第五章、时间反演对称性

$ 5.1 时间反演变化和时间反演态

从量子力学的角度看，时间并不存在方向 (direction)，即动力学规律应该是对 t 和 $-t$ 对称的。(尽管有实验表明，在弱相互作用过程中，时间反演不变性不完全成立。但这一效应很弱。因此，在讨论多数的物理问题时，可以略去不计)。

让我们看在经典牛顿力学中，时间反演不变性意味着什么。牛顿方程为

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}(t,\,\mathbf{r}),\quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}. \tag{1}$$

若在上面的方程中，令 $t\to -t'$，则牛顿方程变为

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{d(-t')^2}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}=\mathbf{F}(-t',\,\mathbf{r}). \tag{2}$$

而速度变为

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{d(-t')}=-\frac{d\mathbf{r}}{dt'}=-\mathbf{v}'. \tag{3}$$

因此，若我们有

(1) $\mathbf{F}(-t',\,\mathbf{r})=\mathbf{F}(t',\,\mathbf{r})$，则运动方程是不变的。因此，动力学在时间反演下不变。粒子在引力场或静电场中的运动是最明显的例子。

(2) 若 $\mathbf{F}(-t',\,\mathbf{r})$ 形式改变，则体系的动力学就不再是时间反演不变的了。例如，一个带电粒子在外磁场 $\mathbf{B}$ 中的运动由下面的公式决定

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{4}$$

当我们改变时间 $t\to -t'$ 时，上面的方程改变为

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2}=\frac{1}{c}(-\mathbf{v}')\times\mathbf{B}=-\frac{1}{c}\mathbf{v}'\times\mathbf{B}. \tag{5}$$

因此，一个经典带电粒子在外磁场中的运动，不是一个时间反演不变的运动。

在经典力学中，几个主要的物理量在时间反演下按如下规律变换

$$\mathbf{r}\to\mathbf{r},\quad \mathbf{p}\to -\mathbf{p},\quad \mathbf{L}\to -\mathbf{L}. \tag{6}$$

根据经典力学与量子力学的对应关系，我们要求这些关系对于相应算符在相应的量子力学体系容许态的平均值也成立。即

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{r}}|\psi\rangle = \langle\widetilde{\psi}|\hat{\mathbf{r}}|\widetilde{\psi}\rangle, \ \ \langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle = -\langle\widetilde{\psi}|\hat{\mathbf{p}}|\widetilde{\psi}\rangle, \ \ \langle\psi|\hat{\mathbf{L}}|\psi\rangle = -\langle\widetilde{\psi}|\hat{\mathbf{L}}|\widetilde{\psi}\rangle. \tag{7}$$

这里， ψ 和 $\widetilde{\psi}$ 分别为量子体系时间反演变换前后的容许态。因此，若我们能够决定波函数在时间反演下的变换规律，就可以反推出相应的算符在此变换下是如何改变的。

首先，让我们讨论一个无自旋粒子在实的势场 $V(\mathbf{r})$ 中的运动。此时，系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}). \tag{8}$$

它是一个不显含时间的哈密顿量。其 Schrödinger 方程可以被写作

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},\, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r},\, t). \tag{9}$$

做变化 $t = -t'$ 后，上面的方程改变为

$$i\hbar\frac{\partial}{(-\partial t')}\psi(\mathbf{r},\, -t') = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r},\, -t'). \tag{10}$$

为了使得方程的左边恢复原来的符号，我们取此方程的复共轭。由此，我们得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi^*(\mathbf{r},\, -t') = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi^*(\mathbf{r},\, -t'). \tag{11}$$

因此，我们看到， $\psi^*(\mathbf{r},\, -t')$ 与 $\psi(\mathbf{r},\, t)$ 满足相同的 Schrödinger 方程。因此，它们都是体系的容许态。 $\psi^*(\mathbf{r},\, -t)$ 称为 $\psi(\mathbf{r},\, t)$ 的时间反演态。

决定了体系的容许态在时间反演下的变换规律之后，我们现在可以看到，算符 $\hat{\mathbf{r}}$ 变成了 $\hat{\mathbf{r}}$ ， $\hat{\mathbf{p}}$ 变成了 $-\hat{\mathbf{p}}$ ，而 $\hat{\mathbf{L}}$ 变成了 $-\hat{\mathbf{L}}$ 。这些基本变换规则是我们今后决定其它算符，例如自旋算符，在时间反演变换下的变换规律的出发点。

