Algoritmo de Deutsch-Jozsa

Beatriz Fresno Naumova

September 23, 2024

1 Introducción

El algoritmo de Deutsch-Jozsa es uno de los primeros algoritmos cuánticos que demuestra que los ordenadores cuánticos pueden superar a los ordenadores clásicos en ciertos problemas. Resuelve el problema de determinar si una función booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ es **constante** (es decir, devuelve el mismo valor para todas las entradas) o **equilibrada** (devuelve 0 para la mitad de las entradas y 1 para la otra mitad). Clásicamente, se necesitarían al menos $2^{n-1} + 1$ evaluaciones para asegurar la respuesta, mientras que el algoritmo cuántico lo resuelve con una sola evaluación de la función.

2 Descripción del Algoritmo

Dado $f(x) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, el algoritmo cuántico sigue estos pasos:

1. Inicializar un registro cuántico de $n+1$ qubits en el estado $|0\rangle^{\otimes n} \otimes |1\rangle$.
2. Aplicar la transformación de Hadamard (H) a todos los qubits.
3. Evaluar la función $f(x)$ mediante un oráculo cuántico U_f.
4. Aplicar nuevamente la transformación de Hadamard a los primeros n qubits.
5. Medir el estado de los primeros n qubits. Si el resultado es $|0\rangle^{\otimes n}$, la función es constante; en caso contrario, es equilibrada.

2.1 Paso 1: Inicialización

Inicializamos un sistema de $n+1$ qubits en el estado $|0\rangle^{\otimes n} \otimes |1\rangle$, es decir:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} \otimes |1\rangle$$

2.2 Paso 2: Aplicar las puertas de Hadamard

Aplicamos la puerta de Hadamard a todos los qubits. Para el primer registro de n qubits, obtenemos una superposición de todos los posibles estados $|x\rangle$:

$$H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

Para el último qubit, el Hadamard transforma $|1\rangle$ en:

$$H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Por lo tanto, el estado total después de aplicar las puertas de Hadamard es:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Simplificando, tenemos:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

2.3 Paso 3: Evaluación de la función mediante el oráculo

Aplicamos el oráculo U_f, que actúa de la siguiente manera:

$$U_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle$$

Donde $\oplus$ denota la suma módulo 2. Aplicando esto a nuestro estado, obtenemos:

$$U_f \left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

Esto se convierte en:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

Nótese que el segundo registro no se ve afectado, y solo introduce una fase dependiente de $f(x)$ en los primeros n qubits.

2.4 Paso 4: Segunda aplicación de Hadamard

Ahora aplicamos la transformación de Hadamard a los primeros n qubits:

$$H^{\otimes n}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle\right)$$

Usando la propiedad de las puertas de Hadamard, esta transformación se puede expresar como:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{y=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot y}|y\rangle$$

Por lo tanto, después de aplicar Hadamard, obtenemos:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{y=0}^{2^n-1}\left(\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}(-1)^{x\cdot y}\right)|y\rangle$$

2.5 Paso 5: Medición

Finalmente, medimos los primeros n qubits. Si la función es constante, el único estado con amplitud no nula será $|0\rangle^{\otimes n}$. Si es equilibrada, algún otro estado tendrá una amplitud no nula, y no observaremos $|0\rangle^{\otimes n}$.

3 Ejemplo: Función Constante

Supongamos que $f(x)$ es una función constante, es decir, $f(x) = 0$ para todos los x. El oráculo no introduce ninguna fase, por lo que el estado después del oráculo es el mismo que antes:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle\otimes(|0\rangle - |1\rangle)$$

Después de aplicar Hadamard nuevamente, obtenemos:

$$|\psi_3\rangle = |0\rangle^{\otimes n}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Esto significa que al medir, siempre obtendremos $|0\rangle^{\otimes n}$, indicando que la función es constante.

4 Ejemplo: Función Equilibrada

Si $f(x)$ es equilibrada, habrá tanto fases $+1$ como -1 distribuidas entre los términos de la superposición, lo que hará que al aplicar la segunda Hadamard no obtengamos el estado $|0\rangle^{\otimes n}$, lo cual indicará que la función es equilibrada.