Transformada de Fourier Cuántica y su Implementación

Beatriz Fresno Naumova

November 14, 2024

1 Introducción a la Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

La Transformada de Fourier Cuántica (QFT) es una transformación fundamental en la computación cuántica que convierte el dominio de amplitud al dominio de fase en un sistema de qubits. Se utiliza en algoritmos como el de Shor, donde su capacidad para identificar patrones de periodicidad es esencial para la factorización de números enteros y otros problemas complejos.

2 Definición Matemática de la QFT

Para un estado $|x\rangle$ en un sistema de n qubits, la QFT se define como:

$$\mathrm{QFT}\,|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i x y/2^n} \,|y\rangle$$

La QFT toma un estado base $|x\rangle$ y lo convierte en una superposición de estados $|y\rangle$, ponderados por una fase compleja $e^{2\pi i x y/2^n}$, donde i es la unidad imaginaria.

2.1 Demostración: Desarrollo de la Fórmula

La QFT es análoga a la Transformada Discreta de Fourier (DFT), y su efecto se puede entender aplicando fases a cada combinación de amplitudes. Para un sistema de n qubits, el estado $|x\rangle = |x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ se transforma mediante la QFT de la siguiente manera:

1. Consideramos el desarrollo de $|x\rangle$ en base a su representación binaria. 2. Cada término $|y\rangle$ en la superposición final acumula una fase dependiente de $x \cdot y$, donde el producto escalar $x \cdot y$ representa la interacción de cada bit de x y y en el cálculo de la fase total.

3 Implementación de la QFT: Secuencia de Puertas

La implementación de la QFT en un circuito cuántico utiliza puertas de Hadamard y rotaciones controladas. La secuencia se puede expresar matemáticamente como:

$$QFT_n = H \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_n$$

donde: - H es la puerta de Hadamard, que coloca un qubit en superposición. - R_k es la puerta de rotación que introduce una fase proporcional al valor de k.

Cada puerta de rotación R_k se define como:

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{pmatrix}$$

3.1 Demostración: Secuencia de Transformaciones

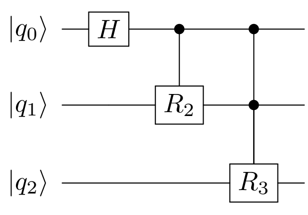
Para cada qubit en el sistema, se aplica primero H, seguido de rotaciones R_k en función de la posición de los qubits siguientes. Este diseño garantiza que cada qubit acumule una fase relacionada con su posición en la cadena de bits. Matemáticamente, el estado final de la QFT representa una superposición en la base de Fourier, construida aplicando fases controladas en cada paso del circuito.

4 Estructura de la QFT en Circuito

Consideremos el caso de la QFT aplicada a 3 qubits. El circuito cuántico se estructura como sigue:

1. Se aplica la puerta Hadamard H en el primer qubit. 2. Se aplican las rotaciones condicionales R_2 y R_3 en el segundo y tercer qubits, respectivamente. 3. Cada rotación introduce una fase proporcional a la posición de los qubits en el sistema.

La estructura completa del circuito para 3 qubits es:



5 Ejemplo: Puerta $U(\alpha)$ Condicional

Para ilustrar una rotación condicional, consideremos una puerta $U(\alpha)$ que actúa solo si el qubit objetivo está en estado $|1\rangle$:

- Si el qubit está en $|0\rangle$, no se aplica ninguna rotación: $U(\alpha)\,|0\rangle = |0\rangle$. - Si el qubit está en $|1\rangle$, se aplica una fase $e^{i\alpha}$: $U(\alpha)\,|1\rangle = e^{i\alpha}\,|1\rangle$.

La matriz de $U(\alpha)$ es:

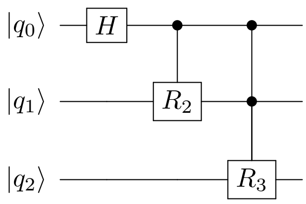
$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Aplicando una puerta Hadamard (H) antes de $U(\alpha)$, se crea una superposición donde el efecto de la fase es visible:

$$H\,|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\alpha}\,|1\rangle\right)$$

6 Circuito para la QFT en 3 Qubits

La implementación en circuito de la QFT para 3 qubits combina puertas de Hadamard y rotaciones condicionales:



Este circuito aplica rotaciones controladas y convierte el estado base en una superposición en el dominio de Fourier.

7 Optimización del Circuito: Uso de la Puerta SWAP

Para reducir la complejidad de la QFT, utilizamos la puerta SWAP al final del circuito, que permite intercambiar qubits y optimizar la cantidad de pasos necesarios. Esto es particularmente útil para sistemas con un número elevado de qubits.

8 Demostración: De la Expresión Matemática al Circuito

Este diseño de QFT, basado en una secuencia de puertas Hadamard y rotaciones controladas, convierte un estado de base en una superposición de fase. La implementación se optimiza utilizando puertas SWAP en sistemas con más de tres qubits. La QFT permite a los algoritmos cuánticos manipular información en el dominio de la frecuencia, como en la factorización de números grandes en criptografía y otras aplicaciones avanzadas.