在上面的例子中，我们用到了 $V(\mathbf{r})$ 是一个实的势场这一性质。对于一般的势场，我们可得到如下的方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi^*(\mathbf{r},\, -t') = \hat{H}^*\psi^*(\mathbf{r},\, -t'). \tag{12}$$

此时, 若我们能够找到一个酉正算符 $\hat{U}$, 使得 $\hat{H}^* = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$ (或是 $\hat{H} = \hat{U}\hat{H}^*\hat{U}^\dagger$) , 则上式可被重写为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi^*(\mathbf{r},\, -t') = \hat{U}^\dagger \hat{H}\hat{U}\psi^*(\mathbf{r},\, -t'), \tag{13}$$

或是

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\left(\hat{U}\psi^*(\mathbf{r},\, -t')\right) = \hat{H}\left(\hat{U}\psi^*(\mathbf{r},\, -t')\right). \tag{14}$$

因此，如下定义的时间反演态

$$\psi'(\mathbf{r},\, t') = \hat{U}\psi^*(\mathbf{r},\, -t') \equiv \hat{U}\hat{K}\psi(\mathbf{r},\, -t') \tag{15}$$

是一个该量子体系的容许态。此时，我们称该量子力学体系具有时间反演不变性。在这里， $\hat{K}$ 代表复共轭算符，即 $\hat{K}\psi(\mathbf{r},\, t) = \psi^*(\mathbf{r},\, t)$ 。显然，这样定义的算符 $\hat{K}$ 为反线性算符，即

$$\hat{K}(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha^*\hat{K}\psi_1 + \beta^*\hat{K}\psi_2. \tag{16}$$

例 5.1: 考虑中心力场下，单电子运动的 Schrödinger 方程。

$$\begin{aligned} & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix} \\ = & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix} + \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{L}}\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{17}$$

这里,

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}, \quad \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla. \tag{18}$$

因此，我们又可以把上式改写为

$$\begin{aligned} & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix} \\ = & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix} - \frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr} \\ \times & \left[\hat{\sigma}_x(\mathbf{r}\times\nabla)_x + \hat{\sigma}_y(\mathbf{r}\times\nabla)_y + \hat{\sigma}_z(\mathbf{r}\times\nabla)_z\right]\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r},\, t)\\ \psi_2(\mathbf{r},\, t)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

现在，我们令 $t=-t'$，并取复共轭。则上式变为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}$$
$$+\quad\frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\left[\hat\sigma_x(\mathbf{r}\times\nabla)_x-\hat\sigma_y(\mathbf{r}\times\nabla)_y+\hat\sigma_z(\mathbf{r}\times\nabla)_z\right]\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}.\quad(20)$$

若取

$$\hat U=-i\hat\sigma_y,\quad \hat U^\dagger\hat U=(i)(-i)\hat\sigma_y^2=\hat I,\tag{21}$$

则我们有

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\left[-i\hat\sigma_y\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}\right]$$
$$=\quad\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\left[-i\hat\sigma_y\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}\right]+\frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}$$
$$\times\quad\left[-i\hat\sigma_y\hat\sigma_x\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_x+i\hat\sigma_y^2\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_y-i\hat\sigma_y\hat\sigma_z\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_z\right]\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}.\tag{22}$$

利用 Pauli 矩阵所满足的对易关系

$$\hat\sigma_y\hat\sigma_x=-\hat\sigma_x\hat\sigma_y,\quad \hat\sigma_y\hat\sigma_z=-\hat\sigma_z\hat\sigma_y,\tag{23}$$

我们可进一步将上式写为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\left[(-i\hat\sigma_y)\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}\right]$$
$$=\quad\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\left[(-i\hat\sigma_y)\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}\right]-\frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}$$
$$\times\quad\left[\hat\sigma_x\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_x+\hat\sigma_y\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_y+\hat\sigma_z\left(\mathbf{r}\times\nabla\right)_z\right](-i\hat\sigma_y)\begin{pmatrix}\psi_1^*(\mathbf{r},\,-t')\\ \psi_2^*(\mathbf{r},\,-t')\end{pmatrix}.\tag{24}$$

