

Exercice 3 – Sudoku

On désire résoudre, en utilisant la PLNE la grille de Sudoku suivant. Proposez une modélisation de ce problème et résolvez la grille en complétant le programme Julia fourni (sudoku.jl).

5				6		9		
		3					7	
	7						1	4
		8		5				
			2					
2						6		
			3			5		
	1		7					

1ère modélisation "naturelle"

$$x_{ij} = \text{valeur de case } (i, j) \quad x_{ij} \in [1, 9]$$

$$\sum_{j=1}^9 x_{ij} = 45 \quad \forall i \in [1, 9]$$

(nécessaire mais pas suffisant)

CNS :

$$x_{ij} \neq x_{ij'} \quad \forall i, \forall j, \forall j' - j \neq j'$$

Pb : comment modéliser de façon linéaire :

$$\begin{cases} a \neq b \\ a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases} ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b-1 \quad [xx] \text{ ou } b \leq a-1 \quad [x(1-x)] \\ a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Nouveau pb : comment exprimer une disjonction de contraintes! (le "ou")

On introduit une variable binaire x qui représente chacun des 2 cas possibles.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax \leq bx - x \\ b(1-x) \leq (a-1)(1-x) \\ a, b \in \mathbb{N}, x \in \{0, 1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nouveau problème : on a affaire à des contraintes quadratiques (produits de variables) => cf exercice linéarisation (fiche 2).

2ème modélisation utilisant des variables binaires

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la case } (i,j) \text{ contient la valeur } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Contraintes de lignes :

$$\sum_{j=1}^9 x_{ijk} = 1$$

$$\forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$$

Contraintes de colonnes :

$$\sum_{i=1}^9 x_{ijk} = 1$$

$$\forall j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$$

Contraintes de blocs :

$$\forall d_i, d_j \in \{1, 4, 7\}, \forall k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$$

$$\sum_{i=d_i}^{d_i+2} \sum_{j=d_j}^{d_j+2} x_{ijk} = 1$$

	①	2	3	④	5	6	⑦	8	9
①	5				6		9		
2			3					7	
3									
④		7						1	4
5			8		5				
6				2					
⑦	2						6		
8				3			5		
9		1		7					

+ unicité + pré-remplies