Exercice 1

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lrrrl}\max Z = & 3x_1 & -4x_2 & & \\ \text{s.c.} & 3x_1 & +2x_2 & \leq & 12 \to y_1 \\ & & -x_2 & \leq & 18 \to y_2 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq & 4 \to y_3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}\right.$$

$$(D_1)\left\{\begin{array}{ll}\min & w = 12y_1 + 18y_2 + 4y_3 \\ \text{s.c.} & 3y_1 + 2y_3 \geqslant 3 \\ & 2y_1 - y_2 - y_3 \geqslant -4 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lrrrl}\min Z = & -x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.c.} & -x_1 & +3x_2 & \geq & 5 \to y_1 \\ & & x_2 & \geq & 12 \to y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll}\max & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geqslant 0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\min & yb \\ & yA \geqslant c \\ & y \geqslant 0\end{array}\right.}$$

$$\to (D_2)\left\{\begin{array}{ll}\max & w = 5y_1 + 12y_2 \\ \text{s.c.} & -y_1 \leqslant -1 \\ & 3y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ & y_1, y_2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Problème de maximisation	Problème de minimisation
Fonction objectif	Second membre
A : matrice des contraintes	A^t : matrice des contraintes
Variable $x_i \geq 0$	Contrainte i de type $\geq$
Variable $x_i \leq 0$	Contrainte i de type $\leq$
Variable x_i non contrainte en signe ($\in \mathbb{R}$)	Contrainte i de type $=$
Contrainte j de type $\leq$	Variable $y_j \geq 0$
Contrainte j de type $=$	Variable y_j non contrainte en signe ($\in \mathbb{R}$)
Contrainte j de type $\geq$	Variable $y_j \leq 0$

$$(P_3)\left\{\begin{array}{lrrrl}\max Z = & x_1 & +4x_2 & & \\ \text{s.c.} & x_1 & +x_2 & \leq & 4 \to y_1 \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 2 \to y_2 \\ & x_1 & -x_2 & = & -2 \to y_3 \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0 & & & \end{array}\right.$$

$$(D_3)\left\{\begin{array}{ll}\min & w = 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_1 + y_2 - y_3 \geqslant 4 \\ & y_1 \geqslant 0,\ y_2 \leqslant 0,\ y_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Exercice 2

Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrrrl}\min & 4x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = w & \\ \text{s.c.} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +6x_4 & \geq & 5 \to y_1 \\ & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +5x_4 & \geq & 7 \to y_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & & & \end{array}\right.$$

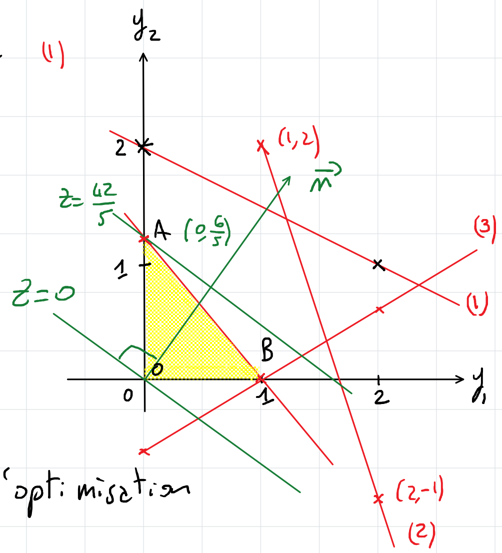
Méthode :

- on écrit le dual qui ne comporte que 2 variables
- on résout graphiquement le dual
- on trouve la solution du primal à partir de celle du dual grâce aux écarts complémentaires.

$$\left\{\max \quad z = 5y_1 + 7y_2\right.$$

- on résout graphiquement le dual
- on trouve la solution du primal à partir de celle du dual grâce aux écarts complémentaires.