因此，我们看到，波函数

$$\hat{U}\begin{pmatrix} \psi_1^*(\mathbf{r},\ -t') \\ \psi_2^*(\mathbf{r},\ -t') \end{pmatrix} = (-i\hat{\sigma}_y)\begin{pmatrix} \psi_1^*(\mathbf{r},\ -t') \\ \psi_2^*(\mathbf{r},\ -t') \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r},\ t) \\ \psi_2(\mathbf{r},\ t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

满足相同的 Schrödinger 方程。因此，它们都是量子体系的容许态，而该体系具有时间反演不变性。

一般而言，时间反演算符具有如下形式

$$\hat{T} = \hat{U}\hat{K}. \tag{26}$$

这里，$\hat{U}$ 为一酉正算符。$\hat{K}$ 则是复共扼算符。即它作用在一个态上时，使之取其复共扼。不难证明

$$\hat{T}^2 = c\hat{I} \tag{27}$$

并且 $c = \pm 1$ 。

实际上，对于任何态 ψ ，我们都有

$$\hat{T}^2\psi = \hat{U}\hat{K}(\hat{U}\hat{K}\psi) = \hat{U}\hat{K}(\hat{U}\psi^*) = \hat{U}(\hat{U}^*\psi) = \hat{U}\hat{U}^*\psi. \tag{28}$$

因此，我们有

$$\hat{T}^2 = \hat{U}\hat{U}^*. \tag{29}$$

另一方面，由于 $\hat{T}^2\psi$ 与 ψ 表示同一个量子状态，我们应该有 $\hat{T}^2\psi = e^{i\alpha}\psi$ 。即

$$\hat{U}\hat{U}^* = e^{i\alpha}\hat{I}. \tag{30}$$

现将上式左乘 $\hat{U}^\dagger$ 后给出

$$\hat{U}^* = e^{i\alpha}\hat{U}^\dagger. \tag{31}$$

再取转置后得到

$$(\hat{U}^*)^T = \hat{U}^\dagger = e^{i\alpha}\left(\hat{U}^\dagger\right)^T = e^{i\alpha}\hat{U}^*. \tag{32}$$

代入上式后，我们有

$$\hat{U}^* = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}\hat{U}^*\right) = e^{2i\alpha}\hat{U}^*. \tag{33}$$

即 $e^{2\alpha i}=1$ ，或是 $2\alpha=2\pi n$ 。由此我们推出， $c=e^{i\alpha}=1$ ，或是 -1 。

下面，我们分别讨论两种情况。

(1) 对于无自旋的粒子，由于 $\hat{T}=\hat{K}$ ，因此 $\hat{T}^2=\hat{I}$ 。由此，我们得出 $c=1$ 。

(2) 对于自旋为 1/2 的粒子， $\hat{T}=-i\sigma_y\hat{K}$ 。因此，我们有

$$\hat{T}^2=(-i\sigma_y)\,\hat{K}\left(-i\sigma_y\hat{K}\right)=(-i\sigma_y)\left(i\sigma_y^*\right)=\sigma_y\sigma_y^*=-\sigma_y^2=-\hat{I}. \tag{34}$$

因此， $c=-1$ 。

对于一个一般的角动量为 J 的粒子，在仔细地规定了相因子之后，我们有

$$\hat{T}\psi_{JM}=(-1)^{J-M}\psi_{J,-M}. \tag{35}$$

关于这一关系式的证明，可以阅读教科书 392 页至 393 页上的内容 (或完成本章的练习) 。因此，若 J 为整数，则 $c=1$；若 J 为半整数，则 $c=-1$ 。

更一般地讲，对于 Bose 子组成的多体体系， $c=+1$ 总是成立的。而对于一个费米子组成的多体体系，我们有 $c=(-1)^N$ 。这里， N 为体系中的费米子数。

