Fiche d'exercices n° 2 – PLNE

Exercice 1 – Branch and bound et résolution graphique

La méthode arborescente dite "meilleur d'abord" est utilisée pour résoudre des programmes en nombres entiers. On résout la relaxation continue du problème. La séparation se fait sur la variable qui a la plus grande partie fractionnaire dans la solution en cours. Par exemple, si $x = a + \frac{b}{c}$ (avec $b < c$), on sépare en $x \leq a$ et $x \geq a + 1$.

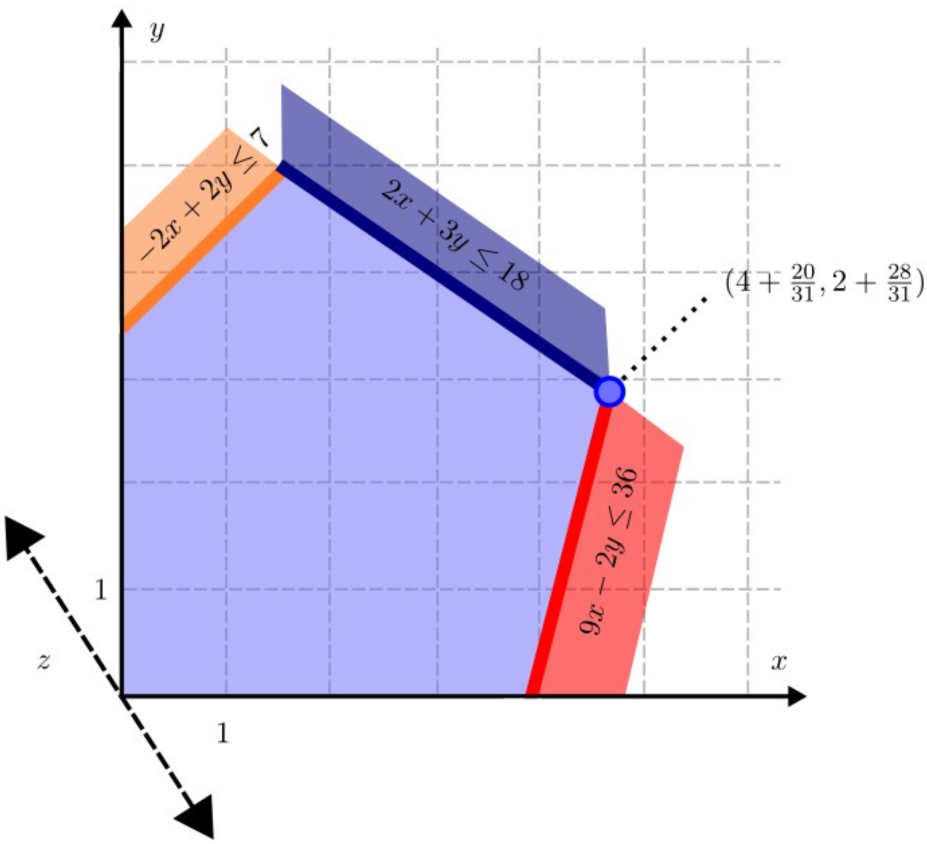
Développer l'arborescence pour l'exemple suivant :

$$\begin{array}{lrrcr} \max z = & 3x & +2y & & \\ \text{s.c.} & -2x & +2y & \leq & 7 \\ & 2x & +3y & \leq & 18 \\ & 9x & -2y & \leq & 36 \\ & x, & y & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Les solutions des programmes linéaires continus à résoudre en chaque nœud seront trouvées directement de façon géométrique sur la figure suivante. La solution continue du problème à la racine est obtenue au point indiqué.

Indication : Voici une liste de coordonnées à considérer lors de la résolution (pas nécessairement dans cet ordre) :

— $(4; 3 + \frac{1}{3})$ $z = 18 + \frac{2}{3}$
— $(4 + \frac{4}{9}; 2)$ $z = 17 + \frac{1}{3}$
— $(4 + \frac{1}{2}; 3)$ $z = 19 + \frac{1}{2}$
— $(3; 4)$ $z = 17$



Exercice 2 – Le problème du sac-à-dos

Pour embarquer dans l'avion, votre valise ne doit pas peser plus de B kg. Il ne va pas être possible d'emporter les n objets que vous vouliez y placer et vous devez faire des choix. Vous avez pesé chaque objet et p_i est le poids de l'objet i, $i = 1, \dots, n$. Pour optimiser le contenu de la valise, vous attribuez à chaque objet une note d'"utilité" entre 1 et 20 : c_i est la note attribuée à l'objet i, $i = 1, \dots, n$. Vous voulez maximiser l'utilité globale de la valise, égale à la somme des utilités des objets emportés.

On définit les variables x_i, $i = 1, \dots, n$: $x_i = 1$ si l'objet i est mis dans la valise, $x_i = 0$ sinon. Écrire le programme mathématique (KP) à résoudre.

1. Écrire le programme si le poids maximum autorisé est $B = 17$ kg et vous avez 4 objets de poids respectifs 3, 7, 9 et 6 kg et d'utilités respectives 8, 18, 20, 11.
2. On suppose que les objets sont fractionnables : le programme $(\overline{KP})$ est le programme (KP) dans lequel on a remplacé $x_i \in \{0, 1\}$ par $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Le programme $(\overline{KP})$ appelé **relaxation continue** de (KP) se résout de la façon suivante :

   — On trie les ratios $\frac{c_i}{p_i}$ par ordre décroissant. Ensuite selon cet ordre, on met les objets dans le sac jusqu'à ce qu'on dépasse B. Le premier objet qui dépasse B est mis de façon fractionnaire pour compléter le poids du sac (jusqu'à B).
   — Plus formellement, soit i_{max} tel que $\sum_{i=1}^{i_{max}} p_i \leq B$ et $\sum_{i=1}^{i_{max}+1} p_i > B$. La solution optimale de la relaxation continue est alors :
     — $x_i = 1$ pour $i = 1, \dots, i_{max}$;
     — $x_{i_{max}+1} = \frac{B - \sum_{i=1}^{i_{max}} p_i}{p_{i_{max}+1}}$;
     — $x_i = 0$ pour $i = i_{max} + 2, \dots, n$.