$$(D)\begin{cases} \max & z = 5y_1 + 7y_2 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 4 \quad (1) \\ & 3y_1 + y_2 \leq 5 \\ & 2y_1 - 3y_2 \leq 2 \\ & 6y_1 + 5y_2 \leq 6 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



Région admissible du dual : polyèdre (OAB)

Gradient $\vec{m}(5, 7)$ donne la dir. d'optimisation

On trace la droite Z=0, orthogonale au vecteur $\vec{m}$
Le dernier point de (OAB) rencontré en balayant la région admissible avec une famille de droites parallèles à Z=0 est A(0,6/5)

Solution opt. de (D) : $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{6}{5}$, valeur $z^* = \frac{42}{5}$

Pour en déduire la solution du primal, on écrit les conditions d'écarts complémentaires :

$$(I)\begin{cases} \forall j = 1, \dots, n, \; \tilde{x}_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i - c_j\right) = 0 \\ \forall i = 1, \dots, m, \; \tilde{y}_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j\right) = 0 \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} \min & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq 5 \quad y_1 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \geq 7 \quad y_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max & z = 5y_1 + 7y_2 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 4 \rightarrow x_1 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 5 \rightarrow x_2 \\ & 2y_1 - 3y_2 \leq 2 \rightarrow x_3 \\ & 6y_1 + 5y_2 \leq 6 \rightarrow x_4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Conditions d'écarts complémentaires :

$$(I)\begin{cases} x_1 (y_1 + 2y_2 - 4) = 0 \\ x_2 (3y_1 + y_2 - 5) = 0 \\ x_3 (2y_1 - 3y_2 - 2) = 0 \\ x_4 (6y_1 + 5y_2 - 6) = 0 \\ y_1 (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 5) = 0 \\ y_2 (2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 7) = 0 \end{cases}$$

D'après le th. des écarts complémentaires, pour trouver la solution optimale de (P), il suffit d'injecter dans (I) la solution optimale de (D) : $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{6}{5}$

(I) devient
$$\begin{cases} x_1 \times \left(\frac{12}{5} - 4\right) = 0 \\ x_2 \times \left(\frac{6}{5} - 5\right) = 0 \\ x_3 \times \left(-\frac{30}{5} - 2\right) = 0 \\ x_4 \times 0 = 0 \quad \text{(tjs vrai)} \\ 0 = 0 \\ \frac{6}{5}(2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{7}{5} \end{cases}}$$

c'est la sol. optimale de (P)

Vérification $\quad w\left(0, 0, 0, \frac{7}{5}\right) = \frac{42}{5} = z\left(0, \frac{6}{5}\right)$

Exercice 3

Soit le programme linéaire :

$$(P)\begin{cases} \max Z = 36x_1 + 24x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_2 \leq 10 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

1. Résoudre ce programme à l'aide de la méthode du simplexe. Vérifiez graphiquement.
2. Écrire le programme dual, puis écrire le problème dual dans sa base optimale.
3. Retrouvez la solution optimale du dual à partir de la solution optimale du primal, cette fois en utilisant les relations d'écarts complémentaires.

1) forme standard :

$$\begin{cases} \max Z = 36x_1 + 24x_2 \\ sc \quad 3x_1 + x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ 2x_2 + x_5 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$Z = cste + \sum_{i \in J} \Delta_i x_i$

$\sum \Delta_i x_i - Z = -cste$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
← x_3	3		1			16
x_4	1	1		1		27
x_5		2			1	10
Δ	36	24				0

$\Delta \not\leq 0$: n^elle itérat^o

Itérat^o 1 : x_1 entre, $\min\limits_{i \mid \bar{a}_{i1} > 0} \left(\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{i1}}\right) = \min\left(\frac{16}{3}, \frac{27}{1}\right) = \frac{16}{3}$, x_3 sort

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
x_1	1		1/3			16/3	
x_4	0	1	-1/3	1		65/3	$L_2 - \frac{1}{3}L_1$
← x_5	0	2			1	10	
Δ	0	24	-12	0	0	-192	$L_4 - 12L_1$