$ 5.2 Kramer **简并**

现在让我们来看看时间反演不变性会带来一些什么样的物理结果。首先，让我们考察 $\hat{T}\varphi$ 和 $\hat{T}\psi$ 的内积。按照定义，我们有

$$\begin{aligned}\left(\hat{T}\varphi,\,\hat{T}\psi\right)&=\left(\hat{U}\hat{K}\varphi,\,\hat{U}\hat{K}\psi\right)=\left(\hat{U}\varphi^*,\,\hat{U}\psi^*\right)=\left(\varphi^*,\,\hat{U}^\dagger\hat{U}\psi^*\right)\\&=\;(\varphi^*,\,\psi^*)=\overline{(\varphi,\,\psi)}=(\psi,\,\varphi)\,.\end{aligned} \tag{36}$$

令 $\psi=\hat{T}\varphi$ ，我们有

$$\left(\hat{T}\varphi,\,\hat{T}^2\varphi\right)=\left(\hat{T}\varphi,\,\varphi\right). \tag{37}$$

当我们讨论玻色子体系或具有偶数个费米子多体体系时，有 $\hat{T}^2=c\hat{I}=\hat{I}$ 。因此上式变为

$$\left(\hat{T}\varphi,\,\varphi\right)=\left(\hat{T}\varphi,\,\varphi\right). \tag{38}$$

它是一个恒等式。从中我们得不出任何结论。但是，当体系有奇数个费米子时， $\hat{T}^2 = c\hat{I} = -\hat{I}$ 。此时，我们得到

$$-\left(\hat{T}\varphi,\, \varphi\right) = \left(\hat{T}\varphi,\, \varphi\right). \tag{39}$$

因此， $\left(\hat{T}\varphi,\, \varphi\right) = 0$ 。这样， φ 与它的时间反演态 $\hat{T}\varphi$ 是相互正交的。

另一方面，对于时间反演不变的哈密顿量 $\hat{H}$ 而言，我们有

$$\left[\hat{H},\, \hat{T}\right] = 0. \tag{40}$$

其证明如下。任取一个态 Ψ 。我们都有

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\hat{H}\Psi\right) = \hat{U}\hat{K}\left(\hat{H}\Psi\right) = \hat{U}\left(\hat{H}^*\Psi^*\right) \\ = \;& \left(\hat{U}\hat{H}^*\hat{U}^\dagger\right)\left(\hat{U}\Psi^*\right) = \hat{H}\left(\hat{U}\hat{K}\Psi\right) \\ = \;& \hat{H}\hat{T}\Psi. \end{aligned} \tag{41}$$

因此，对易关系式 (40) 成立。

由此我们得出结论，若 φ 是 $\hat{H}$ 的一个本征态，则 $\hat{T}\varphi$ 也是 $\hat{H}$ 的一个本征态，并且具有相同的能量。又由于它们是正交的，因此要求这一能级至少是二重简并的。这一定理称为 Kramer 定理。

$ 5.3 **力学量的分类与矩阵元的计算**

体系的时间反演不变性亦可以用来简化对于各种矩阵元的计算。假设我们感兴趣的力学量算符在时间反演下按下面的规律变换

$$\hat{T}^{-1}\hat{F}\hat{T} = \eta\hat{F} \tag{42}$$

且 $\eta = +1$ ，则我们称 $\hat{F}$ 为第一类算符。如 $\mathbf{r}$, $\hat{p}^2/2m$, $V(\mathbf{r})$ 和 $\hat{L}^2$, $\hat{s}^2$ 等，都是第一类算符。而若 $\eta = -1$ ，则 $\hat{F}$ 称为第二类算符。如 $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{L}}$ 和 $\hat{\mathbf{s}}$ 等，都是第二类算符。

以动量算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 为例。如本章开始时所述，我们要求

$$\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle = -\langle\widetilde{\psi}|\hat{\mathbf{p}}|\widetilde{\psi}\rangle \tag{43}$$

