

# MCR - Compléments et Outils de Recherche Opérationnelle

## Cours 1 - Dualité en Programmation Linéaire

E. Soutil (eric.soutil@lecnam.net)

Ensiie

2021-2022

# Plan du cours

## 1 Dualité en PL

- Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale
- Généralisation
- Théorèmes de la dualité
- Définition du dual dans le cas général
- De la base optimale du primal à celle du dual
- Interprétation économique du dual
- Écarts complémentaires

## 2 Analyse de sensibilité / Paramétrisation

## 3 PLNE

## 4 Introduction aux métaheuristiques

## 5 Dualité lagrangienne

# Dualité en programmation linéaire

- La dualité une **notion fondamentale en PL**.
- Chaque PL de **maximisation** donne lieu à un PL de **minimisation** appelé son **problème dual**.
- Les deux problèmes sont liés : chaque solution admissible de l'un fournit une borne de la valeur optimale de l'autre et si les deux problèmes ont des solutions, **leurs valeurs optimales coïncident**.

# Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

- Notre **exemple** de base :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (L_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (L_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (L_3) \end{array} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \right.$$

- On désire avoir une idée, la plus précise possible, de la valeur optimale de la valeur optimale  $z^*$  de  $(P)$  (sans avoir à la calculer par la méthode du simplexe). On va chercher à **encadrer la valeur de  $z^*$** .
- Pour avoir un **minorant**, il est toujours possible de considérer n'importe quelle solution admissible, par exemple  $x = (3, 0, 2, 0)$ , de valeur 22 :  $22 \leq z^*$ . Mais on ignore comment chercher de façon efficace un bon minorant.
- On cherche maintenant un **majorant** de  $z^*$ , le meilleur possible (c'est-à-dire le plus petit possible).

## Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (L_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (L_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (L_3) \end{array} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \right.$$

- Essayons d'obtenir un **majorant** de  $z^*$ , en nous servant des contraintes (et de la non-négativité des variables) :

$$\begin{array}{l} 2^{\text{ème}} \text{ contrainte} \times \frac{5}{3} : \underbrace{4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4}_z \leq \underbrace{\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4}_{5/3 \times [2^{\text{ème}} \text{ contrainte}]} \leq \frac{275}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow z^* \leq \frac{275}{3} (\simeq 91,6)$$

# Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (L_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (L_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (L_3) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \end{array} \right.$$

- On peut faire beaucoup mieux :  $L_2 + L_3$  donne :

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

- Donc :  $z^* \leq 58$

# Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (\times y_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (\times y_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (\times y_3) \end{array} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \right.$$

- On peut **généraliser cette stratégie** : on multiplie chaque contrainte  $L_i$  par un multiplicateur  $y_i$  (appelé **variable duale**) et on somme toutes les contraintes :

- Le premier cas présenté ( $2^{\text{ème}}$  contrainte  $\times \frac{5}{3}$ ) correspond à :

$$y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{3}, y_3 = 0$$

- Le deuxième cas ( $L_2 + L_3$ ) correspond à :

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$$

## Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (\times y_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (\times y_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (\times y_3) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \end{array} \right.$$

- L'inégalité qui en résulte, en sommant les 3 contraintes multipliées chacune par leur multiplicateur, est :

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \quad (1)$$

- Chaque multiplicateur  $y_i$  doit être **positif ou nul** (sinon il y aurait un changement de sens de l'inégalité).



## Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \quad (1)$$

- On désire utiliser le membre de droite de (1) comme majorant de

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

- Cela n'est valide que si, pour chaque variable  $x_i$ , son coefficient dans (1) est supérieur ou égal à son coefficient dans  $z$ . Nous voulons donc :

$$\begin{array}{rrcr} y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq 4 \\ -y_1 & + y_2 & +2y_3 & \geq 1 \\ -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq 5 \\ 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq 3 \end{array}$$

- Si  $y_i \geq 0$  pour tout  $i$  et si les 4 contraintes ci-dessus sont vérifiées, alors toute solution réalisable de  $(P)$  vérifie l'inégalité :

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

# Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

- En particulier pour  $x^*$  (solution optimale de  $(P)$ ) cette inégalité est vraie. On a donc :

$$z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

- Comme on désire un majorant le plus petit possible on est naturellement amené à choisir pour  $y$  la solution du programme linéaire  $(D)$  suivant, que l'on appelle **programme dual** de  $(P)$  :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{rclcl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq & 3 \end{array} \\ y_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 3 \end{array} \right.$$