$\Delta \not\leq 0$

Itération 2 : x_2 entre, $\min\left(\frac{65/3}{1}, \frac{10}{2}\right) = \frac{10}{2}$, x_5 sort

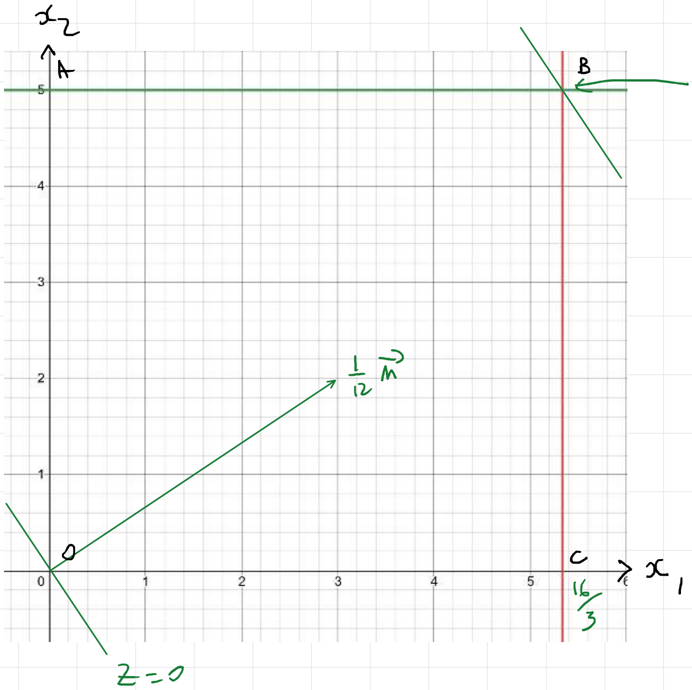
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
x_1	1	0	1/3	0		16/3	
x_4	0	0	-1/3	1	-1/2	50/3	$L_2 - L_3/2$
x_2	0	1	0	0	1/2	5	$L_3/2$
Δ	0	0	-12	0	-12	-312	$L_4 - 12L_3$

$\Delta \leq 0$: la base est optimale

Solution opt. de (P) : $x_1 = \frac{16}{3}$ $x_2 = 5$ $x_3 = 0$

$x_4 = 50/3$ $x_5 = 0$

Valeur optimale : $z^* = 312$



Région admissible : polyèdre (OABC)

sol. opt

Gradient $\vec{m}\,(36, 24)$

$\frac{1}{12}\vec{m}\,(3, 2)$

Sol. opt $x_1 = \frac{16}{3}$ $x_2 = 5$

3)

$$(P)\begin{cases} \max Z = 36x_1 + 24x_2 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & & & \leq & 16 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 27 \\ & & 2x_2 & \leq & 10 \end{array} \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \min W = 16y_1 + 27y_2 + 10y_3 \\ 3y_1 + y_2 \geq 36 \\ y_2 + 2y_3 \geq 24 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Relations d'écarts complémentaires

$$(I)\begin{cases} x_1\,(3y_1 + y_2 - 36) = 0 \\ x_2\,(y_2 + 2y_3 - 24) = 0 \\ y_1\,(3x_1 - 16) = 0 \\ y_2\,(x_1 + x_2 - 27) = 0 \\ y_3\,(2x_2 - 10) = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x_1 y_4 = 0 \\ x_2 y_5 = 0 \\ y_1 x_3 = 0 \\ y_2 x_4 = 0 \\ y_3 x_5 = 0 \end{cases}$$

La solution optimale de (P) trouvée en 1) est : $x_1 = \frac{16}{3}$ $x_2 = 5$ ($\underbrace{x_3 = 0}_{\text{hors-base}}$ $x_4 = \frac{50}{3}$ $\underbrace{x_5 = 0}_{\text{hors-base}}$)