对于任何态 ψ 及其时间反演态 $\tilde{\psi}$ 都成立。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle &= -\langle\hat{T}\psi|\hat{\mathbf{p}}|\hat{T}\psi\rangle = -\left(\hat{U}\hat{K}\psi, \hat{\mathbf{p}}\hat{U}\hat{K}\psi\right) = -\left(\hat{K}\psi, \hat{U}^\dagger\hat{\mathbf{p}}\hat{U}\hat{K}\psi\right) \\
&= -\left(\hat{K}\psi, \left(\hat{K}\hat{K}\right)\hat{U}^\dagger\hat{\mathbf{p}}\hat{U}\hat{K}\psi\right) = -\left(\hat{K}\psi, \hat{K}\left(\hat{K}\hat{U}^\dagger\hat{\mathbf{p}}\hat{U}\hat{K}\psi\right)\right) \\
&= -\overline{\left(\psi, \hat{T}^{-1}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}\psi\right)},
\end{aligned} \tag{44}
$$

或是

$$
\overline{\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle} = -\left\langle\psi\left|\hat{T}^{-1}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}\right|\psi\right\rangle. \tag{45}
$$

这里，我们用到了等式 $\hat{K}\hat{U}^\dagger = \hat{T}^{-1}$ 。另一方面，作为厄密算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 的平均值，$\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle$ 应该为一实向量。也就是说，等式

$$
\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle} = -\left\langle\psi\left|\hat{T}^{-1}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}\right|\psi\right\rangle \tag{46}
$$

成立。比较此式两边，我们得到

$$
\hat{T}^{-1}\hat{\mathbf{p}}\hat{T} = -\hat{\mathbf{p}}. \tag{47}
$$

因此，对于动量算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 而言， $\eta = -1$ 。

现在，任取一哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态 $|\nu\rangle$ 。令 $|\tilde{\nu}\rangle = \hat{T}|\nu\rangle$ 为其时间反演本征态 (相当于 Kramer 定理中与 $|\nu\rangle$ 简并的态) 。则我们有恒等式

$$
\langle\tilde{\mu}|\hat{F}|\tilde{\nu}\rangle = \eta\langle\mu|\hat{F}|\nu\rangle^*. \tag{48}
$$

特别是当 $|\mu\rangle = |\nu\rangle$ 时，我们有 $\langle\tilde{\nu}|\hat{F}|\tilde{\nu}\rangle = \eta\langle\nu|\hat{F}|\nu\rangle^*$.

证：按照定义，我们有

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{\mu}|\hat{F}|\tilde{\nu}\rangle &= \left(\hat{T}\psi_\mu,\ \hat{F}\hat{T}\psi_\nu\right) = \left(\hat{T}\psi_\mu,\ \hat{T}\hat{T}^{-1}\hat{F}\hat{T}\psi_\nu\right) \\
&= \eta\left(\hat{T}\psi_\mu,\ \hat{T}(\hat{F}\psi_\nu)\right) = \eta\left(\psi_\mu,\ \hat{F}\psi_\nu\right)^* = \eta\langle\mu|\hat{F}|\nu\rangle^*.
\end{aligned} \tag{49}
$$

另外一个有用的公式为

$$
\langle\mu|\hat{F}|\tilde{\nu}\rangle = c\eta\langle\tilde{\mu}|\hat{F}|\nu\rangle^*. \tag{50}
$$

证：

$$
\begin{aligned}
& \langle\mu|\hat{F}|\widetilde{\nu}\rangle = \left(\psi_\mu,\, \hat{F}\hat{T}\psi_\nu\right) = \left(\psi_\mu,\, \hat{T}\hat{T}^{-1}\hat{F}\hat{T}\psi_\nu\right) \\
= \; & \eta\langle\psi_\mu,\, \hat{T}\left(\hat{F}\psi_\nu\right)\rangle = \eta\langle\hat{T}\left(\hat{T}\hat{F}\psi_\nu\right),\, \hat{T}\psi_\mu\rangle \\
= \; & c\eta\left(\hat{F}\psi_\nu,\, \hat{T}\psi_\mu\right) = c\eta\langle\widetilde{\mu}|\hat{F}|\nu\rangle^*.
\end{aligned} \tag{51}
$$

练习：5.1 证明在 $J = \frac{1}{2}$ 时，关系式

$$
\hat{T}\,|JM\rangle = (-1)^{J-M}|J,-M\rangle \tag{52}
$$

成立。

5.2 证明在 J 为整数时，关系式

$$
\hat{T}\,|JM\rangle = (-1)^{J-M}|J,-M\rangle \tag{53}
$$

成立。