   Quelle est la solution dans le cas de l'instance de la question (1.) si on suppose que les objets sont fractionnables ?
3. Résoudre le problème (KP) pour l'exemple du (1.) par une méthode arborescente. En chaque nœud on obtient un majorant en résolvant la relaxation continue du problème en ce nœud.
   Indications :
   — la séparation en 2 sous-arbres se fait sur l'unique variable x_i non entière dans la solution optimale de la relaxation continue
   — On déduit éventuellement des implications consécutives à chaque choix (c'est-à-dire qu'on fixe à 0 les variables associées à des objets qui ne pourront plus entrer dans la valise une fois que ce choix est fait).

Exercice 3 – Problème de séparation par l'inégalité de couverture

On considère l'instance du problème du sac-à-dos (KP) en 0-1 définie à la question 1. de l'exercice précédent. Une **couverture** $\mathcal{C}$ est un ensemble d'objets qui ne tient pas dans le sac : $\mathcal{C} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ est une couverture si $\sum_{i \in \mathcal{C}} p_i > B$. L'inégalité suivante est appelée **inégalité de couverture** :

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i \leq |\mathcal{C}| - 1$$

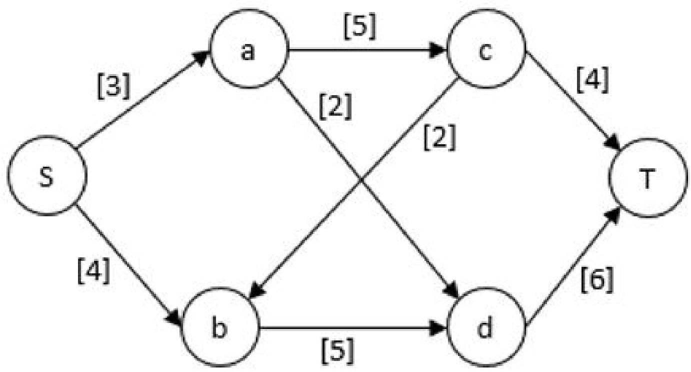
Soit $\hat{x}$ une solution optimale de la relaxation continue $(\overline{KP})$ de (KP).

1. Prouver que l'inégalité $\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i \leq |\mathcal{C}| - 1$ est une inégalité valide pour (KP) ($\forall \mathcal{C}$ couverture).
2. Le **problème de séparation** consiste à chercher $\mathcal{C}$ telle que l'inégalité associée est l'inégalité de couverture la moins respectée par $\hat{x}$, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ telle que $\sum_{i \in \mathcal{C}} \hat{x}_i$ est maximal (expliquez pourquoi).
3. Modéliser le problème de séparation par un programme linéaire en variables 0-1 avec $z_i = 1$ si et seulement si $i \in \mathcal{C}$.
   Note : dans cette question $\hat{x}$ est une donnée. Quelle condition doit vérifier la valeur optimale de ce programme pour que la solution soit bien une couverture ?
4. Pour l'instance de l'exercice précédent, et $\hat{x}$ la solution de sa relaxation continue, résoudre le problème de séparation et donner l'inégalité de couverture la moins respectée par $\hat{x}$.

Exercice 4 – Dualité et PLNE

Soit un réseau de transport $G = (X, E, C)$ muni d'une source S et d'un puits T, ayant n sommets et m arcs. On veut prouver l'égalité entre une coupe minimale et un flot maximal à l'aide de la dualité en programmation linéaire. Pour cela on va écrire les deux problèmes sous forme de programmes linéaires duaux. Ces programmes seront obtenus en considérant tous les chemins p_i, $i = 1, \ldots, p$ reliant la source S au puits T ; on note f_i le flot routé le long du chemin p_i. Deux chemins sont différents s'ils ont au moins un arc différent. Attention : le nombre de ces chemins peut être très grand. Il est clair que le flot total entre S et T est égal à la somme des flots sur tous les chemins : $F = \sum_{i=1}^{p} f_i$. Pour le problème du flot maximum, on cherche donc les variables f_i qui maximisent F.

1. Écrire le programme associé à la recherche d'un flot maximal en considérant les variables f_i et non les flux sur chaque arc comme cela serait intuitif.
2. Écrire le programme associé à la recherche d'une coupe minimale. On prendra comme variables : $y_e = 1$ si l'arc $e \in E$ est dans la coupe et $y_e = 0$ sinon, $e = 1, \ldots, m$.
3. Écrire les deux programmes linéaires associés au réseau de transport ci-dessous :



4. Vérifier que les relaxations continues des deux programmes correspondent à des programmes duaux. Peut-on en déduire directement l'égalité des valeurs flot max/coupe min ?

Exercice 5 – Programmation quadratique 0-1

On veut montrer que tout programme quadratique en variables 0-1 peut se ramener à un programme linéaire en 0-1. Pour cela, on va "linéariser" le programme en remplaçant chaque terme quadratique $x_i x_j$ par une seule variable 0-1 : z_{ij}.

1. Donner les contraintes à ajouter pour que le programme linéaire obtenu soit équivalent au programme quadratique initial, c'est-à-dire qu'on a bien $z_{ij} = x_i x_j$ pour tout couple (i, j).
2. Une telle transformation est-elle possible si les variables sont continues (dans $\mathbb{R}$) ?