Exercice 1 – Branch and bound et résolution graphique

La méthode arborescente dite "meilleur d'abord" est utilisée pour résoudre des programmes en nombres entiers. On résout la relaxation continue du problème. La séparation se fait sur la variable qui a la plus grande partie fractionnaire dans la solution en cours. Par exemple, si $x = a + \frac{b}{c}$ (avec $b < c$), on sépare en $x \leq a$ et $x \geq a + 1$.

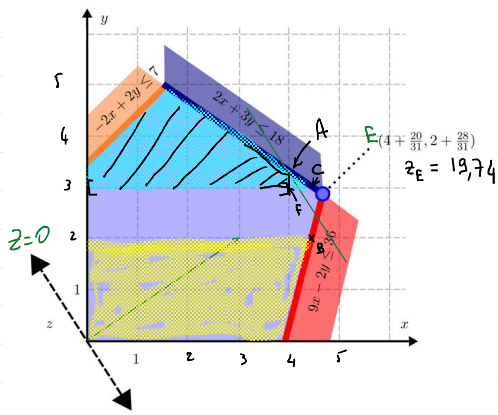
Développer l'arborescence pour l'exemple suivant :

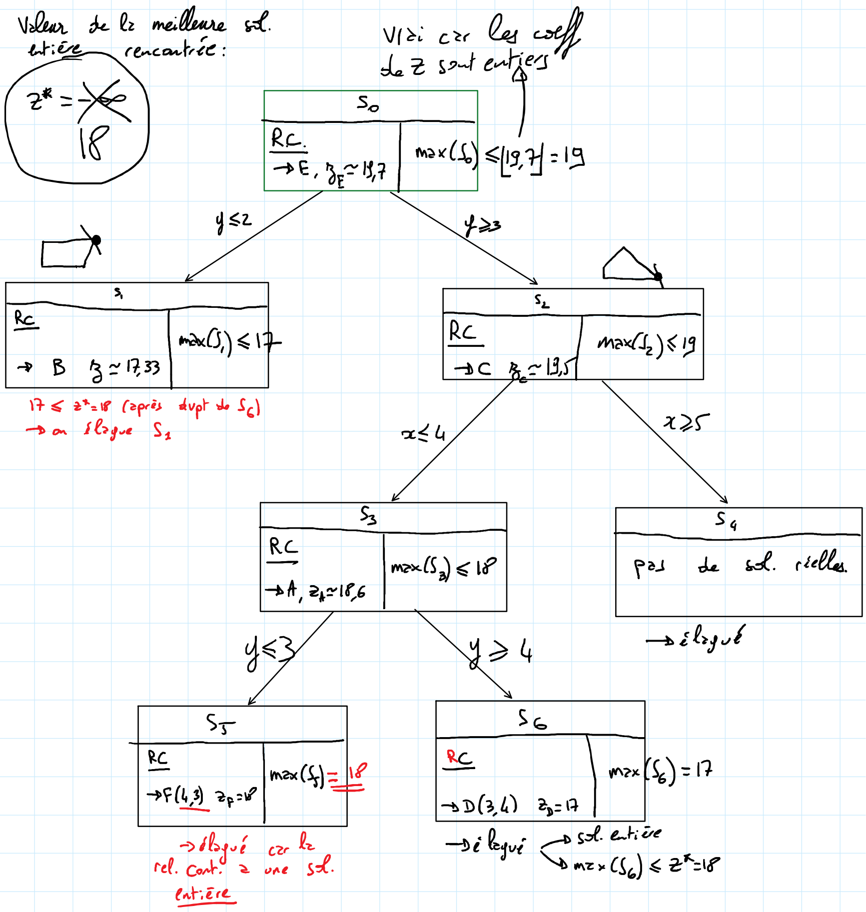
$$\begin{array}{llrrll} \max z = & 3x & +2y & & \\ \text{s.c.} & -2x & +2y & \leq & 7 \\ & 2x & +3y & \leq & 18 \\ & 9x & -2y & \leq & 36 \\ & x, & y & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

A $(4; 3 + \frac{1}{3})$ $z = 18 + \frac{2}{3}$
B $(4 + \frac{4}{9}; 2)$ $z = 17 + \frac{1}{3}$
C $(4 + \frac{1}{2}; 3)$ $z = 19 + \frac{1}{2}$
D $(3; 4)$ $z = 17$

F $(4,3)$ $z_F = 18$

$z = 3x + 2y$





Conclusion : valeur optimale = 18, sol. optimale x=4 et y=3

Exercice 2 – Le problème du sac-à-dos

Pour embarquer dans l'avion, votre valise ne doit pas peser plus de B kg. Il ne va pas être possible d'emporter les n objets que vous vouliez y placer et vous devez faire des choix. Vous avez pesé chaque objet et p_i est le poids de l'objet i, $i = 1, \ldots, n$. Pour optimiser le contenu de la valise, vous attribuez à chaque objet une note d'"utilité" entre 1 et 20 : c_i est la note attribuée à l'objet i, $i = 1, \ldots, n$. Vous voulez maximiser l'utilité globale de la valise, égale à la somme des utilités des objets emportés.

objet i → utilité : c_i
objet i → poids : p_i

1) $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si on prend l'objet } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

"Sac-à-dos"
$c_i, p_i \geq 0$
$\sum^{m} p_i > B$

$\left(\max \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \right.$

$$(KP) \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \underline{\text{sc}} & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq B \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

$c_i, p_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} p_i > B$

1. Écrire le programme si le poids maximum autorisé est $B = 17$ kg et vous avez 4 objets de poids respectifs 3, 7, 9 et 6 kg et d'utilités respectives 8, 18, 20, 11.

$$(KP_1) \begin{cases} \max & 8x_1 + 18x_2 + 20x_3 + 11x_4 \\ \text{sc} & 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 6x_4 \leqslant 17 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\dots,4\} \end{cases}$$

3) $\frac{8}{3} \simeq 2{,}66 \geqslant \frac{18}{7} \simeq 2{,}57 \geqslant \frac{20}{9} \simeq 2{,}22 \geqslant \frac{11}{6} \simeq 1{,}83$

Les variables sont déjà triées dans l'ordre des ratios décroissants

$(\overline{KP_1})$: relaxat° continue de (KP_1)

↳ $x_i \in [0;1]$ ↳ $x_i \in \{0,1\}$

Sol. opt de $(\overline{KP_1})$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{7}{9} \quad x_4 = 0 \quad 9x_3 = 7$