Demostración Matemática de la Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

Beatriz Fresno Naumova

November 14, 2024

1 Definición de la Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

La Transformada de Fourier Cuántica (QFT) es una transformación lineal que actúa sobre los estados de un sistema cuántico de n qubits. Para un estado base $|x\rangle$, donde x es un número entero en el intervalo $[0, 2^n - 1]$, la QFT se define como:

$$\text{QFT}\,|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}} \,|y\rangle$$

donde el factor de fase $e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}}$ introduce una interferencia constructiva o destructiva entre los estados, permitiendo la transición al dominio de la frecuencia.

2 Desarrollo Paso a Paso de la Fórmula

1. Para un estado inicial general de n qubits en la base computacional $|x\rangle = |x_1 x_2 \ldots x_n\rangle$, donde cada $x_i \in \{0, 1\}$, podemos escribir x en notación decimal como:

$$x = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + x_n \cdot 2^0.$$

2. La QFT de $|x\rangle$ toma este estado $|x\rangle$ y lo convierte en una superposición de todos los estados $|y\rangle$ ponderados por una fase dependiente de x y y:

$$\text{QFT}\,|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}} \,|y\rangle\,.$$

3. Expresando la fase en función de la representación binaria de x y y, observamos que:

$$e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}} = e^{2\pi i (x_1 \cdot y/2 + x_2 \cdot y/4 + \cdots + x_n \cdot y/2^n)}.$$

4. Podemos descomponer la QFT en una secuencia de operaciones unarias aplicadas a cada qubit y binaria entre qubits. Esto lleva a un circuito en el que cada qubit q_j pasa por una puerta de Hadamard, seguida de una serie de rotaciones controladas, con ángulos decrecientes según la posición del qubit en la cadena:

$$QFT_n = H \otimes R_2 \otimes R_3 \cdots R_n.$$

3 Demostración de la Superposición de Fase

Dado un qubit inicial en estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$, al aplicar la QFT, la probabilidad de transición a cada estado $|y\rangle$ en la base de Fourier se determina mediante una fase rotacional. Para un sistema de dos qubits, tenemos:

$$\text{QFT}\,|x_1 x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{y_1, y_2 \in \{0,1\}} e^{2\pi i (x_1 y_1/2 + x_2 y_2/4)}\,|y_1 y_2\rangle\,.$$

Extendiendo esta fórmula a n qubits, obtenemos la superposición general.

4 Implementación mediante Puertas Cuánticas

La QFT se implementa mediante una combinación de puertas Hadamard y rotaciones controladas. En el circuito:

- La puerta Hadamard H se aplica al primer qubit para crear una superposición uniforme. - A continuación, se aplican puertas de rotación controladas R_k en cada qubit k, en función de los valores de los qubits previos, generando la fase deseada.

5 Optimización con Puertas SWAP

Para invertir el orden de los qubits y simplificar el circuito, utilizamos puertas SWAP al final de la secuencia. Esto permite que los qubits estén en el orden correcto sin necesidad de operaciones adicionales en el dominio de Fourier.