# Motivation : trouver un majorant de la valeur optimale

Écriture du dual à partir du primal : exemple de base

- Problème primal :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \quad (\rightarrow y_1) \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \quad (\rightarrow y_2) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \quad (\rightarrow y_3) \end{array} \right. \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 4 \end{array} \right.$$

- Problème dual :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \end{array} \right. \\ y_i \geq 0, \quad i = 1 \text{ à } 3 \end{array} \right.$$

# Généralisation

- Au problème  $(P)$ , appelé **problème primal**, et défini par :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1 \text{ à } m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1 \text{ à } n) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

→ problème primal

- ... on associe son **problème dual**  $(D)$  :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1 \text{ à } n) \\ y_i \geq 0 & (i = 1 \text{ à } m) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

→ problème dual

# Généralisation

- Ou bien, sous forme matricielle :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l|l} \max z = cx & \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l|l} \min w = yb & \\ \text{s.c.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

- NB :  $(yA)^t = A^t y^t$ . La matrice des contraintes de  $(D)$  est la transposée de celle de  $(P)$ .

# Théorème de la dualité faible

$$(P) \left\{ \begin{array}{l|l} \max z = cx & \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l|l} \min w = yb & \\ \text{s.c.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

## Théorème (Dualité faible)

Si  $(P)$  et  $(D)$  admettent des solutions réalisables, toute solution réalisable  $x$  de  $(P)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , et toute solution réalisable  $y$  de  $(D)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , vérifient :

$$z = cx \leq yb = w$$

Démonstration :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

# Théorème de la dualité faible

$$(P) \left\{ \begin{array}{l|l} \max z = cx & \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l|l} \min w = yb & \\ \text{s.c.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

## Corollaire (1)

Si  $x^*$  et  $y^*$  sont deux solutions respectivement de (P) et (D) qui vérifient  $z(x^*) = w(y^*)$ , alors il est possible de conclure immédiatement que  $x^*$  est optimal pour (P) et  $y^*$  pour (D).

# Théorème de la dualité faible

$$(P) \left\{ \begin{array}{l|l} \max z = cx & \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l|l} \min w = yb & \\ \text{s.c.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

## Corollaire (2)

*Si un des deux problèmes primal ou dual n'est pas borné, alors le domaine réalisable de l'autre problème est vide.*

### Démonstration

Supposons que le problème primal ne soit pas borné supérieurement. Ainsi,  $cx \rightarrow +\infty$ . Or, si le problème dual admettait une solution réalisable, alors il existerait un  $y \in \{y \in \mathbb{R}^m : yA \geq c, y \geq 0\}$  et d'après le théorème de la dualité faible, on aurait  $cx \leq yb \forall x$ , autrement dit  $yb$  serait une borne supérieure de la fonction objectif du primal  $cx$ , d'où une contradiction.



# Théorème de la dualité forte

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = cx \\ \text{s.c.} \mid \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = yb \\ \text{s.c.} \mid \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

## Théorème (Dualité forte)

Si le problème primal  $(P)$  a une solution optimale  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  alors le problème dual  $(D)$  a une solution optimale  $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$  telle que  $z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = w^*$ .

### Idée de la preuve :

- On considère la solution de base optimale de  $(P)$  et on construit une solution du dual en posant  $y_i^* = -\Delta_i$  où  $\Delta_i$  désigne le coût réduit de la  $i^{\text{ème}}$  variable d'écart de  $(P)$  dans la base optimale de  $(P)$ .
- On montre qu'alors  $y^*$  vérifie toutes les contraintes du dual et qu'il y a égalité entre les valeurs de  $x^*$  dans  $(P)$  et  $y^*$  dans  $(D)$ .

# Théorème de la dualité forte

## Démonstration (1/2)

- Nous allons démontrer le théorème de la dualité forte en nous référant à la paire primal/dual dans laquelle le problème primal est sous forme standard (contraintes d'égalité). Dans ce cas, les variables du dual ne sont pas astreintes à être positives ou nulles : on peut facilement s'en convaincre en reprenant les étapes de la section 1 (Motivation).

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = cx \\ \text{s.c.} \mid \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = yb \\ \text{s.c.} \mid \begin{array}{l} yA - z = c \\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

# Théorème de la dualité forte

## Démonstration (2/2)

- Soit  $\mathcal{B}$  une base optimale de  $(P)$ ,  $B$  la matrice de base associée et  $N$  la matrice hors-base. Soit  $\tilde{x}$  la solution de base associée. Cette solution est de valeur  $c_B B^{-1}b$  et on a  $\tilde{x}_B = B^{-1}b$  et  $\tilde{x}_N = 0$ .
- Le point  $(\tilde{y}, \tilde{z})$  défini par :

$$\tilde{y} = c_B B^{-1}, \quad \tilde{z}_B = 0, \quad \tilde{z}_N = c_B B^{-1}N - c_N$$

vérifie  $\tilde{y}A - \tilde{z} = c$ .

- On peut observer que les valeurs des  $\tilde{z}_N$  sont simplement les opposés des coûts réduits de  $(P)$  ( $\leq 0$  dans une base optimale). Donc  $\tilde{z} \geq 0$  et d'après le point précédent,  $(\tilde{y}, \tilde{z})$  est une solution réalisable du dual.
- On a :  $c\tilde{x} = c_B B^{-1}b = \tilde{y}b$ . D'après le corollaire (1),  $\tilde{x}$  est optimal pour  $(P)$  et  $\tilde{y}$  est optimale pour  $(D)$  et les valeurs coïncident.

# Résumé des différents cas possibles

		(P) admet une solution réalisable		(P) n'a pas de solution réalisable
		(P) admet une solution optimale	(P) n'a pas de solution optimale	
(D) admet une solution réalisable	(D) admet une solution optimale	Théorème de la dualité $z_{max} = w_{min}$	impossible	impossible
	(D) n'a pas de solution optimale	impossible	impossible	$w \rightarrow -\infty$
(D) n'a pas de solution réalisable		impossible	$z \rightarrow +\infty$	possible

# Définition du dual dans le cas général

- Pour un PL quelconque, pas nécessairement sous la forme canonique ni standard, on applique les règles d'écriture suivantes, dont on peut se convaincre en ré-écrivant le PL considéré dans la forme canonique.

Problème de maximisation	Problème de minimisation
Fonction objectif	Second membre
$A$ : matrice des contraintes	$A^t$ : matrice des contraintes
Variable $x_i \geq 0$	Contrainte $i$ de type $\geq$
Variable $x_i \leq 0$	Contrainte $i$ de type $\leq$
Variable $x_i$ non contrainte en signe ( $\in \mathbb{R}$ )	Contrainte $i$ de type $=$
Contrainte $j$ de type $\leq$	Variable $y_j \geq 0$
Contrainte $j$ de type $=$	Variable $y_j$ non contrainte en signe ( $\in \mathbb{R}$ )
Contrainte $j$ de type $\geq$	Variable $y_j \leq 0$

- Attention, le tableau n'est pas symétrique, il faut considérer que la colonne de gauche est le problème de maximisation et celle de droite le problème de minimisation dans un couple primal/dual.
- On observe en particulier que **le dual du dual est le primal**.

# Définition du dual dans le cas général

## Un exemple

### PRIMAL

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{array}{ll} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{array} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

### DUAL

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ \text{s.c.} & \begin{array}{ll} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -3 \end{array} \\ & y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Problème de maximisation	Problème de minimisation
Fonction objectif	Second membre
$A$ : matrice des contraintes	$A^t$ : matrice des contraintes
Variable $x_i \geq 0$	Contrainte $i$ de type $\geq$
Variable $x_i \leq 0$	Contrainte $i$ de type $\leq$
Variable $x_i$ non contrainte en signe ( $\in \mathbb{R}$ )	Contrainte $i$ de type $=$
Contrainte $j$ de type $\leq$	Variable $y_j \geq 0$
Contrainte $j$ de type $=$	Variable $y_j$ non contrainte en signe ( $\in \mathbb{R}$ )
Contrainte $j$ de type $\geq$	Variable $y_j \leq 0$

# Relations entre les variables du primal et du dual

- Comme on l'a déjà évoqué dans la preuve du théorème de la dualité forte, il est possible de déduire la solution optimale du dual à partir de la solution optimale du primal. Pour cela, on commence par établir des règles de correspondance entre les variables du primal et celles du dual.
- La résolution des deux programmes  $(P)$  et  $(D)$  par la méthode du simplexe, nécessite l'introduction de variables d'écarts, au nombre de  $m$  pour  $(P)$  (variables  $x_{\bar{i}}$ ) et  $n$  pour  $(D)$  (variables  $y_{\bar{i}}$ ).
- À une variable principale de l'un est associée la variable d'écart correspondante de l'autre :

$x_i$  correspond à  $y_{\bar{i}}$

et

$x_{\bar{i}}$  correspond à  $y_i$

- **Notation** : à un indice  $k$  on associe l'indice  $\bar{k}$ , avec

$$\begin{cases} \bar{k} = \bar{i} & \text{si } k = i \\ \bar{k} = i & \text{si } k = \bar{i} \end{cases}$$

## De la base primal-optimale à la base dual-optimale (1/2)

- Il est possible d'écrire le problème dual (en version maximisation) dans sa base optimale, à partir de l'écriture du primal (également en version maximisation) dans sa base optimale.
- Les variables hors-base de  $(P)$  déterminent les variables en base de  $(D)$  :

$x_k$  est hors-base dans la base optimale de  $(P)$



$y_{\bar{k}}$  est en base dans la base optimale de  $(D)$

- Puis, on applique les règles suivantes pour écrire le dual dans sa base optimale.



## De la base primal-optimale à la base dual-optimale (2/2)

$x_k$  est hors-base dans la base optimale de  $(P)$



$y_{\bar{k}}$  est en base dans la base optimale de  $(D)$

Coefficient d'une  
ligne de  $(D)$

$$a'_{ij} = -a_{j\bar{i}} \\ j \text{ est hors-base pour } (D)$$

Opposé du coefficient  
"transposé" de  $(P)$

Coût réduit de  $(D)$

$$\Delta'_i = -b_i \\ i \text{ est en base pour } (P)$$

Opposé du second-  
membre de  $(P)$

Second membre de  $(D)$

$$b'_i = -\Delta'_i \\ i \text{ est en base pour } (D)$$

Opposé du coût réduit  
de  $(P)$

# De la base primal-optimale à la base dual-optimale

## Un exemple

- Exemple. Considérons la paire primal-dual suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcl} x_1 & & \leq 1000 \\ & x_2 & \leq 500 \\ & & x_3 \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & \leq & 6750 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (D) \left\{ \begin{array}{l} \min w = 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcl} & y_1 & +3y_4 \geq 4 \\ & & y_2 +6y_4 \geq 12 \\ & & & y_3 +2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- La version maximisation de  $(D)$  est :

$$(D') \left\{ \begin{array}{l} \max w' = -1000y_1 - 500y_2 - 1500y_3 - 6750y_4 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcl} & y_1 & +3y_4 \geq 4 \\ & & y_2 +6y_4 \geq 12 \\ & & & y_3 +2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# De la base primal-optimale à la base dual-optimale (4/4)

## Un exemple

- $(P)$  écrit dans sa base optimale devient :

$$(P) \begin{cases} \max & z = 11500 - 4x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ & x_1 = 250 + 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = 500 - x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 = 750 - 2x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ & x_3 = 1500 - x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

- On en déduit l'écriture de  $(D')$  dans sa base optimale :

$$(D') \begin{cases} \max & w' = -11500 - 750y_1 - 250y_1 - 500y_2 - 1500y_3 \\ & y_2 = 4 + 2y_1 - 2y_1 + y_2 \\ & y_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_1 + y_3 \\ \text{s.c.} & y_4 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

## ● Un problème de transport

- ▶ Une entreprise de construction d'automobiles possède trois usines situées à Paris, Strasbourg et Lyon.
- ▶ Le métal nécessaire à la construction est disponible aux ports du Havre et de Marseille, en quantité 550 pour Marseille et 350 pour Le Havre.
- ▶ Paris a besoin de 400 tonnes de métal chaque semaine, Strasbourg 300 et Lyon 200.
- ▶ Les coûts de transport varient proportionnellement aux quantités transportées et les coûts unitaires sont :

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

# Interprétation économique du dual

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

- Le PL associé est :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \min z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \\ \text{s. c.} \left\{ \begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} & \leq 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq 350 \\ x_{11} + x_{21} & \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} & \geq 300 \\ x_{13} + x_{23} & \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Son dual est :

$$(D_2) \left\{ \begin{array}{l} \min w = 550y_1 + 350y_2 - 400y_3 - 300y_4 - 200y_5 \\ \text{s. c.} \left\{ \begin{array}{ll} y_1 - y_3 & \geq -5 \\ y_1 - y_4 & \geq -6 \\ y_1 - y_5 & \geq -3 \\ y_2 - y_3 & \geq -3 \\ y_2 - y_4 & \geq -5 \\ y_2 - y_5 & \geq -4 \\ y_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Interprétation économique du dual

## Un problème de transport

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

- Supposons maintenant qu'un transporteur propose à la direction de l'entreprise de construction automobile de lui acheter le métal aux prix  $\pi_1$  et  $\pi_2$  aux ports de Marseille et du Havre, de se charger du transport et de lui revendre le métal aux prix  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  et  $\eta_3$  aux usines de Paris, Strasbourg et Lyon.
- Pour convaincre la direction que l'affaire ne lui sera pas défavorable, le transporteur garantit que ses prix seront compétitifs avec les coûts actuels de transport, c-à-d :

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} \eta_1 - \pi_1 & \leq 5 \\ \eta_2 - \pi_1 & \leq 6 \\ \eta_3 - \pi_1 & \leq 3 \\ \eta_1 - \pi_2 & \leq 3 \\ \eta_2 - \pi_2 & \leq 5 \\ \eta_3 - \pi_2 & \leq 4 \\ \eta_i, \pi_j & \geq 0 \end{array} \right.$$

# Interprétation économique du dual

## Un problème de transport

- La direction de l'entreprise convient que dans ces conditions, il vaut mieux laisser le transporteur se charger du travail.
- Le transporteur quant à lui doit trouver des prix qui satisfont l'ensemble des contraintes (1).
- Comme il désire de plus rendre son profit maximum il cherchera à maximiser la somme que lui versera l'entreprise, à savoir :

$$400\eta_1 + 300\eta_2 + 200\eta_3 - 550\pi_1 - 350\pi_2$$

- En posant  $y_1 = \pi_1$ ,  $y_2 = \pi_2$ ,  $y_3 = \eta_1$ ,  $y_4 = \eta_2$  et  $y_5 = \eta_3$ , le programme linéaire du transporteur est  $(D_2)$ , le dual du PL de l'entreprise de construction d'automobiles.
- Les variables duales ont dans la plupart des cas une interprétation physique ou économique suivant la nature des problèmes que le PL modélise.

# Écarts complémentaires

- Soit  $(P)$  un programme linéaire et  $(D)$  son dual.
- On considère deux solutions potentielles de  $(P)$  et  $(D)$  :
  - ▶  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{\bar{1}}, \dots, \tilde{x}_{\bar{m}}) \in \mathbb{R}^{n+m}$
  - ▶  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m, \tilde{y}_{\bar{1}}, \dots, \tilde{y}_{\bar{n}}) \in \mathbb{R}^{m+n}$

## Théorème (Écarts complémentaires)

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$  est solution optimale de  $(P)$  et  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{m+n}$  est solution optimale de  $(D)$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} \text{ est admissible pour } (P) \text{ et } \tilde{y} \text{ pour } (D) \\ \text{et (I)} \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n, \tilde{x}_i \tilde{y}_{\bar{i}} = 0 \\ \forall i = 1, \dots, m, \tilde{y}_i \tilde{x}_{\bar{i}} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Les relations (I) sont appelées **relations d'écarts complémentaires** ou **relations d'exclusion**.



# Écarts complémentaires

- Les relations d'écarts complémentaires s'écrivent, de façon équivalente :

$$(I) \begin{cases} \forall j = 1, \dots, n, \tilde{x}_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} \tilde{y}_i - c_j) = 0 \\ \forall i = 1, \dots, m, \tilde{y}_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j) = 0 \end{cases}$$

- En d'autres termes,  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont deux solutions optimales respectivement pour  $(P)$  et  $(D)$  si et seulement si :
  - ▶ Si une contrainte de l'un des programmes linéaires est lâche (non saturée), la variable correspondante du dual est nulle
  - ▶ Si une variable de l'un des programmes linéaires est strictement positive, la contrainte correspondante du dual est saturée
- Ce théorème est utilisé
  - ▶ pour confirmer ou infirmer l'optimalité d'une solution proposée pour l'un des problèmes primal ou dual.
  - ▶ pour déduire de la solution optimale de l'un des problèmes (primal ou dual) la solution de l'autre.