En l'injectant dans (I), il vient :

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 36 \\ y_2 + 2y_3 = 24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 12 \\ y_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Sol. opt. du dual}$$

$$(I)\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 36 \\ y_2 + 2y_3 = 24 \\ 0 = 0 \\ y_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 12 \end{cases} \longrightarrow \text{Sol. opt. du dual}$$

Rq $W(12,0,12) = 12\times 16 + 12\times 10 = 312 = Z(\frac{16}{3}, 5)$

2)

Le tableau du simplexe à l'optimum de P est le suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/3	0		16/3
x_4	0	0	-1/3	1	-1/2	50/3
x_2	0	1	0	0	1/2	5
Δ	0	0	-12	0	-12	-312

x_i : var. initiale de (P) x_1 et x_2

$x_{\bar{i}}$: var d'écart de (P) x_3, x_4, x_5

y_i : var initiale de (D) y_1, y_2, y_3

$y_{\bar{i}}$: var d'écart de (D) y_4 et y_5

Règle : x_i hors-base dans (P) $\Rightarrow$ $y_{\bar{i}}$ en base dans (D)

$x_{\bar{i}}$ hors-base dans (P) $\Rightarrow$ y_i en base dans (D)

Règles de correspondance :

	(P)		(D)	
init	x_1	—	y_4	écart
	x_2	—	y_5	
écart	x_3	—	y_1	init
	x_4	—	y_2	
	x_5	—	y_3	

x_3 hb $\Rightarrow$ y_1 en base

x_5 hb $\Rightarrow$ y_3 en base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	1/3	0		16/3
x_4	0	0	-1/3	1	-1/2	50/3
x_2	0	1	0	0	1/2	5
Δ	0	0	-12	0	-12	-312

(P)

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\bar{b}$
y_1	1	+1/3	0	-1/3	0	+12
y_3	0	1/2	1	0	-1/2	+12
Δ	0	-50/3	0	-16/3	-5	+312

version maximisat° de (D)

Exercice 4

On considère le problème de la programmation de l'activité d'un atelier qui fonctionne 45 h par semaine et peut fabriquer trois produits p_1, p_2 et p_3 aux cadences de 50, 25 et 75 unités/heure. Par semaine, le marché ne peut absorber plus de 1000 unités de p_1, 500 unités de p_2 et 1500 unités de p_3. Les bénéfices unitaires sont respectivement de 4 u.m., 12 u.m. et 3 u.m. pour p_1, p_2 et p_3.

1. Écrire le programme (P) de production qui maximise le bénéfice. Ce programme devra comporter 3 variables x_1, x_2 et x_3 dont on donnera la signification.

x_i = # d'unités de p_i produites par semaine

$\max \quad z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$

x_i = # d'unités de p_i produites par semaine

$$\begin{cases} \max & z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{sc} & x_1 \leq 1000 \quad (1) \\ & x_2 \leq 500 \quad (2) \\ & x_3 \leq 1500 \quad (3) \\ & \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{75}x_3 \leq 45 \quad (4) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$(1), (2), (3)$: demande ; (4) : tps disponible

$(4) \times 150 \qquad 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750$

2. On souhaite tester l'optimalité de la solution (primale) $x_1 = 250$, $x_2 = 500$, $x_3 = 1500$. Montrer que cette solution est optimale à l'aide du dual de ce PL (pour cela, on déterminera une solution admissible particulière du dual).

Méthode : on écrit le dual et les conditions d'écarts complémentaires (I), puis on injecte dans (I) la solution candidate et on résout le système linéaire résultant. 3 cas sont alors possibles :

- on trouve une solution en y qui est réalisable pour (D) : d'après le th. des écarts complémentaires, la solution en x et la solution en y sont optimales (pour leur pb respectif)
- on trouve une solution en y non réalisable pour (D) : la solution en x n'est pas optimale pour (P)
- on ne trouve pas de solution au système linéaire : la solution en x n'est pas optimale pour (P)

$$(P)\begin{cases} \max & z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{sc} & x_1 \leq 1000 \\ & x_2 \leq 500 \\ & x_3 \leq 1500 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \min w = 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ \text{s.c.} \quad y_1 + 3y_4 \geq 4 \\ \qquad y_2 + 6y_4 \geq 12 \\ \qquad y_3 + 2y_4 \geq 3 \\ \qquad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Conditions d'écarts complémentaires :

$$(I)\begin{cases} x_1(y_1 + 3y_4 - 4) = 0 \\ x_2(y_2 + 6y_4 - 12) = 0 \\ x_3(y_3 + 2y_4 - 3) = 0 \\ y_1(x_1 - 1000) = 0 \\ y_2(x_2 - 500) = 0 \\ y_3(x_3 - 1500) = 0 \\ y_4(3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 6750) = 0 \end{cases}$$

Solution candidate : x1= 250, x2=500, x3=1500. Avec cette solution, (I) devient :

$$\begin{cases} y_1 + 3y_4 = 4 \\ y_2 + 6y_4 = 12 \\ y_3 + 2y_4 = 3 \\ y_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 1/3 \\ y_4 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

On doit vérifier si cette solution en y est ou non admissible pour le dual.

Rappel :

$$(D)\begin{cases} \min w = 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{|llll} y_1 & & & +3y_4 \geq 4 \\ & y_2 & & +6y_4 \geq 12 \\ & & y_3 & +2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

V $\quad 0 + 3 \times \frac{4}{3} \geq 4$

V $\quad 4 + 8 \geq 12$

V $\quad \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \geq 3$

$\longrightarrow$ V

la solution trouvée en y est bien admissible pour (D), d'après le th. des écarts complémentaires, la solution en x est optimale pour (P) et celle en y optimale pour (D)

Rq : les valeurs optimales de (P) et (D) sont bien égales (= 11500)

3. Après vérification, il s'avère que les données initiales du PL sont légèrement erronées. Les nouveaux seconds membres des quatre contraintes sont respectivement 950, 550, 1575 et 6900. Écrire le dual de ce nouveau PL, et montrer que la solution duale trouvée précédemment est admissible pour ce nouveau dual. Cette solution est-elle optimale pour le nouveau dual (on utilisera le primal pour répondre à cette question) ? Déterminer une solution optimale pour le nouveau primal.

$$(P')\begin{cases} \max z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{|l} x_1 \leq \cancel{1000}\ 950 \\ x_2 \leq \cancel{500}\ 550 \\ x_3 \leq \cancel{1500}\ 1575 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq \cancel{6750}\ 6900 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

$$(D')\begin{cases} \min w = \overset{950}{\cancel{1000}}y_1 + \overset{550}{\cancel{500}}y_2 + \overset{1575}{\cancel{1500}}y_3 + \overset{6900}{\cancel{6750}}y_4 \\ \text{s.c.} \quad \begin{array}{|llll} y_1 & & & +3y_4 \geq 4 \\ & y_2 & & +6y_4 \geq 12 \\ & & y_3 & +2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 1/3 \\ y_4 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Seuls la fonction objectif du dual a changé => la solution en y qui était optimale pour (D) est admissible pour (D') (les contraintes de D et D' sont les mêmes)
Pour tester l'optimalité pour (D'), on ré-écrit les conditions d'écarts compl., on injecte y et on résout en x et on vérifie l'admissibilité de la solution trouvée en x pour (P) (s'il en existe une).

$$(I')\begin{cases} x_1(y_1 + 3y_4 - 4) = 0 \\ x_2(y_2 + 6y_4 - 12) = 0 \\ x_3(y_3 + 2y_4 - 3) = 0 \\ y_1(x_1 - 950) = 0 \\ y_2(x_2 - 550) = 0 \\ y_3(x_3 - 1575) = 0 \\ y_4(3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 6900) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 1/3 \\ y_4 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\left| \; y_4 \,(3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 6900) = 0 \right.$$

Les 3 contraintes du dual sont saturées par la solution en y :

$$(I') \begin{cases} 0 = 0 \quad (4 \text{ fois}) \\ \cancel{x_1 = 1350} \\ x_2 = 550 \\ x_3 = 1575 \\ 3x_1 + 6\times 550 + 2\times 1575 = 6900 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 6900-6\times 550-2\times 1575=100 \\ x_2 = 550 \\ x_3 = 1575 \end{cases}$$

Les 3 contraintes de (P') et la non-négativité sont vérifiées par la sol. en x = > on a la nouvelle solution optimale (pour P') en x et la solution en y est également optimale pour (D')

4. Finalement, les données initiales du PL étaient justes, mis à part le second membre de la quatrième contrainte. Les nouveaux seconds membres sont respectivement 1000, 500, 1500 et 9750. Montrer que la solution duale déterminée à la question 1 est admissible pour le dual de ce nouveau PL. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution du primale associée à cette solution duale. Cette solution primale est-elle admissible ? Que pouvez-vous en conclure ?

Les contraintes du nouveau dual sont inchangées => la solution en y est admissible pour le nouveau dual :

$$(D'') \begin{cases} \min w = 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + \overset{9750}{\cancel{6750}}y_4 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{llll} y_1 & & & +3y_4 \geq 4 \\ & y_2 & & +6y_4 \geq 12 \\ & & y_3 & +2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Nouvelles conditions d'écart compl. :

$$(I) \begin{cases} x_1\,(y_1 + 3y_4 - 4) = 0 \\ x_2\,(y_2 + 6y_4 - 12) = 0 \\ x_3\,(y_3 + 2y_4 - 3) = 0 \\ y_1\,(x_1 - 1000) = 0 \\ y_2\,(x_2 - 500) = 0 \\ y_3\,(x_3 - 1500) = 0 \\ y_4\,(3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - \underset{9750}{\cancel{8750}}) = 0 \end{cases} \xrightarrow[y=(0,4,1/3,4/3)]{\text{on injecte}} \begin{cases} x_2 = 500 \\ x_3 = 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9750 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 500 \\ x_3 = 1500 \\ x_1 = 1100 \end{cases}$$

Or le problème primal actuel est :

$$(P'') \begin{cases} \max z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1000 \longrightarrow \text{non vérifiée} \\ x_2 \leq 500 \\ x_3 \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq \cancel{6750}\ 9750 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

En conclusion la solution trouvée en x n'étant pas admissible pour (P''), aucune des solutions n'est optimale (x n'est pas optimale pour P'' et y pas optimale pour D'').

Exercice 6

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq & 7 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & \leq & 12 \\ -x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 10 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array} \right. \end{cases}$$

Au bout de deux itérations de l'algorithme du simplexe, on aboutit aux équations suivantes (e_1, e_2, e_3 sont les variables d'écart associées aux contraintes du problème) :

$$\begin{cases} \max Z = 11 - 7/5\, x_1 - 12/5\, x_4 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} 3/10\, x_1 + x_2 + 4/5\, x_4 + 2/5\, e_1 + 1/10\, e_2 = 4 \\ -1/10\, x_1 + x_3 + 2/5\, x_4 + 1/5\, e_1 + 3/10\, e_2 = 5 \\ 1/2\, x_1 + 10\, x_4 + e_1 - 1/2\, e_2 + e_3 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

