naumova

1 Estados Cuánticos

Los estados cuánticos de un sistema de n qubits se pueden expresar en una superposición de 2^n estados. Un estado básico de n qubits es el producto de n estados simples. Si representamos los estados como $|0\rangle$ y $|1\rangle$, un estado cuántico general de n qubits puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$$

Donde α_i son los coeficientes complejos, y $|i\rangle$ son los estados básicos. La probabilidad de que el sistema colapse en un estado $|i\rangle$ al medirlo es el módulo al cuadrado de α_i, es decir:

$$P(i) = |\alpha_i|^2$$

Un ejemplo de estado básico de n qubits es el siguiente para $n = 2$ qubits:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

Si tenemos una superposición, el estado podría ser algo como:

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |00\rangle + \alpha_1 |01\rangle + \alpha_2 |10\rangle + \alpha_3 |11\rangle$$

2 Puerta CNOT

La puerta CNOT (Controlled-NOT) es una puerta cuántica con dos qubits: un qubit de control y un qubit objetivo. El funcionamiento es el siguiente:

- Si el qubit de control es 0, el qubit objetivo no se modifica. - Si el qubit de control es 1, el qubit objetivo se invierte (de 0 a 1 o de 1 a 0).

Matemáticamente, la puerta CNOT sobre un estado de dos qubits se representa como:

$$\text{CNOT} |c\rangle |t\rangle = |c\rangle |t \oplus c\rangle$$

Donde $\oplus$ representa la suma módulo 2 (operación XOR).

Ejemplo de circuito CNOT:

Consideremos el siguiente circuito donde aplicamos una puerta CNOT a un estado inicial $|\psi\rangle = |01\rangle$:

- Inicialmente tenemos el estado $|01\rangle$, donde el primer qubit es el de control ($c = 0$) y el segundo qubit es el objetivo ($t = 1$).
- Como $c = 0$, el objetivo no cambia, y el estado final es $|01\rangle$.

Si aplicamos la misma puerta CNOT al estado $|11\rangle$, el resultado sería:

$$\text{CNOT}\,|11\rangle = |10\rangle$$

3 Puerta de Control Unitaria (U controlado)

Una puerta U controlada es una extensión de la CNOT en la que aplicamos una transformación unitaria U al qubit objetivo solo si el qubit de control está en el estado $|1\rangle$. La operación se define como:

$$\text{CU}\,|c\rangle\,|t\rangle = |c\rangle\,U^c\,|t\rangle$$

Es decir, si $c = 1$, se aplica U al qubit objetivo, y si $c = 0$, no se realiza ninguna operación sobre el qubit objetivo.

4 Puerta de Medición

La puerta de medición proyecta el estado cuántico en uno de los estados base. Si el estado es una superposición, tras la medición, el sistema colapsa en uno de los estados posibles con una probabilidad proporcional al cuadrado del valor absoluto del coeficiente del estado. Para un qubit en el estado:

$$|\psi\rangle = \alpha_0\,|0\rangle + \alpha_1\,|1\rangle$$

Al medirlo, colapsará en el estado $|0\rangle$ con probabilidad $|\alpha_0|^2$ o en $|1\rangle$ con probabilidad $|\alpha_1|^2$.

5 Ejercicio Completo: Circuito con CNOT y Medición

Consideremos un circuito con dos qubits en el estado inicial $|00\rangle$, seguido de una puerta de Hadamard en el primer qubit, una puerta CNOT entre los dos qubits y una medición al final.

1. **Estado inicial**:
$$|\psi_0\rangle = |00\rangle$$

2. **Aplicamos la puerta Hadamard al primer qubit**:

$$|\psi_1\rangle = (H\,|0\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|00\rangle + |10\rangle)$$

3. **Aplicamos la puerta CNOT**:

$$|\psi_2\rangle = \mathrm{CNOT}\,|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|00\rangle + |11\rangle)$$

4. **Medición**: Al medir ambos qubits, el sistema colapsa a $|00\rangle$ o $|11\rangle$ con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada uno, ya que:

$$P(|00\rangle) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \quad P(|11\rangle) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

El circuito cuántico correspondiente se representa de la siguiente manera: