MCR – Compléments de Recherche Opérationnelle
Cours 2 - Analyse de sensibilité

E. Soutil

ENSIIE

2021-2022

Plan du cours 2 – Analyse de sensibilité

Plan du cours 2 – Analyse de sensibilité

Reprenons notre exemple de PL :

$$(P)\left\{\begin{array}{llll} \max Z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

soit, sous forme standard :

$$(P)\left\{\begin{array}{llll} \max Z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{rcrccccccl} x_1 & & & +u_1 & & & & = & 8 & (1) \\ & & x_2 & & +u_2 & & & = & 6 & (2) \\ x_1 & + & 2x_2 & & & +u_3 & & = & 15 & (3) \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & +u_4 & = & 18 & (4) \\ \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- Après 3 itérations de la méthode du simplexe, on obtient le problème écrit dans la base $B^{(3)} = \{x_1, u_2, u_1, x_2\}$:

$$
(P)\left\{\begin{array}{ll}
\max Z = & 40 - \frac{2}{3}u_3 - \frac{5}{3}u_4 \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{ll}
x_1 = 7 + \frac{1}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4 & (1) \\
u_2 = 2 + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4 & (2) \\
u_1 = 1 - \frac{1}{3}u_3 + \frac{2}{3}u_4 & (3) \\
x_2 = 4 - \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 & (4) \\
 & \\
x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 &
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

- L'optimum est donc la solution de base associée : $x^{(3)} = (x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4) = (7, 4, 1, 2, 0, 0)$

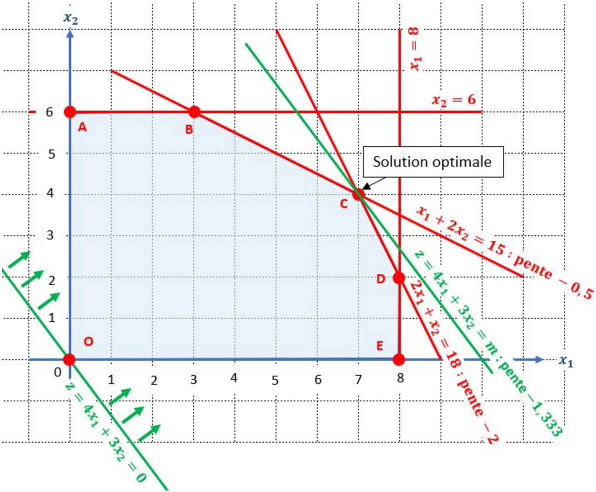
Plan du cours 2 – Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

- Les coefficients de la fonction objectif correspondent souvent à des prix ou à des coûts qu'il n'est pas toujours facile d'évaluer avec précision, ou suceptibles d'évoluer dans le temps.
- Il est donc essentiel de pouvoir apprécier la sensibilité d'une solution à des variations des coefficients.
- La résolution graphique du problème permet de supposer qu'il y a une zone de variation des coefficients de la fonction objectif qui laisse inchangée la solution optimale (mais pas sa valeur !)

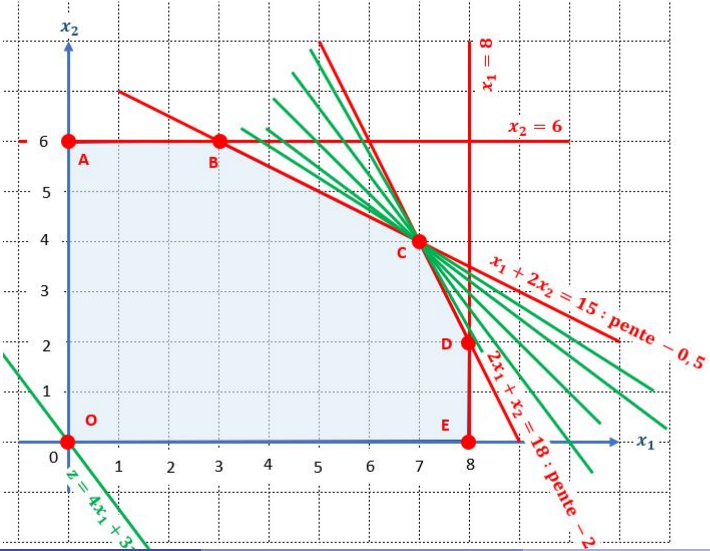
Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Résultat de la résolution graphique



Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Zone de variation des coefficients de la fonction objectif



Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Résultat de la résolution graphique

- Tant que la pente de la fonction objectif reste comprise entre la pente des deux contraintes définissant le sommet C, i.e. entre -2 et -0,5, l'optimum reste le sommet C.

Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Par la méthode du simplexe

- On remplace le coefficient de x_1 dans la fonction objectif par un paramètre réel α et on étudie les valeurs de α pour lesquelles la solution optimale trouvée avec la valeur initiale de α (4) reste optimale.
- La fonction objectif devient donc :

$$z_\alpha = \alpha x_1 + 3x_2$$

- La méthode consiste à re-calculer les coûts réduits relatif à la base précédemment optimales pour les exprimer en fonction de α puis de déterminer pour quelles valeurs de α ces coefficients restent ≤ 0.
- (Au tableau... + rapport de sensibilité du solveur)

Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Par la méthode du simplexe

$$z_\alpha = \alpha x_1 + 3x_2$$

- Pour re-calculer les coûts réduits dans la base $\{x_1, u_2, u_1, x_2\}$, on remplace dans Z_α chaque variable de base (ici x_1 et x_2 qui sont toutes les deux en base) par leur expression en fonction des variables hors base (u_3 et u_4). Or les équations (slide 3) donnent :
  - $x_1 = 7 + \frac{1}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4$
  - $x_2 = 4 - \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$
- On en déduit :

$$\begin{aligned} z_\alpha = & \ \alpha(7 + \tfrac{1}{3}u_3 - \tfrac{2}{3}u_4) + 3(4 - \tfrac{2}{3}u_3 + \tfrac{1}{3}u_4) \\ = & \ (12 + 7\alpha) + (\tfrac{\alpha}{3} - 2)u_3 + (1 - \tfrac{2}{3}\alpha)u_4 \end{aligned}$$

Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Par la méthode du simplexe

$$z_\alpha = (12 + 7\alpha) + (\frac{\alpha}{3} - 2)u_3 + (1 - \frac{2}{3}\alpha)u_4$$

- Z_α ne contient plus que des variables hors-base : les coefficients de u_3 et u_4 sont leurs coûts réduits. La solution de base courante ($x^{(3)}$, qui correspond au point C) reste donc optimale quand tous les coûts réduits restent ≤ 0, i.e. :
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} - 2 \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}\alpha \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \leq 6 \\ \alpha \geq \frac{3}{2} \end{cases} \iff \alpha \in \left[\frac{3}{2}, 6\right]$$

- **En conclusion**, le point C reste la solution optimale du problème pour toutes les valeurs de α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 6.
- _Exercice_ : effectuer la même étude sur le coefficient de x_2 (on remplace sa valeur initiale 3 par un paramètre β).

Analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction objectif

Par le rapport de sensibilité du solveur

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Rapport de sensibilité							
2	Feuille : [GraphiqueExempleDeBase.xlsx]solveur							
3	Date du rapport : 06/12/2018 14:14:19							
4								
5								
6	Cellules variables							
7				Finale	Valeur	Objectif	Marge	Marge
8		Cellule	Nom	Valeur	Marginale	Coefficient	Supérieure	Inférieure
9		B8	x_1	7	0	4	2	2,5
10		B9	x_2	4	0	3	5	1
11								

- Dans la zone entourée, on retrouve l'information sur la sensibilité du coefficient (4 dans le problème actuel) de la variable x_1 : la solution $x_1 = 7, x_2 = 4$ reste optimale tant que le coefficient reste entre 4-'Marge inférieure' $(= 4 - 2,5 = \frac{3}{2})$ et 4+'Marge supérieure' $(= 4 + 2 = 6)$

Plan du cours 2 – Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

- Les seconds membres des contraintes correspondent, le plus souvent, à des disponibilités de ressources.
- Il est généralement possible d'augmenter cette disponibilité moyennant un coût additionnel.
- Combien rapportera le fait de disposer d'unités de ressources supplémentaires ?
- La méthode du simplexe permet de répondre de façon simple à cette question, sans avoir à résoudre un nouveau PL.

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

- Supposons que le problème de départ devienne :

$$
(P)\left\{
\begin{array}{ll}
\max Z = & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} & \left|
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & & & \leq & 8 \\
 & & x_2 & \leq & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15+\lambda \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

- En passant à la forme standard on obtient :

$$
(P)\left\{\begin{array}{ll}
\max Z = & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & & +u_1 & & & & = & 8 \quad (1) \\
 & & x_2 & & +u_2 & & & = & 6 \quad (2) \\
x_1 & + & 2x_2 & & & +(\mathrm{u}_3-\lambda) & & = & 15 \quad (3) \\
2x_1 & + & x_2 & & & & +u_4 & = & 18 \quad (4) \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

- Posons $\mathrm{U}_3 = \mathrm{u}_3 - \lambda$.
- Les équations du nouveau problème sont alors strictement identiques à celles du précédent et les équations obtenues dans la dernière base (optimale) restent valables en remplaçant u_3 par U_3.

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

- L'expression de Z (dans la base optimale pour $\lambda = 0$) devient :

$$Z = 40 - \frac{2}{3}\mathrm{U}_3 - \frac{5}{3}u_4$$

et donc :

$$Z = 40 - \frac{2}{3}(\mathrm{u}_3 - \lambda) - \frac{5}{3}u_4 = 40 + \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}u_3 - \frac{5}{3}u_4$$

- Augmenter (ou diminuer) la disponibilité de la troisième ressource de λ unités va donc permettre d'augmenter (ou diminuer) la valeur de la fonction objectif de $\frac{2}{3}\lambda$: $\frac{2}{3}$ est ici l'opposé du coût-réduit (coefficient) de la variable d'écart associée à la contrainte modifiée (u_3).
- Donc l'augmentation d'une unité de la ressource 3 aurait permis d'augmenter la valeur de Z de $\frac{2}{3}$.
- Cette valeur est appelée **prix dual** ou encore **prix/coût/valeur marginal(e)** (**"shadow price"**).

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

Domaine de validité de la valeur marginale

- Attention toutefois, les valeurs marignales ont un **domaine de validité limité**.
- En effet, l'expression de Z correspond à la base $B^{(3)} = \{x_1, u_2, u_1, x_2\}$.
- Les valeurs marginales resteront inchangées (donc valides) tant que la variation de λ sera telle que la solution de base associée à $B^{(3)} = \{x_1, u_2, u_1, x_2\}$ restera réalisable.
- C'est-à-dire que les modifications du second-membre doivent rester compatibles avec les contraintes de non-négativité.
- On doit donc avoir :
  - $x_1 = 7 + \frac{1}{3}U_3 - \frac{2}{3}u_4 \geq 0$
  - $u_2 = 2 + \frac{2}{3}U_3 - \frac{1}{3}u_4 \geq 0$
  - $u_1 = 1 - \frac{1}{3}U_3 + \frac{2}{3}u_4 \geq 0$
  - $x_2 = 4 - \frac{2}{3}U_3 + \frac{1}{3}u_4 \geq 0$

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

Domaine de validité de la valeur marginale

- On remplace U_3 par $u_3 - \lambda$ et on en déduit le domaine de variation de λ pour lequel la solution de base (telle que $u_3 = u_4 = 0$) reste réalisable. On obtient donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& 7 + \frac{1}{3}(u_3 - \lambda) - \frac{2}{3}u_4 \quad \geq 0 \\ u_2 &=& 2 + \frac{2}{3}(u_3 - \lambda) - \frac{1}{3}u_4 \quad \geq 0 \\ u_1 &=& 1 - \frac{1}{3}(u_3 - \lambda) + \frac{2}{3}u_4 \quad \geq 0 \\ x_2 &=& 4 - \frac{2}{3}(u_3 - \lambda) + \frac{1}{3}u_4 \quad \geq 0 \end{array}\right.$$

- C'est-à-dire, quand $u_3 = u_4 = 0$ (hors-base) :

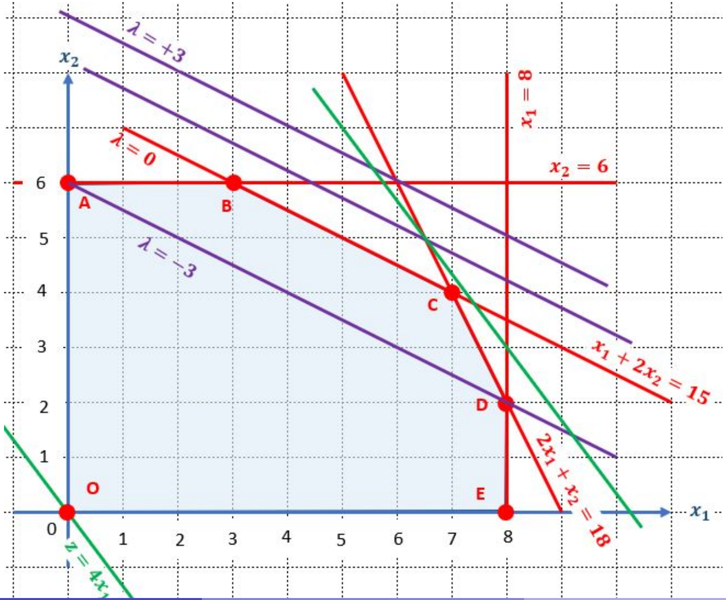
$$\left\{\begin{array}{ll} 7 - \frac{1}{3}\lambda & \geq 0 \\ 2 - \frac{2}{3}\lambda & \geq 0 \\ 1 + \frac{1}{3}\lambda & \geq 0 \\ 4 + \frac{2}{3}\lambda & \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda \leq 21 \\ \lambda \leq 3 \\ \lambda \geq -3 \\ \lambda \geq -6 \end{array}\right. \iff \lambda \in [-3; 3]$$

- **En conclusion**, tant que $\lambda \in [-3; 3]$, le prix marginal de la ressource 3 (contrainte (3)) est de $\frac{2}{3}$.

- *Exercice* : trouver les prix marginaux des autres ressources (contraintes (1), (2) et (4) et leurs domaines de validité.

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

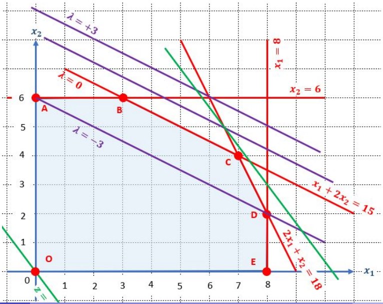
Domaine de validité de la valeur marginale – Interprétation graphique



Analyse de sensibilité sur les seconds membres

Domaine de validité de la valeur marginale – Interprétation graphique

- Tant que λ reste compris entre -3 et 3, la contrainte (3), de second membre initial 15 (devenu $15 + \lambda$) est l'une des droites violettes.
- On peut interpréter le fait que la base optimale reste inchangée par le fait que les variables hors-base restent les mêmes (u_3 et u_4, donc $u_3 = u_4 = 0$, c'est-à-dire que la solution optimale reste l'intersection des frontières des contraintes (3) (car $u_3 = 0$) et (4) (car $u_4 = 0$).
- Et on est en mesure de recalculer immédiatement les coordonnées de la solution optimale et sa valeur en fonction du λ choisi.



Analyse de sensibilité sur les seconds membres

Rapport de sensibilité du solveur

Microsoft Excel 16.0 Rapport de sensibilité
Feuille : [GraphiqueExempleDeBase.xlsx]solveur
Date du rapport : 06/12/2018 14:14:19

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Valeur Marginale	Objectif Coefficient	Marge Supérieure	Marge Inférieure
B8	x_1	7	0	4	2	2,5
B9	x_2	4	0	3	5	1

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Valeur Marginale	Contrainte à droite	Marge Supérieure	Marge Inférieure
E8	LHS	7	0	8	1E+30	1
E9	LHS	4	0	6	1E+30	2
E10	LHS	15	0,666666667	15	3	3
E11	LHS	18	1,666666667	18	1,5	6

Analyse de sensibilité sur les seconds membres

Rapport de sensibilité du solveur

- Dans la partie "Contraintes" du rapport de sensibilité, on retrouve que pour la contrainte (3) :
  - Le prix marginal de la ressource 3 est de $\frac{2}{3} \simeq 0,6666$ (entouré en vert). Rappel : c'est l'opposé du coût réduit de la variable u_3 (variable d'écart associée à la troisième contrainte)
  - Ce prix marginal n'est valide que lorsque le second membre 15 varie entre :
    - ★ 15-'Marge inférieure'$= 15 - 3$ (entouré en rouge)
    - ★ et 15+'Marge Supérieure'$= 15 + 3$ (entouré en rouge)
  - ... ce qui correspond bien à une variation du second membre de $15 + \lambda$ avec λ dans l'intervalle $[-3; 3]$.

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Valeur Marginale	Contrainte à droite	Marge Supérieure	Marge Inférieure
\$E\$8	LHS	7	0	8	1E+30	1
\$E\$9	LHS	4	0	6	1E+30	2
\$E\$10	LHS	15	0,666666667	15	3	3
\$E\$11	LHS	18	1,666666667	18	1,5	6