2. Donner la solution optimale de ce problème. Cette solution est-elle unique ?

variables de base : x2, x3, e3
var. hb : x1, x4, e1, e2

Sol. de base : $x_1 = x_4 = e_1 = e_2 = 0$

$x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $e_3 = 11$

valeur $z = 11$

La solution optimale est unique car tous les couts réduits sont <0

3. Quel prix maximal seriez-vous prêt à payer pour pouvoir augmenter le second membre de la deuxième contrainte de λ unités ($\lambda \geq 0$) ? Quelle est la valeur maximum de λ permettant de garder la même base à l'optimum ? On note λ^* cette valeur. Exprimer en fonction de λ la solution optimale ainsi que sa valeur Z quand $\lambda \in [0, \lambda^*]$. Que devient la solution optimale si le second membre de la deuxième contrainte devient égal à 14 ?

$$\begin{cases} \max Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq & 7 \\ -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & \leq & 12 + \lambda \\ -x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 10 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array} \right. \end{cases}$$

Posons $E_2 = e_2 - \lambda$

$$\begin{cases} \max Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + e_1 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + (e_2 - \lambda) = 12 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 + e_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

après résolution :

$$\begin{cases} \max Z = 11 - 7/5\, x_1 - 12/5\, x_4 - 1/5\, e_1 - 4/5\, E_2 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} 3/10\, x_1 + x_2 + 4/5\, x_4 + 2/5\, e_1 + 1/10\, E_2 = 4 \\ -1/10\, x_1 + x_3 + 2/5\, x_4 + 1/5\, e_1 + 3/10\, E_2 = 5 \\ 1/2\, x_1 + 10\, x_4 + e_1 - 1/2\, E_2 + e_3 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$E_2 = e_2 - \lambda$

$$Z = \left(11 + \frac{4}{5}\lambda\right) - \frac{7}{5}x_1 - \frac{12}{5}x_4 - \frac{1}{5}e_1 - \frac{4}{5}e_2$$

Si on augmente le second membre de λ unités, Z augmente de $\frac{4}{5}\lambda$.

$\frac{4}{5}$: coût marginal associé à la seconde contrainte.

En conclusion, pour augmenter le second membre de λ unités on est prêt à payer $\frac{4}{5}\lambda$

$\frac{4}{5}$: coût marginal associé à ce second ...

En conclusion, pour augmenter le second membre de λ unités, on est prêt à payer $\frac{4}{5}\lambda$.

Valeur max de λ sans changer de base optimale :

Les variables de base x2, x3,et e3 doivent rester positives ou nulles lorsqu'on met les variables hors-base (x1, x4, e1 et e2) à 0 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
3/10\,x_1 & + & x_2 & & & + & 4/5\,x_4 & + & 2/5\,e_1 & + & 1/10\,E_2 & & = 4 \\
-1/10\,x_1 & & & + & x_3 & + & 2/5\,x_4 & + & 1/5\,e_1 & + & 3/10\,E_2 & & = 5 \\
1/2\,x_1 & & & & & + & 10\,x_4 & + & e_1 & - & 1/2\,E_2 & + e_3 & = 11
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_2 = 4 - \frac{3}{10}x_1 - \frac{4}{5}x_4 - \frac{2}{5}e_1 - \frac{1}{10}(e_2-\lambda) \geqslant 0 \\
x_3 = 5 + \frac{1}{10}x_1 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}e_1 - \frac{3}{10}(e_2-\lambda) \geqslant 0 \\
e_3 = 11 - 10x_4 - e_1 + \frac{1}{2}(e_2-\lambda) \geqslant 0 \\
\quad -\frac{1}{2}x_1
\end{cases}
$$

La solution de base est obtenue en mettant les var. hb à 0 :

$$
\begin{cases}
x_2 = 4 + \frac{1}{10}\lambda \geqslant 0 \\
x_3 = 5 + \frac{3}{10}\lambda \geqslant 0 \\
e_3 = 11 - \frac{1}{2}\lambda \geqslant 0
\end{cases}
\Longrightarrow \boxed{\lambda \leqslant 22} \qquad \boxed{\lambda^* = 22}
$$

Nouvelle solution optimale (pour $\lambda \in [0;22]$) :

$\underset{(hb)}{x_1 = 0}$, $x_2 = 4 + \frac{1}{10}\lambda$, $x_3 = 5 + \frac{3}{10}\lambda$, $\underset{(hb)}{x_4 = 0}$, $\underset{(hb)}{e_1 = 0}$, $\underset{(hb)}{e_2 = 0}$, $e_3 = 11 - \frac{1}{2}\lambda$

Nouvelle valeur optimale $Z_\lambda = 11 + \frac{4}{5}\lambda$

Pour $\lambda = 2$ le second-membre vaut 14. $X = (0; 4{,}2; 5{,}6; 0, 0, 10)$ $Z = 12{,}6$

4. Que devient la solution de la question 2 si le coefficient de x_1 dans la fonction économique de départ devient égal à -1 ?

On doit re-calculer les coûts-réduits suite à ce changement. S'ils restent ≤ 0, la base reste optimale.

Nouvelle expression de Z : $Z = \overset{\text{changement}}{-x_1} - \underset{\text{en base}}{x_2 + 3x_3} - 2x_4$

Base précédemment optimale : $\{x_2, x_3, e_3\}$

Il suffit d'éliminer de l'expression de Z les variables en base (x2 et x3 ici) en les remplaçant par leur expression dans le tableau optimal (ou l'écriture optimale).

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{max } \cancel{Z = 11 - 7/5\,x_1 - 12/5\,x_4 - 1/5\,e_1 - 4/5\,e_2} & \\
\text{s.c.} & \left|
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
3/10\,x_1 & + & x_2 & & & + & 4/5\,x_4 & + & 2/5\,e_1 & + & 1/10\,e_2 & & = 4 \\
-1/10\,x_1 & & & + & x_3 & + & 2/5\,x_4 & + & 1/5\,e_1 & + & 3/10\,e_2 & & = 5 \\
1/2\,x_1 & & & & & + & 10\,x_4 & + & e_1 & - & 1/2\,e_2 & + e_3 & = 11 \\
\multicolumn{13}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

$$
Z = -x_1 + \underbrace{\left(\frac{3}{10}x_1 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{2}{5}e_1 + \frac{1}{10}e_2 - 4\right)}_{-x_2} + 3\overbrace{\left(5 + \frac{1}{10}x_1 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}e_1 - \frac{3}{10}e_2\right)}^{x_3} \underset{-2x_4}{}
$$

$$= \underbrace{\left(-1+\frac{3}{5}\right)}_{\leqslant 0} x_1 + \underbrace{\left(-\frac{2}{5}-2\right)}_{\leqslant 0} x_4 + \underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)}_{\leqslant 0} e_1 \underbrace{-\frac{4}{5}}_{\leqslant 0} e_2 + 11$$

En conclusion, la solution de la question 2 est inchangée, sa valeur est inchangée et cette solution reste optimale après le changement car tous les coûts réduits sont restés négatifs ou nuls.

5. Que devient la solution de la question 2 si on rajoute au PL de départ la contrainte :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 13$$

$$\begin{cases} \max Z = 11 \quad -7/5\, x_1 - 12/5\, x_4 - 1/5\, e_1 - 4/5\, e_2 \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{l} 3/10\, x_1 + x_2 + 4/5\, x_4 + 2/5\, e_1 + 1/10\, e_2 = 4 \\ -1/10\, x_1 + x_3 + 2/5\, x_4 + 1/5\, e_1 + 3/10\, e_2 = 5 \\ 1/2\, x_1 + 10\, x_4 + e_1 - 1/2\, e_2 + e_3 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

La solution optimale du problème sans la contrainte est $x_1^* = x_4^* = e_1^* = e_2^* = 0$

$x_2^* = 4 \quad x_3^* = 5 \quad e_3^* = 11$

Or $\quad x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 4 + 5 = 9 \leqslant 13$

La solution optimale de la question 2 vérifie la nouvelle contrainte. C'est donc également la solution optimale du problème avec la contrainte.